Задача про призначення. Угорський метод вирішення задачі про призначення

Волошенюк Юрій
Салтиков Андрій
КМ-93

Можливі варіанти задачі про призначення:

Ресурси	**Споживачі**	**Критерій ефективності**
робітники	Робота (робочі місця)	Час виконання (хв.)
автомобілі	маршрути	Обсяг перевезеної продукції
станки	Робота (участки)	Мін. час або макс. продуктивність

Завдання про призначення.

Розв'яжемо задачу як транспортну:

Приклад: Нехай є 4 співробітники фірми, яких необхідно закріпити за виконанням 4-х робіт. Відомі продуктивності кожного зі співробітників з кожної роботи:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

будуємо перше опорне рішення:

	$b_1=1$	$b_2=1$	$b_3=1$	$b_4=1$
$a_1=1$	2 1	10	9	7 1
$a_2=1$	15	4 1	14	8
$a_3=1$	13	14 0	16	11 1
$a_4=1$	4 0	15	13 1	19

1)Перевіряємо відкрите або закрите транспортне завдання за формулою:

$$\sum a_i = \sum b_i$$

4=4 => транспортна завдача закрита

2)Перевіряємо перше опорне рішення на оптимальність методом потенціалів. Кількість заповнених клітинок має дорівнювати виразу: m + n-1. якщо немає заповнених клітинок, то в одну з порожніх - вводимо нульову поставку вантажу.

4+4-1=7

Для заповнених клітинок виконується співвідношення: ui + vj = Cij

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 + v_4 = 7 \\ u_2 + v_2 = 4 \\ u_3 + v_2 = 14 \\ u_3 + v_4 = 11 \\ u_4 + v_1 = 4 \\ u_4 + v_3 = 13 \\ u_1 = 0 \end{cases}$$

$u_1 = 0$

$u_2 = -6$

$u_2 = -6$

$u_3 = 4$

$u_4 = 2$

$v_1 = 2$

$v_2 = 10$

$v_3 = 11$

$v_4 = 7$

Підрахуємо оцінки Δij вільних клітинок за формулою:

$$\Delta ij = Cij - (ui + vj)$$

Якщо всі Δij не є негативними, то план є оптимальним. Якщо ж існують Δij<0, необхідно поліпшити перший опорний план, перерозподіливши поставки.

$\Delta 12 = 10 - (0 + 10) = 10 - 10 = 0$

$\Delta 13 = 9 - (0 + 11) = 9 - 11 = -2 \quad < 0$

$\Delta 21 = 15 - (-6 + 2) = 15 + 4 = 19 \quad > 0$

$\Delta 23 = 14 - (-6 + 11) = 14 - 5 = 9 \quad > 0$

$\Delta 24 = 8 - (-6 + 7) = 8 - 1 = 7 \quad > 0$

$\Delta 31 = 13 - (4 + 2) = 13 - 6 = 7 \quad > 0$

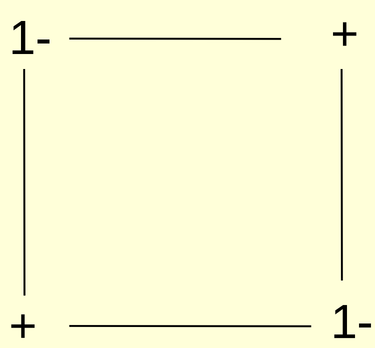
$\Delta 33 = 16 - (4 + 11) = 16 - 15 = 1 \quad > 0$

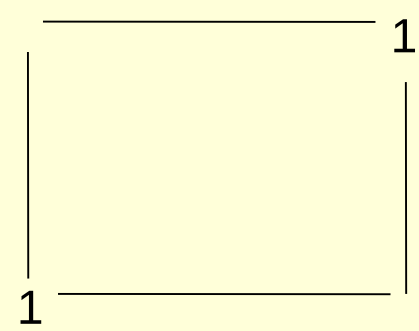
$\Delta 42 = 15 - (2 + 10) = 15 - 12 = 3 \quad > 0$

$\Delta 44 = 19 - (2 + 7) = 19 - 9 = 10 \quad > 0$

Висновок: перший план не є оптимальним. Для його покращення знайдемо клітинку з найбільшою за абсолютною величиною негативною Δij та складемо цикл перерозподілу поставок.

Складаємо цикл для Δ13:





Після перерозподілу вантажу будуємо нову таблицю зі знайденим другим рішенням.

Таблиця з другим рішенням

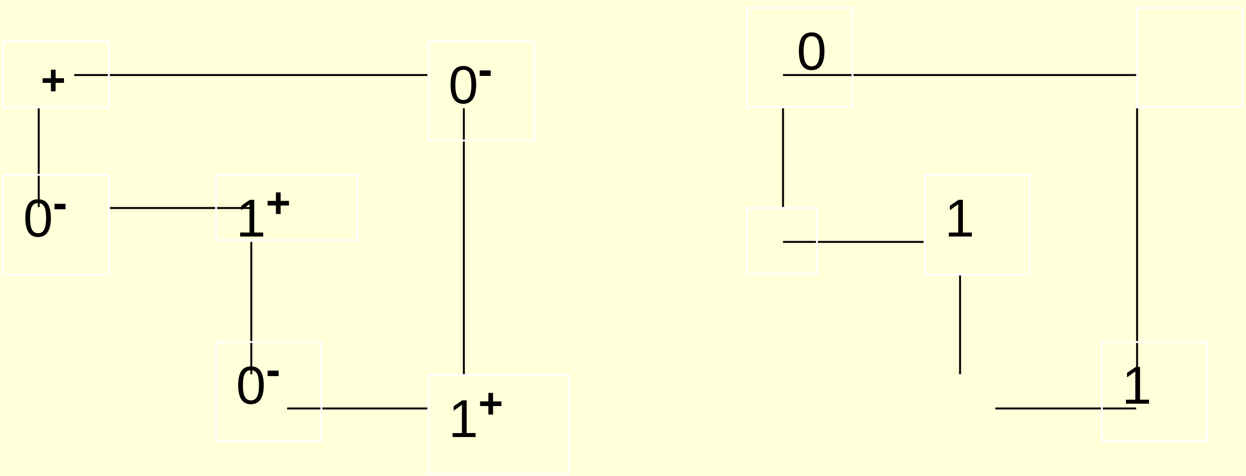
	$b_1=1$	$b_2=1$	$b_3=1$	$b_4=1$
$a_1=1$	2	10	9 1	7
$a_2=1$	15	4 1	14	8
$a_3=1$	13	14 0	16	11
$a_4=1$	4 1	15	13	19

Перевіряємо рішення на оптимальність

$u_1+v_3=9$	$u_1= 0$	**$\Delta 11 = 2 – (0 + 21) = 2 – 21 = - 19$**	**< 0**
$u_1+v_4=7$	$u_2= -6$	**$\Delta 12 = 10 – (0 + 10) = 10 – 10 = 0$**	**$= 0$**
$u_2+v_1=15$	$u_3= 4$	**$\Delta 23 = 14 – (-6 + 9) = 14 – 3 = 11$**	**> 0**
$u_3+v_2=4$	$u_4= -17$	**$\Delta 24 = 8 – (-6 + 7) = 8 – 1 = 7$**	**> 0**
$u_3+v_2=14$	$v_1= 21$	**$\Delta 31 = 13 – (4 + 21) = 13 – 25 = -12$**	**< 0**
$u_3+v_4=11$	$v_2= 10$	**$\Delta 33 = 16 – (4 + 9) = 16 – 13 = 3$**	**> 0**
$u_4+v_1=4$	$v_3= 9$	**$\Delta 42 = 15 – (-17 + 10) = 15 + 7 = 22$**	**> 0**
$u_1=0$	$v_4= 7$	**$\Delta 43 = 13 – (-17 + 9) = 13 + 8 = 23$**	**> 0**
		$\Delta 44 = 19 – (-17 + 7) = 19 +10 = 29$	**> 0**

Рішення оптимально, т.к. $\Delta 11 <0$, =>складаємо цикл для $\Delta 11$

- Цикл для Δ_{11} :



Після перерозподілу вантажу будуємо нову таблицю зі знайденим рішенням.

Таблиця із третім рішенням.

	$b_1=1$	$b_2=1$	$b_3=1$	$b_4=1$
$a_1=1$	2 0	10	9 1	7
$a_2=1$	15	4 1	14	8
$a_3=1$	13	14	16	11 1
$a_4=1$	4 1	15	13	19

Знайдений план є оптимальним:

$x_{13}=1; x_{22}=1; x_{34}=1; x_{41}=1$

$L(x) = 9+4+11+4=28$ у.е.

Угорський метод вирішення задачі про призначення.

Алгоритм вирішення:

1. Вирішуємо завдачу на мінімум. Мета даного кроку – отримання максимально можливого числа нулів у матриці С. Для цього знаходимо в матриці С у кожному рядку мінімальний елемент та віднімаємо його з кожного елемента відповідного рядка. Аналогічно у кожному стовпці віднімаємо відповідний мінімальний елемент.

Якщо задана не квадратна матриця, то робимо її квадратною, проставляючи вартості рівними максимальному числу заданої матриці.

2. Якщо після виконання першого кроку можна зробити призначення, тобто в кожному рядку та стовпці вибрати нульовий елемент, то отримане рішення буде оптимальним. Якщо призначення провести не вдалося, переходимо до третього кроку.

3. Мінімальним числом прямих викреслюємо всі нулі в матриці та серед не викреслених елементів вибираємо мінімальний, його додаємо до елементів, що стоять на перетині прямих та віднімаємо від усіх не викреслених елементів. Далі переходимо до кроку 2.

Угорський метод найбільш ефективний при вирішенні транспортних завдань з цілими обсягами виробництва та споживання.

Приклад:

Дано матрицю:

2	10	9	7
15	4	14	8
13	14	16	11
4	15	13	19

Розв’яжемо її угорським способом.
1. знайдемо в кожному рядку мінімальне значення та відніміемо його з кожного елемента даного рядка.

2	10	9	7
15	4	14	8
13	14	16	11
4	15	13	19

→ Отримаємо матрицю:

0	8	7	5
11	0	10	4
2	3	5	0
0	11	9	15

2. Призначення працівників провести не можна.
Виберемо в кожному стовпці матриці мінімальний елемент і віднімемо його з кожного елемента даного стовпця:

$$\begin{matrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{matrix}$$

3. Призначення провести не можна.
Мінімальним числом прямих викреслимо всі нулі у матриці.
Серед не викреслених елементів виберемо мінімальний.
Додамо його до елементів, що стоять на перетині прямих і віднімемо з усіх не викреслених елементів.
Отримаємо матрицю:

$$\begin{matrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 & 8 & 0 & 3 \\ 11 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & 13 \end{matrix} \longrightarrow$$

Призначення проведено:
1й співробітник виконує 3ю роботу;
2й-виконує 2-у роботу;
3-й виконує 4-у роботу;
5й-виконує 1-у роботу.

Дякую за увагу