

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА
ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №2

Выполнил:

Студент: Воротников А.А.

Группа: 5030102/90201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент

Баженов А.Н.

2022г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Распознающий функционал	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части . .	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы	3
2.4	Оценки вариабельности решения	3
3	Реализация	3
4	Результаты	4
4.1	ИСЛАУ	4
4.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ	4
4.3	Корректировка правой части	4
4.4	Корректировка левой части	5
4.5	Управление положением максимума распознающего функционала . . .	6
5	Обсуждение	8
6	Приложения	9
6.1	Код программы	9
6.2	Используемые библиотеки	9

Список иллюстраций

1	График mid системы	4
2	График $Tol(x, A, b)$	4
3	График $Tol(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части . . .	5
4	График Ξ_{Tol} для ИСЛАУ с корректировкой в левой части	6
5	График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой правой части и mid системы . . .	6
6	График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой первой строки матрицы	7
7	График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой второй строки матрицы	7
8	График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой третьей строки матрицы	8
9	График $Tol(x, A, b)$ с корректировкой четвертой строки матрицы	8

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [0.5, 2.5] \cdot x_2 = [3, 7] \\ x_1 + [-3, -1] \cdot x_2 = [-0.5, 0.5] \\ [0.9, 1.1] \cdot x_1 = [2.95, 3.45] \\ [0.9, 1.1] \cdot x_2 = [1.55, 2.05] \end{cases} \quad (1)$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимум распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}$$
$$x \in \Xi_{\text{tol}} \Leftrightarrow \text{Tol}(x) \geq 0$$

$\text{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n . Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допустового множества решений ИСЛАУ. Если $\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, то допустовое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\text{tol}} = \emptyset$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i -й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b . В данной работе используются значения $\nu_i = 1 \ \forall i = \overline{1, 3}$. Подбрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, получим разрешимую систему с непустым допустовым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A , E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR .

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом N - единичная матрица, в случае построчной - $N = \text{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки варибельности решения

Для оценки варибельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\text{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \|\text{argmax}_{x \in R^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{\|b\|}$$

$$\text{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью языка Python (версия 3.10.7) в среде Visual Studio Code.

Используются библиотечки:

1. Математическая библиотека numpy (версия 1.23.3)
2. Библиотека интервальной арифметики intvalpy (версия 1.5.8)
3. Библиотека построения графиков matplotlib (версия 3.6.0)

Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 ИСЛАУ

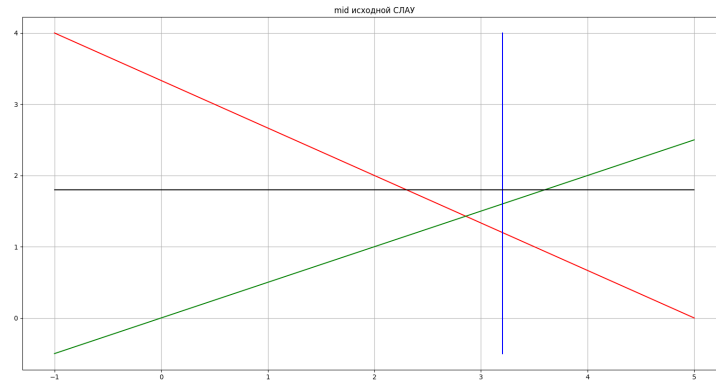


Рис. 1: График mid системы

4.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допустовое множество: $\max Tol = -0.90$, $\arg \max Tol = (2.80, 1.40)$

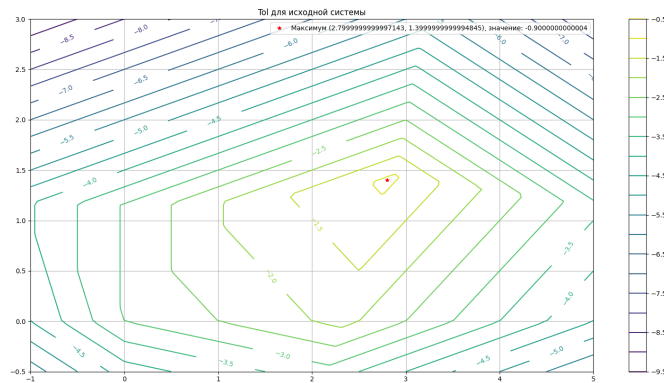


Рис. 2: График $Tol(x, A, b)$

4.3 Корректировка правой части

Корректировка правой части, с помощью описанного выше способа помогла добиться непустого множества решений интервальной системы.

$\max Tol = 0.45$, $\arg \max Tol = (2.80, 1.40)$

Скорректированная правая часть: $b = ([1.65, 8.35], [-1.85, 1.85], [1.6, 4.8], [0.2, 3.4])$

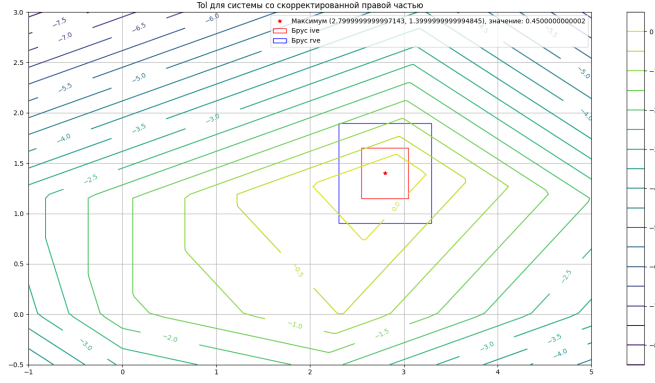


Рис. 3: График $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с коррективкой в правой части

Допусковое множество решений стало непустым.

$$ive(A, b') = 0.25, rve(A, b') = 0.49$$

На графике изображены квадратные брусы с центром в точке максимума Tol и радиусом ive и rve .

4.4 Корректировка левой части

Использованы следующие радиусы для E :

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 \\ 0.06 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{pmatrix}$$

Тогда получается непустое множество решений.

$$\max \text{Tol} = 0.10, \arg \max \text{Tol} = (3.29, 1.68)$$

$$A' = \begin{pmatrix} [0.905, 1.095] & [1.31, 1.69] \\ 1 & [-2.19, -1.81] \\ [0.981, 1.019] & 0 \\ 0 & [0.981, 1.019] \end{pmatrix} \quad (2)$$

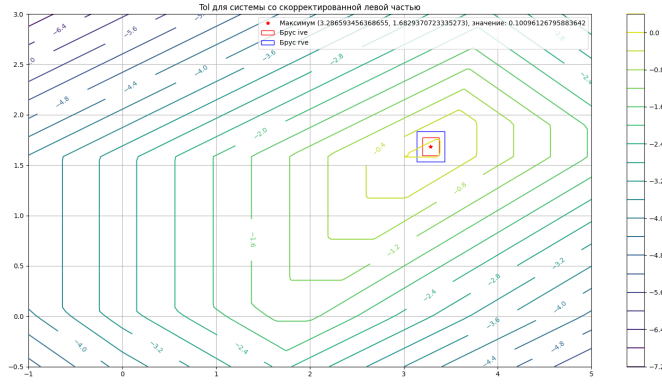


Рис. 4: График Ξ_{Tol} для ИСЛАУ с корректировкой в левой части

Допусковое множество решений стало непустым.

$$ive(A, b') = 0.09, rve(A, b') = 0.15.$$

На графике изображены квадратные брусы с центром в точке максимума Tol и радиусом ive и rve .

4.5 Управление положением максимума распознающего функционала

Объединим графики для управляющего функционала и уравнений, которые образуют средние значения интервалов в системе:

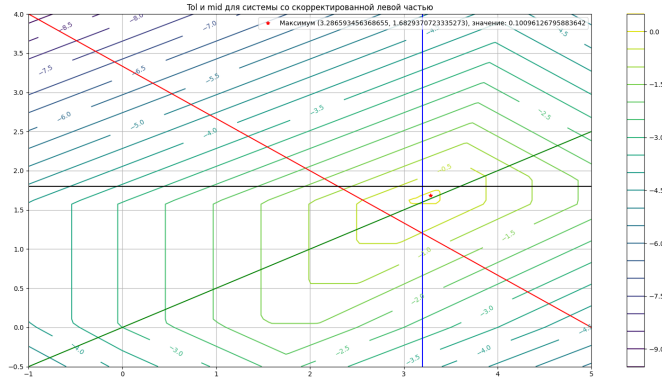


Рис. 5: График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой правой части и mid системы

Результат корректировки первой строки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1 & [-3, -1] \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\max \text{Tol} = -0.73, \arg \max \text{Tol} = (2.46, 1.23)$$

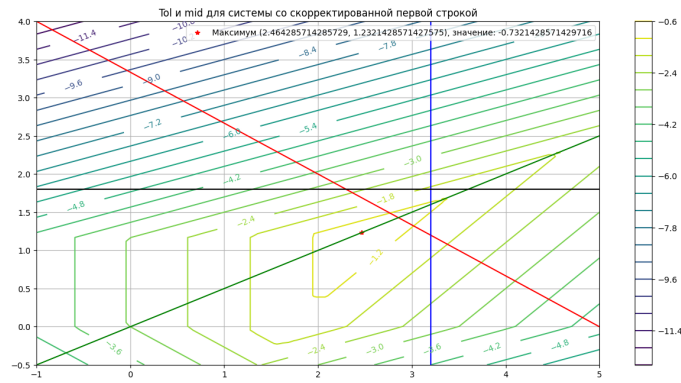


Рис. 6: График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой первой строки матрицы

Результат корректировки второй строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & -2 \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\max \text{Tol} = -0.77, \arg \max \text{Tol} = (3.40, 1.07)$$

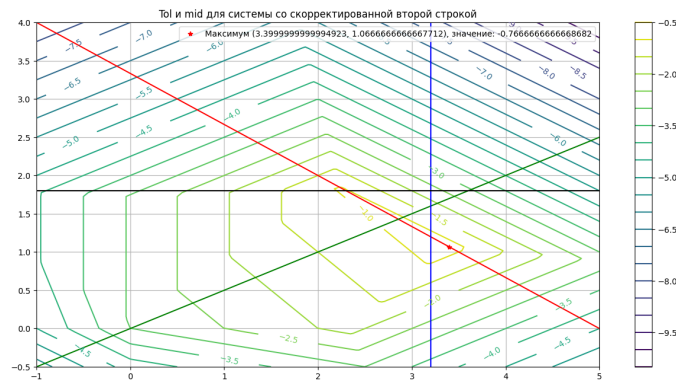


Рис. 7: График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой второй строки матрицы

Результат корректировки третьей строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & [-3, -1] \\ 1 & 0 \\ 0 & [0.9, 1.1] \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\max \text{Tol} = -0.73, \arg \max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$$

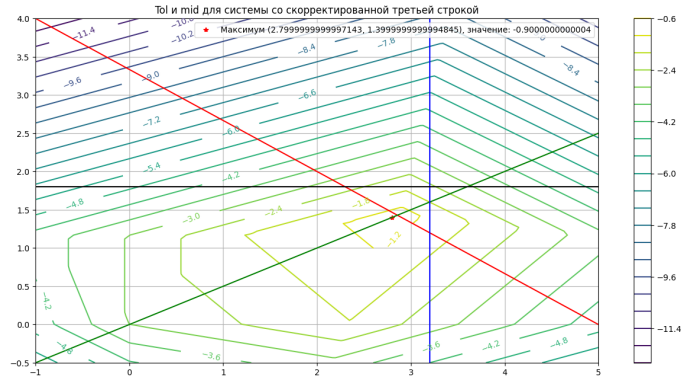


Рис. 8: График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой третьей строки матрицы

Результат корректировки четвертой строки:

$$A = \begin{pmatrix} [0.5, 1.5] & [0.5, 2.5] \\ 1 & [-3, -1] \\ [0.9, 1.1] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\max \text{Tol} = -0.90, \arg \max \text{Tol} = (2.80, 1.40)$$

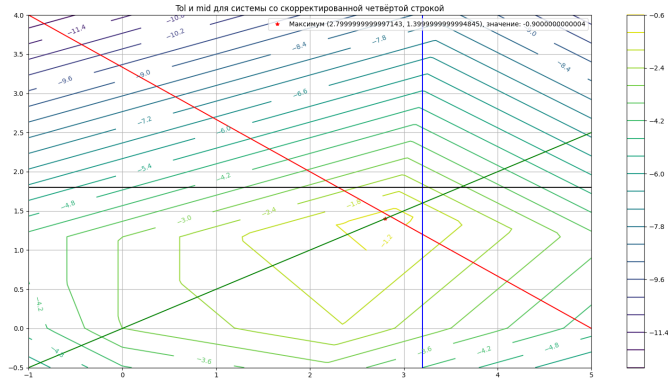


Рис. 9: График $\text{Tol}(x, A, b)$ с корректировкой четвертой строки матрицы

5 Обсуждение

- Оценки вариабельности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабельности, хорошо оценили допустовое множество

итоговой ИСЛАУ

- Коррекция правой части влечет увеличение значений максимума распознающего функционала
- Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях
- При корректировке первой и второй строк матрицы максимум распознающего функционала располагается на прямых, соответствующих медианам второй и первой строк соответственно
- При корректировке третьей и четвёртой строк матрицы максимум распознающего функционала совпал

6 Приложения

6.1 Код программы

Код программы на GitHub, URL: https://github.com/aVorotnikov/interval_analysis.

6.2 Используемые библиотеки

1. Matplotlib, URL: <https://matplotlib.org/>
2. NumPy, URL: <https://numpy.org/>
3. intvalpy, URL: <https://github.com/AndrosovAS/intvalpy>