Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

Отчёт по лабораторной работе №1
по дисциплине "Интервальный анализ"

Выполнил
студент группы 5030102/90201

Воротников Андрей

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Задана интервальная матрица $\mathbf{A}$.

$$\mathrm{mid}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\mathrm{rad}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Получаем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1.05-\delta, 1.05+\delta] & [1,1] \\ [0.95-\delta, 0.95+\delta] & [1,1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Определить, при каком δ:

1. определитель матрицы (3) содержит 0;

2. матрица (3) особенная.

1.2 Задача 2

Для функции Растрыгина

$$f(x,y) = 20 + x^2 - 10\cos(2\pi x) + y^2 - 10\cos(2\pi y), \tag{4}$$

имеющей один глобальный минимум, и функции Химмельблау

$$f(x,y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \tag{5}$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума. Необходимо использовать алгоритм поиска глобального минимума GlobOpt0.

2 Теория

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow$ $\forall A', A'' \in \mathrm{vert}\,\mathbf{A}\;\; \det(A')\cdot\det(A'') > 0$

2.2 Глобальная оптимизация

Требуется найти брус, который:
1. содержащит одну из точек минимума
2. имеет ширину меньше заранее заданного значения

2.2.1 Алгоритм GlobOpt0

Вход: $\mathbf{f} : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$. Брус $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$. Число ϵ
Выход: $y*$ - оценка глобального минимума на брусе $\mathbf{X}$.
Алгоритм:
$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$
$y \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y})}$
инициализация списка: $\mathcal{L} = (\mathbf{Y}, y)$
если $\mathrm{wid}(f(\mathbf{Y})) < \epsilon$, то $y* \leftarrow y$ и заканчиваем алгоритм
иначе выбираем новое приближение:

1. выбираем компоненту l, по которой брус $\mathbf{Y}$ имеет набольшую длину
2. рассекаем брус $\mathbf{Y}$ пополам по компоненте l на брусы $\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y}''$
3. удаляем первую запись из списка
4. добавляем в список $\mathcal{L}$ элементы $(\mathbf{Y}', \underline{f(\mathbf{Y}')})$ и $(\mathbf{Y}'', \underline{f(\mathbf{Y}'')})$
5. сортируем список в порядке возрастания второго элемента кортежа
6. первую запись обозначаем через $(\mathbf{Y}, y)$
7. возвращаемся к проверке условия выхода

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью языка Python (версия 3.10.7) в среде Visual Studio Code.
Используются бибилотеки:

1. Математическая библиотека numpy (версия 1.23.3)
2. Библиотека интервальной арифметики intvalpy (версия 1.5.8)
3. Библиотека построения графиков matplotlib (версия 3.6.0)

Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Задача 1

4.1.1 Определитель содержит 0

Для того, чтобы определить δ, при котором интервал определителя матрицы (3) содержит 0 рассмотрим различные $\delta > 0$ и постороим график границ интервала.

Определитель матрицы 2x2 считается по формуле:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{6}$$

График нижней и верхней границы интервала имеет вид:

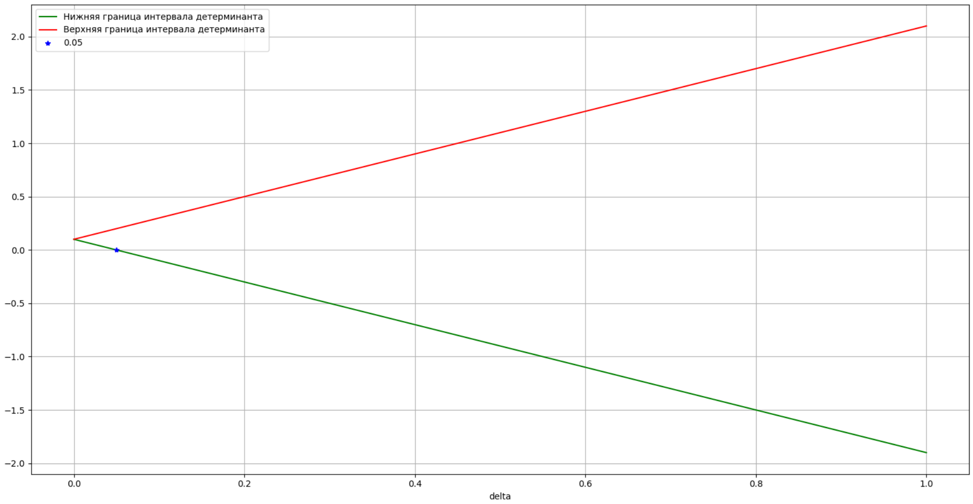

Рис. 1: График границ интервала детерминанта

Таким образом, $\det(\mathbf{A})$ содержит 0 при $\delta >= 0.05$

4.1.2 Особенная матрица

Для того, чтобы определить δ, при котором матрица (3) особенная рассмотрим различные значения $\delta > 0$ и проверим критерией Баумана.
Множество vert$\mathbf{A}$ состоит из 4 матриц, так как интервальную неопределённость содержат только 2 элемента матрицы:

$$\mathrm{vert}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1.05 \pm \delta & 1 \\ 0.95 \pm \delta & 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{7}$$

Приведём первые 10 результатов:

δ	Особенная ли матрица
0.00	неособенная
0.01	неособенная
0.02	неособенная
0.03	неособенная
0.04	неособенная
0.05	особенная
0.06	особенная
0.07	особенная
0.08	особенная
0.09	особенная

Таблица 1: Особенность/неособенность матрицы при различных δ

Таким образом, матрица (3) особенная при $\delta >= 0.05$

4.2 Задача 2

4.2.1 Функция с одним экстремумом

График функции Растрыгина (4) имеет вид:

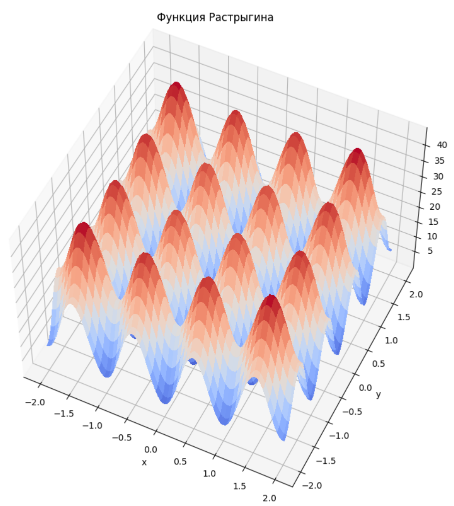

Рис. 2: График функции Растрыгина

Минимум функции находится в $(0, 0)$ и там имеет значение 0.
Рассмотрим работу функции оптимизации. Черная линия показывается центр расcмтриваемого бруса.

Начальный брус: $\mathbf{X} = (1 \pm 2, 1 \pm 2)$; $\epsilon = 0.01$.
Двумерный график:

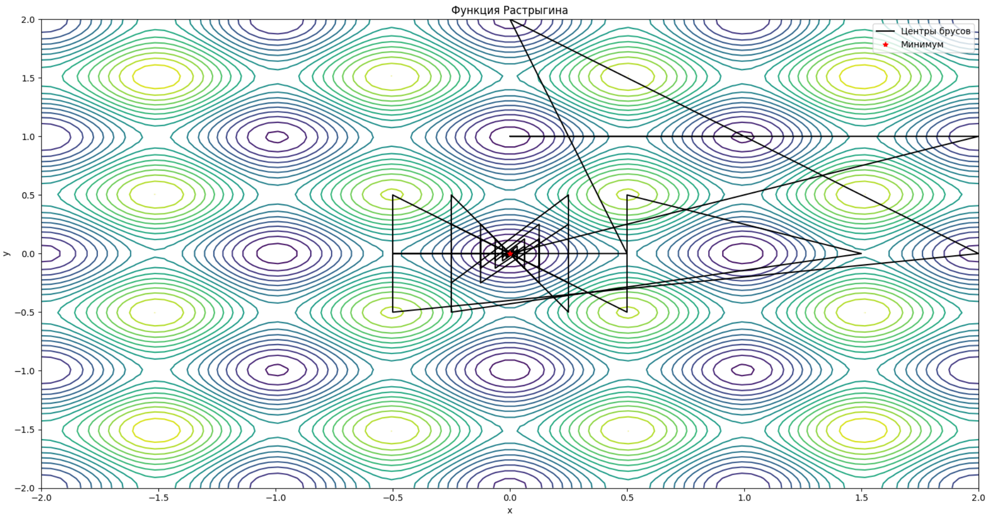

Рис. 3: Двумерные линии уровня функции Растрыгина

Трёхмерный график:

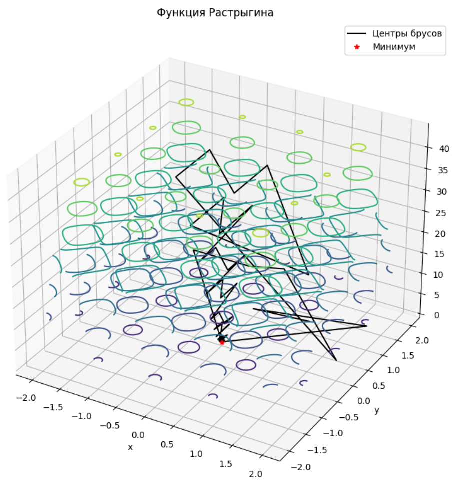

Рис. 4: Трёхмерные линии уровня функции Растрыгина

4.2.2 Функция с несколькими экстремумами

График функции Химмельблау (5) имеет вид:

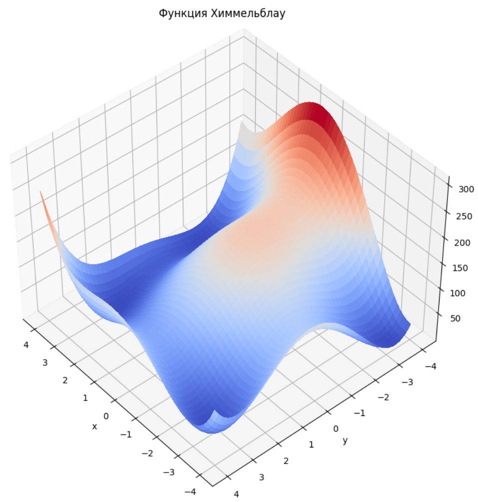

Рис. 5: График функции Химмельблау

Минимум функции находится в 4-ёх точках:

x	y	значение функции Химмельблау
3	2	0
-2.805188	3.131312	0
-3.779310	-3.283186	0
3.584428	-1.818426	0

Таблица 2: Минимумы функции Химмельблау

Рассмотрим работу функции оптимизации. Черная линия показывается центр рассматриваемого бруса.
Начальный брус: $\mathbf{X} = (1 \pm 3, 1 \pm 3)$; $\epsilon = 0.01$.
Двумерный график:

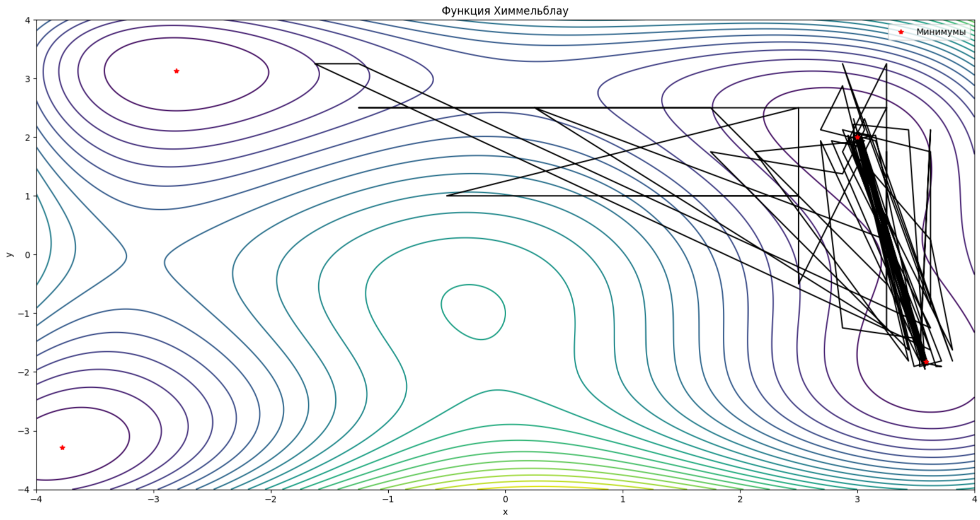

Рис. 6: Двумерные линии уровня функции Химмельблау

Трёхмерный график:

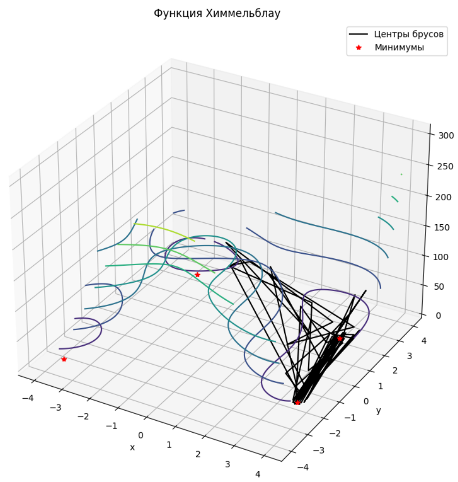

Рис. 7: Трёхмерные линии уровня функции Химмельблау

5 Обсуждение

1. Матрицы, подобные рассмотренной являются особеными при малых радиусах интервалов. Такие матрицы могут образовавыться, когда стоящие в столбцах интервальные величины пересекаются. Если наложение интервалов происходит во всех столбах каких-нибудь строк матрицы, то определитель будет содержать 0, так как любая линейная комбинация этих строк будет содержать 0.

2. Для обеих рассмариваемых функци алгоритм GlobOpt0 дал правильную оценку значения минимума функции. Процесс схождения не является непрерывным - середина бруса может отдаляться от искомой точки минимума. Для функции с несколькими минимумами, которые входят в начальный брус, алгоритм может "колебаться"между двумя точками минимума.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/aVorotnikov/interval_analysis/tree/master/lab1`

Список литературы

[1] А.Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. - СПб., 2020.

[2] Интернет ресурс. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization. Дата последнего обращения: 03.10.2022.