

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

**Отчёт по лабораторной работе №1
по дисциплине "Интервальный анализ"**

Выполнил
студент группы 5030102/90201

Воротников Андрей

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Задача 1	2
1.2	Задача 2	2
2	Теория	2
2.1	Критерий Баумана	2
2.2	Глобальная оптимизация	2
2.2.1	Алгоритм GlobOpt0	3
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Задача 1	3
4.1.1	Определитель содержит 0	3
4.1.2	Особенная матрица	4
4.2	Задача 2	5
4.2.1	Функция с одним экстремумом	5
4.2.2	Функция с несколькими экстремумами	7
5	Обсуждение	9
6	Приложения	9
6.1	Код программы	9
6.2	Используемые библиотеки	9

Список таблиц

1	Особенность/неособенность матрицы при различных δ	5
2	Минимумы функции Химмельблау	7

Список иллюстраций

1	График границ интервала детерминанта	4
2	График функции Растрьгина	5
3	Двумерные линии уровня функции Растрьгина	6
4	Трёхмерные линии уровня функции Растрьгина	6
5	График функции Химмельблау	7
6	Двумерные линии уровня функции Химмельблау	8
7	Трёхмерные линии уровня функции Химмельблау	8

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Задана интервальная матрица \mathbf{A} .

$$\text{mid}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 0.95 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{rad}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Получаем

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1.05 - \delta, 1.05 + \delta] & [1, 1] \\ [0.95 - \delta, 0.95 + \delta] & [1, 1] \end{pmatrix} \quad (3)$$

Определить, при каком δ :

1. определитель матрицы (3) содержит 0;
2. матрица (3) особенная.

1.2 Задача 2

Для функции Растрьгина

$$f(x, y) = 20 + x^2 - 10 \cos(2\pi x) + y^2 - 10 \cos(2\pi y), \quad (4)$$

имеющей один глобальный минимум, и функции Химмельблау

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2, \quad (5)$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума. Необходимо использовать алгоритм поиска глобального минимума GlobOpt0.

2 Теория

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ неособенна $\Leftrightarrow \forall A', A'' \in \text{vert } \mathbf{A} \det(A') \cdot \det(A'') > 0$

2.2 Глобальная оптимизация

Требуется найти брус, который:

1. содержит одну из точек минимума
2. имеет ширину меньше заранее заданного значения

2.2.1 Алгоритм GlobOpt0

Вход: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Брус $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$. Число ϵ

Выход: y^* - оценка глобального минимума на брус \mathbf{X} .

Алгоритм:

$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}$

$y \leftarrow \underline{f(\mathbf{Y})}$

инициализация списка: $\mathcal{L} = (\mathbf{Y}, y)$

если $\text{wid}(f(\mathbf{Y})) < \epsilon$, то $y^* \leftarrow y$ и заканчиваем алгоритм

иначе выбираем новое приближение:

1. выбираем компоненту l , по которой брус \mathbf{Y} имеет наибольшую длину
2. рассекаем брус \mathbf{Y} пополам по компоненте l на брусы \mathbf{Y}' и \mathbf{Y}''
3. удаляем первую запись из списка
4. добавляем в список \mathcal{L} элементы $(\mathbf{Y}', \underline{f(\mathbf{Y}')})$ и $(\mathbf{Y}'', \underline{f(\mathbf{Y}'')})$
5. сортируем список в порядке возрастания второго элемента кортежа
6. первую запись обозначаем через (\mathbf{Y}, y)
7. возвращаемся к проверке условия выхода

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью языка Python (версия 3.10.7) в среде Visual Studio Code.

Используются библиотеки:

1. Математическая библиотека numpy (версия 1.23.3)
2. Библиотека интервальной арифметики intervalpy (версия 1.5.8)
3. Библиотека построения графиков matplotlib (версия 3.6.0)

Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Задача 1

4.1.1 Определитель содержит 0

Для того, чтобы определить δ , при котором интервал определителя матрицы (3) содержит 0 рассмотрим различные $\delta > 0$ и построим график границ интервала.

Определитель матрицы 2x2 считается по формуле:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (6)$$

График нижней и верхней границы интервала имеет вид:

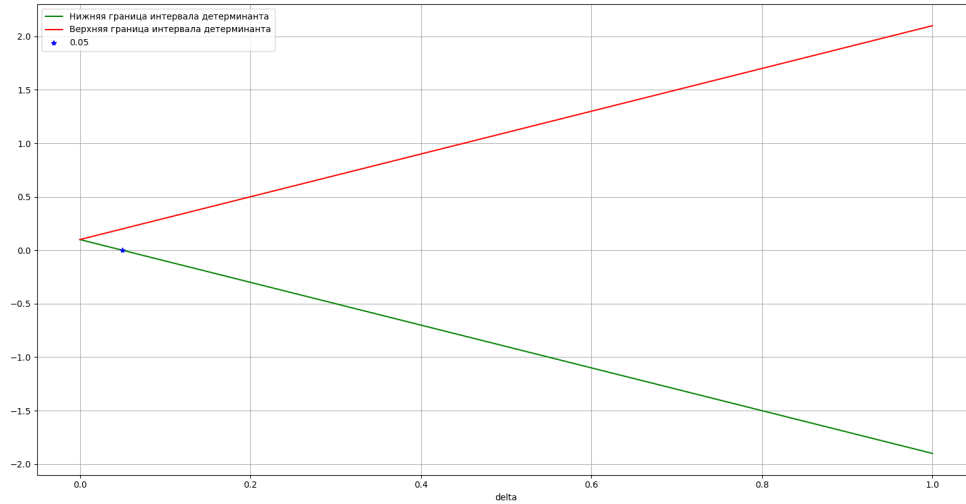


Рис. 1: График границ интервала детерминанта

Таким образом, $\det(\mathbf{A})$ содержит 0 при $\delta \geq 0.05$

4.1.2 Особенная матрица

Для того, чтобы определить δ , при котором матрица (3) особенная рассмотрим различные значения $\delta > 0$ и проверим критерием Баумана.

Множество $\text{vert}\mathbf{A}$ состоит из 4 матриц, так как интервальную неопределённость содержат только 2 элемента матрицы:

$$\text{vert}(\mathbf{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1.05 \pm \delta & 1 \\ 0.95 \pm \delta & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (7)$$

Приведём первые 10 результатов:

δ	Особенная ли матрица
0.00	неособенная
0.01	неособенная
0.02	неособенная
0.03	неособенная
0.04	неособенная
0.05	особенная
0.06	особенная
0.07	особенная
0.08	особенная
0.09	особенная

Таблица 1: Особенность/неособенность матрицы при различных δ

Таким образом, матрица (3) особенная при $\delta \geq 0.05$

4.2 Задача 2

4.2.1 Функция с одним экстремумом

График функции Растрьгина (4) имеет вид:

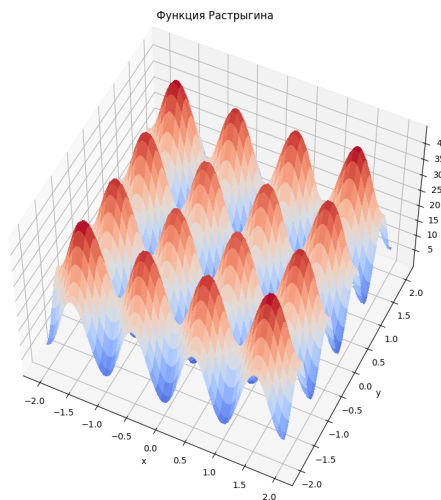


Рис. 2: График функции Растрьгина

Минимум функции находится в $(0, 0)$ и там имеет значение 0. Рассмотрим работу функции оптимизации. Черная линия показывается центр рассматриваемого бруса.

Начальный брус: $\mathbf{X} = (1 \pm 2, 1 \pm 2)$; $\epsilon = 0.01$.

Двумерный график:

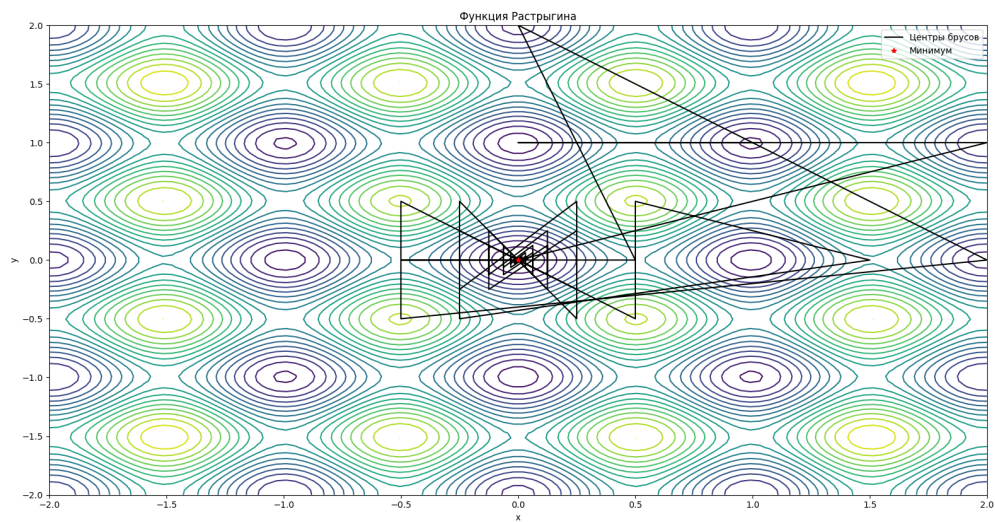


Рис. 3: Двумерные линии уровня функции Растрьгина

Трёхмерный график:

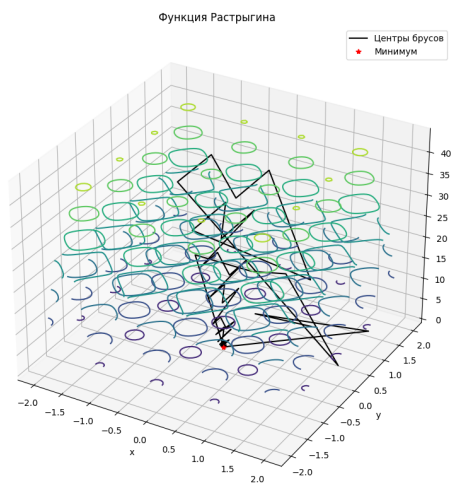


Рис. 4: Трёхмерные линии уровня функции Растрьгина

4.2.2 Функция с несколькими экстремумами

График функции Химмельблау (5) имеет вид:

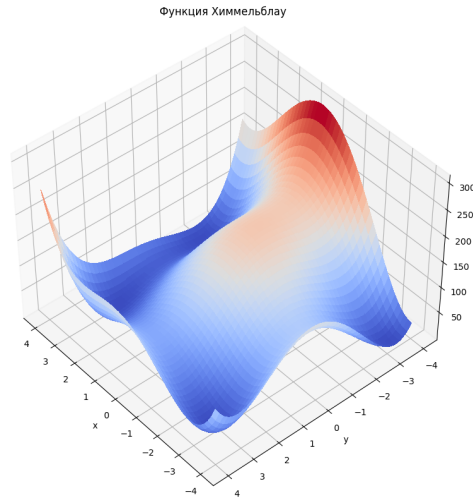


Рис. 5: График функции Химмельблау

Минимум функции находится в 4-ёх точках:

х	у	значение функции Химмельблау
3	2	0
-2.805188	3.131312	0
-3.779310	-3.283186	0
3.584428	-1.818426	0

Таблица 2: Минимумы функции Химмельблау

Рассмотрим работу функции оптимизации. Черная линия показывается центр рассматриваемого бруса.

Начальный брус: $\mathbf{X} = (1 \pm 3, 1 \pm 3)$; $\epsilon = 0.01$.

Двумерный график:

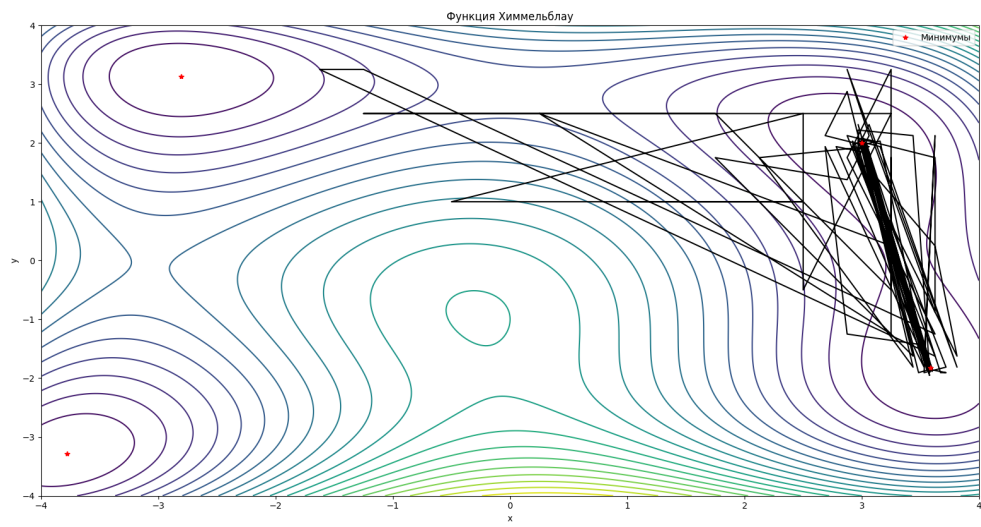


Рис. 6: Двумерные линии уровня функции Химмельблау

Трёхмерный график:

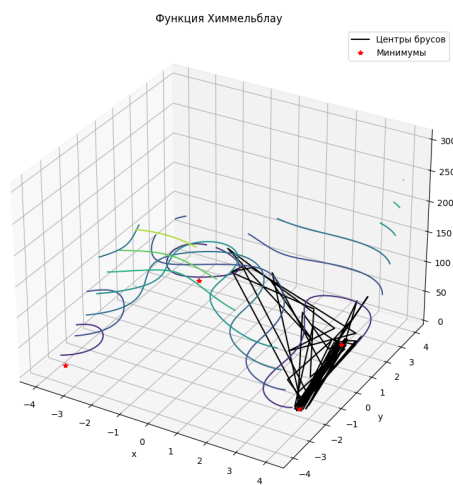


Рис. 7: Трёхмерные линии уровня функции Химмельблау

5 Обсуждение

1. Матрицы, подобные рассмотренной являются особыми при малых радиусах интервалов. Такие матрицы могут образовываться, когда стоящие в столбцах интервальные величины пересекаются. Если наложение интервалов происходит во всех столбцах каких-нибудь строк матрицы, то определитель будет содержать 0, так как любая линейная комбинация этих строк будет содержать 0.
2. Для обеих рассматриваемых функций алгоритм GlobOpt0 дал правильную оценку значения минимума функции. Процесс схождения не является непрерывным - середина бруса может отдаляться от искомой точки минимума. Для функции с несколькими минимумами, которые входят в начальный брус, алгоритм может "колебаться" между двумя точками минимума.

6 Приложения

6.1 Код программы

Код программы на GitHub, URL: https://github.com/aVorotnikov/interval_analysis/tree/master/lab1.

6.2 Используемые библиотеки

1. Matplotlib, URL: <https://matplotlib.org/>
2. NumPy, URL: <https://numpy.org/>
3. intvalpy, URL: <https://github.com/AndrosovAS/intvalpy>

Список литературы

- [1] А.Н. Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. - СПб., 2020.
- [2] Интернет ресурс. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization. Дата последнего обращения: 03.10.2022.