Theorie

Mathematik II
Assessment

Universität St.Gallen

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialrechnung **1**
- 1.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen 1
- 1.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit Nebenbedingungen 4
- 1.3 Gradient 9
- 1.4 Homogene Funktionen 12
- 1.5 Zusammenfassung 13

2 Differenzengleichungen **15**
- 2.1 Definition 15
- 2.2 Lösungsformel 15
- 2.3 Lösungsverhalten 17
- 2.4 Zusammenfassung 22

3 Integralrechnung **23**
- 3.1 Unbestimmtes Integral 23
- 3.2 Bestimmtes Integral 24
- 3.3 Partielle Integration 25
- 3.4 Integration durch Substitution 26
- 3.5 Uneigentliche Integrale 29
- 3.6 Dichtefunktionen 31
- 3.7 Zusammenfassung 32

4 Matrizen-Algebra **34**
- 4.1 Matrizen, Vektoren 34
- 4.2 Operationen mit Matrizen und Vektoren 36
- 4.3 Spezielle Matrizen 41
- 4.4 Inverse Matrix 42
- 4.5 Transponierte Matrix 43
- 4.6 Determinante 45
- 4.7 Zusammenfassung 50

5 Lineare Gleichungssysteme **53**
- 5.1 Spezialfall: reguläre, quadratische Matrix (Cramer'sche Regel) 54
- 5.2 Allgemeiner Fall (Gauss'scher Algorithmus) 56
- 5.3 Rang einer Matrix 68
- 5.4 Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix A 70
- 5.5 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren 72
- 5.6 Vektorraum 77
- 5.7 Eigenwerte, Eigenvektoren 79
- 5.8 Zusammenfassung 84

Stichwortverzeichnis **87**

Einleitung

Das Theorieskript fasst in einfacher und übersichtlicher Form den gesamten Stoff des 2. Semesters zusammen und erklärt diesen anhand anschaulicher Beispiele. Es ist sinnvoll nach Themenblöcken strukturiert, so dass Du sofort den nötigen Überblick gewinnst und Deine Prüfungsvorbereitung auf das Wesentliche fokussieren kannst! Viele Beispiele illustrieren und unterstreichen die essentiellen Informationen und dienen automatisch als unvergessliche Merkhilfen. In kurzer und einfach gehaltener Form liefert Dir das Theorieskript den gesamten theoretischen Background, den Du für Deine Prüfung brauchst.

Der gesamte mathematische Vorlesungsstoff wird auf die wirklich prüfungsrelevanten Elemente reduziert, welche von Grund auf umfassend und leicht verständlich erklärt werden. Viele ausführliche Beispiele und typische Aufgaben ergänzen den theoretischen Teil und zeigen Dir auf anschauliche Weise den zu erwartenden Schwierigkeitsgrad auf, damit es keine bösen Überraschungen mehr geben kann. Des Weiteren bietet Dir das Skript aber auch jederzeit die Möglichkeit, die Theorie ganzer Themenblöcke kompakt zusammengefasst schnell und selbständig nachlesen zu können. Das Theorieskript ist die optimale Ergänzung zum in der Vorlesung verwendeten Buch "Mathematik für Ökonomen". Mit geringem Aufwand kannst Du so einen optimalen Lerneffekt erzielen!

Seminar

Am Ende des Semesters hast Du die Möglichkeit kurz vor Deiner Prüfung gezielte Vorbereitungsseminare bei uns zu besuchen. In unseren Seminaren erwarten Dich die wichtigsten Themen, welche für die Klausur wiederholt werden, um Dich sattelfest an die Prüfung gehen zu lassen. Ausserdem geben wir Dir Tipps und Tricks zum sorgenfreien Lösen von Prüfungsaufgaben. Alle unsere Seminare folgen dabei einer einheitlichen, erwiesenermassen erfolgreichen und didaktisch empfohlenen Methode, um Deine Prüfungschancen zu optimieren.

Das Seminar basiert auf charakteristischen Beispielen und typischen Aufgaben, um den prüfungsrelevanten Stoff fokussiert zu erarbeiten. Dabei wird Dir nur das Allerwichtigste an Theorie kurz und prägnant erklärt und repetiert. Das Theorieskript bildet parallel dazu eine ausführliche Ergänzung, um Dir bei thematischen Schwierigkeiten die Möglichkeit zu geben genauer nachschauen zu können.

In den Pausen und kurz nach Seminarende hast Du die Möglichkeit, den Dozenten individuelle Fragen zu stellen, um letzte Unklarheiten zu klären.

Du kannst Dich für die Seminare jederzeit unter www.uniseminar.ch anmelden.

Anweisung

Idealerweise liest Du das Theorieskript bereits vor dem Seminar durch, denn je besser Du Dich selbst auf das Seminar vorbereitest, desto mehr wirst Du im Seminar lernen. Bereite Dich also so gut wie möglich auf das Seminar vor, sodass Du schon frühzeitig mit dem Stoff vertraut bist und gezielt Fragen stellen kannst.

Fragen

Sobald bei Dir während dem Lernen eine Frage auftritt, kannst Du diese Frage auf unserer Homepage www.uniseminar.ch unter 'Mein Account' in der Rubrik 'Meine Fragen' erfassen. Deine Fragen werden dann gesammelt und dem Dozenten weitergeleitet. Durch Deine Fragen können wir uns ein gutes Bild davon machen, wo Deine grössten Schwächen liegen und somit während dem Seminar diese Punkte vertieft behandeln. Je öfter Du Deine Fragen auf unserer Homepage erfasst, desto genauer können wir das Seminar auf Deine Problembereiche ausrichten.

Wir sind stets bestrebt möglichst fehlerfreie Unterlagen anzubieten, weshalb diese vor der Veröffentlichung auch mehrmals von verschiedenen Lektoren gründlich Korrektur gelesen werden. Trotzdem können sich leider immer noch kleine Fehler einschleichen. Falls Du einen solchen Fehler findest, bitten wir Dich diesen auf unserer Homepage www.uniseminar.ch unter "Mein Account" bei "Meine Fragen" zu erfassen oder einfach per E-Mail an sg@uniseminar.ch zu schicken. Wir werden dann Deinen gemeldeten Fehler prüfen und gegebenenfalls ein Korrigendum veröffentlichen. So können wir durch Deine Hilfe unsere Skripte kontinuierlich verbessern und Du verliest keine Zeit bei eventuellen Unklarheiten.

1 Differentialrechnung

1.1 Extrema von Funktionen zweier Variablen

Im letzten Semester wurden die partiellen Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen eingeführt. Ein Beispiel zur Erinnerung.

Beispiel.
Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$. Die ersten Ableitungen von f nach x und y sind:

$$f_x = 2x + y + 1 \qquad (y \text{ als konstant betrachten})$$
$$f_y = 2y + x - 1 \qquad (x \text{ als konstant betrachten})$$

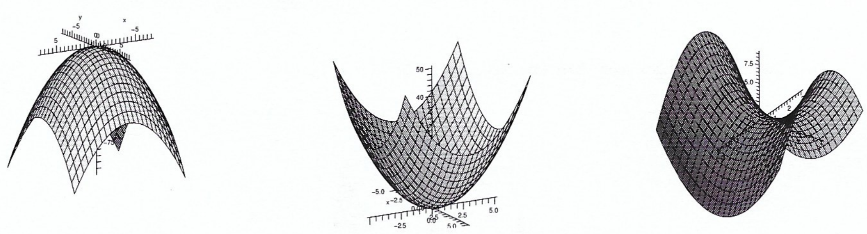
Die zweiten Ableitungen sind:

$$f_{xx} = 2, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = 1$$

Wir haben im letzten Semester gesehen, dass man mit Hilfe der Ableitung die Extrema einer Funktion berechnen kann.

$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0$ ist Maximum, Minimum oder Wendestelle der Funktion $f(x)$.

Ganz ähnlich funktioniert dies bei Funktionen in mehreren Variablen.
Wir betrachten folgende Abbildungen:



Man sieht, dass sowohl in einem *Maximum* als auch in einem *Minimum* die Tangentialebene horizontal verläuft. Das heisst aber, dass die Steigung sowohl in Richtung x als auch in Richtung y Null ist. Das liefert die für ein *Extremum*

Notwendigen Bedingungen: $\boxed{\begin{array}{rcl} f_x & = & 0 \\ f_y & = & 0 \end{array}}$

Eine Stelle, an der das erfüllt ist, nennt man *kritische Stelle*, da sie ein Kandidat für ein Extremum (Maximum oder Minimum) ist. Die Bedingung reicht alleine nicht aus, da sie auch von einem *Sattelpunkt* erfüllt wird. Man betrachtet zusätzlich die

Hinreichenden Bedingungen:

für Maximum	:	$f_{xx} < 0,$	$f_{yy} < 0,$	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
für Minimum	:	$f_{xx} > 0,$	$f_{yy} > 0,$	$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
für Sattelpunkt	:			$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$

Diese werden wir im Folgenden an Beispielen illustrieren.

Beispiel.

- Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + x - y$ vom letzten Beispiel.

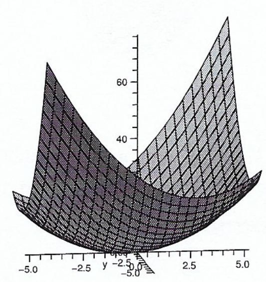
  Notwendige Bedingungen: $f_x = 2x + y + 1 = 0$ und $f_y = 2y + x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad x = 1 - 2y \\ &\Rightarrow \quad 0 = 2(1-2y) + y + 1 = 2 - 4y + y + 1 \\ &\Rightarrow \quad y = 1 \qquad \Rightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

  Kritische Stelle bei $(-1,1)$. Hinreichende Bedingung an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} f_{xx} = 2 \quad &\Rightarrow \quad f_{xx}(-1,1) > 0, \\ f_{yy} = 2 \quad &\Rightarrow \quad f_{yy}(-1,1) > 0, \\ \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right) = 4 - 1^2 = 3 \quad &\Rightarrow \quad \left(f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2\right)(-1,1) > 0 \end{aligned}$$

  Es handelt sich hier also um ein Minimum bei $(-1,1)$:



- Gegeben sei die Funktion $h(x,y) = \sin x \cdot \cos y$.
  Gesucht sind alle Extrema im Bereich $0 \leq x < \pi$, $0 \leq y < \pi$.

  Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} h_x &= \cos x \cdot \cos y = 0 &\Rightarrow\quad & x = \frac{\pi}{2} \text{ oder } y = \frac{\pi}{2} \\ h_y &= -\sin x \cdot \sin y = 0 &\Rightarrow\quad & x = 0 \text{ oder } y = 0 \end{aligned}$$

  Es ergeben sich zwei kritische Stellen: $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

  Hinreichende Bedingung: Die zweiten partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= -\sin x \cdot \cos y \\ h_{yy} &= -\sin x \cdot \cos y \\ h_{xy} &= -\cos x \cdot \sin y \end{aligned}$$

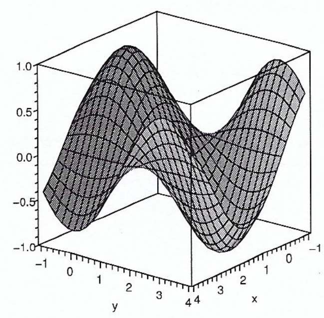
  Wir untersuchen die Stelle $(\frac{\pi}{2}, 0)$:

$$\begin{aligned} h_{xx}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right) &= -1 < 0, & h_{xy}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right) &= 0 \\ h_{yy}\left(\tfrac{\pi}{2},0\right) &= -1 < 0, & (h_{xx} \cdot h_{yy} - h_{xy}^2)\left(\tfrac{\pi}{2},0\right) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich an der Stelle $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ein Maximum. Wir untersuchen die Stelle $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} h_{xx}\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0, & h_{xy}\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1, \\ h_{yy}\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) &= 0, & (h_{xx} \cdot h_{yy} - h_{xy}^2)\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right) &= -1 < 0 \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich an der Stelle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ein Sattelpunkt.



1.2 Extrema von Funktionen mehrerer Variablen mit Nebenbedingungen

In vielen Anwendungen müssen die Extrema unter bestimmten Nebenbedingungen berechnet werden.

Beispiel.
Es ist eine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ gegeben, die von dem Konsum zweier Güter c_1 und c_2 abhängt. Wir verfügen über ein gewisses Einkommen $I = p_1c_1 + p_2c_2$. Dabei bezeichnen p_1 und p_2 die Preise für die jeweiligen Konsumgüter.

Allgemeine Formulierung:

Gegeben sind:

Zielfunktion:	$f(x, y)$
Nebenbedingung:	$\varphi(x, y) = 0$

Die Zielfunktion soll unter der Nebenbedingung maximiert bzw. minimiert werden.

Reduktionsmethode (Variablensubstitution)

Manchmal kann man die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ nach einer Variablen auflösen, z.B. nach y. Dann kann die Reduktionsmethode angewandt werden. Dies ist die einfachste Methode und entspricht dem Fall einer Funktion in einer Variablen.

Schritt 1:	$\varphi(x, y) = 0$ nach y auflösen
Schritt 2:	y in $f(x, y)$ einsetzen $\rightsquigarrow$ neue Funktion $F(x)$ in einer Variablen
Schritt 3:	Extrema von $F(x)$ bestimmen (wie gewohnt)

Beispiel.

Es seien $c_1 > -3,\ c_2 > -1$ und die Zielfunktion gegeben durch

$$u(c_1, c_2) = 5\ln(c_1+3) + \ln(c_2+1)$$

und die Nebenbedingung durch

$$2c_1 + c_2 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2c_1 + c_2 - 5 = 0.$$

Nach c_2 aufgelöst: $c_2 = 5 - 2c_1$. Einsetzen in die Zielfunktion liefert:

$$U(c_1) = 5\ln(c_1+3) + \ln(6-2c_1).$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist:

$$U'(c_1) = \frac{5}{c_1+3} - \frac{2}{6-2c_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{c_1+3} = \frac{2}{6-2c_1} \quad \Leftrightarrow \quad 30 - 10c_1 = 2c_1 + 6 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 2$$

Hinreichende Bedingung an der kritischen Stelle $c_1 = 2$:

$$U''(c_1) = -\frac{5}{(c_1+3)^2} - \frac{4}{(6-2c_1)^2} \quad \Rightarrow \quad U''(2) = -\frac{5}{25} - \frac{4}{4} = -\frac{1}{5} - 1 = -\frac{6}{5} < 0$$

Damit liegt an der Stelle $c_1 = 2$ ein Maximum der Funktion U. Und an der Stelle $(2, 5-2\cdot 2) = (2,1)$ liegt das Maximum der Funktion u unter der Nebenbedingung $\varphi(c_1, c_2) = 0$.

Die Nebenbedingung kann jedoch nicht immer (eindeutig) nach einer der Variablen aufgelöst werden, z.B. im Fall $x^2 - y^2 = 0$. Daher werden wir im nächsten Abschnitt ein Verfahren betrachten, das allgemein gültig ist.

Methode der Lagrange-Multiplikatoren

Als **notwendige Bedingung** dient die *Lagrange'sche Multiplikatorenregel.*

Zur Bestimmung der Extremalwerte einer Funktion $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$ bildet man die *Lagrange-Funktion:*

$$\boxed{F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)}$$

Aus dem Gleichungssystem

$$\boxed{F_x=0,\quad F_y=0,\quad F_\lambda=0}$$

werden die Koordinaten der möglichen Extrema (die kritischen Werte) sowie der *Lagrange-Multiplikator* λ berechnet.

Hinreichende Bedingung: $$\boxed{2\varphi_x\varphi_y F_{xy}-F_{xx}\varphi_y^2-F_{yy}\varphi_x^2\begin{cases}>0 & \text{für Maximum}\\ <0 & \text{für Minimum}\end{cases}}$$

Beispiel.
Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x,y)=x^2+y^2$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=x+4y-2$.

Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)=x^2+y^2+\lambda\cdot(x+4y-2)$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}F_x&=2x+\lambda=0 &\quad(1)\\ F_y&=2y+4\lambda=0 &\quad(2)\\ F_\lambda&=x+4y-2=0 &\quad(3)\end{aligned}$$

Wir eliminieren zuerst λ:

$$\begin{aligned}(1)\ \Rightarrow\ \lambda&=-2x\\ (2)\ \Rightarrow\ \lambda&=-\tfrac{1}{2}y\end{aligned}\qquad\Rightarrow\qquad 2x=\frac{1}{2}y\qquad\Rightarrow\qquad y=4x$$

Einsetzen in die Gleichung (3) ergibt

$$x + 4y - 2 = x + 16x - 2 = 17x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{17}, \quad y = \frac{8}{17}$$

Es folgt, dass bei $\left(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}\right)$ eine kritische Stelle liegt.

Hinreichende Bedingung:

$$2\varphi_x\varphi_y F_{xy} - F_{xx}\varphi_y^2 - F_{yy}\varphi_x^2 = 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 1^2 = -34 < 0$$

Damit liegt bei $\left(\frac{2}{17}, \frac{8}{17}\right)$ ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung φ.

Beispiel.
Wir betrachten die Zielfunktion $f(x, y) = x^2 + 3y$ unter der Nebenbedingung $x^2 = y^2$.

Nebenbedingung umformen: $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 = 0$

Lagrange-Funktion:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + 3y + \lambda(x^2 - y^2)$$

Notwendige Bedingung:

1. $F_x = 2x + 2\lambda x = 0$
2. $F_y = 3 - 2\lambda y = 0$
3. $F_\lambda = x^2 - y^2 = 0$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$2x(1 + \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } \lambda = -1$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $x = 0$. Aus der dritten Gleichung folgt $y = 0$ und somit aus der zweiten Gleichung $3 = 0$. Das ist ein Widerspruch, also ist $x = 0$ keine Lösung.

Fall 2: $\lambda = -1$. Aus der zweiten Gleichung folgt:

$$3 + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{2}.$$

Mit der dritten Gleichung folgern wir $x = \pm\frac{3}{2}$.

Damit erhält man kritische Stellen bei $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ und $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, wobei beide Male $\lambda = -1$ gilt.

Hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned} 2\varphi_x\varphi_y F_{xy} - F_{xx}\varphi_y^2 - F_{yy}\varphi_x^2 &= 2 \cdot 2x \cdot (-2y) \cdot 0 - (2+2\lambda) \cdot (-2y)^2 - (-2\lambda) \cdot (2x)^2 \\ &= 8y^2(1+\lambda) + 8\lambda x^2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $(\pm\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ und $\lambda = -1$ liefert:

$$F(\pm\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -1) = -8 \cdot \frac{9}{4} = -18 < 0$$

Damit handelt es sich hier sowohl in $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ als auch in $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ um ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$.

1.3 Gradient

Sei f eine Funktion in zwei Variablen x und y, resp. eine Funktion eines Vektors $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dann ist der *Gradient* von f definiert als

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Der Gradient ist also der Vektor der ersten Ableitungen.

Beispiel.
Der Gradient der Funktion $f(x,y) = 10 - 2x^2 - 3y^2$ ist der Vektor

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -4x \\ -6y \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Gradienten

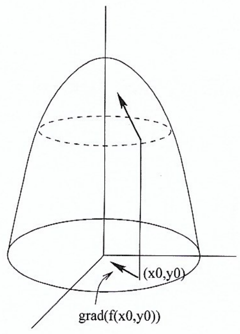
Der Gradient steht senkrecht zur Niveaulinie und hat somit die Eigenschaft, dass er in die Richtung des grössten Anstiegs/ des stärksten Funktionszuwachses zeigt. Er sagt uns also, in welche Richtung wir auf einem Berg laufen müssen, damit wir am schnellsten oben sind:

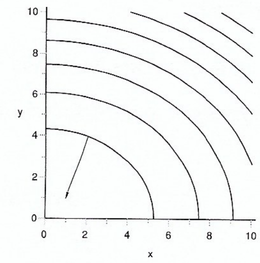
$$\boxed{\text{Wert des Gradienten in } (x_0, y_0) = \text{ Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion in } (x_0, y_0)}$$

Beispiel.
Sei $f(x_1, x_2) = 10 - 2x_1^2 - 3x_2^2$. In welche Richtung steigt im Punkt $P = (2, 4)$ die Funktion $f(x_1, x_2)$ am stärksten an?

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -4x_1 \\ -6x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{grad} f(2,4) = \begin{pmatrix} -8 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Die Funktion steigt also am stärksten in der Richtung $\begin{pmatrix} -8 \\ -24 \end{pmatrix}$, respektive in Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.





Die Funktion f und der Gradient am Punkt $(2,4)$.

Der Gradient steht senkrecht auf den Niveaulinien.

ACHTUNG: Wenn uns die Richtung des stärksten Anstiegs interessiert, ist die Länge des Gradienten egal. Das heisst, wir können den Vektor durch eine beliebige positive Zahl teilen oder multiplizieren, die Richtung bleibt dieselbe!

Beispiel.
Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = a \cdot \ln(x-1) + y^2$.

(i) Berechne den Gradienten $\text{grad}(f(x))$ allgemein und an der Stelle $(x_0, y_0) = (6,4)$.

(ii) Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit die Funktion $f(x,y)$ an der Stelle $(6,4)$ am stärksten in der Richtung $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ zunimmt?

Zu (i):
Wir berechnen zuerst die Partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= a \cdot \frac{1}{x-1} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

Daraus können wir den Gradienten ausrechnen und bekommen als allgemeine Lösung:

$$\text{grad}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{x-1} \\ 2y \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Punktes $(6,4)$ ergibt:

$$\text{grad}(f(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{a}{5} \\ 8 \end{pmatrix}$$

Zu (ii):

Damit die Funktion in $(6,4)$ am stärksten in Richtung $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$ zunimmt, muss der Gradient der Funktion in diesem Punkt in Richtung u zeigen:

$$\text{grad}(f(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{a}{5} \\ 8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

wobei k eine beliebige positive Zahl ist (nur die Richtung des Vektors zählt, nicht aber die Länge des Vektors $\mathbf{u}$). Wir folgern, dass

$$\begin{aligned} 8 &= k \cdot 0.8 && \Rightarrow \quad k = 8 \cdot \tfrac{1}{0.8} = 10 \\ \text{und somit folgt} \quad \tfrac{a}{5} &= k \cdot 0.6 = 10 \cdot 0.6 = 6 && \Rightarrow \quad a = 30. \end{aligned}$$

Die Funktion $f(x,y) = 30 \cdot \ln(x-1) + y^2$ nimmt also im Punkt $(6,4)$ in Richtung $\mathbf{u}$ am stärksten zu.

1.4 Homogene Funktionen

Homogene Funktionen spielen in unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik eine wichtige Rolle. Eine Funktion in zwei Variablen $f(x, y)$ heisst homogen vom Grad k, wenn für jede reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{f(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot f(x, y)}$$

Beispiel.
Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = (2 \cdot x^2 - 3 \cdot xy + y^2)^{0.5}$. Diese Funktion ist homogen vom Grad 1, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= (2 \cdot (t \cdot x)^2 - 3 \cdot (t \cdot x) \cdot (t \cdot y) + (t \cdot y)^2)^{0.5} \\ &= (2 \cdot t^2 \cdot x^2 - 3 \cdot t^2 \cdot xy + t^2 \cdot y^2)^{0.5} \\ &= (t^2 \cdot (2 \cdot x^2 - 3 \cdot xy + y^2))^{0.5} \\ &= (t^2)^{0.5} \cdot (2 \cdot x^2 - 3 \cdot xy + y^2)^{0.5} \\ &= t^1 \cdot f(x, y). \end{aligned}$$

Auch in der ökonomischen Theorie spielen homogene Funktionen häufig eine wichtige Rolle. Beispielsweise werden sowohl in der Mikro- als auch in der Makroökonomie häufig so genannte "Cobb-Douglas-Funktionen" zur Modellierung von Produktions- oder Nutzenfunktionen verwendet. Die typische Form ist hierbei $u(x, y) = x^\alpha \cdot y^\beta$. Wie leicht nachgerechnet werden kann, ist u dann eine homogene Funktion vom Grad $\alpha + \beta$.

1.5 Zusammenfassung

- Bei der Untersuchung von Funktionen zweier Varibleninteressiert in der Ökonomie häufig die Lage der **Extremstellen**, also des Minimums bzw. des Maximums der Funktion. Damit eine Extremstelle in einem Punkt (a, b) vorliegt, müssen stets die partiellen Ableitungen der Funktion in diesem Punkt verschwinden. Man hat also die **notwendigen Bedingungen**:

$$\boxed{\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}}$$

  Um festzustellen, ob in (a, b) ein Minimum, ein Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt, müssen zusätzlich zu den notwendigen Bedingungen noch die **hinreichenden Bedingungen** überprüft werden:

für Maximum	:	$f_{xx}(x_0, y_0) < 0,$	$f_{yy}(x_0, y_0) < 0,$	$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$
für Minimum	:	$f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$	$f_{yy}(x_0, y_0) > 0,$	$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0$
für Sattelpunkt	:			$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$

- Soll eine Funktion $f(x, y)$, welche von mehreren Variablen abhängt unter einer Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ optimiert werden, so kommen prinzipiell zwei Methoden in Frage:

  1. Lässt sich $\varphi(x, y)$ nach einer der beiden Variablen x oder y auflösen, so kann das Problem mittels der **Reduktionsmethode** gelöst werden:

Schritt 1:	$\varphi(x, y) = 0$ nach x (bzw. y) auflösen
Schritt 2:	x (bzw. y) in $f(x, y)$ einsetzen $\rightsquigarrow$ neue Funktion $F(y)$ (bzw. $F(x)$) in einer Variablen
Schritt 3:	Extrema von $F(y)$ (bzw. $F(x)$) bestimmen (wie gewohnt)

  2. Allgemein lässt sich das Problem immer mit Hilfe der **Methode der Lagrange-Multiplikatoren** lösen. Man führt einen weiteren Parameter λ (den Lagrange-Multiplikator) ein und bestimmt das Extremum der Lagrange-Funktion

$$\boxed{F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)}$$

Die **notwendige Bedingung** hierbei ist erneut, dass alle ersten partiellen Ableitungen Null sind:

$$\boxed{F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_\lambda = 0}$$

Um zu entscheiden, ob ein Minimum oder ein Maximum der Funktion unter der Nebenbedingung gefunden wurde, muss zudem die **hinreichende Bedingung** überprüft werden:

$$\boxed{2\varphi_x\varphi_y F_{xy} - F_{xx}\varphi_y^2 - F_{yy}\varphi_x^2 \begin{cases} > 0 & \text{für Maximum} \\ < 0 & \text{für Minimum} \end{cases}}$$

- Ist f eine Funktion in zwei Variablen x und y, so ist der **Gradient** von f definiert als der Vektor der ersten partiellen Ableitungen von f:

$$\boxed{\text{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}.$$

  In jedem Punkt gibt der Gradient die Richtung an, in welcher die Funktion am steilsten ansteigt. Der Gradient von f steht ausserdem stets senkrecht zu den Niveaulinien der Funktion f.

- Eine Funktion $f(x,y)$ heisst **homogen vom Grad** k, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\boxed{f(t \cdot x, t \cdot y) = t^k \cdot f(x,y)}.$$

2 Differenzengleichungen

Sei $\{y_k\}$ eine Folge. *Differenzengleichungen* geben eine Relation zwischen aufeinander folgenden Folgegliedern an. Dies kann zum Beispiel wie folgt aussehen:

$$2y_{k+1} - 10y_k + 6 = 0$$

Anhand solcher Differenzengleichungen kann man beliebige Folgeglieder berechnen, sobald ein Anfangswert y_0 gegeben ist. Die Berechnung dieser Folgeglieder ist allerdings meistens etwas mühsam... wer will schon 1'000 Gleichungen lösen, um den Wert $y_{1'000}$ zu berechnen! Wir werden nun eine Methode kennen lernen, welche uns die Arbeit erleichtert.

2.1 Definition

Eine *lineare Differenzengleichung (DGL) erster Ordnung* kann wie folgt dargestellt werden:

Normalform: $\boxed{y_{k+1} = Ay_k + B}$

Dabei sind $A, B \in \mathbb{R}$.

Natürlich muss die Differenzengleichung nicht immer in der Normalform gegeben sein. Sie muss gegebenenfalls erst umgeformt werden.

Beispiel.
Es sei die Differenzengleichung

$$2y_{k+1} - 10y_k + 6 = 0$$

gegeben. Mit etwas umformen bekommen wir die Normalform

$$y_{k+1} = 5y_k - 3.$$

Diese DGL heisst *erster Ordnung*, weil man y_{k+1} aus *einem* Vorgänger y_k rekonstruieren kann. Und *linear* bedeutet, dass y_k nicht mit höheren Potenzen als Eins auftaucht.

2.2 Lösungsformel

Wir wollen nun eine explizite Formel für y_k:

Allgemeine Lösung: $\boxed{\begin{array}{ll} y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^* & \text{für } A \neq 1 \\ y_k = y_0 + k \cdot B & \text{für } A = 1 \end{array}, \text{ wobei } y^* = \dfrac{B}{1-A}}$

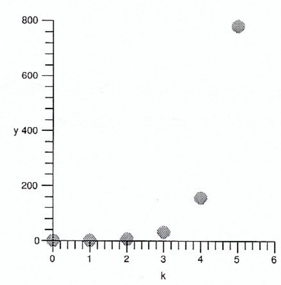
Beispiel.
Die DGL $2y_{k+1} - 7y_k = 3(y_k - 2)$ ist gegeben.

1. Was ist die allgemeine Lösung?
2. Was ist die Lösung für $y_0 = 1$?
3. Was sind y_3 und y_{10}, wenn $y_0 = 1$?

Lösungen:

1. Normalform: $y_{k+1} = 5y_k - 3$
   Es ist $A = 5$, $B = -3$ und damit $y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$
   Einsetzen in die Formel liefert:
   $$y_k = 5^k\left(y_0 - \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}.$$
2. Einsetzen des Anfangswertes $y_0 = 1$ in die obige Formel liefert:
   $$y_k = 5^k \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5^k + 3}{4}$$
3. Aus 2. folgt:
   $$\begin{aligned} y_3 &= \frac{125+3}{4} = \frac{128}{4} = 32; \\ y_{10} &= \frac{9'765'625+3}{4} = \frac{9'765'628}{4} = 2'441'407. \end{aligned}$$

Die Grafik zu diesem Beispiel zeigt, dass die Werte dieser Folge sehr schnell sehr gross werden.



Dies kann man auch bereits an der DGL sehen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

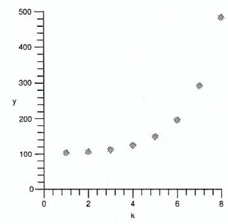
2.3 Lösungsverhalten

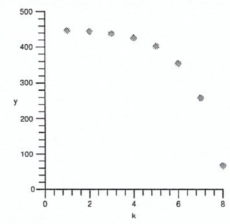
Das Verhalten der Folge wird hauptsächlich durch den Wert von A bestimmt. Es gilt nämlich:

Lösungsverhalten:	$A > 0$	:	Lösung monoton
	$A < 0$	:	Lösung oszillatorisch
	$\|A\| > 1$	:	Lösung explosiv
	$\|A\| < 1$	:	Lösung gedämpft/konvergent, $\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$

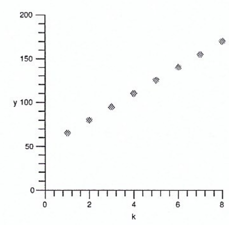
Nun wollen wir im Einzelnen betrachten, was das bedeutet:

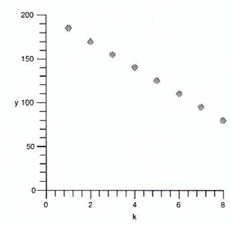
$A > 1$: Die Lösung ist *monoton und explosiv.* Dies kann monoton wachsend oder monoton fallend sein.



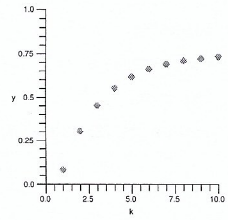


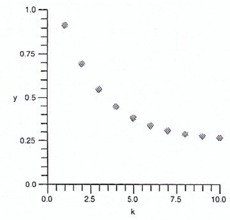
$A = 1$: Die Lösung ist *monoton* wachsend oder fallend, aber der Wachstum ist linear und nicht explosiv.



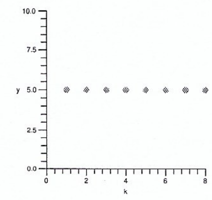


$0 < A < 1:$ Die Lösung ist *monoton und gedämpft.* Wieder kann sie monoton wachsend oder fallend sein. Gedämpft heisst, dass die Folge konvergiert, die Werte nähern sich einer Zahl an. Diese ist hier y^*.

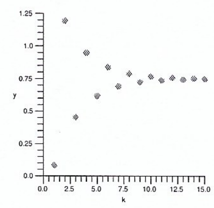




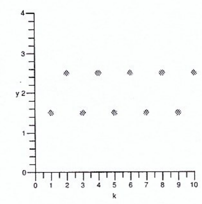
$A = 0:$ Dieser Fall ist ein Spezialfall. Die DGL sieht dann so aus: $y_{k+1} = 0 \cdot y_k + B = B$. Die Folge ist also konstant. Insbesondere konvergiert sie gegen $y^* = \frac{B}{1-A} = B$.



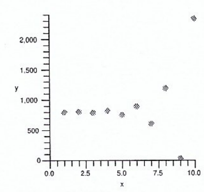
$-1 < A < 0:$ Die Lösung ist *oszillatorisch und gedämpft.* Oszillatorisch heisst hier, es werden abwechselnd Werte grösser und kleiner y^* angenommen. Gedämpft heisst wieder, dass die Folge gegen y^* konvergiert.



$A = -1$: Dieser Fall ist wieder ein Grenzfall, die Lösung ist *oszillatorisch.* Es werden nur zwei Werte angenommen: Alle geraden Folgenglieder haben den Wert y_0 und alle ungeraden $-y_0 + B$.



$A < -1$: Die Lösung ist *oszillatorisch und explosiv.*



Beispiel.
Für welche Werte von m ist die Lösung der DGL $2y_{k+1} - my_k = -6$ monoton explosiv?

Lösung: Normalform: $y_{k+1} = \frac{m}{2}y_k - 3$.
Es ist $A = \frac{m}{2}$. Lösung ist monoton explosiv, falls $A > 1$; $A = \frac{m}{2} > 1$ für $m > 2$.

Beispiel.
Die DGL $(1-a)y_{k+1} + ay_k = -y_{k+1} + 5$ ist gegeben und $a \neq 2$.

1. Was ist die allgemeine Lösung?
2. Für welche Werte ist die Lösung oszillatorisch, für welche monoton?
3. Für welche Werte ist die Lösung konvergent?
4. Was ist die Lösung für $y_0 = \frac{7}{2}$?

Lösungen:

1. Normalform: $y_{k+1} = -\frac{a}{2-a}y_k + \frac{5}{2-a}$.
   Es ist $A = -\frac{a}{2-a}$, $B = \frac{5}{2-a}$. Und damit $y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{5}{2-a}\left(1+\frac{a}{2-a}\right)^{-1} = \frac{5}{2-a}\cdot\frac{2-a}{2} = \frac{5}{2}$.
   Einsetzen in die Formel liefert:
   $$y_k = \left(-\frac{a}{2-a}\right)^k \left(y_0 - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{2}.$$

2. Die Lösung ist oszillatorisch, wenn $0 > A = -\frac{a}{2-a} = \frac{a}{a-2}$.
   Um diese Ungleichung zu lösen, müssen wir mit dem Nenner multiplizieren. Darum müssen wir unterscheiden, ob der Nenner grösser oder kleiner Null ist.

   1. Fall: $a - 2 > 0$.
   $$\frac{a}{a-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad a < 0$$
   Aus der Bedingung $a - 2 > 0$ folgt $a > 2$. Dies ergibt einen Widerspruch.

   2. Fall: $a - 2 < 0$.
   $$\frac{a}{a-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$$
   Das Ungleichheitszeichen wechselt, da wir mit etwas kleiner Null multipliziert haben. Aus der Bedingung $a-2 < 0$ folgt $a < 2$ und somit erhalten wir als Lösung $0 < a < 2$.

   Weiter ist die Lösung monoton, wenn $0 < A = \frac{a}{a-2}$.
   Wieder machen wir eine Fallunterscheidung:

   1. Fall: $a - 2 > 0$.
   $$\frac{a}{a-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0$$
   Aus der Bedingung $a - 2 > 0$ folgt $a > 2$. Dies ergibt als Lösung $a > 2$.

   2. Fall: $a - 2 < 0$.
   $$\frac{a}{a-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 0$$
   Das Ungleichheitszeichen wechselt, da wir mit etwas kleiner Null multipliziert haben. Aus der Bedingung $a - 2 < 0$ folgt $a < 2$ und somit erhalten wir als Lösung $a < 0$.

   Somit ist die Lösung oszillatorisch für $0 < a < 2$ und monoton für $a < 0$ und $a > 2$.

3. Die Lösung konvergiert für $1 > |A| = \left|-\frac{a}{2-a}\right| = \left|\frac{a}{2-a}\right| = \frac{|a|}{|2-a|}$. Das heisst $|a| < |2-a|$.

   1. Fall $2 - a \geq 0$ **und** $a \geq 0$:

   Die Ungleichung lautet $a < 2 - a$, das heisst $2a < 2$ also $a < 1$.

   Aus den Bedingungen für diesen Fall folgern wir zusätzlich $a \leq 2$ und $a \geq 0$.

   Insgesamt ergibt dies die Lösung $0 \leq a < 1$.

   2. Fall $2 - a \geq 0$ **und** $a < 0$:

   Die Ungleichung lautet $-a < 2 - a$, $0 < 2$. Dies ist immer erfüllt.

   Aus den Bedingungen für diesen Fall folgern wir zusätzlich $a \leq 2$ und $a < 0$.

   Insgesamt ergibt dies die Lösung $a < 0$.

   3. Fall $2 - a < 0$ **und** $a \geq 0$:

   Die Ungleichung lautet $a < -(2 - a)$, also $0 < -2$.

   Dies ist nie erfüllt.

   4. Fall $2 - a < 0$ **und** $a < 0$:

   Die Ungleichung lautet $-a < -(2 - a)$, d.h. $-2a < -2$ also $a > 1$.

   Aus den Bedingungen für diesen Fall folgern wir zusätzlich $a > 2$ und $a < 0$.

   Dies ist nie erfüllt.

   Somit konvergiert die Lösung für $a < 1$ gegen $y^* = \frac{5}{2}$.

4. Das Einsetzen von $y_0 = \frac{7}{2}$ in die allgemeine Lösung liefert:

$$y_k = \left(-\frac{a}{2-a}\right)^k + \frac{5}{2}.$$

2.4 Zusammenfassung

- Die **Normalform** einer Differenzengleichung erster Ordnung lautet

$$\boxed{y_{k+1} = Ay_k + B}$$

wobei A und B reelle Zahlen sind. Mit dieser Formel kann für ein bekanntes Folgenglied y_k stets das darauf folgende Folgenglied y_{k+1} bestimmt werden.

- Die **allgemeine Lösung** einer Differenzengleichung liefert eine Formel, mit welcher ein beliebiges y_k direkt aus dem Startwert y_0 ausgerechnet werden kann:

$$\boxed{\begin{array}{ll} y_k = A^k\,(y_0 - y^*) + y^* & \text{für } A \neq 1 \\ y_k = y_0 + k \cdot B & \text{für } A = 1 \end{array}, \text{ wobei } y^* = \frac{B}{1-A}}$$

- Anhand des Parameters A kann das **Lösungsverhalten** der Differenzengleichung bestimmt werden:

$A > 0$	:	Lösung monoton
$A < 0$	:	Lösung oszillatorisch
$\lvert A\rvert > 1$	:	Lösung explosiv
$\lvert A\rvert < 1$	:	Lösung gedämpft/konvergent, $\lim_{k\to\infty} y_k = y^*$

3 Integralrechnung

3.1 Unbestimmtes Integral

Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann bezeichnet man

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

als *unbestimmtes Integral.* Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

Es reicht aus, die Integrale von ein paar wichtigen Funktionen zu kennen, um integrieren zu können. Zusammen mit den Eigenschaften der Integration sowie wie mit den Methoden der

- partiellen Integration (Kapitel 3.3)
- Substitution (Kaptiel 3.4)

können wir fast alle Integrale berechnen.
Darum werden gleich zu Beginn die wichtigsten Funktionen integriert (überprüfen durch Ableiten):

1. $\int 1 \, dx = x + C$
2. $\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
3. $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C,$ wobei $n \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}$
4. $\int e^x \, dx = e^x + C$
5. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(x) + C$
6. $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$
7. $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$

Da konstante Zahlen abgeleitet 0 ergeben, setzen wir nach der Integration immer eine Konstante C dazu, damit wir den möglichst allgemeinen Fall erhalten. Diese Konstante wird *Integrationskonstante* genannt.

Eigenschaften:

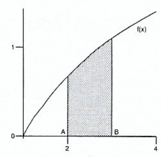
- $\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx$ für $c \in \mathbb{R}$
- $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

3.2 Bestimmtes Integral

Das *bestimmte Integral*

$$\int_A^B f(x)\, dx$$

gibt die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse zwischen den *Integrationsgrenzen* A und B an. Im Unterschied zum unbestimmten Integral ist es eine Zahl, keine Funktion.



Zusätzliche Eigenschaft:

- $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$;
- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$.

Nun wollen wir das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ berechnen. Das wird mit Hilfe der Stammfunktion $F(x)$ gemacht und zwar nach dem *Hauptsatz der Integralrechnung:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)}$$

ACHTUNG: Beim bestimmten Integral ist die Integrationskonstante nicht notwendig.

Beispiel.

- $\int\limits_3^5 \frac{1}{x}\, dx = \ln(x)\Big|_3^5 = \ln(5) - \ln(3)$

- $\int\limits_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$

- $\int\limits_{-1}^{1} |2x^3|\, dx = \int\limits_{-1}^{0} -2x^3\, dx + \int\limits_0^1 2x^3\, dx = -2 \cdot \frac{1}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} + 2 \cdot \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$

  $= -\frac{1}{2} \cdot 0^4 - (-\frac{1}{2} \cdot (-1)^4) + \frac{1}{2} \cdot 1^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

3.3 Partielle Integration

Die partielle Integrations-Methode können wir anwenden, falls wir die zu integrierende Funktion $f(x)$ als Produkt $v(x)u'(x)$ darstellen können, wobei $u(x)$ und $v(x)$ zwei Funktionen in x sind. Dann gilt:

$$\boxed{\int v(x)u'(x)\, dx = vu - \int v'(x)u(x)\, dx}$$

Diese Regel gilt sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale.

Beispiel.

- Um $\int x\cos(x)\, dx$ zu bestimmen, wählen wir die Funktionen:

$$\begin{array}{ll} v(x) = x & u'(x) = \cos(x) \\ v'(x) = 1 & u(x) = \sin(x) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int x\cos(x)\, dx &= \int v(x)u'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\, dx \\ &= x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\, dx = x\sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle, dass es auch die richtige Stammfunktion ist, kann man die Stammfunktion ableiten

$$\begin{aligned} (x\sin(x) + \cos(x) + C)' &= 1 \cdot \sin(x) + x\cos(x) - \sin(x) + 0 \\ &= x\cos(x), \end{aligned}$$

was der ursprünglichen Funktion entspricht. Wir haben also richtig integriert!

- Für $\int_1^{e^2} \ln(x)\, dx$ betrachten wir:

$$\begin{aligned} v(x) &= \ln(x) & u'(x) &= 1 \\ v'(x) &= \frac{1}{x} & u(x) &= x \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \ln(x)\, dx = \int_1^{e^2} 1 \cdot \ln(x)\, dx &= x \ln(x)\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x}\, x\, dx \\ &= e^2 \ln(e^2) - 1 \cdot \ln(1) - x\Big|_1^{e^2} \\ &= e^2 \cdot 2 - \ln(1) - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1. \end{aligned}$$

3.4 Integration durch Substitution

Wenn die zu integrierende Funktion $f(x)$ von der Form $f(g(x))g'(x)$ ist, das heisst, das Integral hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x)\, dx$$

dann können wir die Funktion $g(x)$ durch eine Variable u ersetzten und danach über u integrieren. Nicht immer ist diese Form einfach abzulesen. Vermuten wir, dass wir Substitution anwenden können, probieren wir es einfach aus, und zwar wie folgt:

(i) Suche eine Funktion, welche wir ersetzen wollen: $u = g(x)$.

(ii) Leite u nach x ab: $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

(iii) Löse diese Gleichung nach dx auf: $dx = \frac{du}{g'(x)}$.

(iv) Ersetzte im Integral $g(x)$ durch u und dx durch $\frac{du}{g'(x)}$. Falls es ein bestimmtes Integral ist und Integrationsgrenzen a und b vorkommen, werden diese ersetzt durch $u(a)$ und $u(b)$.

$$\begin{aligned} g(x) &\leftrightarrow u \\ dx &\leftrightarrow \frac{du}{g'(x)} \\ \text{Integrationsgrenzen } a, b &\leftrightarrow u(a), u(b) \end{aligned}$$

(v) Das $g'(x)$ sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein x mehr vorkommt. Passiert das nicht, können wir nicht Substitution anwenden oder müssen eine andere Substitution vornehmen. Sonst weiter zum nächsten Schritt.

(vi) Es gilt nun:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x)\,dx &= \int f(u)du \\ \text{respektive } \int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \end{aligned}}$$

Das neue Integral entspricht also dem alten Integral.

(vii) Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder $g(x)$ für u einsetzen um die Lösung zu bekommen.

Bemerkung. Anstatt das bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen direkt zu lösen, kann das Integral auch zuerst nur unbestimmt, das heisst ohne Integrationsgrenzen, betracht werden. Dann müssen nach dem Lösen des Integrals und der Rücksubstitution (u durch $g(x)$ ersetzen) noch die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Beispiel.

- Wir wollen das Integral $\int xe^{x^2}\,dx$ lösen und setzen dafür $u(x) = x^2$. Es folgt, dass

$$\frac{du}{dx} = 2x, \qquad \text{und somit} \qquad dx = \frac{du}{2x}.$$

  Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2}\,dx &= \int xe^u\,\frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}(e^u + C) = \frac{1}{2}(e^{x^2} + C). \end{aligned}$$

- Nun ein bestimmtes Integral. Wir berechnen $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$:

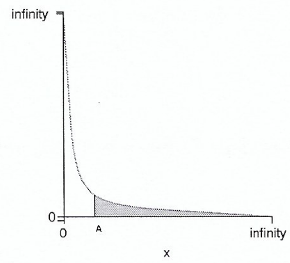
  Wir setzen $u = x + 1$ und erhalten $\frac{du}{dx} = 1$, also $du = dx$.

$$\begin{aligned} \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx &= \int\limits_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int\limits_1^2 u^{-\frac{1}{2}}\,du = 2\,u^{\frac{1}{2}}\Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

3.5 Uneigentliche Integrale

Fragestellung: Kann man eine nicht beschränkte Fläche berechnen? Was passiert, wenn die Integrationsgrenzen unendlich oder Polstellen der Funktion sind?

Fall 1: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf dem Intervall $[A, \infty[$ messen?



Wenn

$$\boxed{\int_A^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_A^N f(x)\,dx}$$

existiert, dann nennt man dies ein *uneigentliches Integral.*

Beispiel.
Berechne $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$.
Zuerst betrachten wir das unbestimmte Integral $\int xe^{-x}\,dx$ und machen partielle Integration mit

$$v(x) = x \qquad u'(x) = e^{-x}$$
$$v'(x) = 1 \qquad u(x) = -e^{-x}$$

und somit

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + (-e^{-x}) = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

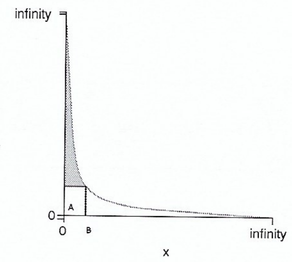
Somit erhalten wir im endlichen Fall

$$\int_0^N xe^{-x}\,dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^N = -Ne^{-N} - e^{-N} - (-0 \cdot e^{-0} - e^{-0}) = -e^{-N}(N+1) + 1.$$

Wegen $\lim_{N\to\infty}(-e^{-N}(N+1)) \to 0$ existiert der Grenzwert und es gilt:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N xe^{-x}\,dx = 1.$$

Fall 2: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf einem Intervall messen, welches eine Polstelle bei A beinhaltet?



Analog zum ersten Fall: Wenn

$$\boxed{\int_A^B f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to A}\int_\alpha^B f(x)\,dx}$$

existiert, dann existiert das uneigentliche Integral.

Beispiel.

- $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_\alpha^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim\limits_{\alpha\to 0} \ln(x)\Big|_\alpha^1 = \lim\limits_{\alpha\to 0}(\ln(1) - \ln(\alpha)) = \infty$

  Folgerung: $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ existiert nicht.

- $\int\limits_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx = \lim\limits_{\alpha\to 1} \int\limits_\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx = \lim\limits_{\alpha\to 1} 2\sqrt{x-1}\Big|_\alpha^2 = \lim\limits_{\alpha\to 1} 2\sqrt{2-1} - 2\sqrt{\alpha-1} = 2 - 0 = 2$

3.6 Dichtefunktionen

In der Wahscheinlichkeitstheorie, welche die mathematischen Grundlagen zur Statistik liefert, spielen die Dichtefunktionen eine wichtige Rolle. So kann es etwa sein, dass man die Verteilung der Wartezeit auf den nächsten Bus untersuchen will. Dazu benötigt man dann die entsprechende Dichtefunktion, die Information darüber liefert, wie wahrscheinlich die Ankunft des nächsten Busses innerhalb einer bestimmten Zeitperiode ist. Im Kontext der Mathe-Vorlesung braucht uns die Bedeutung der Dichtefunktion jedoch noch nicht zu interessieren, hier müssen lediglich die charakteristischen mathematischen Eigenschaften bekannt sein:

> Eine Funktion f heisst Dichtefunktion, wenn
> - Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$.
> - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Dichtefunktionen sind oft abschnittsweise definiert, etwa

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1/2x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

In Übungs- und Klausuraufgaben wird zumeist eine Funktion mit einem nicht näher bestimmten Parameter angegeben, die Lösung der Aufgabe besteht dann darin, diesen Parameter so zu bestimmen, dass die Funktion die Bedingungen für eine Dichtefunktion erfüllt.

3.7 Zusammenfassung

- **Definition:**

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \ , \ C \in \mathbb{R}}$$

- **Rechenregeln:**
  - $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.
  - $\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
  - $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$.
  - $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

- **Standardbeispiele der Integration:**
  - $\int 1dx = x + C$.
  - $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.
  - $\int e^x dx = e^x + C$.
  - $\int \frac{1}{x}dx = \ln(x) + C$.
  - $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$.
  - $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$.

- **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:** Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert eine Formel mit der bestimmte Integrale berechnet werden können:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

- **Partielle Integration:**

$$\begin{aligned} \int v(x) \cdot u'(x)dx &= v(x) \cdot u(x) - \int v'(x) \cdot u(x)dx. \\ \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx &= v(x) \cdot u(x)\big|_a^b - \int_a^b v'(x) \cdot u(x)dx. \end{aligned}$$

- **Integration durch Substitution:**

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int f(u)du. \\ \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \ \text{ wobei } u(x) = g(x). \end{aligned}$$

- **Uneigentliche Integrale:**
  - $\int_A^\infty f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_A^N f(x)dx.$
  - $\int_{-\infty}^A f(x)dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^A f(x)dx.$

  Falls bei B eine Polstelle vorliegt:
  - $\int_A^B f(x)dx = \lim_{N\to B} \int_A^N f(x)dx.$
  - $\int_B^A f(x)dx = \lim_{N\to B} \int_N^A f(x)dx.$

- **Allgemeines Vorgehen bei Integralen**
  1. Liegt ein unbestimmtes (zu 3.) oder ein bestimmtes Integral (zu 2.) vor?
  2. Gibt es im Integrationsintervall Singularitäten oder ist der Integrationsbereich unbeschränkt? Falls eines von beiden gilt, handelt es sich um ein uneigentliches Integral. Beachte die oben angegebenen Rechenregeln für unbestimmte Integrale.
  3. Wir versuchen der Reihe nach:
     (a) Kannst Du die Stammfunktion erraten?
     (b) Liegt die Struktur $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$ vor? $\longrightarrow$ Substitution.
     (c) Gibt es einen Faktor, der sich leicht integrieren lässt? $\longrightarrow$ Partielle Integration.
  4. Eventuell Resultat durch Ableiten überprüfen.
  5. Was genau verlangt die Aufgabe? Bei unbestimmten Integralen die Konstante C nicht vergessen!

- **Dichtefunktionen**

  Eine Funktion $f(x)$ heisst Dichtefunktion, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  - Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$.
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$.

4 Matrizen-Algebra

4.1 Matrizen, Vektoren

Nehmen wir an, eine Bäckerei bietet 3 verschiedene Kuchen an: Zitronencake, Schoggikuchen und Rüeblitorte. Für jeden Kuchen wird eine gewisse Menge Eier, Mehl und Zucker benötigt.

	Zitronencake	Schoggikuchen	Rüeblitorte
Eier	4	2	5
Mehl	200	250	70
Zucker	160	180	200

Solche Tabellen können kompakter geschrieben werden als

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 200 & 250 & 70 \\ 160 & 180 & 200 \end{pmatrix}.$$

Ein solches Gebilde nennen wir eine *Matrix*.

Allgemein: Eine Matrix A (Mehrzahl *Matrizen*) ist eine Anordnung von Zahlen in Tabellenform.

Seien a_{ij} beliebige Zahlen, dann ist die folgende Matrix A eine allgemeine Matrix:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right\} m \text{ Zeilen} \qquad \text{und} \qquad \dim(A) = m \times ns$$

Mit a_{ij} bezeichnet man den Eintrag in der i–ten Zeile und der j–ten Spalte. In unserem konkreten Beispiel gilt also

$$b_{11} = 4, \quad b_{13} = 5, \quad b_{32} = 180.$$

Gleichheit:

Zwei Matrizen A und B sind gleich, das heisst $A = B$, falls die Einträge gleich sind. Also

$$A = B \text{ falls } a_{ij} = b_{ij} \text{ für alle i und j.}$$

Beispiel.

$$\text{Ist } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \text{ dann gilt } A = B \text{ falls}$$

$$a_{11} = 2, a_{12} = 4, a_{21} = 3 \text{ und } a_{22} = 8.$$

Vektoren:

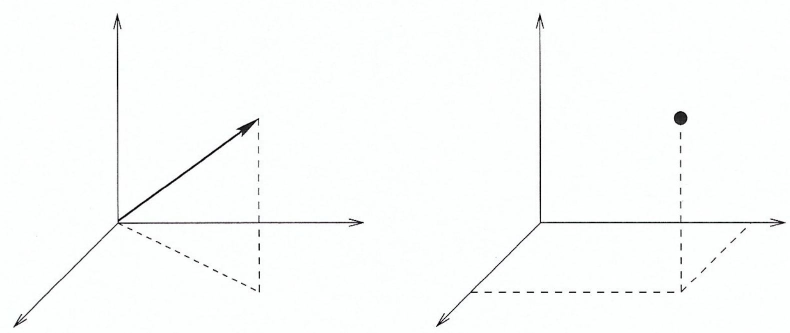
Ein *Spaltenvektor* ist eine $n \times 1$ Matrix (das heisst nur eine Spalte)

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und ein *Zeilenvektor* eine $1 \times n$ Matrix (das heisst nur eine Zeile)

$$\mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \quad \text{respektive} \quad \mathbf{w}^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das "hoch T" steht für Transponiert (siehe auch Kapitel 4.5).



Ein Vektor auf zwei verschiedene Arten aufgefasst.

Notation:

Matrizen werden mit Grossbuchstaben $A, B, \ldots$, Vektoren mit $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ respektive $\vec{v}, \vec{w}$ und Zahlen mit $a, b, c, \ldots$ gekennzeichnet.

4.2 Operationen mit Matrizen und Vektoren

Matrizen können addiert, subtrahiert oder multipliziert werden. Sie müssen aber geeignete Dimensionen haben.

(i) **Addition von Matrizen** $A + B$

Bedingung: Dimension A = Dimension B

Es werden einfach die Einträge addiert. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 12 & 42 & 33 \\ 52 & 46 & 25 \end{pmatrix}.$$

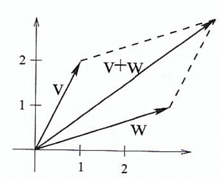
Dann gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+12 & 5+42 & 2+33 \\ 6+52 & 4+46 & 1+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 47 & 35 \\ 58 & 50 & 26 \end{pmatrix}.$$

Beispiel.

Es seien $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



(ii) **Zahl mal Matrix** $c \cdot A$

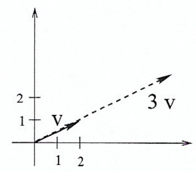
Bedingung: Keine

Jeder einzelne Eintrag der Matrix A wird mit c multipliziert.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$



(iii) **Skalarprodukt zweier Vektoren $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$**

Bedingung: Dimension $\mathbf{v}$ = Dimension $\mathbf{w}$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren der Länge n ist definiert als

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 23$$

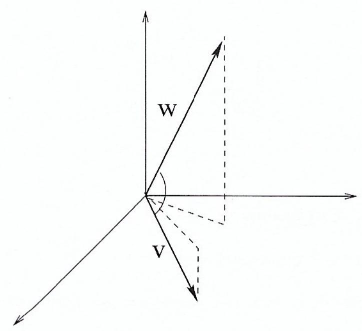
Definition. *Die Vektoren* $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ *sind* **orthogonal/senkrecht**, *falls* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, *das heisst*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n = 0.$$

Beispiel.

Sei $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 9 = 0.$$



(iii) **Matrix mal Vektor** $A \cdot \mathbf{v}$

Bedingung: Anzahl Spalten Matrix = Dimension Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1m}v_m \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \ldots + a_{nm}v_m \end{pmatrix}.$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Die Matrix mal Vektor Multiplikation ist ein Spezialfall der Matrix mal Matrix Multiplikation.

(iv) **Matrix mal Matrix** $A \cdot B$

Bedingung: Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B.

Sei A eine $n \times m$ und B eine $m \times l$ Matrix. Dann hat die Matrix AB die Dimension $n \times l$. Die Einträge von $A \cdot B$ ergeben sich wie folgt:

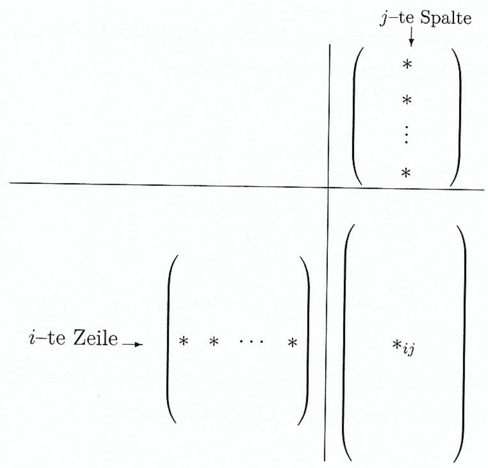
$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}}_{n \times m} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} * & & \\ * & & \\ \vdots & & \\ * & & \end{pmatrix}}_{m \times l} = \underbrace{\begin{pmatrix} * & & \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}}_{n \times l}$$

Skalarprodukt vom ersten Zeilenvektor von A mit dem ersten Spaltenvektor von B ergibt den Eintrag $(ab)_{11}$ der Matrix AB. Entsprechend gilt:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{r} \\ i\text{–te Zeile} \rightarrow \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ * & * & \cdots & * \\ & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & * & \\ & * & \\ & \vdots & \\ & * & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j\text{–te Spalte} \end{array} = \begin{pmatrix} & & \\ & *_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Skalarprodukt vom i–ten Zeilenvektor von A mit dem j–ten Spaltenvektor von B ergibt den Eintrag $(ab)_{ij}$ der Matrix AB.

Eine andere Art und Weise, sich die Matrixmultiplikation vorzustellen, ist die Folgende:



Beispiel.

- Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$AB = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4+3\cdot 2 & 2\cdot 7+3\cdot 1 \\ 1\cdot 4+6\cdot 2 & 1\cdot 7+6\cdot 1 \end{pmatrix} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}}$$

- Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$AB = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4-6\cdot 2 \\ 1\cdot 4-2\cdot 2 \\ -5\cdot 4+10\cdot 2 \end{pmatrix} = \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

- Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, dann ist $\dim A = 2 \times 3$ und $\dim B = 2 \times 2$.
  Also kann

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}$$

  nicht berechnet werden (wir können aber $B \cdot A$ berechnen).

ACHTUNG: Im Allgemeinen gilt $AB \neq BA$.

Beispiel.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 54 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$$

4.3 Spezielle Matrizen

Null-Matrix: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ Einheits-Matrix: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Was ist das Besondere an diesen Matrizen?

Beispiel.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 2 + 0\cdot 7 & 0\cdot 3 + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 2 + 0\cdot 7 & 0\cdot 3 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

  Die Nullmatrix ist so was wie die 0 unter den Matrizen. Allgemein gilt:

$$\boxed{0 \cdot A = A \cdot 0 = 0}$$

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 7 & 1\cdot 3+0\cdot 4 \\ 0\cdot 2+1\cdot 7 & 0\cdot 3+1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$

Die Einheitsmatrix I ist so was wie die 1 unter den Matrizen. Allgemein gilt:

$$\boxed{I \cdot A = A \cdot I = A}$$

ACHTUNG: Falls $AB = 0$ folgt nicht, dass $A = 0$ oder $B = 0$. Auch aus $CD = CE$ folgt nicht, dass $D = E$ (Kürzen ist nicht erlaubt!).

4.4 Inverse Matrix

Wir wissen, dass $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ gilt. $\frac{1}{2}$ wird darum *Inverses* von 2 genannt. $\frac{1}{2}$ multipliziert mit 2 ergibt also gerade die Einheit 1. Ganz ähnlich ist es bei den Matrizen. Hier existieren aber nur Inverse von quadratischen Matrizen (das heisst von Dimension $n \times n$).

Definition. *Falls $A \cdot B = I$ wird B* Inverses *von A genannt und mit A^{-1} bezeichnet:*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\cdot 1+5\cdot(-2) & 11\cdot(-5)+5\cdot 11 \\ 2\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot(-5)+1\cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das heisst für $A = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

Die inverse Matrix A^{-1} zu einer gegebenen Matrix A auszurechnen, ist zwar nicht schwierig, aber etwas mühsam, zumindest wenn die Matrizen gross sind. Auch hat nicht jede Matrix ein Inverses. Wir werden im Kapitel 5.4 darauf zurückkommen.

Rechenregeln

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} (A^{-1})^{-1} &= A \\ I^{-1} &= I \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1} \quad \rightsquigarrow \text{ACHTUNG: Reihenfolge der Matrizen wechselt.} \end{aligned}}$$

4.5 Transponierte Matrix

Wenn man eine Matrix A an der Diagonalen von oben links nach unten rechts spiegelt, dann bekommt man die *transponierte* Matrix A^T von A:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad A^T_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Beispiel.

$$\underset{3\times 2}{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}, \qquad \underset{2\times 3}{A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}}$$

Rechenregeln

Es gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} (A^T)^T &= A, & (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ I^T &= I, & (A^T)^{-1} &= (A^{-1})^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T & &\rightsquigarrow \text{ACHTUNG: Reihenfolge der Matrizen wechselt} \end{aligned}}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned}(B^{-1}A)^T(AB)^T(A^{-1})^T &= A^T(B^{-1})^T B^T A^T(A^{-1})^T = A^T(BB^{-1})^T(A^{-1}A)^T \\ &= A^T I^T I^T = A^T\end{aligned}$$

Definition.
Eine Matrix heisst symmetrisch, *falls A quadratisch ist und $A = A^T$ gilt.*

Beispiel.

Zeige, dass $C = A^{-1}BB^T(A^T)^{-1}$ symmetrisch ist.

$$\begin{aligned}C^T &= (A^{-1}BB^T(A^T)^{-1})^T = ((A^T)^{-1})^T(B^T)^T B^T(A^{-1})^T \\ &= ((A^T)^T)^{-1}BB^T(A^{-1})^T = A^{-1}BB^T(A^T)^{-1} = C\end{aligned}$$

Somit gilt $C^T = C$. Also ist C ist symmetrisch.

4.6 Determinante

Die Determinante ordnet jeder Matrix eine Zahl zu und zwar wie folgt.

- 2×2 **Matrizen:** Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

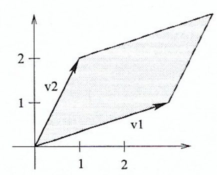
  Schematisch:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \searrow - \nearrow = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Beachte, dass $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}$ identisch ist – die Reihenfolge der Faktoren ist in der Multiplikation egal. Es ist jedoch wichtig, was in der Subtraktion vorne und hinten steht, hier gilt nur in manchen Fällen die Gleichheit (es gilt also oft $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$, was sich leicht über $3 - 2 = 1 \neq 2 - 3 = -1$ überprüfen lässt!).

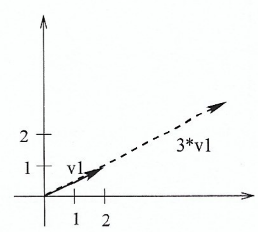
Beispiel.

(i) $\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 5$



Der Betrag der Determinante entspricht der Fläche, welche von den Spalten-Vektoren der Matrix aufgespannt wird.

(ii) $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$



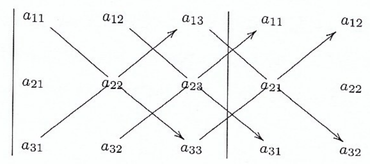
Die Spalten-Vektoren der Matrix spannen keine Fläche auf, die Determinante ist 0.

- 3×3 **Matrizen:** Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Schematisch:

$\det(A) \quad =$



$$= \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Beispiel.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -12$$

- **Allgemein:** $n \times n$ **Matrizen**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dann bezeichnen wir mit A_{ij} die Matrix, welche durch streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für die Determinante:

Definition.

$$\boxed{|A| = \det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}|}$$

Bemerkung. Dies entspricht der Entwicklung nach der ersten Zeile. Entsprechend kann auch nach einer anderen Zeile (respektive Spalte) entwickelt werden. Dabei beginnen wir mit dem Vorzeichen mit einem Plus, falls wir nach einer ungeraden Zeile (respektive Spalte) entwickeln und sonst mit einem Minus.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 8 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} - (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \cdot (-43) - 8 \cdot 30 = -455 \end{aligned}$$

Beispiel.
Die Determinante der Einheits-Matrix I ist gleich 1: $|I| = 1$, denn

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 1.$$

Eigenschaften der Determinante

- Es gilt $|AB| = |A||B|$.
- A ist invertierbar, falls $|A| \neq 0$. (Denn: $AA^{-1} = I$ und somit $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 1$, also $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, was nur geht, falls $|A| \neq 0$).

A invertierbar	$\Longleftrightarrow$	$\det A \neq 0$	$\Longleftrightarrow$	A regulär
A nicht invertierbar	$\Longleftrightarrow$	$\det A = 0$	$\Longleftrightarrow$	A singulär

Beispiel.

$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 7 - 1 \cdot 4 = 10, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, respektive regulär.

$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 4 = 0, \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ hat kein Inverses, respektive ist singulär.

4.7 Zusammenfassung

- Für zwei Matrizen A und B gleicher Dimension ist die **Summe** $A + B$ komponentenweise definiert, also z.B.:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

- Die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist ebenfalls komponentenweise definiert:

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c{\cdot}_{12} & c \cdot a_{13} \\ c \cdot a_{21} & c \cdot a_{22} & c \cdot a_{23} \end{pmatrix}.$$

- Das **Skalarprodukt** zweier gleichlanger Vektoren ist definiert als

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + \ldots + v_n \cdot w_n.$$

  Zwei Vektoren sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist.

- Das **Produkt** $A \cdot B$ einer $n \times m$–Matrix A mit einer $p \times q$–Matrix B ist nur dann definiert, wenn $m = p$ gilt, z.B.:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

  Hierbei ist zu beachten, dass im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$ ist!

- Die **inverse Matrix** A^{-1} einer Matrix A ist definiert als diejenige Matrix, welche mit A multipliziert die Einheitsmatrix ergibt:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

  Wenn zu A eine inverse Matrix A^{-1} existiert, sagt man, dass A "invertierbar" ist.

- Spiegelt man eine Matrix A an der Diagonalen, welche oben links startet, so erhält man die **transponierte Matrix** A^T:

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \qquad A^T_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Rechenregeln für inverse und transponierte Matrizen:
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
  - $(A + B)^T = A^T + B^T$
  - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

- Die **Determinante** einer 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ berechnet sich als

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

  Determinanten von Matrizen höherer Dimension können durch eine Entwicklung nach der ersten Zeile berechnet werden:

$$|A| = \det(A) = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}|A_{1n}|.$$

  Hierbei bezeichnet A_{1j} die Teilmatrix, die man aus A erhält, wenn man die erste Zeile und die j-te Spalte streicht. Alternativ kann auch nach einer anderen Zeile entwickelt werden. Dann muss jedoch beachtet werden, dass das erste Vorzeichen ein $+$ ist, falls nach einer ungeraden Zeile entwickelt wird und ein $-$ ist, falls nach einer geraden Zeile entwickelt wird.
  Eine Matrix ist genau dann invertierbar (respektive **regulär**) wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

- Rechenregeln für Determinanten:
  - $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
  - $\det(A^T) = \det(A)$.
  - $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

- Singulär vs. regulär

  Regularität

  - $\text{rg}(A) \leq m, n \rightarrow$ Rang kann maximal sein
  - A^{-1} existiert
  - $\det(A) \neq 0$
  - alle Spalten können voneinander linear unabhängig sein

  Singularität

  - $\text{rg}(A) < m, n \rightarrow$ Rang kann nicht maximal sein
  - A^{-1} existiert nicht
  - $\det(A) = 0$
  - mindestens 2 Spalten sind linear abhängig

5 Lineare Gleichungssysteme

Kommen wir nochmals zurück auf unser Beispiel der Bäckerei, welche 3 verschiedene Kuchen anbietet. Für jeden Kuchen wird eine gewisse Menge Eier, Mehl und Zucker benötigt. Die Bäckerei hat noch 200 Eier, 10kg Mehl und 15kg Zucker an Lager. Wie viele Zitronencakes, Schoggikuchen und Rüeblitorten sollen gebacken werden, damit am Schluss möglichst wenig im Lager übrig bleibt?

	Zitronencake	Schoggikuchen	Rüeblitorte
Eier	4	2	5
Mehl	0.2	0.25	0.07
Zucker	0.16	0.18	0.2

Optimal benötigen wir für x_1 Zitronencakes, x_2 Schoggikuchen und x_3 Rüeblitorten

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 &+ 2 \cdot x_2 &+ 5 \cdot x_3 &= 200 \quad \text{Eier} \\ 0.2 \cdot x_1 &+ 0.25 \cdot x_2 &+ 0.07 \cdot x_3 &= 10 \quad \text{Mehl} \\ 0.16 \cdot x_1 &+ 0.18 \cdot x_2 &+ 0.2 \cdot x_3 &= 15 \quad \text{Zucker} \end{aligned}$$

Ein solches Gleichungssystem wird *Lineares Gleichungssystem* genannt; Linear, weil die x_i in keiner Potenz oder sonstigen Funktion vorkommen. Jedes solche Gleichungssystem kann in eine Matrix-Form gebracht werden. In unserem Beispiel wäre dies

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0.2 & 0.25 & 0.07 \\ 0.16 & 0.18 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

In diesem Kapitel werden wir lernen, wie ein solches Gleichungssystem gelöst werden kann, ohne dass man die einzelnen Gleichungen umformt. Wir betrachten also Gleichungssysteme der Form:

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

wobei die Matrix A und der Vektor $\mathbf{b}$ gegeben sind, und der Vektor $\mathbf{x}$ gesucht wird.

Wir werden zwei Methoden kennen lernen:

- Cramer'sche Regel (Spezialfall A quadratisch, regulär)
- Gauss'scher Algorithmus (Allgemeiner Fall)

5.1 Spezialfall: reguläre, quadratische Matrix (Cramer'sche Regel)

Sei ein lineares Gleichungssystem in Matrizenform gegeben:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

wobei A eine reguläre $n \times n$–Matrix ist (das heisst $\det(A) \neq 0$). Somit existiert A^{-1} und es gibt genau eine Lösung für $\mathbf{x}$, nämlich

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Es ist nun gar nicht nötig, die Inverse der Matrix A zu berechnen, denn wir können die Cramer'sche Regel anwenden:

j-te Spalte der Matrix A durch $\mathbf{b}$ ersetzen

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Da im Nenner die Determinante der Matrix A vorkommt, darf diese nicht Null sein. Darum darf man die Cramer'sche Regel nur im regulären Fall anwenden!

Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 5 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 6 \cdot 2 = 84 \\
\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} &= 5 \cdot 6 \cdot 1 - 2 \cdot 6 \cdot 2 = 6 \\
\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 2 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 6 \cdot 1 = 30 \\
\det \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= 5 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 1 = 82
\end{aligned}$$

Es folgt mit der Cramer'schen Regel, dass

$$x_1 = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}, \qquad x_2 = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}, \qquad x_3 = \frac{82}{84} = \frac{41}{42}.$$

5.2 Allgemeiner Fall (Gauss'scher Algorithmus)

Im allgemeinen Fall wenden wir den Gauss'schen Algorithmus an, um das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ zu lösen.

Sei A eine $m \times n$–Matrix sowie $\mathbf{x}$ und $\mathbf{b}$ zwei n–dimensionale Spaltenvektoren. Wir betrachten folgendes allgemeines Gleichungssystem in Matrizenform:

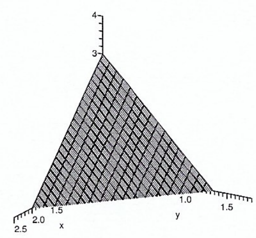
$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Wir müssen uns zuerst überlegen, dass ein solches System entweder

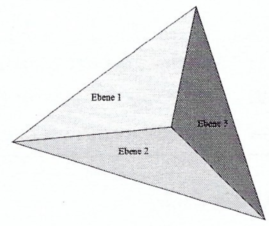
- keine Lösung
- genau eine Lösung oder
- unendlich viele Lösungen

haben kann, und wann welcher Fall eintritt.

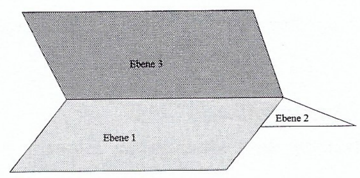
Wir betrachten die Gleichung $2 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 4$. Sie beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.



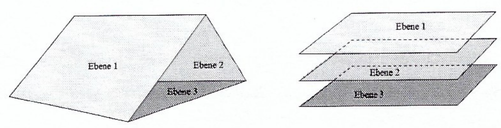
Wenn wir nun mehrere Gleichungen haben, sind das mehrere Ebenen im $\mathbb{R}^3$, welche sich schneiden können, oder auch nicht. Angenommen, wir haben 3 Ebenen, dann gibt es 3 Fälle:



1) Die 3 Ebenen schneiden sich in einem Punkt.



2) Die Ebenen schneiden sich in einer Gerade.



3) Die 3 Ebenen haben keinen gemeinsamen Punkt.

Entsprechend gibt es 3 Möglichkeiten, wie viele Lösungen das Gleichungssystem haben kann:

1) genau eine Lösung (sie schneiden sich in genau einem Punkt)

2) unendlich viele Lösungen (sie schneiden sich entlang einer Gerade)

3) keine Lösungen (die Ebenen schneiden sich nicht)

Der Gauss'sche Algorithmus gibt uns an, welcher Fall eintritt (siehe Gauss'scher Algorithmus, Schritt 2).

Gauss'scher Algorithmus

Schritt 1:	Aufschreiben der Matrix $(A\|\mathbf{b})$
Schritt 2:	Umformen der Matrix $(A\|\mathbf{b})$
Schritt 3:	Herauslesen der Lösung(en)

Schritt 1: Aufschreiben der Matrix $(A|\mathbf{b})$

Statt nur A betrachten wir die Matrix

$$(A|\mathbf{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Der Strich in der Matrix dient nur der Übersicht und hat keine mathematische Bedeutung.

Schritt 2: Umformen der Matrix $(A|\mathbf{b})$

Ziel: Die Matrix $(A|\mathbf{b})$ so umformen, dass wir ungefähr folgende Form bekommen:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

Ein Sternchen ist steht hierbei als Platzhalter für einen beliebigen Wert. Es können auch mehrere Nullzeilen am Schluss stehen oder gar keine. Auch die Spalten welche nur Sternchen enthalten müssen nicht vorkommen.

Genauer gibt es drei Fälle:

Fall 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & * \end{array}\right)$$

Genau eine Lösung

oder

Fall 2

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \underbrace{* & \cdots & *}_{n\text{–mal}} & * \end{array}\right)$$

Unendlich viele Lösungen,
n frei wählbare Parameter

oder

Fall 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & & * \\ 0 & 1 & \cdots & & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & * \end{array}\right)$$

Keine Lösung

Um diese Matrix-Formen zu erreichen, sind folgende Operationen erlaubt:

- Eine Zeile mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$ multiplizieren
- Ein beliebiges Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile dazu addieren oder subtrahieren
- Zeilen vertauschen

Schritt 3: Herauslesen der Lösungen $x_1, \ldots, x_n$
Wir lesen aus unserer Darstellung wieder das Gleichungssystem heraus und lösen es von unten her auf, d.h. wir beginnen mit dem Auflösen nach x_n, setzen diese Lösung in der zweitletzten Gleichung ein und lösen nach x_{n-1} auf etc. So erhalten wir alle Lösungen.

Wir lösen nun mehrere Beispiele zur Veranschaulichung.

Beispiel.
Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

Schritt 1: Aufschreiben der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Umformen der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Herauslesen der Lösungen:

Aufschreiben des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ & & x_2 & = & 7 \end{array}$$

Rückwärts auflösen:

$$x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 + 2 \cdot 7 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -10.$$

Als Lösung erhalten wir somit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Beispiel.
Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

Schritt 1: Aufschreiben der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Umformen der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right) \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Herauslesen der Lösungen:

Aufschreiben des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Rückwärts auflösen: Da x_2 beliebig gewählt werden kann, setzen wir $x_2 = t$ für eine Variable t und erhalten

$$x_1 + 2 \cdot t = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - 2t.$$

Als Lösung erhalten wir somit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel.
Zu lösen ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 7 \end{array}$$

Schritt 1: Aufschreiben der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Umformen der Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right) \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Herauslesen der Lösungen:

Aufschreiben des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \\ & & 0 & = & -1 \end{array}$$

Da die letzte Gleichung ein Widerspruch ist, gibt es keine Lösung.

Beispiel.
Wir betrachten folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & & & + & 8x_4 & = & -8 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \quad \text{respektive} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: $(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$

Schritt 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 0 & 8 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\cdot\frac{1}{2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right) \overset{\mathrm{II}\cdot\frac{1}{3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III}\cdot(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Wir sind im Fall 2 gelandet und haben nun folgendes äquivalentes Gleichungssystem erhalten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & + & 4x_4 & = & -4 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & + & x_4 & = & \frac{8}{3} \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir haben 3 Gleichungen, aber 4 Unbekannte. Darum können wir x_4 frei wählen und setzen $x_4 = t$. Dann erhalten wir:

$$x_3 = 4 - 3t \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3} - t - \frac{2}{3}(4 - 3t) = t \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4 - 4t + 2(t) = -4 - 2t$$

Zusammengefasst:

$$\begin{array}{rcr} x_1 & = & -4 - 2t \\ x_2 & = & t \\ x_3 & = & 4 - 3t \\ x_4 & = & t \end{array} \qquad \text{respektive} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel.
Angenommen, es sind zwei Gleichungssysteme von der Form

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_1 \qquad \text{und} \qquad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

gegeben. Sie unterscheiden sich also nur in der rechten Seite. Dann können diese Gleichungssysteme gleichzeitig gelöst werden. Sei

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Schritt 1: Aufstellen der Matrix $(A|\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2)$

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

Wir schreiben gleich beide Resultate hin, haben nun also zwei Zeilen nach dem Strich. Nun lösen wir wie gewohnt auf.

Schritt 2:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 5 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II}-2\text{I} \\ \text{III}-\text{I}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{II}:(-3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -7 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}+7\cdot\text{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{array}\right) \overset{-3\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Der Fall 1 ist aufgetreten, wir haben also bei beiden Gleichungssystemen genau eine Lösung.

Schritt 3: Wir schreiben die beiden Gleichungssysteme wieder auf:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & -\frac{2}{3} \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \quad \text{respektive} \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & + & \frac{2}{3}x_3 & = & -\frac{2}{3} \\ & & & & x_3 & = & 5 \end{array}$$

Für das erste Gleichungssystem erhalten wir:

$$x_3 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) = 3.$$

Für das zweite Gleichungssystem erhalten wir:

$$x_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot 5 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-4) = 0.$$

Zusammengefasst:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Beispiel.
Es ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & & 2x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & 5x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & (c^2+3)x_4 & = & c+3 \end{array}$$

Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem keine, genau eine respektive unendlich viele Lösungen?

Gauss'scher Algorithmus:

Schritt 1:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & c^2+3 & c+3 \end{array}\right)$$

Schritt 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & c^2+3 & c+3 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{II}-\text{I} \\ \text{IV}-3\text{I}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & c^2-3 & c \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{III}-\text{II} \\ \text{IV}+\text{II}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & c^2 & c \end{array}\right) \overset{\text{IV}-\text{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c^2-1 & c-1 \end{array}\right)$$

Schritt 3:

Dies entspricht dem folgenden Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & + & 2x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & & (c^2-1)x_4 & = & c-1 \end{array}$$

Wir erhalten

- **genau eine Lösung**, falls $c^2 - 1 \neq 0$, weil wir dann die letzte Gleichung auflösen können und erhalten

$$x_4 = \frac{c-1}{c^2-1} = \frac{c-1}{(c-1)(c+1)} = \frac{1}{c+1}$$

und somit

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 - \frac{1}{c+1} = \frac{c+1-1}{c+1} = \frac{c}{c+1} \\ x_2 &= 0 - 3 \cdot \frac{1}{c+1} = \frac{-3}{c+1} \\ x_1 &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{c+1} = \frac{c-1}{c+1}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-1}{c+1} \\ \frac{-3}{c+1} \\ \frac{c}{c+1} \\ \frac{1}{c+1} \end{pmatrix}.$$

- **unendlich viele Lösungen**, falls $c - 1 = 0$ und $c^2 - 1 = 0$, weil dann x_4 frei wählbar ist. Wir setzen $x_4 = t$ für eine Variable t.

  Somit erhalten wir

  $$x_3 = 1 - t, \quad x_2 = -3t, \quad x_1 = 1 - 2t.$$

  respektive

  $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- **keine Lösung**, falls $c^2 - 1 = 0$ und $c - 1 \neq 0$, also falls $c + 1 = 0$ respektive $c = -1$. In diesem Fall lautet die letzte Gleichung

  $$0 = -2$$

  was ein Widerspruch ist.

5.3 Rang einer Matrix

Wir werden später noch den **Rang** $\text{rg}(A)$ einer Matrix A benötigen. Dieser entspricht gerade der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren der Matrix (siehe Kapitel 5.5) und es gilt

$$\boxed{\text{rg}(A) = \begin{array}{l}\text{Anzahl Nicht-Nullzeilen in der Matrix } A, \\ \text{NACH der Anwendung des Gauss'schen Algorithmus}\end{array}}$$

Für den Zusammenhang zwischen Determinante und Rang einer Matrix gilt:

$$\begin{aligned} &\textit{det} = 0 \;\Rightarrow\; \textit{Rang ist nicht maximal} \\ &\textit{det} \neq 0 \;\Rightarrow\; \textit{Rang ist maximal} \end{aligned}$$

Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. Wenden wir den Gauss'schen Algorithmus an, bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{I}-\text{II}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{II}-3\cdot\text{I} \\ \text{III}-5\cdot\text{I}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{III}-\text{II} \\ (-1)\cdot\text{II}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten eine Null-Zeile und zwei Nicht-Nullzeilen. Somit ist

$$\text{rg}(A) = 2.$$

Mit Hilfe des Ranges können lineare Abhängigkeiten bestimmt werden (siehe Kapitel 5.5). Weiter können wir anhand des Ranges die Anzahl Lösungen von einem Gleichungssystem bestimmen:

- $\text{rg}(A|\mathbf{b}) = \text{rg}(A)$ und $\begin{cases} \text{rg}(A) = n & \text{1 Lösung} \\ \text{rg}(A) < n & \infty \text{ viele Lösungen} \end{cases}$

- $\text{rg}(A|\mathbf{b}) \neq \text{rg}(A)$ Keine Lösung

5.4 Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix A

Um die Inverse A^{-1} einer Matrix A zu berechnen, benutzt man den Gauss'schen Algorithmus, um die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \quad \text{in die Matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

umzuformen. Auf der rechten Seite vom Strich steht dann gerade A^{-1}. Geht diese Umformung nicht, dann existiert A^{-1} nicht!

$$\boxed{(A|I\,) \quad \overset{GA}{\longleftrightarrow} \quad (I\,|A^{-1})}$$

Beispiel.

Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Berechne die Inverse A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I-III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{III-3\cdot I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{\mathrm{II+6\cdot III} \\ \mathrm{I-III}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -18 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse einer 2×2–Matrix:

Die Inverse einer 2×2–Matrix ist einfach zu bestimmen:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

Beispiel.
Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{2-21} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

5.5 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Es seien 3 Vektoren gegeben:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Können wir einen der Vektoren mit Hilfe der anderen Vektoren ausdrücken?

Allgemein: Angenommen wir haben n Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Können wir einen den Vektoren anhand der anderen ausdrücken?

- Ja: Die Vektoren sind *linear abhängig*. Das heisst, es gibt Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$, so dass

  $$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = 0, \qquad \text{wobei nicht alle } a_i \text{ Null sind.}$$

- Nein: Die Vektoren sind *linear unabhängig / nicht linear abhängig*. Das heisst, es gibt KEINE Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_n$, so dass

  $$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + a_n \cdot \mathbf{v}_n = 0, \qquad \text{ausser alle } a_i = 0.$$

Beispiel.
Betrachten wir unser Anfangsbeispiel von oben. Es seien 3 Vektoren gegeben:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir müssen uns überlegen, ob es Zahlen a_1, a_2 und a_3 gibt, so dass

$$a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + a_3 \cdot \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot a_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot a_2 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $a_1 = -1$ und $a_2 = a_3 = 1$, dann sehen wir, dass

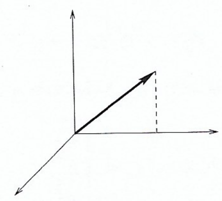
$$-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = -\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5-2 \\ -2+1+1 \\ -4+3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also haben wir eine lineare Abhängigkeit unter den Vektoren.

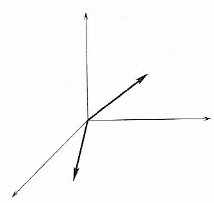
Geometrische Bedeutung von linearer Unabhängigkeit

Wie können wir uns die lineare Unabhängigkeit vorstellen?

Nehmen wir den Vektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.



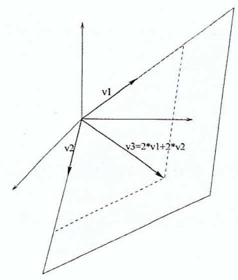
Nun nehmen wir einen zweiten Vektor dazu, sagen wir $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zusammen erhalten wir



Die zwei Vektoren spannen zusammen eine Ebene auf, welche beschrieben wird durch

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } a_1, a_2 \text{ beliebige Werte annehmen können.}$$

Betrachten wir nun noch einen dritten Vektor, sagen wir $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$:

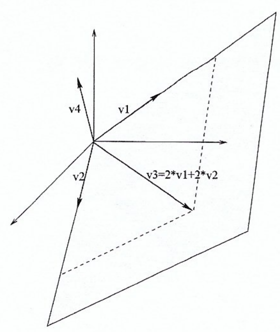


Dieser Vektor v_3 liegt nun in der Ebene, welche von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannt wird. Somit gibt es a_1', a_2', so dass

$$a_1'\mathbf{v}_1 + a_2'\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3.$$

Der Vektor $\mathbf{v}_3$ ist also linear abhängig von den Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$.

Betrachten wir schliesslich noch den Vektor $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$:



Dieser Vektor liegt NICHT in der Ebene welche von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aufgespannt wird und somit sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_4$ linear unabhängig voneinander.

Wie finden wir heraus, ob Vektoren linear abhängig sind oder nicht?

Seien n Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ gegeben. Wir schreiben diese in eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix}:$$

Dann sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$

- **linear unabhängig, falls** $\det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \neq 0$ **oder** $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = n$
- **linear abhängig, falls** $\det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = 0$ **oder** $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} < n$

ACHTUNG: Die Determinante kann nur berechnet werden, falls die Matrix quadratisch ist. Sonst muss die Unabängigkeit via Rang berechnet werden. In der Prüfung geht es fast immer mit der Determinanten!

Beispiel.
Bestimme, welche der Vektorsysteme a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{e}\}$, c) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ sowie e) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ linear unabhängig, respektive linear abhängig sind, wobei

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{e} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Zu a) und b): Zwei Vektoren sind linear abhängig, falls sie ein Vielfaches voneinander sind.

Zu a): Da $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht Vielfache voneinander sind, ist das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ linear unabhängig.

Zu b): Da $\mathbf{e} = -3 \cdot \mathbf{a}$, ist das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{e}\}$ linear abhängig.

Zu c) und d): Die Dimension der Vektoren stimmt mit der Anzahl Vektoren des Vektorsystems überein, das heisst, wir können die Determinante berechnen.

Zu c):

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 4\cdot 5\cdot 1 + 7\cdot 1\cdot 5 + 0\cdot 3\cdot 9 - 0\cdot 5\cdot 5 - 4\cdot 1\cdot 9 - 7\cdot 3\cdot 1 \\ &= -2\end{aligned}$$

und somit ungleich 0 ist, ist das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear unabhängig.

Zu d):

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{d} \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \\ &= 4\cdot 5\cdot 4 + 7\cdot 2\cdot 5 + 3\cdot 3\cdot 9 - 3\cdot 5\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 9 - 7\cdot 3\cdot 4 \\ &= 0\end{aligned}$$

und somit ist das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ linear abhängig.

Zu e): Falls es mehr Vektoren als Dimensionen hat, sind sie immer linear abhängig.

Da es 4 Vektoren sind, die Vektoren aber von Dimension 3 sind, muss das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ linear abhängig sein.

Zusammengefasst:

- Zwei Vektoren sind linear abhängig, falls gilt $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$ für ein beliebiges λ.
- Ein Vektorsystem von n Vektoren der Dimension n kann mit der Determinante leicht überprüft werden.
- Ein System von $n+1$ Vektoren der Dimension n ist immer linear abhängig.
- Enthält ein System den Null-Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist es immer linear abhängig.

5.6 Vektorraum

Die Ebene ist ein spezieller Fall von einem Vektorraum. Angenommen wir haben n Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Dann ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren ein Vektorraum:

$$\{a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \mid a_i \in \mathbb{R}\} \text{ ist ein Vektorraum } V \text{ aufgespannt von } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n.$$

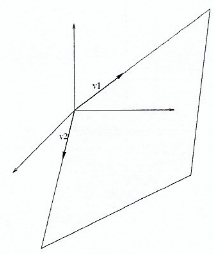
Definition.
Sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *linear unabhängig, so nennt man die Menge* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *eine* **Basis** *des Vektorraums* V *und die Dimension von* V *ist gerade* n. *Die Basis heisst* **orthogonale Basis**, *falls die Vektoren zusätzlich zueinander orthogonal sind.*

Beispiel.

Betrachten wir erneut das Beispiel von oben. Sei also $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese zwei Vektoren sind linear unabhängig voneinander (sonst müsste einer der Vektoren ein Vielfaches des anderen sein). Sie bilden also eine Basis für den Vektorraum

$$\left\{ a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

was der Ebene von oben entspricht.



Beispiel.

Für welche p bilden die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Wir berechnen die Determinante, welche nicht Null sein darf, damit die Vektoren linear unabhängig sind.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \cdot 0 + p \cdot 2 \cdot 1 - p \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 5 = 13 + 2p$$

Somit bilden die drei Vektoren eine Basis, falls $p \neq -\frac{13}{2}$.

5.7 Eigenwerte, Eigenvektoren

Sei eine quadratische Matrix A gegeben. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}}$$

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, welche diese Gleichung erfüllen, nennt man **Eigenvektor** respektive **Eigenwert** der Matrix A. Natürlich hat nicht jede Matrix Eigenwerte resp. Eigenvektoren.

Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Betrachten wir erneut das folgende Gleichungssystem:

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x},$$

und formen wir dieses etwas um

$$\begin{aligned} A \cdot \mathbf{x} &= \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda I \cdot \mathbf{x} \\ A \cdot \mathbf{x} - \lambda I \cdot \mathbf{x} &= 0 \\ (A - \lambda I) \cdot \mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung $\mathbf{x} \neq 0$, falls $A - \lambda I$ NICHT invertierbar ist, respektive falls $\det(A - \lambda I) = 0$ gilt.

Schritt 1: Bestimmung der Eigenwerte

Löse die Gleichung
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
nach λ auf. Man erhält $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Schritt 2: Bestimmung der Eigenvektoren

Löse folgende Gleichungen nach $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ auf.
(Entweder direkt, oder mit Gauss'schem Algorithmus)

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x}_1 &= 0 && \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } \mathbf{x}_1 \text{ zu Eigenwert } \lambda_1. \\ &\vdots \\ (A - \lambda_n I) \cdot \mathbf{x}_n &= 0 && \rightsquigarrow \text{Eigenvektor } \mathbf{x}_n \text{ zu Eigenwert } \lambda_n. \end{aligned}$$

Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Schritt 1: Wir lösen die Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 \cdot 1 = 0$$

Wir erhalten die Quadratische Gleichung

$$-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4 = 0, \qquad \text{respektive} \qquad \lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$$

Auflösen der Gleichung ergibt

$$\text{Erster Eigenwert:} \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1+24}}{2} = 3$$

$$\text{Zweiter Eigenwert:} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1+24}}{2} = -2$$

Schritt 2: Bestimmung des ersten Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ zum ersten Eigenwert $\lambda_1 = 3$:

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2-3 & 4 \\ 1 & -1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauss'sches Eliminationsverfahren liefert

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{II+I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{(-1)\cdot\text{I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und wir erhalten die Gleichung

$$x - 4y = 0 \qquad \text{respektive} \qquad x = 4y.$$

Wir setzen $y = c$ und erhalten den Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ zum Eigenwert λ_1

$$\mathbf{x}_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung des zweiten Eigenvektors $\mathbf{x}_2$ zum zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -2$:

$$(A - \lambda_2 I) \cdot \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2+2 & 4 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben das Gleichungssystem wieder auf

$$\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 4y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0. \end{array}$$

Die erste Gleichung lässt sich in die Zweite umformen. Wir setzen $y = c$ und erhalten $x = -c$. Somit ist der Eigenvektor $\mathbf{x}_2$ zum Eigenwert λ_2

$$\mathbf{x}_2 = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Schritt 1: Bestimme die Eigenwerte.

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda) + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot (-1) \\
&\quad -1 \cdot (1-\lambda) \cdot 1 - (1-\lambda) \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 \cdot (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) \\
&= (1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) \\
&= (1-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus $\det(A - \lambda I) = 0$ die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

Schritt 2: Bestimme die Eigenvektoren.
Bestimmung des ersten Eigenvektors $\mathbf{v}_1$: Wir müssen folgende Gleichung lösen.

$$(A - \lambda_1 I) \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \text{ respektive } \begin{pmatrix} 1-1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Gauss'schen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{III}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{III}\leftrightarrow\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\mathrm{II}:2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\mathrm{I}+\mathrm{II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir setzen $z = c$ und erhalten

$$x = y = -\frac{1}{2}\,z = -\frac{1}{2}\,c\,.$$

Somit ist der Eigenvektor zum Eigenwert 1 gegeben durch

$$\mathbf{v}_1 = c \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog berechnet man die Eigenvektoren zu den Eigenwerten 0 und 2. Als Lösung erhält man

$$\mathbf{v}_2 = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_3 = c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Als Eigenvektor erhalten wir immer Vektoren der Form

$$c \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}.$$

Das heisst, dieser Vektor kann durch c beliebig gestreckt oder gekürzt werden. Nur die Richtung des Vektors zählt.

5.8 Zusammenfassung

- **Lineare Gleichungssysteme** (LGS) haben allgemein die Form

$$\boxed{A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

wobei die Matrix A und der Vektor $\mathbf{b}$ gegeben sind und der Lösungsvektor $\mathbf{x}$ gesucht wird.

- Ist A eine reguläre Matrix, so kann das LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ durch Anwendung der **Cramer'schen Regel** gelöst werden. Der j-te Eintrag im Lösungsvektor $\mathbf{x}$ kann berechnet werden, indem man in der Matrix A die j-te Spalte durch den Vektor $\mathbf{b}$ ersetzt. Die Determinante dieser Matrix geteilt durch die Determinante von A ergibt x_{kj}:

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

- Im allgemeinen Fall kann ein LGS immer durch die Anwendung des **Gauss'schen Algorithmus** gelöst werden:

Schritt 1:	Aufschreiben der Matrix $(A|\mathbf{b})$
Schritt 2:	Umformen der Matrix $(A|\mathbf{b})$
Schritt 3:	Herauslesen der Lösung(en)

Die Herausforderung hierbei liegt im Schritt 2, in welchem die Matrix auf "Dreiecksgestalt" gebracht werden soll. Hierbei sind nur folgende elementare Zeilenoperationen erlaubt:

- Eine Zeile mit einer beliebigen Zahl $\neq 0$ multiplizieren
- Ein beliebiges Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile dazu addieren oder subtrahieren
- Zeilen vertauschen

- Der **Rang einer Matrix** A, $\text{rg}(A)$, ist definiert als die Anzahl der Nicht-Nullzeilen in A nach Anwendung des Gauss'schen Algorithmus. Ist A eine $n \times n$–Matrix, so kann mit Hilfe des Ranges die Anzahl der Lösungen des LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ bestimmt werden:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{rg}(A|\mathbf{b}) = \mathrm{rg}(A) = n & \Rightarrow & \text{Genau eine Lösung} \\ \mathrm{rg}(A|\mathbf{b}) = \mathrm{rg}(A) < n & \Rightarrow & \text{Unendlich viele Lösungen} \\ \mathrm{rg}(A|\mathbf{b}) \neq \mathrm{rg}(A) & \Rightarrow & \text{Keine Lösung} \end{array}$$

- Die **Inverse** A^{-1} zu einer Matrix A kann berechnet werden, indem man die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right) \quad \text{in die Matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

überführt. Dabei dürfen lediglich die selben elementaren Zeilenoperationen wie beim Gauss'schen Algorithmus verwendet werden.

- Für reguläre 2×2–Matrizen existiert eine einfache Formel zur Berechnung der Inversen:

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}$$

- Seien $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ Vektoren gleicher Länge. Die Vektoren heissen **linear abhängig**, wenn es Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, die nicht alle Null sind, so dass

$$a_1 \cdot \mathbf{v_1} + a_2 \cdot \mathbf{v_2} + \ldots + a_n \cdot \mathbf{v_n} = 0.$$

Existieren solche Zahlen nicht, heissen $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ **linear unabhängig**.

- Die Vektoren $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}$ sind

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{linear unabhängig, falls} & \det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \neq 0 \ \textbf{oder} \ \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = n \\ \\ \textbf{linear abhängig, falls} & \det\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = 0 \ \textbf{oder} \ \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{pmatrix} < n \end{array}}$$

- Eine **Basis** ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$. Die Linearkombinationen der Vektoren spannen einen Vektorraum auf.

- Betrachte das Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$.
  Jeder Vektor $\mathbf{x}$ der diese Gleichung für eine beliebige Zahl λ erfüllt, heisst **Eigenvektor** von A. Jede Zahl λ die die Gleichung für einen beliebigen Vektor $\mathbf{x}$ erfüllt, heisst **Eigenwert** von A.

- Eigenwerte und Eigenvektoren können wie folgt berechnet werden:

  1. Löse die Gleichung $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ nach λ auf.
  2. Die Ergebnisse $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sind die Eigenwerte von A.
  3. Löse für alle i von 1 bis n die Gleichungen $(A - \lambda_i \cdot I) \cdot \mathbf{x_i} = 0$. $\mathbf{x_i}$ ist dann ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i.

Stichwortverzeichnis

A

Abhängigkeit, lineare 72
Addition Matrizen 36
Allgemeine Matrix 34
Anfangswert 15

B

Basis 77
Basis, orthogonale 77
Bestimmtes Integral 24

C

Cramer'sche Regel 54

D

Determinante 45
Determinante, allgemeine 46
DGL 15
Dichtefunktion 31
Differenzengleichung 15
Differenzengleichung, Lösungsformel 15
Differenzengleichung, Lösungsverhalten 17

E

Eigenschaften Determinante 49
Eigenvektor 79
Eigenwert 79
Einheits-Matrix 41, 48
explosiv 17, 19, 22
Extrema unter Nebenbedingungen 4
Extrema von Funktionen zweier Variablen 1

G

GA 56
Gauss'scher Algorithmus 54, 56
Gauss'scher Algorithmus, Operationen 59
gedämpft 17f, 22
Gleichheit von Matrizen 35
Gleichungssystem, Lösungen 57
Gleichungssystem, lineares 53
grösster Anstieg 9
Gradient 9
Gradient, Eigenschaften 9

H

Hinreichende Bedingung (Lagrange) 6
Homogene Funktion 12

I

Integral 23
Integral, bestimmtes 24
Integral, Eigenschaften 24
Integral, unbestimmt 23
Integral, uneigentlich 29
Integration, partielle 25
Integrationsgrenzen 24
Integrationskonstante 23
Inverse Matrix 42, 70
invertierbar 49

K

konvergent 17, 22
kritische Stelle 2

L

Lösungsformel DGL 15
Lösungsverhalten DGL 17
Lagrange'sche Multiplikatorenregel 6
Lagrange-Funktion 6
LGS 53
linear abhängig 72
linear unabhängig 72
Lineare Abhängigkeit 72
Lineare Differenzengleichung 15
Lineare Unabhängigkeit 72
Lineares Gleichungssystem 53

M

Matrix . . . 34
Matrix mal Matrix . . . 39
Matrix mal Vektor . . . 38
Matrix, allgemeine . . . 34
Matrix, Inverse . . . 70
Matrix, symmetrische . . . 44
Matrix, transponiert . . . 43
Matrix-Form . . . 53
Matrixmultiplikation . . . 39
Matrizen . . . 34
Matrizen, spezielle . . . 41
Maximum . . . 2
Minimum . . . 2
monoton . . . 17f, 22

N

Nebenbedingung . . . 4
Normalform . . . 15
Notation . . . 36
Notwendige Bedingung (Lagrange) . . . 6
Notwendige Bedingung für Extrema . . . 1
Null-Matrix . . . 41

O

Operationen Gauss'scher Algorithmus . . . 59
orthogonal . . . 37
Orthogonale Basis . . . 77
oszillatorisch . . . 17ff, 22

P

Partielle Ableitung . . . 1
Partielle Integration . . . 25

R

Rang . . . 68
Rechenregeln Inverse Matrix . . . 43
Rechenregeln Transponierte Matrix . . . 43
regulär . . . 49

S

Sattelpunkt . . . 2
senkrecht . . . 37
singulär . . . 49
Skalarprodukt . . . 37
Spalte . . . 34
Spaltenvektor . . . 35
Stammfunktion . . . 23
Substitution . . . 26
symmetrisch . . . 44

T

transponiert . . . 35, 43
Transponierte Matrix . . . 43

U

Unabhängigkeit, lineare . . . 72
Unbestimmtes Integral . . . 23
Uneigentliches Integral . . . 29

V

Vektor, Vektoren . . . 35
Vektorraum . . . 77
Vektorsystem . . . 75

Z

Zahl mal Matrix . . . 36
Zeile . . . 34
Zeilenvektor . . . 35
Zielfunktion . . . 4