Teil I: Offene Aufgaben (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (5 Punkte)

Sei $q(x) = \frac{5x+2}{3x-10}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

Für welche Werte von x konvergiert die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \cdot q(x)^k$?

(b) (7 Punkte)

Eine Kreditnehmerin leiht sich $P = 2'500'000$ CHF, um ihr Haus zu finanzieren. Sie kann jährliche Zahlungen in Höhe von $C = 50'000$ CHF aufbringen. Der jährliche Zinssatz liegt bei $i = 1\%$. Wie lange benötigt die Kundin, um das Darlehen zurückzuzahlen, wenn die Zahlungen zum Ende des Jahres stattfinden?

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x+6}.$$

(d1) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4x+4)}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4x+4)}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Verwenden Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert von $f(0,1)$ zu bestimmen.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq x^4.$$

(b) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \quad D_f \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 3e^{2ax+by+5}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) (8 Punkte)

Die Kurve C in der xy-Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$C \ : \ x^2 + 5xy + 12y - a = 0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P = (c, c)$ zur Kurve gehört und die Steigung der Tangente an C in P -1 beträgt.

(d1) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = (aK^{0,25} + A^{0,75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Bestimmen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

(d2) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = (aK^{0,25} + A^{0,75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 16)$ gleich $-\frac{4}{3}$?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = \text{„}\frac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“}$$
$$B(x) = \text{„}x \text{ ist eine gerade Zahl“}.$$

Welche der Aussagen ist wahr:

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

(d) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind konvergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - (-1)^n\, b_n$.

Dann gilt:

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $a_n > 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \ln(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(d) Keine der vorangegangenen Antworten ist richtig.

Frage 4 (2 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und z ahlt $1'000'000$ CHF in 10 Jahren, $1'500'000$ CHF in 20 Jahren sowie $1'000'000$ CHF in 40 Jahren aus. Das Projekt besitzt den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\%$.

(b) $i = 3.45\%$.

(c) $i = 4.65\%$.

(d) $i = 5.05\%$.

Frage 5 (4 Punkte)

Die Gleichung

$$\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}x\right) + \ln(x) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von a ist die Funktion stetig?

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a = \pi$.

Frage 7 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem kompletten Definitionsbereich *konvex*?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $x^3 + 3\ x + 4$.

(d) Keine der obigen Funktionen ist in ihrem ganzen Definitionsbereich konvex.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{x^2+3x+2}$

(a) hat ein lokales Maximum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(b) hat ein lokales Minimum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(c) hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Elastizität der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei $\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x$. Es folgt, dass die relative Änderungsrate von f gegeben ist durch:

(a) $\rho_f(x) = x + 3$.

(b) $\rho_f(x) = x^2 + 3$.

(c) $\rho_f(x) = x^3 + 3x^2$.

(d) Es ist unmöglich, mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die relative Änderungsrate $\rho_f(x)$ herzuleiten.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \ln(6 + cx - x^2),$$

wobei c ein reellwertiger Parameter ist, für den $D_f \neq \emptyset$ gilt. f hat ein globales Maximum bei $x_0 = 1$

(a) für $c = 3$.

(b) für $c = 2$.

(c) für $c \in \{0, 1\}$.

(d) $D_f = \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)

Das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{4}}$ in $x_0 = 0$ ist gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}x^2 + \frac{21}{64}x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{21}{64}x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3$.

(d) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{128}x^3$.

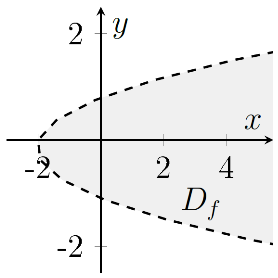
Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

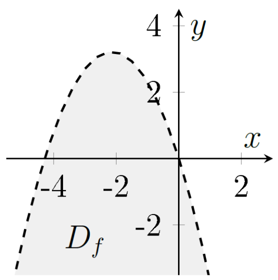
$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto z = \ln(-9x^2 - y^2 + 4y + 5) + \sqrt{4x^2 + 2y - 4}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

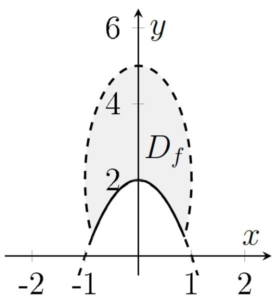
(a)



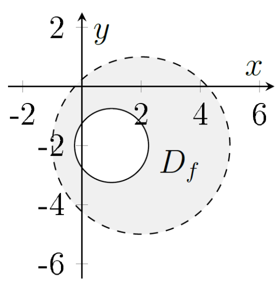
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (3 Punkte)

Eine homogene Funktion vom Grad 2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$ gleich $5x + 1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{x^{1.6}y^{0.7}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist homogen vom Grad 0.7.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + x^a y^{2a}$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.2$.

(c) $a = 1.4$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen vom Grad 2. Die Funktion h ist definiert durch $h(x,y) = f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right)$. Dann gilt

(a) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 3$.

(b) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 6$.

(c) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$.

(d) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 18$.

Lösungen

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (5 Punkte)

Sei $q(x) = \frac{5x+2}{3x-10}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{10}{3}\right\}$.

Für welche Werte von x konvergiert die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \cdot q(x)^k$?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Art der Reihe (geometrische Reihe).
2. Ermittle die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe.
3. Bestimme die reellen x, für welche die Reihe konvergiert.
   (a) Quadrieren
   (b) Fallunterscheidung

1. Bestimme die Art der Reihe (geometrische Reihe)
Da Konstanten für die Konvergenz unwichtig sind, erhalten wir mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \cdot q(x)^k = 3 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q(x)^k$$

eine von x abhängige geometrische Reihe.

2. Ermittle die Konvergenzbedingung der geometrischen Reihe
Unsere geometrische Reihe konvergiert also, wenn

$$|q(x)| = \left|\frac{5x+2}{3x-10}\right| < 1 \tag{1}$$

erfüllt ist. Die dazu passenden x lassen sich durch verschiedene Varianten bestimmen. Davon werden wir zwei betrachten.

3.(a) Quadrieren
Die Konvergenzbedingung ist äquivalent zu

$$|q(x)|^2 = \left|\frac{5x+2}{3x-10}\right|^2 = \left(\frac{5x+2}{3x-10}\right)^2 = \frac{(5x+2)^2}{(3x-10)^2} < 1^2 = 1,$$

wodurch wir keine lästige Fallunterscheidung machen müssen. Der Preis dafür ist jedoch, dass wir mit quadratischen Termen rechnen müssen. Durch Anwenden der binomischen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{(5x+2)^2}{(3x-10)^2} < 1 &\Leftrightarrow (5x+2)^2 < (3x-10)^2 \\ &\Leftrightarrow 25x^2 + 20x + 4 < 9x^2 - 60x + 100 \\ &\Leftrightarrow 16x^2 + 80x - 96 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 < 0\end{aligned}$$

und wir müssen nur noch die Nullstellen eines quadratischen Polynoms bestimmen. Wir haben eine nach oben geöffnete Parabel. Also gilt mit der Mitternachtsformel

$$\begin{aligned}x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{-5+7}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-5-7}{2} = -6,\end{aligned}$$

wodurch $x^2 + 5x - 6 < 0$ für $x \in (-6, 1)$ folgt. Damit wissen wir durch

$$|q(x)| < 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 < 0,$$

dass unsere geometrische Reihe s_n für $x \in (-6, 1)$ konvergiert.

3.(b) Fallunterscheidung

Wir können in der Konvergenzbedingung auch die Beträge in den Bruch ziehen. Das bedeutet

$$|q(x)| = \left|\frac{5x+2}{3x-10}\right| = \frac{|5x+2|}{|3x-10|} < 1,$$

wodurch wir für den Betrag im Zähler und Nenner jeweils zwei Fälle unterscheiden müssen. Die Definition des Betrags gibt uns durch

$$|5x+2| = \begin{cases} 5x+2, & \text{für } 5x+2 \geq 0 \\ -5x-2, & \text{für } 5x+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5x+2, & \text{für } x \geq -\frac{2}{5} \\ -5x-2, & \text{für } x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$|3x-10| = \begin{cases} 3x-10, & \text{für } 3x-10 \geq 0 \\ -3x+10, & \text{für } 3x-10 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-10, & \text{für } x \geq \frac{10}{3} \\ -3x+10, & \text{für } x < \frac{10}{3} \end{cases}$$

drei Fälle. Durch logische Kombination der Fälle der einzelnen Beträge erhalten wir mit

$$\frac{|5x+2|}{|3x-10|} = \begin{cases} \frac{5x+2}{3x-10}, & \text{für } x \geq \frac{10}{3} \\ \frac{5x+2}{-3x+10} & \text{für } -\frac{2}{5} \leq x < \frac{10}{3} \\ \frac{-5x-2}{-3x+10} & \text{für } x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

die drei zu überprüfenden Fälle. Wenn $x \geq {}^{10}/_{3}$ ist, gilt sicher $x \geq -{}^{2}/_{5}$. Damit haben wir den ersten Fall. Falls $x \geq {}^{10}/_{3}$ ist, müssen wir unterscheiden, ob $x \geq -{}^{2}/_{5}$ oder $x < -{}^{2}/_{5}$ ist. Daraus erhalten wir den zweiten und dritten Fall.

1. Im ersten Fall ist $x \geq {}^{10}/_{3}$ und durch

$$\begin{aligned}&\frac{5x+2}{3x-10} < 1 \\ &\Leftrightarrow 5x+2 < 3x-10 \\ &\Leftrightarrow 2x < -12 \\ &\Leftrightarrow x < -6\end{aligned}$$

erhalten wir einen Widerspruch. Also besitzt dieser Fall keine Lösung.

2. Im zweiten Fall ist $-{}^2\!/\!_5 \leq x < {}^{10}\!/\!_3$ und durch

$$\begin{aligned} &\frac{5x+2}{-3x+10} < 1 \\ \Leftrightarrow\ &5x+2 < -3x+10 \\ \Leftrightarrow\ &8x < 8 \\ \Leftrightarrow\ &x < 1 \end{aligned}$$

   erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L}_2 = [-{}^2\!/\!_3, 1)$ für diesen Fall.

3. Im letzten Fall ist $x < -{}^2\!/\!_3$ und durch

$$\begin{aligned} &\frac{-5x-2}{-3x+10} < 1 \\ \Leftrightarrow\ &-5x-2 < -3x+10 \\ \Leftrightarrow\ &-12 < 2x \\ \Leftrightarrow\ &-6 < x \end{aligned}$$

   erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L}_3 = (-6, -{}^2\!/\!_3)$ für diesen Fall.

Die Gesamtlösungsmenge für $|q(x)| < 1$ erhalten wir durch $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-6, 1)$.

(b) (7 Punkte)

Eine Kreditnehmerin leiht sich $P = 2'500'000$ CHF, um ihr Haus zu finanzieren. Sie kann jährliche Zahlungen in Höhe von $C = 50'000$ CHF aufbringen. Der jährliche Zinssatz liegt bei $i = 1\%$. Wie lange benötigt die Kundin, um das Darlehen zurückzuzahlen, wenn die Zahlungen zum Ende des Jahres stattfinden?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, ob es sich um eine vor- oder nachschüssige Rente handelt, d.h.

$$PV = C\frac{1-(1+i)^{-T+1}}{i} \text{ oder } PV = C\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$$

2. Setze die Werte ein und forme nach T um.

1. Überlege, ob es sich um eine vor- oder nachschüssige Rente handelt

Da die konstanten Zahlungen gegen Ende des Jahres geleistet werden, handelt es sich um eine nachschüssige Rente. Demnach ist der Barwert nach T Jahren durch

$$PV = C\frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$$

gegeben.

2. Setze die Werte ein und forme nach T um

Um die Anzahl T der Jahre zu ermitteln, lösen wir die Gleichung $P = PV$ nach T auf. Zunächst gilt

$$PV = C\frac{1-(1+i)^{-T}}{i} = 50'000\frac{1-1,01^{-T}}{0,01} = 5'000'000(1-1,01^{-T})$$

und mit

$$\begin{aligned}
P = PV &\Leftrightarrow 5'000'000(1-1,01^{-T}) = 2'500'000 \\
&\Leftrightarrow 2(1-1.01^{-T}) = 1 \\
&\Leftrightarrow 1-1,01^{-T} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 1,01^{-T} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow 1,01^{T} = 2 \\
&\Leftrightarrow \ln(1,01^{T}) = T\ln(1,01) = ln(2) \\
&\Leftrightarrow T = \frac{\ln(2)}{\ln(1,01)} \approx 69,66
\end{aligned}$$

erhalten wir eine Rückzahlung von circa 70 Jahren.

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x+6}.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, zu welchen bekannten Grenzprozessen eine Ähnlichkeit besteht.
2. Berechne den Grenzwert

1.Überlege dir, zu welchen bekannten Grenzprozessen eine Ähnlichkeit besteht
Durch die Umformungen

$$\frac{x+3}{x+2}=\frac{x+2+1}{x+2}=\frac{x+2}{x+2}+\frac{1}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}$$

und

$$3x+6=3(x+2)$$

ergibt sich zusammengesetzt

$$\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{3(x+2)}=\left(\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{3}.$$

Daran erkennen wir, dass eine Ähnlichkeit zu dem Grenzprozess

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}$$

besteht.

2. Berechne den Grenzwert
Unter Ausnutzung der Stetigkeit von x^3 erhalten wir mit

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{3}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right)^{3}=e^{3}$$

den gesuchten Grenzwert.

(d1) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4x+4)}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Defintionsbereiche des Logarithmus und der Wurzelfunktion in Erinnerung.
2. Bestimme den Definitionsbereich.

1.Rufe dir die Definitionsbereiche des Logaritmus und der Wurzelfunktion in Erinnerung

Der natürliche Logarithmus ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Diese hat den Wertebereich $(0,\infty)$, womit der Logarithmus auf $(0,\infty)$ definiert ist. Die Wurzelfunktion besitzt den Definitionsbereich $[0,\infty)$.

Der Logarithmus ist auf dem Intervall $[1,\infty)$ größer gleich 0. Wir erkennen das an

$$e^0 = 1, \ \lim_{x\to\infty} e^x = \infty, \ \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

und der strengen Monotonie der Exponentialfunktion.
Wegen der Wurzelfunktion suchen wir die passenden $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \ln(x^2+4x+4) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow e^{\ln(x^2+4x+4)} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2+4x+4 &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2+4x+3 &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt. Da x^2+4x+4 eine nach oben oben geöffnete Normalparabel ist, könnten wir die Bedingung

$$x^2+4x+4 \geq 1$$

auch direkt ablesen.

2. Bestimme den Definitionsbereich

Mit

$$x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot3}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{-4\pm2}{2} = -2\pm1$$

erhalten wir $x_1=-1$ und $x_2=-3$ als Nullstellen der Parabel. Da diese nach oben geöffnet ist, ergibt sich

$$D_f = (-\infty,-3] \cup [-1,\infty) = \mathbb{R} \setminus (-3,-1)$$

als Definitionsbereich von f.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2 + 4x + 4)}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

Lösung:

> **Vorgehensweise:**
>
> 1. Bestimme die Monotoniebedingung.
> 2. Leite die Funktion ab.
> 3. Bestimme das Monotonieverhalten.
> 4. Alternativer Lösungsweg.

1. Bestimme die Monotoniebedingung

Eine Funktion g heißt monoton wachsend bzw. fallend, falls

$$g'(x) \geq 0 \text{ bzw. } g'(x) \leq 0$$

für alle x aus dem Definitionsbereich gilt. Ändert sich das Vorzeichen der Ableitung ist eine Funtktion nicht monoton.

2. Leite die Funktion ab

Durch zweifaches Anwenden der Kettenregel erhalten wir mit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{(\ln(x^2 + 4x + 4)}} \cdot \frac{1}{x^2 + 4x + 4} \cdot (2x + 4) \\ &= \frac{2x + 4}{2\sqrt{(\ln(x^2 + 4x + 4)} \cdot (x^2 + 4x + 4)} \end{aligned}$$

die Ableitung von f. Nun ist der Definitionsbereich so gewählt, dass $x^2 + 4x + 4 \geq 1$ für alle $x \in D_f$ (siehe Aufgabe 1 d1). Also ist nur $2x + 4$ für das Vorzeichen verantwortlich.

3. Bestimme das Monotonieverhalten

Wir erkennen recht schnell, dass mit

$$f'(-3) < 0 \text{ und } f'(-1) > 0$$

ein Widerspruch zu Monotonie vorliegt.

4. Alternativer Lösungsweg

Wir erinnern uns, dass eine Funktion monoton wachsend ist, falls

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

gilt. Für fallende Monotonie folgt stattdessen $f(x) \geq f(y)$. Wir nennen eine Funktion monoton, falls diese monoton wachsen oder fallend ist. Wichtig ist, dass obige Definition auf dem ganzen Definitionsbereich gelten muss.

Wenn wir zwei monotone Funktionen g und h betrachten, so ist auch $g \circ h$ monoton. Dabei ist $g \circ h(x) = g(h(x))$. Wir zeigen dies exemplarisch für zwei monoton wachsende Funktionen. Seien g, h monoton wachsende Funktionen. Dann ist mit

$$x < y \Rightarrow h(x) \leq h(y) \Rightarrow g(h(x)) \leq g(h(y))$$

auch $g \circ h$ monoton wachsend. Alle anderen Kombinationen funktionieren sehr ähnlich. Doch warum das Ganze? Die Wurzel -und Logarithmusfunktion sind beide monoton wachsend. Deswegen genügt es zu untersuchen, ob $x^2 + 4x + 4$ monoton ist.
Wir haben gesehen, dass es ausreicht

$$h(x) := x^2 + 4x + 4$$

zu untersuchen. Wenn man das Bild einer Parabel im Kopf hat, ist h wahrscheinlich nicht monoton. Wir suchen nun einen Widerspruch zur Definition der Monotonie. Es gilt $-3 < -2$ und es gilt $h(-3) = 1 > 0 = h(-2)$. Also kann h schonmal nicht monoton wachsend sein. Mit $-2 < -1$ erhalten wir $h(-2) = 0 < h(-1) = 1$. Damit sehen wir, dass die Bedingung für Monotonie verletzt ist. Also ist h nicht monoton und somit auch f nicht.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Verwenden Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert von $f(0,1)$ zu bestimmen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite mit der allgemeinen Formel für das n-te Taylorpolynom die Formel für $P_3(x)$ her.
2. Bestimme die Ableitungen sowie die entsprechenden Werte.
3. Berechne den Näherungswert.

1. Leite mit der allgemeinen Formel für das n-te Taylorpolynom die Formel für $P_3(x)$ her.

Die allgemeine Formel für das n-te Taylorpolynom ist durch

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

gegeben. Also müssen wir

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot x^3$$

berechnen.

2. Bestimme die Ableitungen sowie die entsprechenden Werte

Zunächst berechnen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f'''(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

die nötigen Ableitungen. Mit $x_0 = 0$ ergeben sich eingesetzt

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ f'(x_0) &= -1 \\ f''(x_0) &= 2 \\ f'''(x_0) &= -6. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$P_3(x) = 1 - x + \frac{2}{2} \cdot x^2 + \frac{-6}{6} \cdot x^3 = 1 - x + x^2 - x^3$$

das gesuchte Taylorpolynom.

3. Berechne den Näherungswert

Wir nutzen nun aus, dass

$$\begin{aligned} f(0,01) \approx P_3(0,01) &= 1 - 0,1 + 0,1^2 - 0,1^3 \\ &= 1 - 0,1 + 0,01 - 0,001 \\ &= 0,909 \end{aligned}$$

gilt und erhalten so unseren Näherungswert.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq x^4.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme, was der Satz von Taylor über das Restglied des n-ten Taylorpolynoms aussagt.
2. Berechne die vierte Ableitung von f und suche eine passende Abschätzung dafür.
3. Finde eine geschickte Abschätzung für das Restglied.

1. Bestimme, was der Satz von Taylor über das Restglied des n-ten Taylorpolynoms aussagt.
Das Restglied des n-ten Taylorpolynoms ist durch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

für $\xi \in [x_0, x]$ gegeben. Daraus ergibt sich für uns

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot x^4 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24} \cdot x^4$$

die gesuchte Restgliedformel.

2. Berechne die vierte Ableitung von f und suche eine passende Abschätzung dafür
Die vierte Ableitung ist durch

$$f^{(4)}(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)' = \frac{24}{(1+x)^5}$$

gegeben. Nun wissen wir, dass

$$0 \leq \frac{1}{(1+x)^5} \leq 1$$

für $x \geq 0$ gilt. Damit erhalten wir für $x \geq 0$ mit

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \leq 24$$

eine passende Abschätzung.

3. Finde eine geschickte Abschätzung für das Restglied
Durch unsere Vorarbeit erhalten wir direkt mit

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{24} \cdot x^4 \leq \frac{24}{24} \cdot x^4 = x^4$$

die passende Abschätzung für $\xi \in [0, x]$.

(b) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \; D_f \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto 3e^{2ax+by+5}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(c,c)$ und $\varepsilon_{f,y}(c,c)$ identisch sind für alle $c > 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme, wie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ definiert sind.
2. Ermittle die partiellen Ableitungen.
3. Stelle eine Gleichung auf, welche du nach c auflöst.

1. Bestimme, wie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ definiert sind

Wir erinneren uns, dass für die partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}x \text{ und } \varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}y$$

gilt. Wir müssen also zunächst die partiellen Ableitungen von f bestimmen.

2. Ermittle die partiellen Ableitungen

Wir fangen mit der partiellen Ableitung von f nach x an. Diese ist mit der Kettenregel durch

$$f_x(x,y) = 3 \cdot 2a \cdot e^{2ax+by+5} = 6ae^{2ax+by+5}$$

gegeben. Die Ableitung nach y erhalten wir mit

$$f_y(x,y) = 3 \cdot b \cdot e^{2ax+by+5} = 3be^{2ax+by+5}$$

ganz analog.

3. Stelle eine Gleichung auf, welche du nach c auflöst

Zunächst setzen wir alles in die Definition der partiellen Elastizität ein, wodurch wir

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}x = \frac{6ae^{2ax+by+5}}{3e^{2ax+by+5}}x = \frac{2a}{1}x = 2ax$$
$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = \frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}y = \frac{3be^{2ax+by+5}}{3e^{2ax+by+5}}y = \frac{b}{1}y = by$$

erhalten. Nun suchen wir $a, b \in \mathbb{R}$, sodass

$$\varepsilon_{f,x}(c,c) = \varepsilon_{f,y}(c,c)$$

für alle $c > 0$ gilt. Durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,x}(c,c) = \varepsilon_{f,y}(c,c) &\Leftrightarrow \\ 2ac = bc &\Leftrightarrow \\ 2a = b &\Leftrightarrow \\ a = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

erhalten wir ein passendes Verhältnis von a und b.

(c) (8 Punkte)

Die Kurve C in der xy-Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$C \ : \ x^2 + 5xy + 12y - a = 0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P = (c, c)$ zur Kurve gehört und die Steigung der Tangente an C in P -1 beträgt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, wie man mithilfe des Satzes über implizite Funktionen die Steigung der Tangente berechnet.
2. Bestimme die Ableitungen nach x bzw. y.
3. Bestimme ein passendes a bzw. c.

1. Überlege, wie man mithilfe des Satzes über implizite Funktionen die Steigung der Tangente berechnet

Wir haben die Kurve

$$\varphi(x, y) = x^2 + 5xy + 12y - a = 0$$

gegeben. Die Steigung der Tangente in einem Punkt (x_0, y_0) können wir mithilfe des Satzes über implizite Funktionen durch

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0, y_0) = -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$$

bestimmen.

2. Bestimme die Ableitungen nach x bzw. y

Die partiellen Ableitungen von φ sind durch

$$\varphi_x(x, y) = 2x + 5y \text{ und } \varphi_y(x, y) = 5x + 12$$

gegeben. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0, y_0) = -\frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = -\frac{2x + 5y}{5x + 12}$$

als Resultat.

3. Bestimme ein passendes a bzw. c

Wir nehmen an, dass der Punkt $P = (c, c)$ auf der Kurve liegt. Dann erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(c, c) = -\frac{2c + 5c}{5c + 12} = -1 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{7c}{5c + 12} = 1 \\
\Leftrightarrow\ &7c = 5c + 12 \\
\Leftrightarrow\ &2c = 12 \\
\Leftrightarrow\ &c = 6
\end{aligned}$$

das passende c. Nun fehlt noch das a, sodass $(6,6)$ auf der Kurve liegt. Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir mit

$$\varphi(6,6) = 6^2 + 5 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 - a = 0 \Leftrightarrow a = 6^2 + 5 \cdot 6^2 + 12 \cdot 6 = 6^3 + 12 \cdot 6 = 216 + 72 = 288$$

das passende a. Somit sind für $a = 288$ und $c = 6$ alle geforderten Bedingungen erfüllt.

(d1) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = (aK^{0,25} + A^{0,75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Bestimmen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Grenzerträge in allgemeiner Form.
2. Bestimme die Grenzerträge durch partielles Ableiten.

1. Bestimme die Grenzerträge in allgemeiner Form

Die Grenzerträge entsprechen den partiellen Ableitungen nach K bzw. A. Wir müssen also

$$\frac{\partial P(K,A)}{\partial \mathrm{K}} \text{ und } \frac{\partial P(K,A)}{\partial \mathrm{A}}$$

berechnen.

2. Bestimme die Grenzerträge durch partielles Ableiten

Durch partielles Ableiten nach K bzw. A erhalten wir mit der Kettenregel

$$P_K(K,A) = 4\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3 \cdot 0,25a\ K^{-0,75} = \frac{a\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3}{K^{0,75}}$$

$$P_A(K,A) = 4\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3 \cdot 0,75\ A^{-0,25} = \frac{3\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3}{A^{0,25}}$$

die Grenzerträge.

(d2) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = (aK^{0,25} + A^{0,75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 16)$ gleich $-\frac{4}{3}$?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die technische Substitutionsrate in allgemein mit dem Satzes über implizite Funktionen.
2. Berechne die technische Substitutionsrate.

1. Bestimme die technische Substitutionsrate in allgemein mit dem Satzes über implizite Funktionen

Die technische Substitutionsrate in einem Punkt (K, A) entspricht

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}(K, A).$$

Durch den Satz über implizite Funktionen bekommen wir

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}(K, A) = -\frac{P_K(K, A)}{P_A(K, A)}$$

geliefert.

2. Berechne die technische Substitutionsrate

Durch Einsetzen erhalten wir

$$-\frac{P_K(K, A)}{P_A(K, A)} = -\frac{\frac{a\left(aK^{0,25}+A^{0,75}\right)^3}{K^{0,75}}}{\frac{3(aK^{0,25}+A^{0,75})^3}{A^{0,25}}} = -\frac{a\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3}{3\left(aK^{0,25} + A^{0,75}\right)^3} \cdot \frac{A^{0,25}}{K^{0,75}} = -\frac{a}{3} \cdot \frac{A^{0,25}}{K^{0,75}},$$

wodurch

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}(1, 16) = -\frac{a}{3} \cdot \frac{16^{0,25}}{1} = -\frac{a}{3} \cdot \sqrt[4]{16} = -\frac{2a}{3}$$

folgt. Zum Schluss erhalten wir mit

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}(1, 16) = -\frac{2a}{3} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow a = 2$$

das gesuchte a.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = „\frac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“}$$
$$B(x) = „x \text{ ist eine gerade Zahl“}.$$

Welche der Aussagen ist wahr:

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

(d) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Setze Zahlen ein um die Aussagen zu überprüfen. Es reicht ein Gegenbeispiel für eine Aussage zu finden, um sie zu widerlegen.
2. Zur Übung beweisen wir die richtige Aussage.

1. Setze Zahlen ein um die Aussagen zu überprüfen

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$ bedeutet: Wenn $A(x)$ gilt, dann gilt $B(x)$ bzw. aus $A(x)$ folgt $B(x)$.
Wir setzen $x = 4$ ein, sodass

$$\frac{x}{4} = \frac{4}{4} = 1 \tag{2}$$

eine positive ganze Zahl ist. Nun ist $x = 4$ gerade, womit die Aussage für dieses x stimmt. Es gilt

$$1 = \frac{4}{4},$$

womit $x = 4$ und gerade ist. Vermutlich ist dies die korrekte Aussage.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ bedeutet: $A(x)$ gilt genau dann, wenn $B(x)$ gilt.
Wir erinnern uns, dass

$$A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

dasselbe wie

$$A(x) \Rightarrow B(x) \text{ und } A(x) \Leftarrow B(x)$$

bedeutet. Also aus $A(x)$ folgt $B(x)$ und aus $B(x)$ folgt $A(x)$. Wir nehmen die einfachste gerade Zahl $x = 2$. Dann gilt

$$\frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

wodurch wir ein Gegenbeispiel für $A(x) \Leftarrow B(x)$ gefunden haben.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$ bedeutet: Wenn $A(x)$ nicht gilt, dann gilt $B(x)$
Das Symbol $\neg$ ist die Negation oder Umkehrung einer Aussage. Wir haben also

$$\neg A(x) = „\frac{x}{4} \text{ ist keine positve ganze Zahl}“$$

als Aussage. Wir setzen $x = 3$. Damit ist die Zahl $x/4 = 3/4 = 0.75$ ist keine positive ganze Zahl, aber die 3 ist nicht gerade. Dementsprechend kann $B(x)$ nicht erfüllt sein. Also ist diese Aussage falsch.

(d) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$ bedeutet: Wenn $A(x)$ gilt, so gilt $B(x)$ nicht.
Wenn $x/4$ eine positive ganze Zahl ist, ist x durch 4 teilbar. Somit ist x auch durch 2 teilbar. Womit nicht ungerade sein kann. Wir wählen wieder $x = 4$ und sehen direkt das x gerade ist.

Wir haben gesehen, dass (b),(c) und (d) falsch sind. Also muss (a) korrekt sein.

2. Zur Übung beweisen wir die richtige Aussage

Eine Aussage der Form

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

beweist man, indem man $A(x)$ als gegeben ansieht und $B(x)$. Sei also $x/4$ eine positive ganze Zahl. Damit ist x durch 4 teilbar. Wir wissen also

$$x = 4 \cdot y = 2 \cdot 2 \cdot y$$

mit $y \in \mathbb{N}$. Damit ist x gerade, da durch 2 teilbar.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind konvergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - (-1)^n\ b_n$.

Dann gilt:

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege welche Eigenschaften $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt.
2. Überprüfe die Eigenschaften und finde gegebenenfalls Gegenbeispiele.

1. Überlege welche Eigenschaften $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt

Wir wissen, dass a_n und b_n konvergent sind. Demnach sind beide Folgen beschränkt. Eine Folge heißt beschränkt, falls sie eine obere und untere Schranke besitzt. Insbesondere bleibt eine beschränkte Folge beschränkt, wenn man sie mit dem Faktor $(-1)^n$ ergänzt. Die Summe zweier beschränkten Folgen ist wiederum beschränkt. Damit wissen wir, dass c_n beschränkt ist. Wir betrachten $(-1)^n$ als Beispielfolge. Diese Folge ist durch -1 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt. Aber leider ist diese Folge divergent, da sie zwischen -1 und 1 hin und herspringt.

2. Überprüfe die Eigenschaften und finde gegebenenfalls Gegenbeispiele

(a) Wähle $a_n = 0$, $b_n = 1$. Dann ist durch
$$c_n = a_n - (-1)^n\ b_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$
ein Gegenbespiel gefunden, da c_n zwischen -1 und 1 hin und her springt.

(b) Wähle $a_n = 1$, $b_n = 0$. Dann ist durch
$$c_n = a_n - (-1)^n\ b_n = 1 - (-1)^n \cdot 0 = 1$$
ein Gegenbeispiel gefunden, da konstante Folgen konvergent sind.

(c) Diese Antwort ist richtig. Wir betrachten
$$c_n = a_n - (-1)^n\ b_n$$
genauer. Der einzige Term an dem die Konvergenz scheitern kann ist b_n. Da b_n konvergent ist, können wir
$$(-1)^n\ b_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$
als Hilfsmittel verwenden. Wenn $b_n \to a \neq 0$ gilt, dann springt $(-1)^n\ b_n$ zwischen $-a$ und a hin und her. Also sehen wir, dass die Konvergenz von der Wahl von b_n abhängt.

(d) Vergleiche mit (b).

Also muss Antwort (c) korrekt sein.

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $a_n > 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \ln(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(d) Keine der vorangegangenen Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie eine Folge konstruiert werden kann, welche allen Eigenschaften widerspricht.

1. Überlege dir, wie eine Folge konstruiert werden kann, welche allen Eigenschaften widerspricht

Wir wählen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } n = 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

als Folge. Diese Folge ist nicht monoton, weil

$$a_1 < a_2 \text{ und } a_1 > a_4$$

ist. Damit kann

$$b_n = \ln(a_n)$$

aufgrund der strengen Monotonie des Logarithmus auch nicht monoton sein. Nun zeigen wir noch das b_n unbeschränkt ist. Mit

$$b_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n) \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$$

erhalten wir die Unbeschränktheit. Damit haben wir eine Folge gefunden, sodass keine der Eigenschaften erfüllt ist.
Also ist (d) die richtige Antwort.

Frage 4 (2 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und zahlt $1'000'000$ CHF in 10 Jahren, $1'500'000$ CHF in 20 Jahren sowie $1'000'000$ CHF in 40 Jahren aus. Das Projekt besitzt den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\%$.

(b) $i = 3.45\%$.

(c) $i = 4.65\%$.

(d) $i = 5.05\%$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Formel des Nettobarwerts in allgemeiner Form.
2. Untersuche die Auswirkung des Zinssatzes auf den Nettobarwert.

1. Bestimme die Formel des Nettobarwerts in allgemeiner Form

Allgemein lässt sich der Nettobarwert durch

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

berechnen, wobei bei uns nur C_{10}, C_{20} und C_{40} ungleich null sind.

2. Untersuche die Auswirkung des Zinsatzes

Eingesetzt erhalten wir

$$NPV(i) = -2'000'000 + \frac{1'000'000}{(1+i)^{10}} + \frac{1'500'000}{(1+i)^{20}} + \frac{1'000'000}{(1+i)^{40}}$$

und erkennen, dass der Wert größer wird, wenn die Nenner kleiner werden. Aus diesem Grund wird der kleinste Abdiskuntierungszinssatz den höchsten Nettobarwert ergeben.
Also ist Antwort (a) richtig.

Frage 5 (4 Punkte)

Die Gleichung

$$\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}x\right) + \ln(x) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme die Gleichung um.
2. Löse die Gleichung.

1. Forme die Gleichung um

Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}x\right) + \ln(x) = \ln(5) \\ \Leftrightarrow\ &\ln(x^3 \cdot x) - \ln\left(\frac{5-4x}{5}\right) = \ln(5) \\ \Leftrightarrow\ &\ln\left(x^4 \cdot \frac{5}{5-4x}\right) = \ln(5). \end{aligned}$$

2. Löse die Gleichung

Durch

$$\begin{aligned} &x^4 \frac{5}{5-4x} = 5 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^4}{5-4x} = 1 \\ \Leftrightarrow\ &x^4 = 5 - 4x \\ \Leftrightarrow\ &x^4 + 4x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &x = 1 \end{aligned}$$

kommen wir auf die korrekte Lösungsmenge.
Damit ist (b) die korrekte Antwort.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von a ist die Funktion stetig?

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a = \pi$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet.
2. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

und leite davon die richtige Antwort ab.

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, falls

$$x \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \to f(x_0)$$

gilt. Das heißt: Wenn x gegen x_0 geht, muss $f(x)$ gegen $f(x_0)$ gehen. Wir müsssen also

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

bestimmen um das passende a für die Stetigkeit in $x_0 = 0$ zu erhalten. In allen anderen Punkten ist f bereits stetig.

2. Bestimme den Grenzwert
Um den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

zu bestimmen, wenden wir die Regel von de l'Hôpital an. Die Regel von de l'Hôpital wenden wir an, wenn wir einen Ausdruck der Form

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

vorgegeben haben und mit

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{0}{0}$$
$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{-\infty}{\infty}$$

einen undefinierten Term erhalten. Dann wendet man durch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

die Regel von de l'Hôpital an.
Da wir „0/0“ gegeben haben, können wir mit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

direkt de l'Hôpital anwenden. Es gilt also

$$x \to 0 \;\Rightarrow\; f(x) \to 1 = f(0),$$

wenn $a = 1$ ist.
Somit ist Antwort (b) richtig.

Frage 7 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem kompletten Definitionsbereich *konvex*?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $x^3 + 3\,x + 4$.

(d) Keine der obigen Funktionen ist in ihrem ganzen Definitionsbereich konvex.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die allgemeine Bedingung der Konvexität auf.
2. Bestimme die Ableitungen.
3. Ermittle die konvexe Funktion.

1. Stelle die allgemeine Bedingung der Konvexität auf

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt auf ihrem ganzen Definitionsbereich konvex, falls

$$f''(x) \geq 0$$

für alle $x \in D_f$ gilt.

2. Bestimme die Ableitungen

Wir bestimmen die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2x+1}} \cdot 2 = 2 \cdot (2x+1) = 4x + 2 \\
f_1''(x) &= 4 \\
f_2'(x) &= \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \cdot (2x+2) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} = 2 \cdot (x+1)^{-1} \\
f_2''(x) &= \frac{-2}{(x+1)^2} \\
f_3'(x) &= 3x^2 + 3 \\
f_3''(x) &= 6x
\end{aligned}$$

3. Ermittle die konvexe Funktion

(a) Wir sehen, dass

$$f''(x) = 4 > 0$$

für alle $x \in D_f = (-\frac{1}{2}, \infty)$ gilt. Die Funktion f_1 ist auf D_f sogar strikt konvex.

(b) Wir sehen, dass

$$f_2''(x) = \frac{-2}{(x+1)^2},$$

immer negativ ist für alle $x \in D_f = (-\frac{1}{2}, \infty)$ Damit ist f_2 nicht konvex.

(c) Wir sehen wie, dass bei

$$f''(x) = 6x$$

ein Vorzeichenwechsel im Definitionsbereich vorliegt.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{x^2+3x+2}$

(a) hat ein lokales Maximum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(b) hat ein lokales Minimum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(c) hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, welche Eigenschaften die Exponentialfunktion besitzt.
2. Bestimme die x-Koordinate des Scheitelpunkts von $x^2 + 3x + 2$.
3. Alternative: Löse diese Aufgabe noch mithilfe der Ableitung.

1. Überlege, welche Eigenschaften die Exponentialfunktion besitzt

Die Exponentialfunktion

$$\exp\ :\ \mathbb{R} \to (0, \infty),\ x \mapsto e^x$$

ist streng monoton wachsend und immer positiv. Wir haben mit

$$x^2 + 3x + 2$$

eine nach oben geöffnete Parabel gegeben. Deswegen erreicht f an deren Scheitelpunkt ein Minimum.

2. Bestimme die x-Koordinate des Scheitelpunkts von $x^2 + 3x + 2$

Den Scheitelpunkt können wir mithilfe quadratischer Ergänzung bestimmen. Durch

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$$

erhalten wir die Scheitelpunktform. Der Scheitelpunkt besitzt die x-Koordinate $x_0 = -\frac{3}{2}$. Damit besitzt f in x_0 ein Minimum.

3. Alternative: Löse diese Aufgabe noch mithilfe der Ableitung

Die Ableitung von f ist durch

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot e^{x^2+3x+2}$$

gegeben. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

womit $x_0 = -\frac{3}{2}$ ein kritischer Punkt ist. Die Ableitung f' hat in diesem Punkt ein Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv. Damit besitzt f in x_0 ein Minimum.

Somit ist Antwort (b) korrekt.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Elastizität der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei $\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x$. Es folgt, dass die relative Änderungsrate von f gegeben ist durch:

(a) $\rho_f(x) = x + 3$.

(b) $\rho_f(x) = x^2 + 3$.

(c) $\rho_f(x) = x^3 + 3x^2$.

(d) Es ist unmöglich, mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die relative Änderungsrate $\rho_f(x)$ herzuleiten.

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Bestimme den Zusammenhang von ε_f und ρ_f.
2. Bestimme die relative Änderungsrate.

1. Bestimme den Zusammenhang von ε_f und ρ_f
Der gesuchte Zusammenhang ist durch

$$\underbrace{\varepsilon_f(x)}_{\text{Elastizität}} = x \cdot \underbrace{\rho_f(x)}_{\substack{\text{rel.}\\\text{Änderungs-}\\\text{rate}}}$$

gegeben.

2. Bestimme die relative Änderungsrate
Für die Elastizität gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x = x \cdot \underbrace{(x+3)}_{\substack{\text{rel.}\\\text{Änderungs-}\\\text{rate}}},$$

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln(6 + cx - x^2),$$

wobei c ein reellwertiger Parameter ist, für den $D_f \neq \emptyset$ gilt. f hat ein globales Maximum bei $x_0 = 1$

(a) für $c = 3$.

(b) für $c = 2$.

(c) für $c \in \{0, 1\}$.

(d) $D_f = \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Definitionsbereich $D_{f,c}$ von f abhängig von c.
2. Bestimme die Ableitung von f und suche nach den Nullstellen.

1. Bestimme den Definitionsbereich $D_{f,c}$ von f abhängig von c

Die Parabel $6 + cx - x^2$ ist nach unten geöffnet und wir erhalten durch

$$\begin{aligned}
&-x^2 + cx + 6 = 0\\
\Leftrightarrow\ & x^2 - cx - 6 = 0\\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4 \cdot 6}}{2}\\
\Leftrightarrow\ & x_1 = \frac{1}{2} \cdot (c - \sqrt{c^2 + 24}), \quad x_2 = \frac{1}{2} \cdot (c + \sqrt{c^2 + 24})
\end{aligned}$$

die Nullstellen. Damit ist der Defintionsbereich abhängig von c

$$D_{f,c} = \left(\frac{1}{2} \cdot (c - \sqrt{c^2 + 24}), \frac{1}{2} \cdot (c + \sqrt{c^2 + 24})\right)$$

immer nicht-leer. Damit ist Antwort (d) ausgeschlossen.

2. Bestimme die Ableitung von f und suche nach den Nullstellen

Die Ableitung ist mit der Kettenregel durch

$$f'(x) = \frac{1}{-x^2 + cx + 6} \cdot (-2x + c) = \frac{-2x + c}{-x^2 + cx + 6}$$

gegeben. Die Nullstellen finden wir durch

$$-2x + c = 0 \Leftrightarrow 2x = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{2},$$

womit $c = 2$ folgt, wenn $x_0 = 1$ sein soll. Da die Ableitung in x_0 von positiv zu negativ wechselt, haben wir ein Maximum. Aufgrund der strengen Monotonie hätte es ausgereicht den Scheitelpunkt der Parabel zu bestimmen. Vergleiche hierfür mit Aufgabe 3, Frage 8.

Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 3 (3 Punkte)

Das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$ in $x_0 = 0$ ist gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}x^2 + \frac{21}{64}x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{21}{64}x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3$.

(d) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{128}x^3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die nötigen Ableitungen von f.
2. Setze diese in die Taylorformel ein.

1. Bestimme die nötigen Ableitungen von f und setze diese in die Taylorformel ein

Die Ableitungen von f sind durch

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{4}} \\ f''(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)(1+x)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{4}} \\ f'''(x) &= -\frac{3}{16} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{11}{4}} = \frac{21}{64} \cdot (1+x)^{-\frac{11}{4}} \end{aligned}$$

gegeben.

2. Setze diese in die Taylorformel ein

Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{4} \\ f''(0) &= -\frac{3}{16} \\ f'''(0) &= \frac{21}{64} \end{aligned}$$

in die Formel für das dritte Taylorpolynom in $x_0 = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{21}{64 \cdot 6}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 \end{aligned}$$

als Antwort.
Somit ist Antwort (d) richtig.

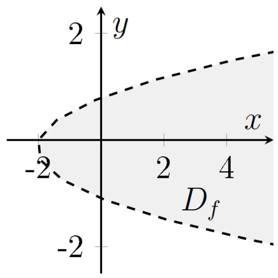
Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

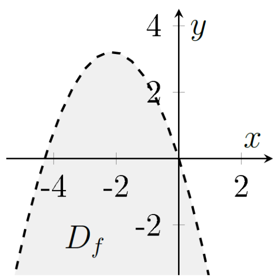
$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto z = \ln(-9x^2 - y^2 + 4y + 5) + \sqrt{4x^2 + 2y - 4}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

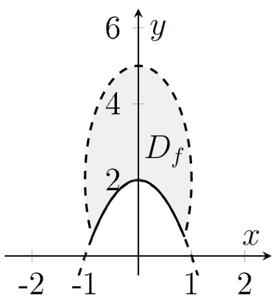
(a)



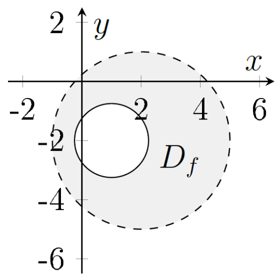
(b)



(c)



(d)



Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, welche Bedingungen für den Definitionsbereich gelten müssen.
2. Alternative durch systematisches Ausschließen.

1. Überlege, welche Bedingungen für den Definitionsbereich gelten müssen

Der Definitionsbereich des Logarithmus und der Wurzel liefern

$$-9x^2 - y^2 + 4y + 5 > 0 \text{ und } 4x^2 + 2y - 4 \geq 0$$

als Bedingungen. Die zweite Bedingung ist leichter handhabbar, weswegen wir mit dieser beginnen. Mit

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 2y - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2y \geq -4x^2 + 4 \\ \Leftrightarrow\ & y \geq -2x^2 + 2 \end{aligned}$$

erhalten wir eine „Funktionsvorschrift“ für die zweite Bedingung. Das bedeutet: Durch $y = -2x^2 + 2$ wird eine Parabel beschrieben. Mit $y \geq -2x^2 + 2$ erhalten wir die (x, y), welche auf oder über der Parabel liegen. Die zweite Bedingung liefert uns durch

$$\begin{aligned} & -9x^2 - y^2 + 4y + 5 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 5 > 9x^2 + y^2 - 4y \\ \Leftrightarrow\ & 5 > 9x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\ \Leftrightarrow\ & 9 > 9x^2 + (y-2)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 1 > x^2 + \frac{(y-2)^2}{9} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x^2}{1^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} < 1 \end{aligned}$$

eine Ellipse mit Zentrum $(0, 2)$ und den Halbachsen 1 in x-Richtung und 3 in y-Richtung.

2. Alternative durch systematisches Ausschließen

Das Wissen um die zweite Bedingung lässt uns nun direkt die Antworten (a), (b) und (d) auschließen. Wir finden in allen Schaubildern Punkte, welche unterhalb des Graphen von $-2x^2 + 2$ liegen.

Somit ist Antwort (c) richtig.

Frage 5 (3 Punkte)

Eine homogene Funktion vom Grad 2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$ gleich $5x+1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = -5x+1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = 5x+1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = -5x+2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = 5x+1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt.
2. Ermittle hiermit die richtige Antwort.

1. Überlege, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt

Wir wissen, dass der Zusammenhang

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = k$$

für homogene Funktionen vom Grad k laut Euler gilt.

2. Ermittle hiermit die richtige Antwort

Durch Umformen und Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{f,y}(x,y) &= k - \varepsilon_{f,x}(x,y)\\ &= 2-(5x+1)\\ &= 2-5x-1\\ &= -5x+1\end{aligned}$$

Somit ist Antwort (a) richtig.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{x^{1.6}y^{0.7}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist homogen vom Grad 0.7.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung.
2. Beweise, ob die Funktion homogen oder nicht homogen ist.

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

für alle $x \in D_f$ und $\lambda > 0$ gilt.

2. Beweise, ob die Funktion homogen oder nicht homogen ist

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt[5]{(\lambda x)^{3.4}(\lambda y)^{0.6}} + \sqrt{(\lambda x)^{0.8}(\lambda y)^{0.8}} + \sqrt[3]{(\lambda x)^{1.6}(\lambda y)^{1.6}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^{3.4}x^{3.4}\lambda^{0.6}y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{0.8}x^{0.8}\lambda^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{\lambda^{1.6}x^{1.6}\lambda^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^{4}x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{1.6}x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{\lambda^{3.2}x^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \lambda^{0.8}\sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \lambda^{0.8}\sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \lambda^{\frac{3.2}{3}}\sqrt[3]{x^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \lambda^{0.8}\left(\sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \lambda^{\frac{3.2}{3}-0.8}\sqrt[3]{x^{1.6}y^{1.6}}\right)
\end{aligned}$$

f ist damit nicht homogen.

Somit ist Antwort (d) richtig.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + x^a y^{2a}$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.2$.

(c) $a = 1.4$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung.
2. Rechne die Definition der Homogenität nach.

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

für alle $x \in D_f$ und $\lambda > 0$ gilt.

2. Rechne die Definition der Homogenität nach

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^{3.1}\sqrt{\lambda y} + 6(\lambda y)^{3.5}\sqrt{5(\lambda x)^{0.2}} + (\lambda x)^a(\lambda y)^{2a} \\
&= \lambda^{3.1}x^{3.1}\lambda^{0.5}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.5}y^{3.5}\sqrt{5\lambda^{0.2}x^{0.2}} + \lambda^a x^a \lambda^{2a} y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}x^{3.1}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.5}y^{3.5}\lambda^{0.1}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a}x^a y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}x^{3.1}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.6}y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a}x^a y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}\left(x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a-3.6}x^a y^{2a}\right)
\end{aligned}$$

Daraus resultiert die Bedingung $3a - 3.6 = 0$ für die Homogenität. Mit

$$\begin{aligned}
&3a - 3.6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ &3a = 3.6 \\
\Leftrightarrow\ &a = 1.2
\end{aligned}$$

erhalten wir noch das dazu passende a.

Somit ist Antwort (b) richtig.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen vom Grad 2. Die Funktion h ist definiert durch $h(x,y) = f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right)$. Dann gilt

(a) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 3$.

(b) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 6$.

(c) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$.

(d) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 18$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung.
2. Wende die Voraussetzung der Homogenität auf h an.

1. Ermittle die allgemeine Homogenitätsbedingung

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

für alle $x \in D_f$ und $\lambda > 0$ gilt.

2. Wende die Voraussetzung der Homogenität auf h an

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
h(\lambda x, \lambda y) &= f\left((g(\lambda x, \lambda y))^2, (g(\lambda x, \lambda y))^2\right) \\
&= f\left((\lambda^2 g(x,y))^2, (\lambda^2 g(x,y))^2\right) \\
&= f\left(\lambda^4 (g(x,y))^2, \lambda^4 (g(x,y))^2\right) \\
&= \left(\lambda^4\right)^3 f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right) \\
&= \lambda^{12} f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right) \\
&= \lambda^{12} h(x,y)
\end{aligned}$$

Somit ist die Funktion homogen vom Grad 12. Es folgt

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$$

mit der Relation von Euler.

Somit ist Antwort (c) richtig.