Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_s(p) = 4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Beweisen Sie: Es gibt genau ein Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ mit Gleichgewichtspreis $p^\star \in [2,3]$ und Gleichgewichtsmenge $q^\star \in \mathbb{R}_+$.

(a2) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_s(p)4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Der Markt hat genau ein Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ mit $p^\star \in [2,3]$.
Berechnen Sie $p^\star$ näherungsweise mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2. Ordnung in $p_0 = 1$.

(b) (10 Punkte)

Nina entschliesst sich am Anfang des Jahres, in dem sie ihr Studium beginnt, einen Studienkredit von CHF 100′000 aufzunehmen. Sie tut dies trotz des hohen Zinssatzes von $i = 8\%$, weil vertragsgemäss die Zahlung der Zinsen und die Rückzahlung erst im Jahr nach Abschluss ihres Studiums beginnt. Dann sollen der Kredit und die Zinsen in 10 gleichmässigen Raten C, jeweils am Jahresende bezahlt werden.
Nina schliesst ihr Studium nach $5\frac{1}{2}$ Jahren ab. (*Hinweis: Sie hat damit noch* 18 *Monate, bis die erste Rate fällig wird.*)

(b1) Zeichnen Sie die beschriebenen Zahlungsströme und Ereignisse an einem Zeitstrahl an.

(b2) Wie hoch sind Nina's Schulden zu Beginn des Jahres in dem die Rückzahlung beginnt?

(b3) Bestimmen Sie die Höhe der vereinbarten Raten C.

Nachdem sie schon 5 Raten abbezahlt hat, macht Nina eine Erbschaft von CHF 100′000. Sie beschliesst, statt der 6. Rate den ganzen Restbetrag zurückzuzahlen.

(b4) Ergänzen Sie die Info am Zeitstrahl.

(b5) Reichen die CHF 100′000, um die Schulden vollkommen zurückzuzahlen?
Wenn ja: Wie viel bleibt Nina von ihrer Erbschaft?
Wenn nein: Welchen zusätzlichen Betrag muss Nina zur Tilgung ihrer Schulden aufbringen?

(c) (5 Punkte)

Im Jahre 1955 entwickelte Morris Swadesh (1909-1967) eine (umstrittene) Methode, die sog. Glottochronologie, um den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem zwei verwandte Sprachen (z. B. Latein und Sanskrit) sich verzweigten. Swadesh ging von der Hypothese aus, dass die sprachlichen Atome - d.h. die Wörter - zerfallen wie radioaktive Atome. Laut Voraussetzung soll der grundlegende Urwortschatz der Sprachen mit einer Halbwertszeit von etwa 2000 Jahren aussterben. Kennt man die Menge des noch gemeinsamen Urwortschatzes zweier Sprachen und geht davon aus, dass sich diese Menge alle 2000 Jahre halbiert, kann man berechnen, wann sich die Sprachen verzweigt haben. A. Raun und E. Kangsmaa-Minn führten unabhänging voneinander, d.h. jeweils mit einer eigenen Methode, den Vergleich des Finnischen und Ungarischen durch. Während Raun herausfand, dass der Anteil der identischen Elemente in beiden Sprachen 21% beträgt, berechnete Kangsmaa-Minn einen Anteil von 27%.
Innerhalb welches Zeitraums haben sich die beiden Sprachen nach der Theorie der Glottochronolgie und aufgrund dieser Zahlen voneinander getrennt?

Bemerkung:
Berechnen Sie also, vor wie vielen Jahren sich das Finnische und das Ungarische gemäss a) der Berechnung von A. Raun und b) der Berechnung von E. Kangsmaa-Minn getrennt haben. Geben Sie das finale Ergebnis als Zeitintervall an.

(d) (9 Punkte)

Ein Student hat ein gegenwärtiges Einkommen von CHF $3'000$ und erwartet in einem Jahr ein zukünftiges Einkommen von CHF $7'000$. Er plant einen gegenwärtigen Konsum c_1 und im folgenden Jahr einen Konsum c_2 mit der Absicht die Nutzenfunktion $u = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(c_2)$ zu maximieren.
Wenn er jetzt Geld leiht, weil $c_1 > 3'000$ CHF ist, dann wird der zukünftige Konsum c_2 nach Rückzahlung des Kreditbetrages und der Zinsen berechnet. Spart er entsprechend Geld, i. e. $c_1 < 3'000$ CHF, dann kann er c_2 um den gesparten Betrag und dessen Zinsen erhöhen. Der (optimistische) Zinssatz für Leihen und Sparen beträgt $i = 8\%$.

(d1) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen c_1 und c_2.

(d2) Bestimmen Sie den Nutzen des Studenten in Abhängigkeit von c_1.

(d3) Für welche Wahl von c_1 ist der Nutzen des Studenten maximal?
Wie viel muss er sich allenfalls leihen?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Die Aussage „Wenn Albert kommt, dann kommt auch Beatrice“ sei richtig. Dann ist die folgende Aussage sicher auch richtig:

(a) „Wenn Beatrice kommt, dann kommt auch Albert“

(b) „Wenn Albert nicht kommt, dann kommt auch Beatrice nicht“

(c) „Wenn Beatrice nicht kommt, dann kommt auch Albert nicht“

(d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist sicher richtig.

Frage 2 (2 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $b_n = 2a_n - 1$.
Dann ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton fallend.

(d) unbeschränkt.

Frage 3 (3 Punkte)

Ein Kapital von $P = 1'000'000$ CHF wird angelegt bei einem Jahreszinssatz von $i = 2\%$ mit monatlicher Verzinsung.
Der effektive Zinssatz i_{eff} beträgt näherungsweise

(a) 1.982%.

(b) 2%.

(c) 2.018%.

(d) 2.020%.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = -\frac{3}{x^5} + 2$$

Dann ist die inverse Funktion f^{-1} definiert auf

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(d) Die Funktion f ist nicht injektiv. Deshalb ist es unmöglich, eine Umkehrfunktion f^{-1} anzugeben.

Frage 5 (4 Punkte)

Seien $m, n, k > 0$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $k \neq 1$.
Welche der folgenden Identitäten ist allgemein gültig?

(a) $n^{\log_m(k)} = k^{\log_n(m)}$.

(b) $n^{\log_m(k)} = k^{\log_m(n)}$.

(c) $n^{\log_m(k)} = m^{\log_n(k)}$.

(d) Keine der Identitäten (a) - (c) gilt allgemein.

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2} - 2\pi, -2\pi < x < 2\pi.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f ist stetig für alle $x \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$.

(b) f hat mehr als eine Unstetigkeitsstelle in $(-2\pi, 2\pi)$.

(c) f ist überall stetig.

(d) f hat keine Polstelle.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = \frac{x}{3} - \frac{e}{x^3}.$$

Der Wertebereich von f' ist

(a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) $(-\infty, \infty)$.

(c) $(0, \infty)$

(d) $(\frac{1}{3}, \infty)$

Frage 8 (3 Punkte)

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f mit Ableitung f'.
Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) f ist stetig.

(b) Wenn f gerade ist, dann ist auch f' gerade.

(c) Wenn f gerade ist, dann ist f' ungerade.

(d) Wenn $f' > 0$ ist, dann ist f streng monoton wachsend.

Frage 9 (3 Punkte)

Für eine differenzierbare Funktion $h : D_h \to \mathbb{R}, x \mapsto y = h(x)$ seid $dh(x)$ ihr Differential an der Stelle x. Wir betrachten nun zwei differenzierbare Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ und Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Gleichungen ist im Allgemeinen falsch?

(a) $d(af + bg)(x) = a\ df(x) + b\ dg(x)$.

(b) $d(fg)(x) = g(x)\ df(x) + f(x)\ dg(x)$.

(c) $d(f \circ g)(x) = f'(g(x))\ dg(x)$.

(d) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = g(x)\ df(x) - f(x)\ dg(x)$.

Frage 10 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = |x^2 - 2x - 24|.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein globales Maximum in $x_0 = 1$.

(c) f hat ein eindeutiges globales Maximum.

(d) f hat ein eindeutiges lokales Minimum.

Frage 11 (3 Punkte)

Sei

$$P(x) = 1 + 2x + 5x^2 - x^3$$

des Taylor-Polynoms 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ einer unendliche oft differenzierbaren Funktion f.

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f(0) = 2$.

(b) $f'(0) = 1$.

(c) $f''(0) = 10$.

(d) $f^{(3)}(0) = -5$.

Frage 12 (2 Punkte)

Eine homogene Funktion f hat den Grad 1.8. Ausserdem kennt man die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,y}(x, y) = x + y - 1.2$.

Es folgt dann

(a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = x - y - 1.2$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -x - y + 1.2$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -x - y + 3$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x, y)$ ist durch die Angaben nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) 0.5.

(c) 1.

(d) 2.

Frage 2 (4 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{27}{x^3 - 27} \right)$$

ist

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{2}{5}$.

(d) ∞.

Frage 3 (4 Punkte)

Am 26.12.2017 entdeckte der Hobby-Mathematiker Jonathan Price aus Germantown, Tennessee, die bislang grösste bekannte Primzahl p, nämlich

$$p = 2^{77'232'917} - 1$$

Wie viele Stellen hat p im Dezimalsystem?
(*Tipp:* Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen Anzahl Stellen einer natürlichen Zahl n im Dezimalsystem und ihrem Zehnerlogarithmus $\log_{10}(n)$)

(a) p hat im Dezimalsystem $23'249'424$ Stellen.

(b) p hat im Dezimalsystem $23'249'425$ Stellen.

(c) p hat im Dezimalsystem $53'533'778$ Stellen.

(d) p hat im Dezimalsystem $53'533'779$ Stellen.

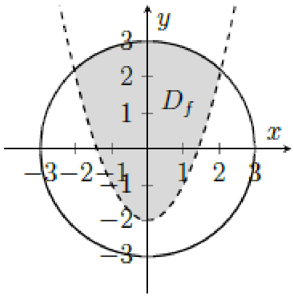
Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

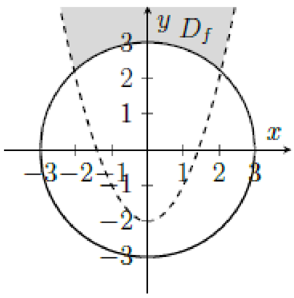
$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \sqrt[4]{4x^2 + 4y^2 - 36} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y - 2}}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt grau schraffiert den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

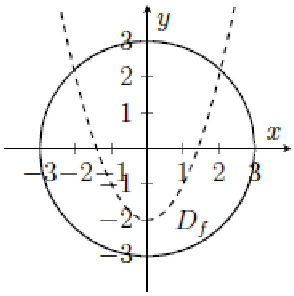
(a)



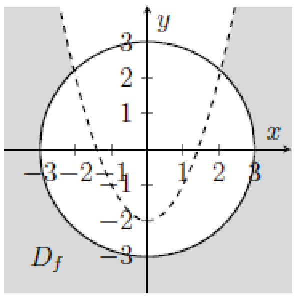
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (4 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \sqrt{e}\}.$$

Dann ist das Bild R_f von f gegeben durch

(a) $R_f = \mathbb{R}$.

(b) $R_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) $R_f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(d) $R_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Frage 6 (4 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln\left(\left|\frac{y + 1}{x - 2}\right|\right).$$

Die Steigung m der Tangenten an die Niveaulinie $f(x, y) = \ln(2)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gegeben durch

(a) $m = -0.5$.

(b) $m = 0.5$.

(c) $m = -2$.

(d) Es ist nicht möglich, die Steigung m als Funktion von x anzugeben.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x, y) = \ln\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x).$$

wobei $x > 0$, $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{5}{2}$.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 7x\sqrt{y^a} + 3y^2\sqrt[4]{x^a y^b} - x^2 y^{0.2},$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a und b ist f homogen?

(a) $a = 2.4$, $b = -2$.

(b) $a = 2.4$, $b = -1.6$.

(c) $a = 2$, $b = -1.2$.

(d) f ist homogen für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösungen

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_s(p) = 4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Beweisen Sie: Es gibt genau ein Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ mit Gleichgewichtspreis $p^\star \in [2,3]$ und Gleichgewichtsmenge $q^\star \in \mathbb{R}_+$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bedingung für Marktgleichgewicht: Angebot = Nachfrage.
2. Zeige, dass ein solches Gleichgewicht in dem gesuchten Intervall vorliegt.

1. Bedingung für Marktgleichgewicht: Angebot = Nachfrage
Wenn ein Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ vorliegt, gilt

$$q^\star = q_s(p^\star) = q_d(p^\star) \ \Leftrightarrow \ q_s(p^\star) - q_d(p^\star) = 0.$$

2. Zeige, dass ein eindeutiges Gleichgewicht in dem gesuchten Intervall vorliegt
Nach unserer Vorüberlegung müssen wir die Nullstellen von

$$f(p) := q_s(p) - q_d(p) = 4e^{p-1} - 70 + 15p + 1.5p^2$$

im Intervall $[2,3]$ bestimmen. Ist diese eindeutig, also gibt es nur eine Nullstelle, ist das Marktgleichgewicht eindeutig. Dies wollen wir nun nachweisen.
Zuerst verwenden wir den Nullstellensatz von Bolzano, um die Existenz einer solchen Nullstelle zu beweisen:

$$f(2) = 4e^{2-1} - 70 + 15 \cdot 2 + 1.5 \cdot 2^2 = 4e - 70 + 15 \cdot 2 + 1.5 \cdot 4 = 4e - 34 < 0$$
$$f(3) = 4e^{3-1} - 70 + 15 \cdot 3 + 1.5 \cdot 3^2 = 4e^2 - 11.5 > 0.$$

Wegen $f(2) < 0$ und $f(3) > 0$ muss es wegen der Stetigkeit von f mindestens ein $p \in (2,3)$ geben, sodass $f(p) = 0$ gilt.
Nun fehlt noch die Eindeutigkeit, d.h. es gibt exakt eine Nullstelle in dem Intervall $[2,3]$. Hierfür betrachten wir die Ableitung:

$$f'(p) = 4e^{p-1} + 15 + 3p.$$

Für diese gilt $f'(p) > 0$ für alle $p \in [2, 3]$, womit f streng monoton wachsend ist. Damit nimmt f in $[2, 3]$ exakt eine Nullstelle an. Sei $p^\star$ diese eindeutige Nullstelle. Dann gilt

$$q^\star = q_s(p^\star) = q_d(p^\star),$$

womit das Marktgleichgewicht eindeutig ist.

(a2) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_s(p)4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Der Markt hat genau ein Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ mit $p^\star \in [2,3]$.
Berechnen Sie $p^\star$ näherungsweise mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2. Ordnung in $p_0 = 1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite das Taylorpolynom 2. Ordnung in $p_0 = 1$ her.
2. Approximiere den Marktgleichgewichtspreis.

1. Leite das Taylorpolynom 2. Ordnung in $p_0 = 1$ her

Wir wissen aus der vorherigen Aufgabe, dass der Marktgleichgewichtspreis $p^\star$ der eindeutigen Nullstelle in $[2,3]$ der Funktion

$$f(p) := q_s(p) - q_d(p) = 4e^{p-1} - 70 + 15p + 1.5p^2$$

entspricht. Für die Ableitungen gilt

$$\begin{aligned} f(p) &= 4e^{p-1} - 70 + 15p + 1.5p^2 \;\Rightarrow\; f(1) = -49.5 \\ f'(p) &= 4e^{p-1} + 15 + 3p \;\Rightarrow\; f'(1) = 22 \\ f''(p) &= 4e^{p-1} + 3 \;\Rightarrow\; f''(1) = 7. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir das 2. Taylorpolynom in $p_0 = 1$ durch:

$$\begin{aligned} P_2(p) &= f(1) + f'(1)(p-1) + \frac{f''(1)}{2}(p-1)^2 = -49.5 + 22(p-1) + \frac{7}{2}(p-1)^2 \\ &= -49.5 + 22p - 22 + \frac{7}{2}(p^2 - 2p + 1) = \frac{7}{2}p^2 + 15p - 68 \end{aligned}$$

2. Approximiere den Marktgleichgewichtspreis

Um den eindeutigen Marktgleichgewichtspreis zu approximieren, bestimmen wir die Nullstellen von P_2. Diese erhalten wir durch

$$P_2(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{7}{2}p^2 + 15p - 68 = 0 \;\Leftrightarrow\; p = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\frac{7}{2}(-68)}}{2\frac{7}{2}} = \frac{-15 \pm \sqrt{1177}}{7}.$$

Wegen $\sqrt{1177} > 0$ ist

$$\frac{-15 - \sqrt{1177}}{7} < 0$$

und liegt somit nicht in $[2,3]$. Des Weiteren gilt

$$\frac{-15 + \sqrt{1177}}{7} \approx 2.7582.$$

Damit ist der approximierte Gleichgewichtspreis durch $p^\star \approx 2.7582$ gegeben.

(b) (10 Punkte)

Nina entschliesst sich am Anfang des Jahres, in dem sie ihr Studium beginnt, einen Studienkredit von CHF 100′000 aufzunehmen. Sie tut dies trotz des hohen Zinssatzes von $i = 8\%$, weil vertragsgemäss die Zahlung der Zinsen und die Rückzahlung erst im Jahr nach Abschluss ihres Studiums beginnt. Dann sollen der Kredit und die Zinsen in 10 gleichmässigen Raten C, jeweils am Jahresende bezahlt werden.
Nina schliesst ihr Studium nach $5\frac{1}{2}$ Jahren ab. (*Hinweis: Sie hat damit noch* 18 *Monate, bis die erste Rate fällig wird.*)

(b1) Zeichnen Sie die beschriebenen Zahlungsströme und Ereignisse an einem Zeitstrahl an.

(b2) Wie hoch sind Nina's Schulden zu Beginn des Jahres in dem die Rückzahlung beginnt?

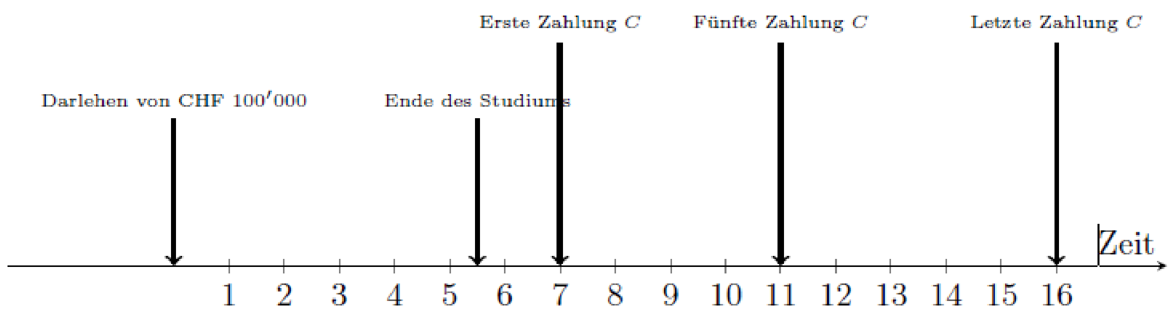
(b3) Bestimmen Sie die Höhe der vereinbarten Raten C.

Nachdem sie schon 5 Raten abbezahlt hat, macht Nina eine Erbschaft von CHF 100′000. Sie beschliesst, statt der 6. Rate den ganzen Restbetrag zurückzuzahlen.

(b4) Ergänzen Sie die Info am Zeitstrahl.

(b5) Reichen die CHF 100′000, um die Schulden vollkommen zurückzuzahlen?
Wenn ja: Wie viel bleibt Nina von ihrer Erbschaft?
Wenn nein: Welchen zusätzlichen Betrag muss Nina zur Tilgung ihrer Schulden aufbringen?

<u>(b1) Zeichne die Zahlungsströme und Ereignisse in einen Zeitstrahl ein:</u>
Die Zahlungsströme und Ereignisse lassen sich folgendermaßen grafisch darstellen:



(b2) Überlege dir, wie hoch die Schuldenlast zu Beginn der Rückzahlung ist:
Da Nina erst im Jahr nach Abschluss ihres Studium mit den Rückzahlungen beginnt und die Raten C zum Jahresende gezahlt werden, entspricht der Kredit am Anfang von Jahr 7 einer Verzinsung von 6 Jahren. Demnach gilt

$$A_6 = A_0(1+i)^6 = 100'000(1+0.08)^6 \approx 158'687.45(CHF)$$

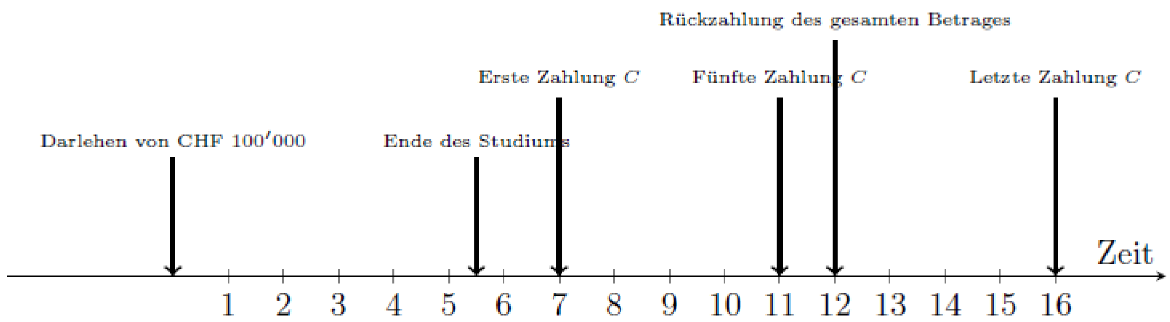
nach 6 Jahren.

(b3) Benutze die Formel für eine nachschüssige Rente, um C zu bestimmen:
Beginnend im 6. Jahr haben wir zehn jährliche Zahlungen C zum Ende des Jahres. Dies entspricht einer nachschüssigen Rente mit dem Anfangswert $P = A_6$, $n = 10$ und $i = 8\%$. Damit erhalten wir

$$C = \frac{i}{(1+i)^n - 1}(1+i)^n P = \frac{iP}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{0.08 \cdot 158'687.45}{1-(1+0.08)^{-10}} \approx 23'649.10(CHF)$$

als jährliche Rate für Nina.

(b4) Zeichne das aktualisierte Schaubild:
Das aktualisierte Schaubild ist gegeben durch:



(b5) Bestimme den noch offenen Restbetrag:
Angenommen wir hätten die Schuld bis zu Beginn des 12. Jahres nicht getilgt. Dann haben wir eine offene Schuld von

$$A_{12} = A_0(1+i)^{12} = 100'000(1+0.08)^{12}$$

zu Beginn des 12. Jahres, falls keine jährlichen Zahlungen geflossen sind. Die jährlichen Zahlungen über 5 Jahre setzen sich zusammen aus

$$C\sum_{k=1}^{5}(1+0.08)^k = C \cdot 1.08 + ... + C \cdot (1.08)^5.$$

Dies liefert uns die Rückzahlung über die Jahre der Rückzahlung verzinst. Damit erhalten wir die offene Schuld für Nina mithilfe der geometrischen Summe:

$$A_{12} - C\sum_{k=1}^{5}(1+0.08)^k = 100'000(1+0.08)^{12} - 23'649.1 \cdot 1.08\frac{1.08^5 - 1}{0.08} \approx 101'977.95(CHF).$$

Damit kann die offene Schuld nicht durch die Erbschaft beglichen werden. Sie muss noch $1977.95(CHF)$ zusätzlich tilgen.

Hinweis: Diese Aufgabe zeigt sehr, wie sich der Zinseszinseffekt auswirkt. Überlegen sie sich immer sehr gut, ob und zu welchem Zweck sie sich verschulden.

(c) (5 Punkte)

Im Jahre 1955 entwickelte Morris Swadesh (1909-1967) eine (umstrittene) Methode, die sog. Glottochronologie, um den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem zwei verwandte Sprachen (z. B. Latein und Sanskrit) sich verzweigten. Swadesh ging von der Hypothese aus, dass die sprachlichen Atome - d.h. die Wörter - zerfallen wie radioaktive Atome. Laut Voraussetzung soll der grundlegende Urwortschatz der Sprachen mit einer Halbwertszeit von etwa 2000 Jahren aussterben. Kennt man die Menge des noch gemeinsamen Urwortschatzes zweier Sprachen und geht davon aus, dass sich diese Menge alle 2000 Jahre halbiert, kann man berechnen, wann sich die Sprachen verzweigt haben. A. Raun und E. Kangsmaa-Minn führten unabhänging voneinander, d.h. jeweils mit einer eigenen Methode, den Vergleich des Finnischen und Ungarischen durch. Während Raun herausfand, dass der Anteil der identischen Elemente in beiden Sprachen 21% beträgt, berechnete Kangsmaa-Minn einen Anteil von 27%.
Innerhalb welches Zeitraums haben sich die beiden Sprachen nach der Theorie der Glottochronolgie und aufgrund dieser Zahlen voneinander getrennt?

Bemerkung:
Berechnen Sie also, vor wie vielen Jahren sich das Finnische und das Ungarische gemäss a) der Berechnung von A. Raun und b) der Berechnung von E. Kangsmaa-Minn getrennt haben. Geben Sie das finale Ergebnis als Zeitintervall an.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite eine Formel für die Prozentzahl identischer Elemente in der Finnische und Ungarischen Sprache her.
2. Wende diese Formel an, um das Zeitintervall herzuleiten.

1. Leite eine Formel für die Prozentzahl identischer Elemente in der Finnische und Ungarischen Sprache her

Wir betrachten $G(t)$ formal als die Prozentzahl identischer Elemente in der Finnischen und Ungarischen Sprache t Jahre nach deren Trennung. Dann gilt

$$G(0) = 100$$

da zum Zeitpunkt der Trennung die Sprachen identisch sind. Des Weiteren gilt

$$\frac{G(t+2000)}{G(t)} = \frac{1}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir als explizite Formel

$$G(t) = 100\% \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}}.$$

2. Wende diese Formel an, um das Zeitintervall herzuleiten

Die beiden Wissenschaftler liefern uns eine identische Übereinstimmung der Sprachen von 21% bis 27%. Demnach gilt

$$\begin{aligned}
21\% \le 100\% \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}} \le 27\% \;&\Leftrightarrow\; 0.21 \le 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}} \le 0.27 \\
&\Leftrightarrow\; \ln(0.21) \le \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}}\right) \le \ln(0.27) \\
&\Leftrightarrow\; \ln(0.21) \le \frac{t}{2000} \ln\left(\frac{1}{2}\right) \le \ln(0.27) \\
&\Leftrightarrow\; \ln(0.21)2000 \le t \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}_{<0} \le \ln(0.27)2000 \\
&\Leftrightarrow\; \frac{\ln(0.27)}{\ln(0.5)}2000 \le t \le \frac{\ln(0.21)}{\ln(0.5)}2000 \\
&\Leftrightarrow\; 3778 \le t \le 4503.
\end{aligned}$$

Also liegt der Zeitraum in dem sich die Finnische und Ungarische Sprache getrennt haben zwischen 3778 und 4503 Jahren.

(d) (9 Punkte)

Ein Student hat ein gegenwärtiges Einkommen von CHF $3'000$ und erwartet in einem Jahr ein zukünftiges Einkommen von CHF $7'000$. Er plant einen gegenwärtigen Konsum c_1 und im folgenden Jahr einen Konsum c_2 mit der Absicht die Nutzenfunktion $u = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(c_2)$ zu maximieren. Wenn er jetzt Geld leiht, weil $c_1 > 3'000$ CHF ist, dann wird der zukünftige Konsum c_2 nach Rückzahlung des Kreditbetrages und der Zinsen berechnet. Spart er entsprechend Geld, i. e. $c_1 < 3'000$ CHF, dann kann er c_2 um den gesparten Betrag und dessen Zinsen erhöhen. Der (optimistische) Zinssatz für Leihen und Sparen beträgt $i = 8\%$.

(d1) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen c_1 und c_2.

(d2) Bestimmen Sie den Nutzen des Studenten in Abhängigkeit von c_1.

(d3) Für welche Wahl von c_1 ist der Nutzen des Studenten maximal?
Wie viel muss er sich allenfalls leihen?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. (d1) Überlege dir, was für die Barwerte von Konsum und Einkommen gelten muss.
2. (d2) Verwende die letzte Teilaufgabe.
3. (d3) Bestimme das Maximum der Nutzenfunktion.

1. (d1) Überlege dir, was für die Barwerte von Konsum und Einkommen gelten muss
Die Barwerte von Konsum und Einkommen müssen identisch sein.

Der Barwert des Konsums ist:

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+0.8)} = c_1 + \frac{c_2}{1.08}.$$

Der des Einkommens ist:

$$3'000 + \frac{7'000}{(1+0.08)} = 3'000 + \frac{7'000}{1.08}.$$

Damit muss

$$\begin{aligned} c_1 + \frac{c_2}{1.08} = 3'000 + \frac{7'000}{1.08} &\Leftrightarrow 1.08c_1 + c_2 = 3'000 \cdot 1.08 + 7'000 \\ &\Leftrightarrow c_2 = 3'000 \cdot 1.08 + 7'000 - 1.08c_1 \\ &\quad = 10'240 - 1.08c_1 \end{aligned}$$

gelten.

(d2) Verwende die letzte Teilaufgabe

Aus der Teilaufgabe (d1) wissen wir, dass

$$c_2 = 10'240 - 1.08c_1$$

gilt. Eingesetzt in unsere Nutzenfunktion ergibt sich

$$u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(c_2) = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(10'240 - 1.08c_1) =: v(c_1).$$

Somit hängt die Nutzenfunktion nur noch von c_1 ab.

3. (d3) Bestimme das Maximum der Nutzenfunktion

Zunächst bestimmen wir die Ableitung von v:

$$v'(c_1) = \frac{1}{c_1} - \frac{1.08}{1.2} \cdot \frac{1}{10'240 - 1.08c_1}.$$

Für das Maximum muss

$$\begin{aligned} v'(c_1) = \frac{1}{c_1} - \frac{1.08}{1.2} \cdot \frac{1}{10'240 - 1.08c_1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{c_1} = \frac{1.08}{1.2} \cdot \frac{1}{10'240 - 1.08c_1} \\ &\Leftrightarrow c_1 = \frac{1.2}{1.08}(10'240 - 1.08c_1) \\ &\Leftrightarrow 2.2c_1 = \frac{1.2 \cdot 10'240}{1.08} \\ &\Leftrightarrow c_1^\star = \frac{1.2 \cdot 10'240}{1.08 \cdot 2.2} \approx 5'171.70(CHF) \end{aligned}$$

gelten. Für die zweite Ableitung gilt mit der Kettenregel:

$$v''(c_1) = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1.08^2}{1.2}\frac{1}{(10'240 - 1.08c_1)^2} < 0$$

Damit liegt an $c_1^\star$ ein globales Maximum vor. Also gilt auch

$$c_2^\star = 10'240 - 1.08c_1^\star \approx 4'654.55(CHF).$$

Im ersten Jahr leiht er sich

$$c_1^\star - 3'000 \approx 2'171.70(CHF)$$

und im zweiten Jahr ist der Konsum $c_2^\star$ geringer als sein Einkommen. Jedoch muss er im zweiten Jahr eine Schuld von $2'345.45$ CHF tilgen.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Die Aussage „Wenn Albert kommt, dann kommt auch Beatrice“ sei richtig. Dann ist die folgende Aussage sicher auch richtig:

(a) „Wenn Beatrice kommt, dann kommt auch Albert“

(b) „Wenn Albert nicht kommt, dann kommt auch Beatrice nicht“

(c) „Wenn Beatrice nicht kommt, dann kommt auch Albert nicht“

(d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist sicher richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstabelle.

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstabelle

Eine Aussage kann nur die Wahrheitswerte wahr (W) oder falsch (F) annehmen. Dementsprechend gibt es bei zwei Aussagen A, B genau vier Kombinationsmöglichkeiten der Wahrheitswerte. Aus diesen Kombinationen ergeben sich dann die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen. Zwei Verknüpfungen heißen äquivalent, falls deren Wahrheitswerte bei jeder möglichen Kombination übereinstimmen. In unserem Fall steht A für Albert und B für Beatrice.

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg B$	F	W	F	W
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
(a) $B \Rightarrow A$	W	W	F	W
(b) $\neg A \Rightarrow \neg B$	W	W	F	W
(c) $\neg B \Rightarrow \neg A$	W	F	W	W

Wir erkennen an der Wahrheitstabelle, dass Antwort (c) korrekt ist.

Frage 2 (2 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $b_n = 2a_n - 1$.
Dann ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton fallend.

(d) unbeschränkt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was für monotone und beschränkte Folgen gilt und beantworte die Frage.

1. Überlege dir, was für monotone und beschränkte Folgen gilt und beantworte die Frage
Sei (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge. Da diese monoton wachsend ist, ist $s := a_0$ die untere Schranke. Sei S die kleinste obere Schranke. Insgesamt gilt

$$s \leq a_n \leq S$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge monoton wachsend ist, gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S.$$

Der intuitive Grund ist: Die Folge ist nach beschränkt und wächst immer weiter. Dementsprechend muss sie sich S immer weiter annähern. Also ist (a_n) konvergent. Da Multiplikation und Addition von Konstanten die Konvergenzeigenschaft beibehalten ist b_n konvergent.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 3 (3 Punkte)

Ein Kapital von $P = 1'000'000$ CHF wird angelegt bei einem Jahreszinssatz von $i = 2\%$ mit monatlicher Verzinsung.
Der effektive Zinssatz i_{eff} beträgt näherungsweise

(a) 1.982%.

(b) 2%.

(c) 2.018%.

(d) 2.020%.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite eine Gleichung für den effektiven Zins her und beantworte die Frage.

1. Leite eine Gleichung für den effektiven Zins her und beantworte die Frage

Der effektive Zins i_{eff} entspricht dem Zins der notwendig ist, um den selben Betrag durch jährliche Verzinsung zu erreichen, wie mit monatlicher Verzinsung zur jährlichen Rate $i = 2\%$. Als Formel erhalten wir also:

$$\begin{aligned} 1'000'000\left(1+\frac{2\%}{12}\right)^{12} &= 1'000'000(1+i_{\text{eff}}) \\ \Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{2\%}{12}\right)^{12} &= (1+i_{\text{eff}}) \\ \Leftrightarrow \quad i_{\text{eff}} &= \left(1+\frac{2\%}{12}\right)^{12} - 1 \approx 2.018\% \end{aligned}$$

Damit Antwort (c) korrekt.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = -\frac{3}{x^5} + 2$$

Dann ist die inverse Funktion f^{-1} definiert auf

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(d) Die Funktion f ist nicht injektiv. Deshalb ist es unmöglich, eine Umkehrfunktion f^{-1} anzugeben.

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Bestimme die Umkehrfunktion und schließe damit auf die richtige Antwort.

1. Bestimme die Umkehrfunktion und schließe damit auf die richtige Antwort

Wir bestimmen die Umkehrfunktion:

$$y = -\frac{3}{x^5} + 2 \ \Leftrightarrow\ \frac{3}{x^5} = 2 - y \ \Leftrightarrow\ x^5 = \frac{3}{2-y} \ \Leftrightarrow\ x = f^{-1}(y) = \sqrt[5]{\frac{3}{2-y}}$$

Wir sehen, dass f^{-1} für $y \neq 2$ definiert ist. Damit gilt $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Also ist Antwort (c) korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Seien $m, n, k > 0$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $k \neq 1$.
Welche der folgenden Identitäten ist allgemein gültig?

(a) $n^{\log_m(k)} = k^{\log_n(m)}$.

(b) $n^{\log_m(k)} = k^{\log_m(n)}$.

(c) $n^{\log_m(k)} = m^{\log_n(k)}$.

(d) Keine der Identitäten (a) - (c) gilt allgemein.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Löse die Aufgabe mithilfe des natürlichen Logarithmus.

1. Löse die Aufgabe mithilfe des natürlichen Logarithmus
Für den Logarithmus zur Basis m gilt folgender Zusammenhang:

$$\log_m(k) = \frac{\ln(k)}{\ln(m)}.$$

Damit erhalten wir

$$n^{\log_m(k)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\log_m(k)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(m)}} = \left(e^1\right)^{\frac{\ln(n)\ln(k)}{\ln(m)}} = \left(e^{\ln(k)}\right)^{\frac{\ln(n)}{\ln(m)}} = k^{\log_m(n)}.$$

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2} - 2\pi, -2\pi < x < 2\pi.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f ist stetig für alle $x \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$.

(b) f hat mehr als eine Unstetigkeitsstelle in $(-2\pi, 2\pi)$.

(c) f ist überall stetig.

(d) f hat keine Polstelle.

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Beantworte die Frage durch das Ausschließen von Antworten.

1. Beantworte die Frage durch das Ausschließen von Antworten

Für die Antwort auf unsere Frage sind nur die Nullstellen von $g(x) := (\sin(x))^2$ relevant. Es gilt

$$g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -\pi, x_2 = 0, x_3 = \pi$$

für $-2\pi < x < 2\pi$. Jede Nullstelle von g entspricht einer Unstetigkeitsstelle in f. Damit ist (a) und (c) falsch. Desweiteren gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty,$$

wodurch auch (d) falsch ist.

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = \frac{x}{3} - \frac{e}{x^3}.$$

Der Wertebereich von f' ist

(a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) $(-\infty, \infty)$.

(c) $(0, \infty)$

(d) $(\frac{1}{3}, \infty)$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die 1. Ableitung und den entsprechenden Wertebereich.
2. Alternativer Lösungsweg.

1. Bestimme die 1. Ableitung und den entsprechenden Wertebereich

Durch Ableiten erhalten wir

$$f'(x) = \frac{1}{3} - (-3)\frac{e}{x^4} = \frac{1}{3} + 3e\frac{1}{x^4}.$$

Nun gilt wegen $\frac{1}{x^4} > 0$ für $x \neq 0$ auch $f'(x) > \frac{1}{3}$ für $x \neq 0$. Aufgrund von

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \infty$$

gilt $W_{f'} = \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

Also ist Antwort (d) korrekt.

2. Alternativer Lösungsweg

Die Ableitung des ersten Summanden ist konstant. Die Ableitung des zweiten Summanden hat wegen des Minus die Form

$$C\frac{1}{x^4}, \quad C > 0.$$

Der Wertebereich dieser Funktion ist $(0, \infty)$. Sei $K > 0$ die Konstante der Ableitung des ersten Summanden. Dann folgt

$$W_{f'} = K + (0, \infty) = (K, \infty).$$

Also kann nur Antwort (d) korrekt sein.

Frage 8 (3 Punkte)

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f mit Ableitung f'.
Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

(a) f ist stetig.

(b) Wenn f gerade ist, dann ist auch f' gerade.

(c) Wenn f gerade ist, dann ist f' ungerade.

(d) Wenn $f' > 0$ ist, dann ist f streng monoton wachsend.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde ein Gegenbeispiel für eine der Antworten.

1. Finde ein Gegenbeispiel für eine der Antworten
Eine Funktion f heißt gerade, falls

$$f(x) = f(-x)$$

für alle $x \in D_f$ gilt. Sie heißt ungerade, falls

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt. Wir betrachten $f(x) = x^2$. Dann gilt

$$f'(x) = 2x = -2(-x) = -f'(-x).$$

Demnach ist f' ungerade und wir haben ein Gegenbeispiel für (b) gefunden.
Wir können dies auch formal begründen. Sei f gerade. Dann folgt mit der Kettenregel:

$$f(x) = f(-x) \;\Rightarrow\; f'(x) = -f'(-x).$$

Die Antwort (b) ist also korrekt.

Frage 9 (3 Punkte)

Für eine differenzierbare Funktion $h : D_h \to \mathbb{R}, x \mapsto y = h(x)$ seid $dh(x)$ ihr Differential an der Stelle x. Wir betrachten nun zwei differenzierbare Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ und Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Gleichungen ist im Allgemeinen falsch?

(a) $d(af + bg)(x) = a\ df(x) + b\ dg(x)$.

(b) $d(fg)(x) = g(x)\ df(x) + f(x)\ dg(x)$.

(c) $d(f \circ g)(x) = f'(g(x))\ dg(x)$.

(d) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = g(x)\ df(x) - f(x)\ dg(x)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie das Differential definiert ist.
2. Betrachte die Quotientenregel, um die falsche Antwort zu erhalten.

1. Überlege dir, wie das Differential definiert ist

Das Differential einer differenzierbaren Funktion f ist definiert über

$$df(x) := f'(x)\ dx,$$

wobei $dx \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist. $df(x)$ beschreibt also eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung $f'(x)$.

2. Betrachte die Quotientenregel, um die falsche Antwort zu erhalten

Die Quotientenregel ist durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

gegeben. Demzufolge müsste in (d) in irgendeiner Form ein g im Nenner auftauchen. Das passiert aber nicht, womit (d) wahrscheinlich eine falsche Gleichung ist. Dies rechnen wir nun nach:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \left(\frac{f}{g}\right)'(x)\ dx = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x)\ dx = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\ dx \\ &= \frac{1}{g(x)}f'(x)\ dx - \frac{f(x)}{g^2(x)}g'(x)\ dx = \frac{1}{g(x)}df(x) - \frac{f(x)}{g^2(x)}dg(x). \end{aligned}$$

Somit war unsere Vermutung richtig und (d) ist eine falsche Gleichung.

Die Antwort (d) ist korrekt.

Frage 10 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = |x^2 - 2x - 24|.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein globales Maximum in $x_0 = 1$.

(c) f hat ein eindeutiges globales Maximum.

(d) f hat ein eindeutiges lokales Minimum.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir anhand der Struktur einer Parabel die korrekte Antwort.

1. Überlege dir anhand der Struktur einer Parabel die korrekte Antwort

Wir wissen, dass

$$g(x) = x^2 - 2x - 24$$

eine nach oben geöffnete Parabel ist. Demnach liegt deren globales Minimum an dem Scheitelpunkt. Es gilt

$$g'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$
$$g''(x) = 2 > 0$$

Damit hat g das globale Minimum bei $x_0 = 1$. Also hat

$$f(x) = |g(x)|$$

ein lokales Maximum an $x_0 = 1$. Das Maximum ist lokal, da

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

gilt.

Damit ist Antwort (a) korrekt.

Hinweis: Falls dir dieses Argument nicht klar ist, zeichne $x^2 - 1$ und wende den Betrag hierauf an.

Frage 11 (3 Punkte)

Sei

$$P(x) = 1 + 2x + 5x^2 - x^3$$

des Taylor-Polynoms 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ einer unendliche oft differenzierbaren Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $f(0) = 2$.

(b) $f'(0) = 1$.

(c) $f''(0) = 10$.

(d) $f^{(3)}(0) = -5$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die allgemeine Formel für das Taylorpolynom der 3. Ordnung an.
2. Leite hieraus die korrekte Antwort her.
3. Alternativer Lösungsweg.

1. Gebe die allgemeine Formel für das Taylorpolynom der 3. Ordnung an
Die allgemeine Formel für das Taylorpolynom 3. Ordnung in $x_0 = 0$ ist:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

2. Leite hieraus die korrekte Antwort her
Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch. Es gilt

$$f(0) = 1 \neq 2$$
$$f'(0) = 2 \neq 1$$
$$\frac{f''(0)}{2} x^2 = \frac{10}{2} x^2 = 5x^2.$$

Also ist die Antwort (c) korrekt.

3. Alternativer Lösungsweg
Für das dritte Taylorpolynom in $x_0 = 0$ gilt

$$P_3^{(k)}(0) = f^{(k)}(0).$$

Wegen

$$P_3'(x) = 2 + 10x - 3x^2$$
$$P_3''(x) = 10 - 6x \;\Rightarrow\; P_3''(0) = 10$$

ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 12 (2 Punkte)

Eine homogene Funktion f hat den Grad 1.8. Ausserdem kennt man die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,y}(x,y) = x + y - 1.2$.
Es folgt dann

(a) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = x - y - 1.2$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = -x - y + 1.2$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = -x - y + 3$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ ist durch die Angaben nicht eindeutig bestimmt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite die Antwort mithilfe der Eulerschen Relation her.

1. Leite die Antwort mithilfe der Eulerschen Relation her

Die Eulersche Relation ist gegeben durch

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = k,$$

wobei k der Grad der Homogenität von f ist. Damit erhalten wir

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = k - \varepsilon_{f,y}(x,y) = 1.8 - (x + y - 1.2) = 1.8 - x - y + 1.2 = -x - y + 3.$$

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) 0.5.

(c) 1.

(d) 2.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende die Regel von de l'Hôpital an.

1. Wende die Regel von de l'Hôpital an

Durch zweimaliges Anwenden der Regel von de l'Hôpital erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{e^0 + e^0}{\cos(0)} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Damit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 2 (4 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)$$

ist

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{2}{5}$.

(d) ∞.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir einen Zusammenhang für die Nenner der Brüche.
2. Berechne den Grenzwert.

1. Überlege dir einen Zusammenhang für die Nenner der Brüche

Wegen

$$x^3-27=0 \;\Leftrightarrow\; x^3=27 \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt[3]{27}=3$$

ist 3 eine Nullstelle von x^3-27. Durch Polynomdivision erhalten wir dann:

$$(x^3-27):(x-3)=x^2+3x+9 \;\Leftrightarrow\; x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$

Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}&=\frac{1}{x-3}-\frac{27}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{x^2+3x+9}{(x-3)(x^2+3x+9)}-\frac{27}{(x-3)(x^2+3x+9)}\\&=\frac{x^2+3x-18}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{(x-3)(x+6)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\frac{x+6}{x^2+3x+9}.\end{aligned}$$

2. Berechne den Grenzwert

Mit unseren Vorüberlegungen gilt

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3x+9}=\frac{9}{27}=\frac{1}{3}$$

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Am 26.12.2017 entdeckte der Hobby-Mathematiker Jonathan Price aus Germantown, Tennessee, die bislang grösste bekannte Primzahl p, nämlich

$$p = 2^{77'232'917} - 1$$

Wie viele Stellen hat p im Dezimalsystem?
(*Tipp:* Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen Anzahl Stellen einer natürlichen Zahl n im Dezimalsystem und ihrem Zehnerlogarithmus $\log_{10}(n)$)

(a) p hat im Dezimalsystem $23'249'424$ Stellen.

(b) p hat im Dezimalsystem $23'249'425$ Stellen.

(c) p hat im Dezimalsystem $53'533'778$ Stellen.

(d) p hat im Dezimalsystem $53'533'779$ Stellen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen natürlichen Zahlen und Zehnerpotenzen.
2. Wende diesen Zusammenhang an.

1. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen natürlichen Zahlen und Zehnerpotenzen
Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit s Stellen. Dann lässt sich diese durch

$$n = x10^{s-1}$$

mit $x \in [1, 10)$ darstellen. Damit gilt

$$\log_{10}(n) = \log_{10}(x) + (s-1) \;\Leftrightarrow\; s = \log_{10}(n) - \log_{10}(x) + 1.$$

Wegen $\log_{10}(x) \in [0, 1)$ folgt

$$s \leq \log_{10}(n) + 1.$$

2. Wende diesen Zusammenhang an
Für eine große Zahl x ist die Differenz von $\log_{10}(x)$ und $\log_{10}(x+1)$ sehr klein.
Hinweis: Überlege dir, wie du dies mit der Ableitung von $\log_{10}(x)$ begründen kannst.
Nun gilt

$$\begin{aligned}
\log_{10}(p) + 1 &\approx \log_{10}(p+1) + 1 \\
&= \log_{10}(2^{77'232'917}) + 1 \\
&= 77'232'910 \frac{\ln(2)}{\ln(10)} + 1 \\
&\approx 23'249'424.7 + 1 = 23'249'425.7.
\end{aligned}$$

Mit unseren Vorüberlegungen hat p genau $23'249'425$ Dezimalstellen.

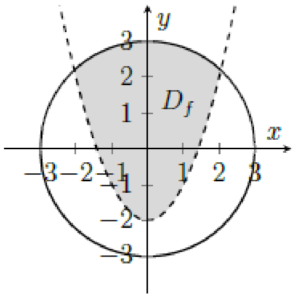
Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

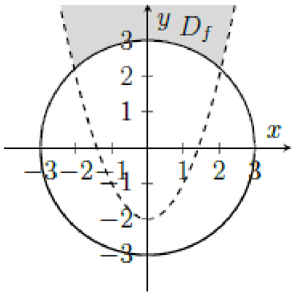
$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \sqrt[4]{4x^2 + 4y^2 - 36} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y - 2}}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt grau schraffiert den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

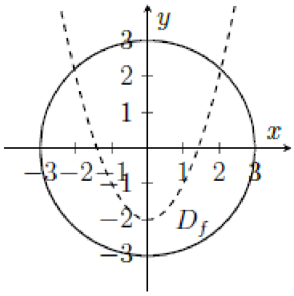
(a)



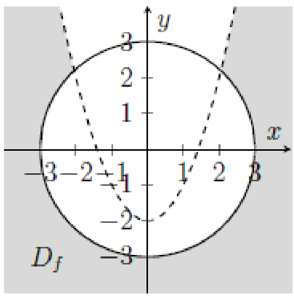
(b)



(c)



(d)



Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Definitionsbereich der Funktion.

1. Bestimme den Definitionsbereich der Funktion

Damit unsere Funktion definiert ist, müssen

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 - 36 &\geq 0 \\ x^2 - y - 2 &> 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Zuerst kümmern wir uns um die erste Ungleichung. Es gilt

$$4x^2 + 4y^2 - 36 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 + 4y^2 \geq 36 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \geq 9 = 3^2.$$

Diese Ungleichung beschreibt also die Fläche auf und außerhalb des Kreises mit Radius 3. Nun zu der zweiten Ungleichung. Hierfür ist

$$x^2 - y - 2 > 0 \;\Leftrightarrow\; y < x^2 - 2$$

erfüllt. Dadurch werden alle Werte unter der um 2 nach unten verschobenen Normalparabel beschrieben. Demnach kann nur Antwort (d) richtig sein.

Die korrekte Antwort ist (d).

Frage 5 (4 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \sqrt{e}\}.$$

Dann ist das Bild R_f von f gegeben durch

(a) $R_f = \mathbb{R}$.

(b) $R_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(c) $R_f = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(d) $R_f = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde die korrekte Antwort durch Äquivalenzumformungen.
2. Alternativer Lösungsweg.

1. Finde die korrekte Antwort durch Äquivalenzumformungen

Wir wissen, dass (x, y) in D_f liegt genau dann, wenn

$$0 < \sqrt{e} - x^2 - y^2 \leq \sqrt{e}$$

erfüllt ist. Wegen $\ln(x) \to -\infty$ für $x \to 0$ ist äquivalent zu:

$$-\infty < \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2) \leq \ln(e^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow -\infty < \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2) \leq \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; f(x, y) \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

Damit ist Antwort (d) korrekt.

2. Alternativer Lösungsweg

Wir wissen, dass

$$\lim_{t \to 0} \ln(t) = -\infty$$

gilt. Wir setzen $t = x^2 + y^2$, womit wir

$$\lim_{t \to \sqrt{e}} \ln(\sqrt{e} - t) = -\infty$$

erhalten. Wegen $0 \leq t < \sqrt{e}$ folgt aufgrund von

$$\ln(\sqrt{e}) = \ln(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \ln(e) = \frac{1}{2},$$

dass $f(x, y) \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 6 (4 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto z = f(x,y) = \ln\left(\left|\frac{y+1}{x-2}\right|\right).$$

Die Steigung m der Tangenten an die Niveaulinie $f(x,y) = \ln(2)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ ist gegeben durch

(a) $m = -0.5$.

(b) $m = 0.5$.

(c) $m = -2$.

(d) Es ist nicht möglich, die Steigung m als Funktion von x anzugeben.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wir wenden den Satz der impliziten Funktion an.

1. Wir wenden den Satz der impliziten Funktion an

Für jede klein genug gewählte Umgebung von $(1,1)$ gilt $y+1 > 0$ und $x-2 < 0$. Damit folgt $|y+1| = y+1$ und $|x-2| = 2-x$ für $(x,y) \in U$. Also gilt

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{y+1}{2-x}\right) = \ln(y+1) - \ln(2-x)$$

für alle $(x,y) \in U$. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\frac{1}{2-x} \cdot (-1) = \frac{1}{2-x} \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{y+1}. \end{aligned}$$

Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun:

$$m = y'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -\frac{\frac{1}{2-1}}{\frac{1}{1+1}} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Also ist Antwort (c) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \ln\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x).$$

wobei $x > 0$, $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{5}{2}$.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rechne die Homogenitätseigenschaft nach.

1. Rechne die Homogenitätseigenschaft nach

Die Funktion ist homogen vom Grad k, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$$

für $\lambda > 0$ gilt. Diese Eigenschaft werden wir nun nachrechnen:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \ln\left((\lambda x)^2\sqrt{\lambda y} + \sqrt[4]{(\lambda x)^3(\lambda y)^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(\lambda x) \\
&= \ln\left(\lambda^2 x^2 \lambda^{\frac{1}{2}}\sqrt{y} + \lambda^{\frac{10}{4}}\sqrt[4]{x^3y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{5}{2}}\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3y^7}\right)\right) - \frac{5}{2}\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{5}{2}}\right) + \ln\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(\lambda) \\
&= \frac{5}{2}\ln(\lambda) + \ln\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x) - \frac{5}{2}\ln(\lambda) \\
&= \lambda^0 f(x,y)
\end{aligned}$$

Damit ist f homogen vom Grad 0.

Also ist Antwort (a) korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 7x\sqrt{y^a} + 3y^2\sqrt[4]{x^a y^b} - x^2 y^{0.2},$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a und b ist f homogen?

(a) $a = 2.4$, $b = -2$.

(b) $a = 2.4$, $b = -1.6$.

(c) $a = 2$, $b = -1.2$.

(d) f ist homogen für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rechne die Homogenitätseigenschaft nach.
2. Bestimme a und b.

1. Rechne die Homogenitätseigenschaft nach
Durch Nachrechnen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 7(\lambda x)\sqrt{(\lambda y)^a} + 3(\lambda y)^2\sqrt[4]{(\lambda x)^a(\lambda y)^b} - (\lambda x)^2(\lambda y)^{0.2} \\ &= \lambda^{1+\frac{1}{2}a} 7x\sqrt{y^a} + \lambda^{2+\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b} 3y^2\sqrt[4]{x^a y^b} - \lambda^{2.2} x^2 y^{0.2}. \end{aligned}$$

2. Bestimme a und b
Wir sehen, dass f nur homogen sein kann, wenn

$$1 + \frac{1}{2}a = 2.2 = 2 + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$$

erfüllt ist. Damit erhalten wir

$$1 + \frac{1}{2}a = 2.2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}a = 1.2 \;\Leftrightarrow\; a = 2.4$$

und

$$2 + \frac{1}{4}2.4 + \frac{1}{4}b = 2.6 + \frac{1}{4}b = 2.2 \;\Leftrightarrow\; b = -1.6.$$

Also ist Antwort (b) korrekt.