Teil I: Offene Aufgaben (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (40 Punkte)

(a) (14 Punkte)

Das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreibt, wie sich die Temperatur eines Körpers, der sich in einem Raum mit konstanter Temperatur T befindet, mit der Zeit verändert (das Gesetz beschreibt Abkühlung und Erwärmung gleichermassen). Im Detail besagt das Abkühlungsgesetz, dass die Änderung der Temperatur eines Körpers zwischen Zeitpunkt k und $k+1$ proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zum Zeitpunkt k und der Umgebungstemperatur T ist. Die Proportionalitätskonstante hängt von der Beschaffenheit des Körpers ab und sei durch den Parameter $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt.

(a1) Die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt k sei y_k. Leiten Sie eine Differenzengleichung her, die die Entwicklung der Temperatur y_k für $k = 1, 2, ...$ abhängig von der anfänglichen Temperatur y_0 und der Raumtemperatur T beschreibt.

(a2) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung aus **(a1)**.

(a3) Für welche Werte λ sinkt die Temperatur des Objekts auf lange Sicht (d.h., für $k \to \infty$) unter 30 (°C), dass $y_0 = 100$ (°C) und $T = 20$ (°C)? Welche dieser Werte wiederum sind auch physikalisch plausibel?

(a4) Sei $y_0 = 30$ (°C) und $T = 15$ (°C). Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $k = 10$ noch 16.6 (°C) beträgt. Runden Sie auf eine Dezimalstelle. Wie viel Zeit vergeht, bis y_k wieder über 20 (°C) steigt, wenn zum Zeitpunkt $k = 10$ die Raumtemperatur auf $T = 25$ (°C) erhöht wird?

(b) (10 Punkte)

Das folgende Modell soll die Entwicklung des Arbeitsmarktes eines bestimmten Landes abbilden. Die Variablen x_t und y_t beschreiben die Anzahl Erwerbstätiger zum Zeitpunkt t für zwei verschiedene Segemente des Arbeitsmarktes, die Variable z_t die Anzahl Erwerbsloser zum Zeitpunkt t. Es wird unterstellt, dass

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.9x_t + 0.1y_t \\ y_{t+1} &= 0.1x_t + 0.8y_t + \quad mz_t \\ z_{t+1} &= \qquad\qquad 0.1y_t + (1-m)z_t \end{aligned}$$

für $t = 0, 1, 2, ...$, wobei $m \in [0, 1]$.
Für

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

sagen wir, dass der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht ist, wenn

$$\mathbf{u}_{t+1} = \lambda \mathbf{u}_t$$

für alle $t = 0, 1, 2, ...$ gilt, d.h., wenn das Verhältnis der Gruppengrössen über die Zeit konstant bleibt. Für welche Werte m ist der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht mit $\lambda = 1$?

Verwenden Sie das Gauß-Verfahren, um alle (möglichen) Gleichgewichtsvektoren $\mathbf{u}_t$ zu bestimmen. Berechnen Sie abschliessend die Arbeitslosenquote im implizierten Gleichgewicht.

(c) (10 Punkte)

Ein Fischer befindet sich am Flussufer und möchte zu seinem Boot, welches unter den Koordinaten $H = (0, h)$ auf dem Fluß vor Anker liegt. Der Verlauf des Flussufers lässt sich gut durch eine nach links und rechts offene Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreiben, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{++}$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte am Flussufer, von denen aus der Fischer die geringste Distanz zu seinem Boot schwimmen muss.

Tipp: Veranschaulichen Sie sich das Problem zunächst graphisch, um eine Intuition für die Situation und den Lösungsansatz zu bekommen.

(d) (6 Punkte)

Die private Altersvorsorge gewinnt durch das Altern der Bevölkerung mehr und mehr an Bedeutung. Eine neue Gesetzesinitiative soll Anreize für eine Änderung des Sparverhaltens schaffen. Der (stochastische) Einfluss der Initiative auf den jährlichen Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts soll nun modelliert werden. Es wird unterstellt, dass diese Änderung des Sparbetrags durch eine stetige Zufallsvariable D mit U-quadratischer Verteilung modelliert werden kann. Die Dichte von D sei gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{(b-a)^3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(d1) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts um mindestens CHF 200 erhöht wird.

(d2) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ den erwarteten Anstieg des (durchschnittlichen) Sparbetrags $\mathbb{E}[D]$.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} - 1 = 0$ hat die Funktion $f(x,y) = 2x+1$ ein Minimum in welchem Punkt?

(a) $P = (0,3)$.

(b) $P = (4,10)$.

(c) $P = (-5,3)$.

(d) $P = (4,-4)$.

(e) Keiner der oben gegebenen Punkte ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion f hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert als $g(x,y) = e^{-f(-x,-y)}$ mit Definitionsgebiet $D_g = D_f$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) g hat ein lokales Maximum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(b) g hat ein lokales Minimum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(c) g hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0).

(d) g hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0).

Frage 3 (4 Punkte)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^4}$, wobei $m > 0$, konvergiert gegen $a(m) \in \mathbb{R}$, wobei $a(m)$ von dem Parameter m abhängt.

Es gilt:

(a) $a(m) > \frac{4m}{3}$ für alle $m \geq 1$.

(b) $a(m) < \frac{4m}{3}$ für alle m.

(c) $a(m) < m$ für alle m.

(d) $a(m) < \frac{m}{2}$ für alle m.

Frage 4 (2 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion $a, x \in D_f$ mit $a < x$. Sei g definiert als $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $f'(x) = g(x)$.

(b) $g'(x) = f(x) - f(a)$.

(c) $g \circ f$ ist eine Stammfunktion von f.

(d) $\lim_{\Delta \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f(x)$.

(e) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^3} + 2xce^{-cx^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Dann ist f eine Dichtefunktion

(a) für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) für kein $c \in \mathbb{R}$.

(c) für alle $c > 0$.

(d) für $c = \ln(0.75)$.

(e) für $c = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

Frage 6 (3 Punkte)

A sei eine $(n \times m)-$dimensionale Matrix, und sei B eine $(p \times q)-$dimensionale Matrix.
Wenn die Matrizen $C = BA$ und $D = AB$ existieren und es gilt $C = D$, dann folgt daraus:

(a) $n = m = p = q$.

(b) $n = q$ und $m = p$ und $m \neq q$.

(c) $m = p$ und $q = n$ und $n \neq p$.

(d) $n = p$ und $m = q$ und $n \neq m$.

Frage 7 (2 Punkte)

Eine $(4 \times 5)-$dimensionale Matrix A hat den Rang 3. B ist eine $(8 \times 5)-$dimensionale Matrix, in welcher jede Zeile von A genau zweimal vorkommt. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(B) = 1$.

(b) $\text{rg}(B) = 3$.

(c) $\text{rg}(B) = 4$.

(d) $\text{rg}(B) = 5$.

(e) $\text{rg}(B) = 6$.

(f) $\text{rg}(B) = 8$.

Frage 8 (3 Punkte)

Seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, und $\mathbf{b}$ m-dimensionale Vektoren und $m \geq 2$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ genau dann, wenn gilt:

(a) $\text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]\right) = 3$.

(b) $\text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]\right) = m$.

(c) $\det\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\right) = 0$.

(d) $\text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]\right) = \text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\right) = 3$.

(e) $\text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]\right) = \text{rg}\left([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]\right)$.

Frage 9 (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist **nicht wahr**?

(a) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn sie nicht regulär ist.

(b) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn das System ihrer Zeilenvektoren linear abhängig ist.

(c) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von ihr ist.

(d) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

Frage 10 (4 Punkte)

Sei $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ eine Folge, welche die Differenzengleichung

$$y_{k+1} = Ay_k + B,$$

mit $A \in (0,1), B \in \mathbb{R}$ erfüllt. Sei $y^\star = \frac{B}{1-A}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ divergiert.

(b) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ konvergiert und $y_k > y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, ...$

(c) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ konvergiert und $y_k < y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, ...$

(d) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist im Allgemeinen korrekt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $P = (1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(b) $P = (1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

(c) $P = (0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.

(d) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(e) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \text{mit} \quad f(0) = \ln(2)$$

Es folgt:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x}+1)$.

(b) $f(x) = \ln(e^{2x}+1) + \ln(2)$.

(c) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x})$.

(d) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x}) + \ln(2)$.

(e) $f(x) = 2\ln(e^{2x}+1) - \ln(2)$.

Frage 3 (4 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx^3 & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 0.75$.

(a) $a = 3, b = 0$.

(b) $a = \frac{3}{2}, b = 2$.

(c) $a = -1, b = 4$.

(d) $a = 0, b = 2$.

(e) $a = \frac{12}{5}, b = \frac{3}{4}$.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2\ln(x^2 + y^2) + (3 - a)\ln(y^2), \qquad x, y > 0.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist der Gradient der Funktion f an der Stelle $(1, 1)$ orthogonal zum Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $a = 3$.

(b) $a = 6$.

(c) $a = 9$.

(d) $a = 12$.

(e) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) Rang 1.

(b) Rang 2.

(c) Rang 3.

(d) Rang 4.

(e) Rang 5.

Frage 6 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

(a) A ist singulär für alle $m \in \mathbb{R}$.

(b) $m = -1$.

(c) $m = 0$.

(d) $m = 1$.

(e) $m = 2$.

Frage 7 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $B = A^3$ hat den Eigenwert

(a) 64.

(b) 27.

(c) 8.

(d) 5.

(e) 1.

Frage 8 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{1}{3}y_k - \frac{3}{4}y_{k+1} + \frac{1}{27}y_k = \frac{1}{9}y_k + 2 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Lösungen

Aufgabe 1 (40 Punkte)

(a) (14 Punkte)

Das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreibt, wie sich die Temperatur eines Körpers, der sich in einem Raum mit konstanter Temperatur T befindet, mit der Zeit verändert (das Gesetz beschreibt Abkühlung und Erwärmung gleichermassen). Im Detail besagt das Abkühlungsgesetz, dass die Änderung der Temperatur eines Körpers zwischen Zeitpunkt k und $k+1$ proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zum Zeitpunkt k und der Umgebungstemperatur T ist. Die Proportionalitätskonstante hängt von der Beschaffenheit des Körpers ab und sei durch den Parameter $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt.

(a1) Die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt k sei y_k. Leiten Sie eine Differenzengleichung her, die die Entwicklung der Temperatur y_k für $k = 1, 2, ...$ abhängig von der anfänglichen Temperatur y_0 und der Raumtemperatur T beschreibt.

(a2) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung aus **(a1)**.

(a3) Für welche Werte λ sinkt die Temperatur des Objekts auf lange Sicht (d.h., für $k \to \infty$) unter 30 (°C), dass $y_0 = 100$ (°C) und $T = 20$ (°C)? Welche dieser Werte wiederum sind auch physikalisch plausibel?

(a4) Sei $y_0 = 30$ (°C) und $T = 15$ (°C). Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $k = 10$ noch 16.6 (°C) beträgt. Runden Sie auf eine Dezimalstelle. Wie viel Zeit vergeht, bis y_k wieder über 20 (°C) steigt, wenn zum Zeitpunkt $k = 10$ die Raumtemperatur auf $T = 25$ (°C) erhöht wird?

Lösung:

Vorgehensweise:

(a1)
1. Stelle die Differenzengleichung auf.
2. Forme in die Normalform um.

(a2)
1. Bestimme die Lösungen mithilfe der Normalform.

(a3)
1. Unterscheide geeignete Fälle anhand der Normalform.

(a4)
1. Bestimme den Parameter λ.
2. Stelle eine neue Differenzengleichung für das veränderte Problem auf.

(**a1**) 1. Stelle die Differenzengleichung auf

Sei y_k die Temperatur des Körpers zu dem Zeitpunkt k. Die Änderung der Temperatur des Körpers zwischen dem Zeitpunkt k und $k+1$ ist gegeben durch $y_{k+1} - y_k$. Die Differenz des Körpers zum Zeitpunkt k und der Umgebungstemperatur T wird durch $y_k - T$ ausgedrückt. Das Newton'sche

Abkühlungsgesetz besagt, dass die Temperaturänderung proportional zur Differenz des Körpers zum Zeitpunkt k und der Umgebungstemperatur T des Raumes ist. Formal bedeutet dies

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{y_k-T}=\lambda \;\Leftrightarrow\; y_{k+1}-y_k=\lambda\cdot(y_k-T), \quad k=0,1,2,...$$

für die Proportionalitätskonstante $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Damit liegt eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor.

(a1) 2. Forme in die Normalform um

Eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich in die Normalform

$$y_{k+1}=Ay_k+B$$

mit $A,B\in\mathbb{R}$ und $A\neq 0$ umformen. Für das Newton'sche Abkühlungsgesetz bedeutet dies

$$y_{k+1}-y_k=\lambda\cdot(y_k-T) \;\Leftrightarrow\; y_{k+1}=\lambda\cdot(y_k-T)+y_k=\lambda y_k-\lambda T+y_k=(\lambda+1)y_k-\lambda T$$

für $k=0,1,2,...$ In der Notation der Normalform bedeutet dies $A=\lambda+1, \lambda\neq-1$ und $B=-\lambda T$.

(a2) 1. Bestimme die Lösungen mithilfe der Normalform

Wenn die Normalform

$$y_{k+1}=Ay_k+B, \quad k=0,1,2,...$$

vorliegt, ist die allgemeine Lösung abhängig von A. Formal drückt sich dies aus in:

$$y_k=\begin{cases}A^k(y_0-y^\star)+y^\star & \text{, falls } A\neq 1\\ y_0+k\cdot B & \text{, falls } A=1\end{cases} \quad \text{mit } y^\star=\frac{B}{1-A}.$$

In unserer Aufgabe ist $A=\lambda+1$, womit wir die Fälle $\lambda=0$ und $\lambda\neq 0$ unterscheiden müssen. Für $\lambda=0$ ergibt sich wegen $B=-\lambda T$ die allgemeine Lösung:

$$y_k=y_0, \quad k=0,1,2,\dots\,.$$

Für $\lambda\neq 0$ erhalten wir mit $y^\star=\frac{B}{1-A}=\frac{-\lambda T}{1-(1+\lambda)}=\frac{-\lambda T}{-\lambda}=T$:

$$y_k=A^k(y_0-y^\star)+y^\star=(1+\lambda)^k(y_0-T)+T.$$

Insgesamt erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y_k=\begin{cases}(1+\lambda)^k(y_0-T)+T & \text{, falls } \lambda\neq 0\\ y_0 & \text{, falls } \lambda=0\end{cases}.$$

(a3) 1. Unterscheide geeignete Fälle anhand der Normalform

Der Fall $\lambda=0$ ist ausgeschlossen, da ansonsten dauerhaft $y_k=y_0=100$ gilt. Wegen $y_0-T=100-20=80$ ist $(y_0-T)>0$. Für $|A|=|1+\lambda|>1$ ist die Folge divergent. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll, denn für $A>1$ gilt $|y_k|\to\infty$. Nun bleibt noch $|A|=|1+\lambda|<1$ übrig. Hierfür gilt:

$$|1+\lambda|<1 \;\Leftrightarrow\; -1<1+\lambda<1 \;\Leftrightarrow\; -2<\lambda<0.$$

Wir wissen also , dass y_k für $\lambda\in(-2,0)$ gegen $y^\star=T=20$ (°C) konvergiert. Damit fällt die Temperatur für $\lambda\in(-2,0)$ auf lange Sicht unter 30 (°C). Jedoch ist die Lösung für

$\lambda \in (-2,-1) \subset (-2,0)$ physikalisch nicht plausibel, da dann $-1 < A = 1+\lambda < 0$ gilt und die Lösung oszilliert. Formal sieht man dies zum Beispiel an:

$$y_1 = A^1(y_0 - T) + T = \underbrace{A(y_0 - T) + T}_{<T}.$$

Das würde bedeuten, dass ie Temperatur zum Zeitpunkt 1 kleiner als die Raumtemperatur T, obwohl die Temperatur zum Zeitpunkt 0 100 (°C) beträgt. Für $\lambda \in (-1,0)$ gilt $0 < A < 1$, womit die Lösung streng monoton fällt und gegen $y^\star = 20$ konvergiert. Insgesamt können wir sagen, dass die Temperatur genau dann auf lange Sicht (physikalisch sinnvoll) unter 30 (°C) fällt, wenn $\lambda \in (-1,0)$ gilt.

(a4) 1. Bestimme den Parameter λ

Gegeben sind $y_0 = 30$, $y_{10} = 16.6$ und $T = 15$. Gesucht ist das zugehörige λ für das Abkühlungsgesetz. Dies erhalten wir durch:

$$\begin{aligned}
&16.6 = y_{10} = (1+\lambda)^{10}(y_0 - T) + T = (1+\lambda)^{10}(30-15) + 15 = (1+\lambda)^{10} \cdot 15 + 15 \\
\Leftrightarrow\ &\frac{16.6-15}{15} = (1+\lambda)^{10} \\
\Leftrightarrow\ &1+\lambda = \sqrt[10]{\frac{1.6}{15}} \\
\Leftrightarrow\ &\lambda = \sqrt[10]{\frac{1.6}{15}} - 1 \approx -0.2.
\end{aligned}$$

Da die Propornalitätskonstante λ nur von dem Körper abhängt, wird diese durch Änderung der Umgebungstemperatur T und der Anfangstemperatur y_0 nicht beeinflusst.

(a4) 2. Stelle eine neue Differenzengleichung für das veränderte Problem auf.

Wir wählen $z_0 = y_{10} = 16.6$ (°C) und $T = 25$ (°C) und erhalten die Folge

$$z_k = (1-0.2)^k(y_0 - T) + T = (0.8)^k(16.6-25) + 25 = -(0.8)^k \cdot 8.4 + 25.$$

Wir wollen nun wissen, ab wann $z_k \geq 20$ (°C) gilt. Hierfür betrachten wir:

$$\begin{aligned}
&z_k = -(0.8)^k \cdot 8.4 + 25 \geq 20 \\
\Leftrightarrow\ &-(0.8)^k \cdot 8.4 \geq -5 \\
\Leftrightarrow\ &-(0.8)^k \geq -\frac{5}{8.4} \\
\Leftrightarrow\ &(0.8)^k \leq \frac{5}{8.4} \\
\Leftrightarrow\ &\ln((0.8)^k) = k\ln(0.8) = \ln\left(\frac{5}{8.4}\right) = \ln(5) - \ln(8.4) \\
\Leftrightarrow\ &k = \frac{\ln(5) - \ln(8.4)}{\ln(0.8)} \approx 2.325.
\end{aligned}$$

Damit hat z_k nach drei Zeitperioden den Wert von 20 überschritten. Wegen $z_0 = y_{10}$ betrachten wir diese drei Zeitperioden vom Zeitpunkt $k = 10$ aus

(b) (10 Punkte)

Das folgende Modell soll die Entwicklung des Arbeitsmarktes eines bestimmten Landes abbilden. Die Variablen x_t und y_t beschreiben die Anzahl Erwerbstätiger zum Zeitpunkt t für zwei verschiedene Segemente des Arbeitsmarktes, die Variable z_t die Anzahl Erwerbsloser zum Zeitpunkt t. Es wird unterstellt, dass

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 0.9x_t + 0.1y_t \\ y_{t+1} &= 0.1x_t + 0.8y_t + \quad mz_t \\ z_{t+1} &= \qquad\quad\;\; 0.1y_t + (1-m)z_t \end{aligned}$$

für $t = 0, 1, 2, ...$, wobei $m \in [0, 1]$.
Für

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \quad , \quad t = 0, 1, 2, ...$$

sagen wir, dass der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht ist, wenn

$$\mathbf{u}_{t+1} = \lambda \mathbf{u}_t$$

für alle $t = 0, 1, 2, ...$ gilt, d.h., wenn das Verhältnis der Gruppengrössen über die Zeit konstant bleibt. Für welche Werte m ist der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht mit $\lambda = 1$?

Verwenden Sie das Gauß-Verfahren, um alle (möglichen) Gleichgewichtsvektoren $\mathbf{u}_t$ zu bestimmen. Berechnen Sie abschliessend die Arbeitslosenquote im implizierten Gleichgewicht.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Schreibe das Modell in die Matrixform um.
2. Beschreibe den Zusammenhang des Arbeitsmarktgleichgewichts und Eigenwerten.
3. Prüfe, für welche Werte von m der Arbeitsmarkt mit $\lambda = 1$ im Gleichgewicht ist.
4. Finde alle möglichen Gleichgewichtsvektoren.
5. Bestimme die Arbeitslosenquote.

1. Schreibe das Modell in die Matrixform um

Das Modell wird durch drei voneinander abhängigen Differenzengleichungen beschrieben. Wir suchen nun eine Matrix A, sodass

$$\mathbf{u}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = A\mathbf{u}_t$$

gilt. Mit der Matrix

$$A_m := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & m \\ 0 & 0.1 & 1-m \end{pmatrix}$$

erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = A_m \mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} 0.9x_t + 0.1y_t \\ 0.1x_t + 0.8y_t + m \\ 0.1y_t + (1-m)z_t \end{pmatrix}.$$

Durch A_m kennzeichnen wir die Abhängigkeit der Matrix von m.

2. Beschreibe den Zusammenhang des Arbeitsmarktgleichgewichts und Eigenwerten

Mit der Matrixform gilt für das Gleichgewicht des Arbeitsmarkts:

$$\mathbf{u}_{t+1} = A_m \mathbf{u}_t = \lambda \mathbf{u}_t.$$

Damit ist der Arbeitsmarkt genau dann im Gleichgewicht, wenn λ ein Eigenwert der Matrix A ist.

3. Prüfe, für welche Werte von m der Arbeitsmarkt mit $\lambda = 1$ im Gleichgewicht ist

Sei $\lambda = 1$. Dann ist der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht genau dann, wenn

$$\det(A_m - 1 \cdot I) = \det(A_m - I) = 0$$

gilt. Wir suchen also die m, sodass λ ein Eigenwert ist. Wegen

$$\begin{aligned} \det(A_m - I) &= \begin{vmatrix} 0.9-1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8-1 & m \\ 0 & 0.1 & 1-m-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & m \\ 0 & 0.1 & -m \end{vmatrix} \\ &= (-0.1) \cdot \begin{vmatrix} -0.2 & m \\ 0.1 & -m \end{vmatrix} - 0.1 \cdot \begin{vmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & -m \end{vmatrix} \\ &= (-0.1) \cdot (0.2m - 0.1m) - 0.1 \cdot (-0.1m - 0 \cdot 0.1) \\ &= -(0.1)^2 m + (0.1)^2 m = 0 \end{aligned}$$

ist $\lambda = 1$ für alle m ein Eigenwert von A_m. Damit ist der Arbeitsmarkt für alle $m \in \mathbb{R}$ im Gleichgewicht.

4. Finde alle möglichen Gleichgewichtsvektoren

Unser Ziel ist es, die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$ in Abhängigkeit von m zu finden. Hierfür lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(A_m - I)\mathbf{u}_t = \mathbf{0}.$$

Da die rechte Seite der Nullvektor ist, wenden wir das Gauß-Verfahren direkt auf A_m an:

$$A_m - I = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & m \\ 0 & 0.1 & -m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \\ + \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & m \\ 0 & 0.1 & -m \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 1 \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \cdot 1 \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -0.1 & 0 & m \\ 0 & -0.1 & m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot(-10) \\ \mid \cdot(-10) \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10m \\ 0 & 1 & -10m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In Gleichungen ausgedrückt, bedeutet dies

$$x_t - 10mz_t = 0 \;\Leftrightarrow\; x_t = 10mz_t$$

$$y_t - 10mz_t = 0 \;\Leftrightarrow\; y_t = 10mz_t$$

für beliebige $z_t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Damit erhalten wir die Eigenvektoren

$$u_t = z_t \cdot \begin{pmatrix} 10m \\ 10m \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Bestimme die Arbeitslosenquote

Da $x_t = 10mz_t$ und $y_t = 10mz_t$ die Anzahl von Erwerbstätigen beschreiben, gilt $m > 0$ und $z_t > 0$. Wir erhalten die Arbeitslosenquote durch:

$$\frac{z_t}{x_t + y_t + z_t} = \frac{z_t}{10mz_t + 10mz_t + z_t} = \frac{z_t}{(10m + 10m + 1)z_t} = \frac{z_t}{(20m + 1)z_t} = \frac{1}{20m + 1}.$$

(c) (10 Punkte)

Ein Fischer befindet sich am Flussufer und möchte zu seinem Boot, welches unter den Koordinaten $H = (0, h)$ auf dem Fluß vor Anker liegt. Der Verlauf des Flussufers lässt sich gut durch eine nach links und rechts offene Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreiben, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{++}$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte am Flussufer, von denen aus der Fischer die geringste Distanz zu seinem Boot schwimmen muss.

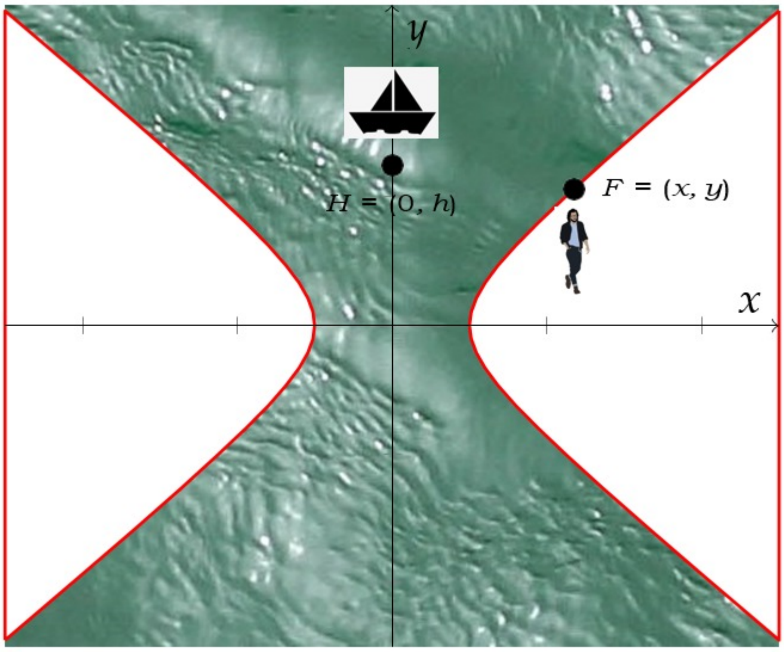
Tipp: Veranschaulichen Sie sich das Problem zunächst graphisch, um eine Intuition für die Situation und den Lösungsansatz zu bekommen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Skizziere die Situation und stelle ein geeignetes Optimierungsproblem auf.
2. Wende die Lagrange-Methode an.

1. Skizziere die Situation und stelle ein geeignetes Optimierungsproblem auf
Wir können die Situation folgendermaßen skizzieren:



Der Fischer befindet sich an dem Punkt $F = (x, y)$ am Flussufer. Damit muss $F = (x, y)$ die Hyperbelgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erfüllen. Der Fischer möchte auf dem schnellsten Weg zu dem Punkt $H = (0, h)$, d.h. wir wollen den Abstand von F und H minimieren. Es gilt

$$|F - H| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-h)^2} = \underbrace{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}}_{d(x,y):=},$$

wobei wir d als Abstandsfunktion bezeichnen. Da die Wurzelfunktion streng monoton ist, können wir auch die einfachere Funktion

$$f(x,y) := x^2 + (y-h)^2$$

minimieren. Damit suchen wir

$$\min_{x,y} f(x,y), \text{ mit } \varphi(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1.$$

2. Wende die Lagrange-Methode an

Zuerst stellen wir die Lagrange-Funktion auf:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y) = x^2 + (y-h)^2 + \lambda \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 2x + \frac{2\lambda}{a^2}x \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 2(y-h) - \frac{2\lambda}{b^2}y \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1.
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen erhalten wir die Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\text{(I) } & 2x + \frac{2\lambda}{a^2}x = 0 \\
\text{(II) } & 2(y-h) - \frac{2\lambda}{b^2}y = 0 \\
\text{(III) } & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir können $x = 0$ ausschließen, da ansonsten (III) verletzt wird. Damit gilt:

$$\text{(I)} \;\Leftrightarrow\; 1 + \frac{\lambda}{a^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\lambda}{a^2} = -1 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -a^2.$$

Einsetzen in (II) liefert:

$$\begin{aligned}
& 2(y-h) - \frac{2\lambda}{b^2}y = 2(y-h) + \frac{2a^2}{b^2}y = 2y - 2h + \frac{2a^2}{b^2}y = 2 \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) y - 2h = 0 \\
\Leftrightarrow\; & \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) y = h \;\Leftrightarrow\; y = \frac{h}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{hb^2}{a^2+b^2} \quad \text{(IV)}.
\end{aligned}$$

Für die dritte Gleichung gilt:

$$\text{(III)} \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \;\Leftrightarrow\; x^2 = a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{a^2 + \frac{a^2y^2}{b^2}} = \pm|a|\sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{(V)}.$$

Zum Abschluss setzen wir (IV) in (V) ein:

$$x = \pm|a|\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{hb^2}{a^2+b^2}\right)^2}{b^2}} = \pm|a|\sqrt{1 + \frac{h^2b^4}{(a^2+b^2)^2} \cdot \frac{1}{b^2}} = \pm|a|\sqrt{1 + \frac{h^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Damit haben wir zwei Punkte am Flussufer gefunden, welche den geringsten Abstand zu H besitzen. Da die Hyperbel symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, sind die Punkte symmetrisch. Die Stellen sind konkret:

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \left(|a|\sqrt{1 + \frac{h^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}, \frac{hb^2}{a^2+b^2} \right) \\
F_2 &= \left(-|a|\sqrt{1 + \frac{h^2b^2}{(a^2+b^2)^2}}, \frac{hb^2}{a^2+b^2} \right).
\end{aligned}
$$

(d) (6 Punkte)

Die private Altersvorsorge gewinnt durch das Altern der Bevölkerung mehr und mehr an Bedeutung. Eine neue Gesetzesinitiative soll Anreize für eine Änderung des Sparverhaltens schaffen. Der (stochastische) Einfluss der Initiative auf den jährlichen Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts soll nun modelliert werden. Es wird unterstellt, dass diese Änderung des Sparbetrags durch eine stetige Zufallsvariable D mit U-quadratischer Verteilung modelliert werden kann. Die Dichte von D sei gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{(b-a)^3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(d1) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts um mindestens CHF 200 erhöht wird.

(d2) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ den erwarteten Anstieg des (durchschnittlichen) Sparbetrags $\mathbb{E}[D]$.

Lösung:

Vorgehensweise:

(d1) 1. Berechne die Wahrscheinlichkeit.

(d2) 2. Berechne den Erwartungswert.

(d1) 1. Berechne die Wahrscheinlichkeit

Wir sind an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass der Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts um mindestens 200 (CHF) erhöht wird. Die Zufallsvariable D mit U-quadratischer Verteilung modelliert die Änderung des Sparbetrags. Damit erhalten wir durch

$$\mathbb{P}[D = \mathrm{A}]$$

die Wahrscheinlichkeit, dass ein durchschnittlicher Haushalt seinen Sparbetrag um den Betrag A erhöht. Mit $\mathbb{P}[D \geq \mathrm{A}]$ drücken wir die Wahrscheinlichkeit aus, dass der Sparbetrag um mindestens A erhöht wird. In der Aufgabenstellung ist $a = -500$ und $b = 1000$ gegeben. Wir werden die gesuchte Wahrscheinlichkeit jedoch für allgemeine $a \leq b$ berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[D \geq 200] &= \int_{200}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{200}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{200}^{b} \frac{12}{(b-a)^3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \cdot \int_{200}^{b} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{12}{(b-a)^3} \cdot \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3\right]_{200}^{b} \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{4}{(b-a)^3} \cdot \left(\left(\frac{2b}{2} - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4}{(b-a)^3} \cdot \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \left(200 - \frac{b+a}{2} \right)^3 \right) \\
&= \frac{4}{(b-a)^3} \cdot \frac{(b-a)^3}{2^3} - \frac{4}{(b-a)^3} \cdot \left(200 - \frac{b+a}{2} \right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{4}{(b-a)^3} \cdot \left(200 - \frac{b+a}{2} \right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{200}{b-a} - \frac{b+a}{2(b-a)} \right)^3 .
\end{aligned}
$$

Nun können wir die Werte $a = -500$ und $b = 1000$ einfügen. Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[D \geq 200] &= \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{200}{1500} - \frac{500}{2 \cdot 1500} \right)^3 = \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right)^3 = \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6} \right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{8}{60} - \frac{10}{60} \right)^3 = \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{-2}{60} \right)^3 = \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{-8}{60^3} = \frac{1}{2} + \frac{32}{60^3} \\
&\approx 0.5001481.
\end{aligned}
$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass der Sparbetrag um mindestens 200 (CHF) erhöht wird ungefähr 50.01%.

(d2) 1. Berechne den Erwartungswert

Der erwartete Anstieg des durchschnittlichen Sparbetrags ergibt sich durch:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[D] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x = \int_a^b x \frac{12}{(b-a)^3} \left(x - \frac{b+a}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b x \left(x^2 - (b-a)x + \frac{(b+a)^2}{4} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b x^3 - (b-a)x^2 + \frac{(b+a)^2}{4} x \, \mathrm{d}x = \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{b+a}{3} x^3 + \frac{(b+a)^2}{8} x^2 \right]_a^b \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{b^4}{4} - \frac{b+a}{3} \cdot b^3 + \frac{(b+a)^2}{8} \cdot b^2 - \frac{a^4}{4} + \frac{b+a}{3} \cdot a^3 - \frac{(b+a)^2}{8} \cdot a^2 \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b+a}{3}(b^3 - a^3) + \frac{(b+a)^2}{8}(b^2 - a^2) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{(b^2 + a^2)(b^2 - a^2)}{4} - \frac{b+a}{3}(b^3 - a^3) + \frac{(b+a)^2}{8}(b^2 - a^2) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left(\frac{b^2 + a^2}{2} + \frac{(b+a)^2}{4} \right) - \frac{b+a}{3}(b^3 - a^3) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \left(\frac{2b^2 + 2a^2}{4} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \right) - \frac{b+a}{3}(b^3 - a^3) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{8}(b^2 - a^2) \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 \right) - \frac{b+a}{3}(b^3 - a^3) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{8}(b^2 - a^2) \left(3a^2 + 2ab + 3b^2 \right) - \frac{1}{3}(b^4 - a^3 b + ab^3 - a^4) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{8} \left(3a^2 b^2 + 2ab^3 + 3b^4 - 3a^4 - 2a^3 b - 3a^2 b^2 \right) - \frac{1}{3}(b^4 - a^3 b + ab^3 - a^4) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{1}{8} \left(3b^4 + 2ab^3 - 2a^3 b - 3a^4 \right) - \frac{1}{3}(b^4 - a^3 b + ab^3 - a^4) \right) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left(\frac{3}{24} \left(3b^4 + 2ab^3 - 2a^3 b - 3a^4 \right) - \frac{8}{24}(b^4 - a^3 b + ab^3 - a^4) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(b-a)^3}\frac{1}{2}\left(3\cdot\left(3b^4+2ab^3-2a^3b-3a^4\right)-8\cdot(b^4-a^3b+ab^3-a^4)\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\frac{1}{2}\left(9b^4+6ab^3-6a^3b-9a^4-8b^4+8a^3b-8ab^3+8a^4)\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\frac{1}{2}\left(b^4+2a^3b-2ab^3-a^4\right)\\
&= \frac{1}{(b-a)^3}\frac{1}{2}\left(b-a\right)^3(b+a)\\
&= \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}
$$

Da die Dichtefunktion symmetrisch bezüglich $\frac{b+a}{2}$ ist, kann man auch direkt sagen, dass $\mathbb{E}[D]=\frac{b+a}{2}$ gilt. Dies ist möglich, da $\frac{a+b}{2}$ der Mittelwert auf dem Intervall $[a,b]$ ist. Mit $a=-500$ und $b=1000$ erhalten wir:

$$\mathbb{E}[D]=\frac{1000-500}{2}=\frac{500}{2}=250.$$

Damit beträgt der erwartete Anstieg der durchschnittlichen Sparrate 250.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} - 1 = 0$ hat die Funktion $f(x,y) = 2x+1$ ein Minimum in welchem Punkt?

(a) $P = (0,3)$.

(b) $P = (4,10)$.

(c) $P = (-5,3)$.

(d) $P = (4,-4)$.

(e) Keiner der oben gegebenen Punkte ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Punkte die Nebenbedingung erfüllen.
2. Nutze die Funktion (Darstellung einer Ellipse).

1. Überlege dir, welche Punkte die Nebenbedingung erfüllen

Wir kennzeichnen die Punkte durch P_a, P_b, P_c und P_d. Durch Einsetzen in die Nebenbedingung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\varphi(P_a) &= \frac{(0-4)^2}{16} + \frac{(3-3)^2}{49} - 1 = \frac{16}{16} + 0 - 1 = 0 \\
\varphi(P_b) &= \frac{(4-4)^2}{16} + \frac{(10-3)^2}{49} - 1 = 0 + \frac{49}{49} - 1 = 0 \\
\varphi(P_c) &= \frac{(-5-4)^2}{16} + \frac{(3-3)^2}{49} - 1 = \frac{81}{16} - 1 \neq 0 \\
\varphi(P_d) &= \frac{(4-4)^2}{16} + \frac{(-4-3)^2}{49} - 1 = \frac{49}{49} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Damit erfüllen alle Punkte außer P_c die Nebenbedingung.

2. Nutze die Funktion (Darstellung einer Ellipse)

Die Funktion $f(x,y) = 2x+1$ ist unabhängig von der y- Koordinate und linear in der x-Koordinate. Außerdem ist $2x+1$ streng monoton wachsend. Die Nebenbedingung

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} = 1$$

beschreibt eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(4,3)$. Den kleinsten Wert in der x-Koordinate hat diese gerade in dem Punkt $P_a = (0,3)$.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion f hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert als $g(x, y) = e^{-f(-x,-y)}$ mit Definitionsgebiet $D_g = D_f$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) g hat ein lokales Maximum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(b) g hat ein lokales Minimum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(c) g hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0).

(d) g hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0).

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Löse die Aufgabe anschaulich.

1. Löse die Aufgabe anschaulich

Uns ist bekannt, dass f ein Minimum an der Stelle (x_0, y_0) besitzt. Damit liegt für $h_1(x, y) := f(-x, -y)$ ein Minimum an der Stelle $(-x_0, -y_0)$ vor. Wenn wir noch ein negatives Vorzeichen vorschalten ist $(-x_0, -y_0)$ ein lokales Maximum der Funktion $h_2(x, y) := -f(-x, -y)$. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, bleibt die lokale Maximumseigenschaft in $(-x_0, -y_0)$ für g erhalten.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Alternativer Lösungsweg:
Da f ein lokales Minimum an der Stelle (x_0, y_0) besitzt, ist die notwendige Bedingung

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$
$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

erfüllt. Für g erhalten wir mit der Kettenregel die partiellen Ableitungen:

$$g_x(x, y) = (-1)(-1)f_x(-x, -y)e^{-f(-x,-y)} = f_x(-x, -y)e^{-f(-x,-y)}$$
$$g_y(x, y) = f_y(-x, -y)e^{-f(-x,-y)}.$$

Also können wir die Antworten (c) und (d) ausschließen. Für diese müssten auch $f_x(-x_0, -y_0) = f_x(-x_0, -y_0) = 0$ gelten. Wegen des lokalen Minimums ist die hinreichende Bedingung

$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$$
$$f_{yy}(x_0, y_0) > 0$$
$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$$

erfüllt. Die zweifachen partiellen Ableitungen von g sind gegeben durch:

$$g_{xx}(x, y) = -f_{xx}(-x, -y)e^{-f(-x,-y)} + (f_x(-x, -y))^2e^{-f(-x,-y)}$$
$$g_{xx}(x, y) = -f_{yy}(-x, -y)e^{-f(-x,-y)} + (f_y(-x, -y))^2e^{-f(-x,-y)}$$

$$g_{xy}(x,y) = -f_{xy}(-x,-y)e^{-f(-x,-y)} + f_x(-x,-y)f_y(-x,-y)e^{-f(-x,-y)}$$

Durch Einsetzen von $(-x_0, -y_0)$ folgt:

$$\begin{aligned}
g_{xx}(-x_0,-y_0) &= -f_{xx}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} + (f_x(x_0,y_0))^2e^{-f(x_0,x_0)} = -f_{xx}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} < 0\\
g_{yy}(-x_0,-y_0) &= -f_{yy}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} + (f_y(x_0,y_0))^2e^{-f(x_0,x_0)} = -f_{yy}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} < 0\\
g_{xy}(-x_0,-y_0) &= -f_{xy}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} + f_x(x_0,x_0)f_y(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)} = -f_{xy}(x_0,x_0)e^{-f(x_0,x_0)}\\
&\Rightarrow g_{xx}(-x_0,-y_0)g_{yy}(-x_0,-y_0) - (g_{xy}(-x_0,-y_0))^2\\
&= (-f_{xx}(x_0,x_0))(-f_{yy}(x_0,x_0))e^{-2f(x_0,x_0)} - (-f_{xy}(x_0,x_0))^2e^{-2f(x_0,x_0)}\\
&= (f_{xx}(x_0,x_0)f_{yy}(x_0,x_0) - (f_{xy}(x_0,x_0))^2)e^{-2f(x_0,x_0)} > 0
\end{aligned}$$

Damit besitzt g ein lokales Maximum an der Stelle $(-x_0, -y_0)$.

Frage 3 (4 Punkte)

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^4}$, wobei $m > 0$, konvergiert gegen $a(m) \in \mathbb{R}$, wobei $a(m)$ von dem Parameter m abhängt.

Es gilt:

(a) $a(m) > \frac{4m}{3}$ für alle $m \geq 1$.

(b) $a(m) < \frac{4m}{3}$ für alle m.

(c) $a(m) < m$ für alle m.

(d) $a(m) < \frac{m}{2}$ für alle m.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende das Integralvergleichskriterium.

1. Verwende das Integralvergleichskriterium

Das Integralvergleichskriterium besagt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

In unserem Fall gilt $f(x) = \frac{1}{x^4}$. Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert, gilt die Abschätzung:

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) < \int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} a(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^4} = m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = m\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right) < m\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\mathrm{d}x\right) = m\left(1 - \frac{1}{3x^3}\Big|_1^{\infty}\right) \\ &= m\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}m. \end{aligned}$$

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (2 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion $a, x \in D_f$ mit $a < x$. Sei g definiert als $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $f'(x) = g(x)$.

(b) $g'(x) = f(x) - f(a)$.

(c) $g \circ f$ ist eine Stammfunktion von f.

(d) $\lim_{\Delta \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f(x)$.

(e) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung(HDI).

1. Verwende den Hauptsatz der Differential -und Integralrechnung(HDI)

Nach dem HDI ist $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f. Damit gilt $g'(x) = f(x)$ und die Antwortmöglichkeiten (a) , (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch. Mit der Definition der Ableitung folgt:

$$g'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^3} + 2xce^{-cx^2}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

Dann ist f eine Dichtefunktion

(a) für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) für kein $c \in \mathbb{R}$.

(c) für alle $c > 0$.

(d) für $c = \ln(0.75)$.

(e) für $c = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Defintion einer Dichtefunktion.

1. Verwende die Defintion einer Dichtefunktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Dichtefunktion, falls g nichtnegativ ($f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$) und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$$

gilt. Die erste Eigenschaft ist für das f aus der Aufgabenstellung erfüllt. Wir suchen nun das c, sodass auch die zweite Eigenschaft gilt. Für das Integral über f gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x &= \int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{2x^3} + 2xce^{-cx^2}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{2x^3}\mathrm{d}x + \int_1^\infty 2cxe^{-cx^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4x^2}\bigg|_1^\infty - e^{-cx^2}\bigg|_1^\infty = \frac{1}{4} + e^{-c}. \end{aligned}$$

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss gelten:

$$\frac{1}{4} + e^{-c} = 1 \Leftrightarrow e^{-c} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow -c = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow c = -\ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Für $c = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ ist f also eine Dichtefunktion.

Damit ist Antwort (e) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

A sei eine $(n \times m)-$dimensionale Matrix, und sei B eine $(p \times q)-$dimensionale Matrix.
Wenn die Matrizen $C = BA$ und $D = AB$ existieren und es gilt $C = D$, dann folgt daraus:

(a) $n = m = p = q$.

(b) $n = q$ und $m = p$ und $m \neq q$.

(c) $m = p$ und $q = n$ und $n \neq p$.

(d) $n = p$ und $m = q$ und $n \neq m$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Zusammenhang zwischen Zeilen und Spalten bei einem Matrixprodukt.

1. Verwende den Zusammenhang zwischen Zeilen und Spalten bei einem Matrixprodukt

Wir wissen, dass die Matrizen $C = BA$ und $D = AB$ existieren. Da A eine $(n \times m)$-Matrix und B eine $(p \times q)$-Matrix ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned} C = BA \text{ existiert } &\Rightarrow\ q = n \\ D = AB \text{ existiert } &\Rightarrow\ p = q. \end{aligned}$$

Hierbei ist C eine $(p \times m)$-Matrix und B eine $(n \times q)$-Matrix. Wegen $C = D$ gilt auch $n = p$ und $q = m$. Insgesamt folgt dann $n = m = p = q$.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 7 (2 Punkte)

Eine $(4 \times 5)-$dimensionale Matrix A hat den Rang 3. B ist eine $(8 \times 5)-$dimensionale Matrix, in welcher jede Zeile von A genau zweimal vorkommt. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(B) = 1$.

(b) $\text{rg}(B) = 3$.

(c) $\text{rg}(B) = 4$.

(d) $\text{rg}(B) = 5$.

(e) $\text{rg}(B) = 6$.

(f) $\text{rg}(B) = 8$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Definition des Ranges einer Matrix.

1. Verwende die Definition des Ranges einer Matrix

Die Matrix A hat den Rang 3. Damit sind 3 Zeilen der Matrix A zueinander unabhängig. Also erreichen wir mithilfe elementarer Zeilenumformungen:

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind mit $*$ beliebige Werte gekennzeichnet. Nun kommen in B die Zeilen von A genau zweimal vor. Somit folgt durch elementare Zeilenumformungen:

$$B \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rg}(B) = 3.$$

Wir sortieren B zuerst so um, dass die Matrix A untereinander steht. Darauffolgend eliminieren wir die Kopie von A und sehen, dass A den Rang 3 hat.

Also ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 8 (3 Punkte)

Seien $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, und $\mathbf{b}$ m-dimensionale Vektoren und $m \geq 2$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ genau dann, wenn gilt:

(a) $\operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = 3$.

(b) $\operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = m$.

(c) $\det([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 0$.

(d) $\operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 3$.

(e) $\operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems.

1. Verwende die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Wir fassen die Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ in der Matrix A zusammen. Das heißt : $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination der drei Vektoren, falls das LGS

$$A\mathbf{x} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

lösbar ist. Diese Lösbarkeit ist genau dann erfüllt, wenn

$$\operatorname{rg}[A, \mathbf{b}] = \operatorname{rg}(A)$$

gilt. Dies entspricht der Antwort (e).

Damit ist die Antwort (e) korrekt.

Alternative Lösung:
Es lassen sich auch Gegenbeispiele für die Antwortmöglichkeiten (a) - (d) geben. $m \geq 2$ ist beliebig. Da (c) nur für $m = 3$ definiert ist, können wir diese Antwort direkt ausschließen. Für $m = 3$ lässt sich hier aber auch ein konkretes Gegenbeispiel angeben(Warum?). Für $m = 4$ würde durch (b) die lineare Unabhängigkeit der vier Vektoren folgen. In (a) könnte $\mathbf{b}$ linear unabhängig von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$, falls $\operatorname{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 2$ gilt. Die Antwort (d) ist für $m = 2$ nicht möglich. Damit bleibt die Antwort (e) übrig.

Frage 9 (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist **nicht wahr**?

(a) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn sie nicht regulär ist.

(b) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn das System ihrer Zeilenvektoren linear abhängig ist.

(c) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von ihr ist.

(d) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die korrekte Antwort durch das Ausschlussverfahren.

1. Bestimme die korrekte Antwort durch das Ausschlussverfahren
Eine Matrix A ist regulär genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ist. Eine Matrix heißt singulär, wenn A nicht regulär ist. Also ist die Antwort (a) wahr. Insbesondere ist dann auch die Antwort (d) wahr. Nun ist $\det(A)$ das Produkt der Eigenwerte von A.
Damit ist die Antwort (c) nicht wahr. Wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist, gilt $\det(A) \neq 0$. Also wäre A gleichzeitig regulär und singulär, was nicht möglich ist.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Eine Matrix A heißt regulär, genau dann wenn das System ihrer Zeilenvektoren linear unabhängig ist. Die Antwort (b) ist das Gegenteil hiervon und somit auch wahr.

Frage 10 (4 Punkte)

Sei $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ eine Folge, welche die Differenzengleichung

$$y_{k+1} = Ay_k + B,$$

mit $A \in (0,1), B \in \mathbb{R}$ erfüllt. Sei $y^\star = \frac{B}{1-A}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ divergiert.

(b) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ konvergiert und $y_k > y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, ...$.

(c) $\{y_k\}_{k=0,1,2,...}$ konvergiert und $y_k < y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, ...$.

(d) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist im Allgemeinen korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die richtige Lösung mit dem Eliminationsverfahren.

1. Bestimme die richtige Lösung mit dem Eliminationsverfahren

Die Differenzengleichung ist in Normalform. Wegen $|A| < 1$ konvergiert die Folge gegen $y^\star$. Damit ist Antwort (a) falsch. Wir setzen $B = 0$. Dann konvergiert y_k gegen 0 und es gilt $y_k = A^k y_0$. Damit hängt das Vorzeichen von der Anfangsbedingung y_0 ab. Für $y_0 < 0$ ist (b) falsch und für $y_0 > 0$ ist (c) falsch. Also bleibt Antwort (d) übrig.

Somit ist die Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $P = (1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(b) $P = (1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

(c) $P = (0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.

(d) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(e) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die strenge Monotonie der Exponentialfunktion.

1. Verwende die strenge Monotonie der Exponentialfunktion

Die Funktion f ist von der Form $f(x,y) = e^{g(x,y)}$. Die lokalen Extrema von g entsprechen den von f, da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist. In unseren Fall ist g durch

$$g(x,y) = -\frac{1}{3}x^3 + x + y^2$$

gegeben. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= -x^2 + 1 = 1 - x^2 \\ g_y(x,y) &= 2y. \end{aligned}$$

Für grad $g(x,y) = \mathbf{0}$ muss

$$\begin{aligned} 1 - x^2 = 0 &\Leftrightarrow x = \pm 1 \\ 2y = 0 &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

gelten. Damit sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Kandidaten für lokale Extrema. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) &= -2x \\ g_{yy}(x,y) &= 2 \\ g_{xy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Wegen

$$g_{xx}(1,0)g_{yy}(1,0) - (g_{xy}(1,0))^2 = -2 \cdot 2 - 0 < 0$$

liegt an $(1,0)$ ein Sattelpunkt vor. Wegen

$$\begin{aligned} g_{xx}(-1,0) &> 0 \\ g_{yy}(-1,0) &> 0 \\ g_{xx}(-1,0)g_{yy}(-1,0) &> 0 \end{aligned}$$

liegt an $(-1,0)$ ein Minimum vor.

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \quad \text{mit} \quad f(0) = \ln(2)$$

Es folgt:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$.

(b) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + \ln(2)$.

(c) $f(x) = \ln(e^{x} + e^{-x})$.

(d) $f(x) = \ln(e^{x} + e^{-x}) + \ln(2)$.

(e) $f(x) = 2\ln(e^{2x} + 1) - \ln(2)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die richtige Lösung mit dem Eliminationsverfahren.

1. Bestimme die richtige Lösung mit dem Eliminationsverfahren
Es gilt

$$\ln(e^{2\cdot 0} + 1) = \ln(1+1) = \ln(2)$$
$$\ln(e^{0} + e^{-0}) = \ln(2).$$

Damit können wir die Antwortmöglichkeiten (b) und (d) ausschließen. Wir betrachten nun folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\ln(e^{2x}+1)\right) = \frac{1}{e^{2x}+1} \cdot (e^{2x}+1)' = \frac{1}{e^{2x}+1} \cdot 2e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\ln(e^{x}+e^{-x})\right) = \frac{1}{e^{x}+e^{-x}} \cdot (e^{x}+e^{-x})' = \frac{1}{e^{x}+e^{-x}} \cdot (e^{x}-e^{-x}) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

Also sind die Antwortmöglichkeiten (c) und (e) falsch.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx^3 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = 0.75$.

(a) $a = 3, b = 0$.

(b) $a = \frac{3}{2}, b = 2$.

(c) $a = -1, b = 4$.

(d) $a = 0, b = 2$.

(e) $a = \frac{12}{5}, b = \frac{3}{4}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Definition einer Dichtefunktion und des Erwartungswerts.

1. Verwende die Definition einer Dichtefunktion und des Erwartungswerts

Wir verwenden die Definitionen der Dichtefunktion und des Erwartungswerts um ein lineares Gleichungssystem aufzustellen. Da f eine Dichtefunktion ist, muss diese $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$ erfüllen. Dies führt zu der der Gleichung:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^2 + bx^3\mathrm{d}x = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^4\Big|_0^1$$
$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 1 \;\Leftrightarrow\; 4a + 3b = 12.$$

Wenn f die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist, gilt für deren Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x.$$

Deswegen folgt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(ax^2 + bx^3\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^3 + bx^4\mathrm{d}x = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{5}x^5\Big|_0^1$$
$$= \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = 0.75 = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; 5a + 4b = 15.$$

Mit diesen beiden Gleichungen erhalten wir das lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 12 \\ 5 & 4 & 15 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 15 & 60 \\ 20 & 16 & 60 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 15 & 60 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 20 & 0 & 60 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Also hat das LGS die Lösung $a = 3$ und $b = 0$.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2\ln(x^2+y^2) + (3-a)\ln(y^2), \qquad x,y>0.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist der Gradient der Funktion f an der Stelle $(1,1)$ orthogonal zum Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $a = 3$.

(b) $a = 6$.

(c) $a = 9$.

(d) $a = 12$.

(e) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Gradienten der Funktion.

1. Bestimme den Gradienten der Funktion

Die partiellen Ableitungen von f sind durch

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{4x}{x^2+y^2} \\ f_y(x,y) &= 2\frac{2y}{x^2+y^2} + (3-a)\frac{2y}{y^2} = \frac{4y}{x^2+y^2} + (3-a)\frac{2}{y} \end{aligned}$$

gegeben. Damit ist der Gradient an der Stelle $(1,1)$:

$$\operatorname{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} \\ 2 + (3-a)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8-2a \end{pmatrix}.$$

Dieser ist orthogonal zu $\mathbf{n}$, falls gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8-2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 2 + (8-2a)\cdot 1 = 4+8-2a = 12-2a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 6.$$

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) Rang 1.

(b) Rang 2.

(c) Rang 3.

(d) Rang 4.

(e) Rang 5.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Gaußalgorithmus.

1. Verwende den Gaußalgorithmus

Wir wenden elementare Zeilenoperationen an, um den Rang abzulesen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten drei linear unabhängige Zeilen, womit $\mathrm{rg}(A) = 3$ gilt.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

(a) A ist singulär für alle $m \in \mathbb{R}$.

(b) $m = -1$.

(c) $m = 0$.

(d) $m = 1$.

(e) $m = 2$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme das Produkt der Matrix mit ihrer Inversen.

1. Bestimme das Produkt der Matrix mit ihrer Inversen

Das Matrixprodukt von A und A^{-1} ist:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+\frac{m}{2} & 1-\frac{m}{2} & \frac{m}{2} \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+\frac{m}{2} & 1-\frac{m}{2} & \frac{m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $m = 2$.

Damit ist die Antwort (e) korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $B = A^3$ hat den Eigenwert

(a) 64.

(b) 27.

(c) 8.

(d) 5.

(e) 1.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Definition der Eigenwerte.

1. Verwende die Definition der Eigenwerte

Ein Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix A, falls

$$A\mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

gilt. Hieraus folgt:

$$B\mathbf{x} = A^3\mathbf{x} = A^2(A\mathbf{x}) = \lambda A^2\mathbf{x} = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}.$$

Damit gilt: Wenn λ ein Eigenwert von A ist, ist λ^3 ein Eigenwert von B. Umgekehrt gilt: Ist μ ein Eigenwert von B, so ist $\sqrt[3]{\mu}$ ein Eigenwert von A. Um die Frage zu beantworten, benötigen wir die Eigenwerte von A. Hierfür zerlegen wir das charakteristische Polynom in Linearfaktoren:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (4-\lambda)^3 - (4-\lambda) - (4-\lambda) + 1 + 1 - (4-\lambda) \\
&= (4-\lambda)((4-\lambda)^2 - 1) + 2(1 - (4-\lambda)) \\
&= (4-\lambda)(15 - 8\lambda + \lambda^2) + 2(\lambda - 3) \\
&= (4-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-3) + 2(\lambda-3) \\
&= (\lambda-3)\left((4-\lambda)(\lambda-5) + 2\right) \\
&= (\lambda-3)\left(4\lambda - 18 - \lambda^2 + 5\lambda\right) \\
&= -(\lambda-3)\left(\lambda^2 - 9\lambda + 18\right) \\
&= (\lambda-3)^2(\lambda-6).
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 6$ von A ablesen. Also besitzt B die Eigenwerte $\lambda_1^3 = 27$ und $\lambda_2^3 = 216$.

Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 8 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{1}{3}y_k - \frac{3}{4}y_{k+1} + \frac{1}{27}y_k = \frac{1}{9}y_k + 2 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme in die Normalform um.

1. Forme in die Normalform um

Die Normalform der Differenzengleichung erhalten wir durch:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3}y_k - \frac{3}{4}y_{k+1} + \frac{1}{27}y_k = \frac{1}{9}y_k + 2 \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{3}{4}y_{k+1} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{27}\right) \cdot y_k + 2 = \left(\frac{3}{27} - \frac{9}{27} - \frac{1}{27}\right) \cdot y_k + 2 = -\frac{7}{27}y_k + 2 \\
\Leftrightarrow\ & y_{k+1} = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{27}y_k + 2\right) = \frac{28}{81}y_k - \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $A = \frac{28}{81}$ und $B = -\frac{8}{3}$. Für das Konvergenzverhalten ist A relevant. Wegen $0 < A < 1$ ist $|A| < 1$ und $A > 0$ erfüllt. Die erste Eigenschaft sorgt für die Konvergenz und die Zweite für die Monotonie.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.