Teil I: Offene Aufgaben (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (35 Punkte)

(a) (10 Punkte)

Swisslos ist in der deutschsprachigen Schweiz staatlicher Monopolist im Bereich Zahlenlottos und Sportwetten und bietet unter anderem die Produkte Swiss Lotto und Euro Millions an. Bei einem Verkaufspreis x pro Los der Sorte (1) Swiss Lotto und einem Verkaufspreis y pro Los der Sorte (2) Euro Millions lauten die Nachfragefunktionen:

$$\begin{aligned} \text{Nachfrage nach Swiss Lotto:} \quad & q_{d_1}(x,y) = 39'500 - 1'000x + 400y, \\ \text{Nachfrage nach Euro Millions:} \quad & q_{d_2}(x,y) = 6'500 + 300x - 800y. \end{aligned}$$

Gesucht sind die Preise x und y, bei denen der Gesamtumsatz maximal ist.
Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Nachfragemengen auch abgesetzt werden.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt und berechnen Sie auch den maximalen Umsatz.

(b) (10 Punkte)

Gesucht ist der Punkt $P = (x^*, y^*)$ mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$ auf der Kurve

$$\varphi(x,y) = cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0, \text{ wobei } c \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < c < 1,$$

sodass das Rechteck mit achsenparallelen Seiten, einer Ecke im Punkt $(0,0)$ und der gegenüberliegenden Ecke in $P = (x^*, y^*)$ maximale Fläche hat.

Ermitteln Sie Kandidaten (x^*, y^*) für mögliche Maxima in Abhängigkeit des Parameters c.

Wichtige Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei den potentiellen Kandidaten um Extremstellen handelt und von welcher Art (Maxima und Minima) sie sind, wird **nicht** verlangt.

(c) (5 Punkte)

Für eine Person, die am t.m.j geboren ist, sei der „Geburtstagsvektor“ $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} t \\ m \\ j \end{pmatrix}$. Zum Beispiel ist der Geburtstagsvektor von Leonhard Euler, der am 15. April 1707 geboren wurde, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1707 \end{pmatrix}$.

Gegeben sind die Geburtstagsvektoren von

$$\text{Hermann Grassmann } \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1809 \end{pmatrix}$$

$$\text{William Hamilton } \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1788 \end{pmatrix}$$

$$\text{„Unbekannt“}\,\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 29 \\ m \\ 1851 \end{pmatrix}$$

$$\text{Carl Friedrich Gauß } \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 1777 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $m \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$ ist es möglich, den Geburtstagsvektor von Carl Friedrich Gauß als eindeutige Linearkombination der Geburtstagsvektoren von Hermann Grassmann, William Hamilton und „Unbekannt“zu schreiben?

(d1) (6 Punkte)

Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe. Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch gelegentliche Arbeiten nur $10'000$ Franken verdient. Er beschliesst, jedes Jahr 10% seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

Wie gross ist sein Vermögen V_n n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20 + n)-$ten Geburtstag?

Wie gross ist also sein Vermögen V_{10} am 30. Geburtstag?

(d2) (4 Punkte)

Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe. Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch gelegentliche Arbeiten nur $10'000$ Franken verdient. Er beschliesst, jedes Jahr 10% seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

V_n bezeichnet sein Vermögen n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20 + n)-$ten Geburtstag $(n = 0, 1, 2, ...)$.

(*Wichtige Bemerkung:* Wenn Sie Aufgabe **(d1)** nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $V_n = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.9^n + 2.2 \cdot 10^5$.)

Welchem Wert würde sich V_n nähern, wenn Max unendlich lange leben würde?

Wann würde sein Vermögen die Grenze von $500'000$ Franken unterschreiten?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (65 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y)$ habe in (x_0, y_0) einen stationären Punkt, d.h. $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Hinreichend dafür, dass f in (x_0, y_0) einen *Sattelpunkt* hat, ist

(a) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$.

(b) $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

(c) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

(d) Keine der vorangehenden Bedingungen ist hinreichend für einen Sattelpunkt in (x_0, y_0).

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2(e^y - 2) - y^2$$

hat ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2y^4 - 4xy = 0$ ein lokales Minimum in $P = (1, 1)$.

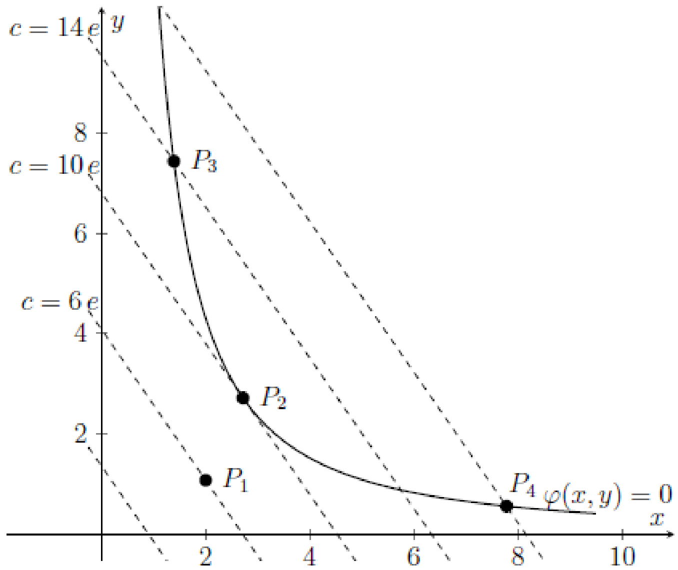
(b) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2y^4 - 4xy = 0$ ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$.

(c) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2y^4 - 4xy + 1 = 0$ ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$.

(d) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2y^4 - 4xy = 0$ ein lokales Minimum in $P = (0, 0)$.

Frage 3 (4 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = 6x+4y$ zu verschiedenen Niveaus c und die Kurve $\varphi(x,y) = \frac{3}{5}\ln(x) + \frac{2}{5}\ln(y) - 1 = 0$.



Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ an der Stelle

(a) P_1 ein Minimum.

(b) P_2 ein Minimum.

(c) P_2 ein Maximum.

(d) P_4 ein Maximum.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Funktion f und g schneiden sich bei a, b und c, wobei $a < b < c$. Zwischen a und b verläuft der Graph von g über dem Graphen von f, zwischen b und c verläuft der Graph von g unterhalb des Graphen von f.

Der Inhalt der von f und g zwischen a und c eingeschlossenen Fläche ist gleich

(a) $\int_a^c (g(x) - f(x))\,dx$.

(b) $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx - \int_b^c |g(x) - f(x)|\,dx$.

(c) $\int_b^c (f(x) - g(x))\,dx - \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \left(2t^2 - \frac{1}{2}t + 3\right)\, dt.$$

Dann folgt

(a) $f(0) = 3$.

(b) $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

(c) $f''(0) = -\frac{1}{2}$.

(d) $f'''(0) = 3$.

Frage 6 (3 Punkte)

A sei eine $(n \times m)-$Matrix, B sei eine $(p \times q)-$Matrix.
Wenn die Matrix $C = BA$ existiert, folgt:

(a) $n = q$ oder $m = p$.

(b) $m = p$ und $q = n$.

(c) $n = p$ und $m = q$.

(d) $n = m = p = q$.

Frage 7 (4 Punkte)

Eine Matrix M heißt *idempotent*, falls $M^2 = M$ ist.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn M idempotent ist, dann folgt $\det(M) = 1$.

(b) M ist genau dann idempotent, wenn $\det(M) = 0$ oder $\det(M) = 1$ gilt.

(c) Wenn $\det(M) = 0$ ist, dann ist M idempotent.

(d) Keine der vorangehenden Aussagen ist richtig.

Frage 8 (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist richtig für eine reellwertige Funktion f?

(a) Der Gradient von f in einem lokalen Extremum ist immer der Nullvektor.

(b) Der Gradient von f im Punkt (x_0, y_0) ist immer parallel zur Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0).

(c) Der Vektor, der die Richtung des steilsten Abstiegs des Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) angibt, ist parallel zur Tangenten an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0).

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 9 (3 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen ist **nicht wahr**?

(a) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(b) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(c) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig.

(d) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

Frage 10 (4 Punkte)

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten und $\mathbf{b} = 0$.
Nachdem man den Gaußschen Algorithmus angewendet hat, bekommt man aus der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ die neue Matrix $(A^*, \mathbf{b}^*)$, die genau k Zeilen mit lauter Nullen hat.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn $k \geq 1$ ist, dann hat das System keine Lösung.

(b) Wenn $k = 1$ ist, dann hat das System genau eine Lösung.

(c) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension k.

(d) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension $n + k - m$.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

Dann muss gelten:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + 2$.

(b) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + x - \ln(2)$.

(c) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2)$.

(d) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + 2$.

Frage 2 (5 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \frac{17}{24}$.

Dann gilt:

(a) $a = 6, b = -6$.

(b) $a = 1, b = \frac{3}{2}$.

(c) $a = 6, b = -5$.

(d) $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 3\ln(x^2 + y^2) - (3 - a)\ln(y).$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Länge des Gradienten an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ gleich 5?

(a) $a = \pm 4$.

(b) $a = \pm 2$.

(c) $a = \pm\sqrt{2}$.

(d) Es gibt kein solches $a \in \mathbb{R}$.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) den Rang 1.

(b) den Rang 2.

(c) den Rang 3.

(d) den Rang 4.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -2$.

(b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 2$.

(c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Frage 6 (3 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $y_k = 3\cdot 2^k - 1$ löst die Differenzengleichung

(a) $2y_{k+1} - y_k = -1.$

(b) $y_{k+1} + 2y_k - 1 = 0.$

(c) $y_{k+1} + 2y_k - 2 = 0.$

(d) $y_{k+1} - 2y_k = 1.$

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{3}{4}y_k - \pi e y_{k+1} + \frac{1}{8}y_k - 3.2 = -2y_k \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+1)y_{k+1} - (3-a)y_k + 8 = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ ist genau dann oszillierend und konvergent, wenn

(a) $-1 < a < 1.$

(b) $1 < a < 3.$

(c) $a = -1$ oder $a > 3.$

(d) Die allgemeine Lösung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ oszillierend und konvergent.

Lösungen

Aufgabe 1 (35 Punkte)

(a) (10 Punkte)

Swisslos ist in der deutschsprachigen Schweiz staatlicher Monopolist im Bereich Zahlenlottos und Sportwetten und bietet unter anderem die Produkte Swiss Lotto und Euro Millions an. Bei einem Verkaufspreis x pro Los der Sorte (1) Swiss Lotto und einem Verkaufspreis y pro Los der Sorte (2) Euro Millions lauten die Nachfragefunktionen:

$$\begin{aligned} \text{Nachfrage nach Swiss Lotto:} \quad & q_{d_1}(x,y) = 39'500 - 1'000x + 400y, \\ \text{Nachfrage nach Euro Millions:} \quad & q_{d_2}(x,y) = 6'500 + 300x - 800y. \end{aligned}$$

Gesucht sind die Preise x und y, bei denen der Gesamtumsatz maximal ist.
Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Nachfragemengen auch abgesetzt werden.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt und berechnen Sie auch den maximalen Umsatz.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle eine mathematische Modellierung auf.
2. Finde die Preise für den maximalen Gesamtumsatz.

1. Stelle eine mathematische Modellierung auf

Zunächst betrachten wir die Einnahmen der einzelnen Lose. Die Einnahmen ergeben sich aus dem Produkt des Preises mit der Menge. Durch x und y sind die Preise und durch q_1 und q_2 die Mengen gegeben. Für Swiss Lotto erhalten wir die Einnahmefunktion

$$E_S(x,y) = \underbrace{x}_{\text{Preis}} \underbrace{q_{d_1}(x,y)}_{\text{Menge}}$$

und für Euro Millions gilt

$$E_E(x,y) = \underbrace{y}_{\text{Preis}} \underbrace{q_{d_2}(x,y)}_{\text{Menge}}.$$

Laut Aufgabenstellung gilt die Annahme, dass die Nachfragemenge auch abgesetzt wird. Der Gesamtumsatz entspricht der Summe von E_S und E_E. Damit gilt

$$\begin{aligned} G(x,y) &= E_S(x,y) + E_E(x,y) = xq_{d_1}(x,y) + yq_{d_2}(x,y) \\ &= x(39'500 - 1'000x + 400y) + y(6'500 + 300x - 800y) \\ &= 39'500x - 1'000x^2 + 400xy + 6'500y + 300xy - 800y^2 \\ &= -1'000x^2 - 800y^2 + 700xy + 39'500x + 6'500y \end{aligned}$$

für den Gesamtumsatz G. Die zu maximierende Zielfunktion ist gefunden. Außerdem sind an die Preise x und y keine Nebenbedingungen gesetzt. Somit lösen wir ein globales Maximierungsproblem, d.h. wir betrachten eine Extremwertaufgabe ohne Nebenbedingungen.

<u>2. Finde die Preise für den maximalen Gesamtumsatz</u>
Da wir keine Nebenbedingungen vorliegen haben, betrachten wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} G_x(x,y) &= -2'000x + 700y + 39'500 \\ G_y(x,y) &= -1'600y + 700x + 6'500. \end{aligned}$$

Ein Extremum kann nur vorliegen, falls

$$\begin{aligned} G_x(x,y) = -2'000x + 700y + 39'500 = 0 &\Leftrightarrow -2'000x + 700y = -39'500 &&\Leftrightarrow -20x + 7y = -395 \\ G_y(x,y) = -1'600y + 700x + 6'500 = 0 &\Leftrightarrow -1'600y + 700x = -6'500 &&\Leftrightarrow -16y + 7x = -65. \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Lösung des linearen Gleichungssystems erhalten wir durch Anwendung des Gauß Algorithmus mit:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} -20 & 7 & -395 \\ 7 & -16 & -65 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot 7 \\ \mid \cdot 20 \end{array} &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 49 & -395\cdot 7 \\ 140 & -320 & -65\cdot 20 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 49 & -2765 \\ 140 & -320 & -1300 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 49 & -2765 \\ 0 & -271 & -4065 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 49 & -2765 \\ 0 & 1 & \frac{4065}{271} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 49 & -2765 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 0 & -2765 - 49\cdot 15 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -140 & 0 & -3500 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3500}{140} \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen G_x und G_y sind also für $(x_0, y_0) = (25, 15)$ null. Wir haben also genau einen Kandidaten für ein Extremum gefunden und müssen überprüfen von welcher Art dieser Kandidat ist.

Die Bedingung für ein Maximum ist durch

$$G_{xx}(x_0,y_0) < 0 \land G_{yy}(x_0,y_0) < 0 \land G_{xx}(x_0,y_0)\cdot G_{yy}(x_0,y_0) - (G_{xy}(x_0,y_0))^2 > 0$$

gegeben. Die partiellen Ableitung der zweiten Ordnung sind durch

$$\begin{aligned} G_{xx}(x,y) &= -2'000 = G_{xx}(x_0,y_0) \\ G_{yy}(x,y) &= -1'600 = G_{yy}(x_0,y_0) \\ G_{xy}(x,y) &= G_{yx}(x,y) = +700 = G_{xy}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

gegeben. Damit gilt unmittelbar $G_{xx}(x_0,y_0) < 0$ und $G_{yy}(x_0,y_0) < 0$. Einsetzen in den letzten Teil der Bedingung liefert uns

$$G_{xx}(x_0,y_0)\cdot G_{yy}(x_0,y_0) - (G_{xy}(x_0,y_0))^2 = (-2'000)\cdot(-1'600) - (700)^2 = 2'000\cdot 1'600 - 700^2 > 0.$$

Also liegt an der Stelle $(x_0, y_0) = (25, 15)$ ein Maximum vor und die maximalen Einnahmen sind durch

$$G(25,15) = -1'000\cdot(25)^2 - 800\cdot(15)^2 + 700\cdot 25\cdot 15 + 39'500\cdot 25 + 6'500\cdot 15 = ... = 542'500\ CHF$$

gegeben.

(b) (10 Punkte)

Gesucht ist der Punkt $P = (x^*, y^*)$ mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$ auf der Kurve

$$\varphi(x, y) = cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0, \text{ wobei } c \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < c < 1,$$

sodass das Rechteck mit achsenparallelen Seiten, einer Ecke im Punkt $(0, 0)$ und der gegenüberliegenden Ecke in $P = (x^*, y^*)$ maximale Fläche hat.

Ermitteln Sie Kandidaten (x^*, y^*) für mögliche Maxima in Abhängigkeit des Parameters c.

Wichtige Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei den potentiellen Kandidaten um Extremstellen handelt und von welcher Art (Maxima und Minima) sie sind, wird **nicht** verlangt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Art der Kurve.
2. Stelle das Problem grafisch dar.
3. Stelle das Extremwertproblem auf.
4. Löse das Extremwertproblem.

1. Gebe das durch die Kurve beschriebene geometrische Objekt an und schränke es passend ein

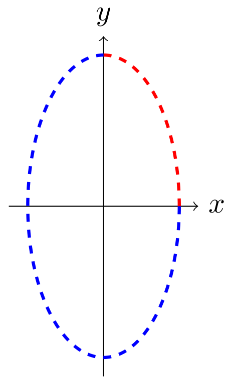
Für die Kurve φ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(x, y) = cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0 \;&\Leftrightarrow\; cx^2 + (1-c)y^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow\; c\frac{x^2}{2} + (1-c)\frac{y^2}{2} = 1 \\
&\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{\frac{2}{c}} + \frac{y^2}{\frac{2}{1-c}} = 1 \\
&\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{c}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{1-c}}\right)^2} = 1
\end{aligned}$$

für $0 < c < 1$. Damit beschreibt sie eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{\frac{2}{c}}$ und $b = \sqrt{\frac{2}{1-c}}$.

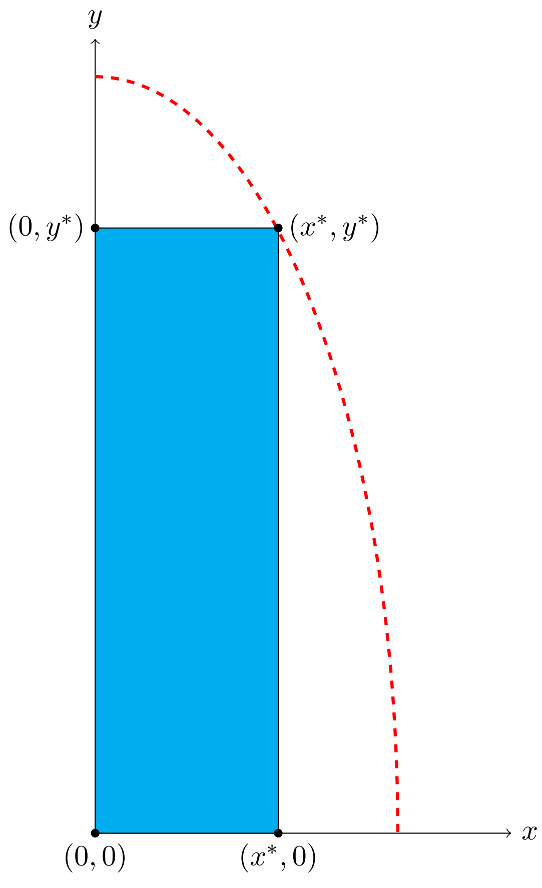
2. Stelle das Problem grafisch dar

Die Grafik



stellt die Ellipse schematisch dar. Da der gesuchte Punkt $P = (x^*, y^*)$ auf der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ mit $x^*, y^* > 0$ liegt, befindet sich der relevante Kurventeil im ersten Quadraten der Grafik. Dies ist an der roten Markierung erkennbar.

Die Eckpunkte $(0, 0)$ und (x^*, y^*) bilden ein achsenparalleles Rechteck. Damit sind die anderen beiden Eckpunkte durch $(0, y^*)$ und $(x^*, 0)$ gegeben. Das Rechteck lässt sich folgendermaßen visualisieren:



3. Stelle das Extremwertproblem auf

Die Zielfunktion ist durch

$$f(x,y) = x \cdot y$$

gegeben. Für $x, y > 0$ beschreibt diese den Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten x und y. Unser Ziel ist es, Kandidaten für mögliche Extremstellen von f unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0$$

zu finden.

4. Löse das Extremwertproblem

Die erste Möglichkeit ist die Lagrange-Methode. Hierfür definieren wir die Lagrangefunktion:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = xy + \lambda(cx^2 + (1-c)y^2 - 2).$$

Notwendig für Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ ist, dass die partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion gleich null sind. Durch Differenzieren und Gleichsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F_x(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda c^2 x &&\Rightarrow\ y + 2\lambda cx = 0 && \text{(I)}\\
F_y(x,y,\lambda) &= x + 2\lambda(1-c)y &&\Rightarrow\ x + 2\lambda(1-c)y = 0 && \text{(II)}\\
F_\lambda(x,y,\lambda) &= cx^2 + (1-c)y^2 - 2 &&\Rightarrow\ cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0 && \text{(III)}.
\end{aligned}$$

Zunächst konzentrieren wir uns auf die Gleichungen (I) und (II). Für die erste beiden Gleichungen gilt:

$$y + 2\lambda cx = 0 \ \Leftrightarrow\ y = -2\lambda cx \quad \text{und} \quad x + 2\lambda(1-c)y = 0 \Leftrightarrow\ x = -2\lambda(1-c)y$$

Wir dividieren y mit x und erhalten:

$$\frac{y}{x} = \frac{-2\lambda cx}{-2\lambda(1-c)y} = \frac{cx}{(1-c)y} = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{x}{y} \ \Leftrightarrow\ y = \frac{c}{1-c}\cdot\frac{x^2}{y} \ \Leftrightarrow y^2 = \frac{c}{1-c}x^2.$$

In die Gleichung (III) eingesetzt liefert dies mit $0 < c < 1$:

$$\begin{aligned}
cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = cx^2 + (1-c)\cdot\frac{c}{1-c}x^2 - 2 &= cx^2 + cx^2 - 2 = 2cx^2 - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow\ 2cx^2 = 2\\
&\Leftrightarrow\ x^2 = \frac{2}{2c} = \frac{1}{c} \ \Rightarrow\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{c}}.
\end{aligned}$$

Da $x > 0$ vorausgesetzt sind, erhalten wir $x = \frac{1}{\sqrt{c}}$. Wenn wir x in den Ausdruck $y^2 = \frac{c}{1-c}x^2$ einsetzen folgt wegen $y > 0$:

$$y^2 = \frac{c}{1-c}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 = \frac{1}{1-c} \ \Rightarrow\ y = \frac{1}{\sqrt{1-c}}.$$

Damit ist ein eindeutiger Kandidat $(x^*, y^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{1-c}}\right)$ für eine Extremstelle gefunden.

Alternativ lässt sich die Nebenbedingung mit unseren Voraussetzungen durch

$$\varphi(x,y) = cx^2 + (1-c)y^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = \frac{2-cx^2}{1-c} \;\overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow}\; y(x) = \sqrt{\frac{2-cx^2}{1-c}}$$

als Funktion darstellen. Unser Extremwertproblem reduziert sich dann auf die Bestimmung der kritischen Stellen des eindimensionalen Problems

$$A(x) = xy(x).$$

Sei x_0 eine kritische Stelle von A. Dann ist $(x_0, y(x_0)) = (x_0, y_0)$ ein Kandidat für eine Extremstelle unseres Ausgangsproblem.

(c) (5 Punkte)

Für eine Person, die am t.m.j geboren ist, sei der „Geburtstagsvektor“ $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} t \\ m \\ j \end{pmatrix}$. Zum Beispiel ist der Geburtstagsvektor von Leonhard Euler, der am 15. April 1707 geboren wurde, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1707 \end{pmatrix}$.

Gegeben sind die Geburtstagsvektoren von

$$\text{Hermann Grassmann } \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1809 \end{pmatrix}$$

$$\text{William Hamilton } \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1788 \end{pmatrix}$$

$$\text{„Unbekannt“ } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 29 \\ m \\ 1851 \end{pmatrix}$$

$$\text{Carl Friedrich Gauß } \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 1777 \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $m \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$ ist es möglich, den Geburtstagsvektor von Carl Friedrich Gauß als eindeutige Linearkombination der Geburtstagsvektoren von Hermann Grassmann, William Hamilton und „Unbekannt“ zu schreiben?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle das beschriebene Problem mathematisch dar.
2. Löse das mathematische Problem.

1. Stelle das beschriebene Problem mathematisch dar

Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Unsere Fragestellung ist nun, wann $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ als eindeutige Linearkombination von $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ geschrieben werden kann. Anders formuliert: Wann besitzt das lineare Gleichungssystem

$$w = \lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \cdot \mathbf{v}_3$$

eine eindeutige Lösung $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$? Die Antwort ist: Wenn $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Äquivalent hierzu ist, dass die quadratische Koeffizientenmatrix

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$$

regulär ist. Hierzu ist äquivalent, dass $\det(A) \neq 0$ gilt.

<u>2. Löse das mathematische Problem</u>
Nach unseren Vorüberlegungen muss die Matrix

$$A = (\mathbf{g}_1, \mathbf{h}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 29 \\ 4 & 3 & m \\ 1809 & 1788 & 1851 \end{pmatrix}$$

regulär sein. Also muss $\det(A) \neq 0$ erfüllt sein. Wir erhalten mit der Regeln von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 15 & 8 & 29 \\ 4 & 3 & m \\ 1809 & 1788 & 1851 \end{pmatrix} \\ &= 15 \cdot 3 \cdot 1851 + 8 \cdot m \cdot 1809 + 29 \cdot 4 \cdot 1788 - 1809 \cdot 3 \cdot 29 - 1788 \cdot m \cdot 15 - 1851 \cdot 4 \cdot 8 \\ &= -12438m + 74088. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit

$$\det(A) = 0 \;\Leftrightarrow\; -12438m + 74088 = 0 \;\Leftrightarrow\; m = \frac{74088}{12438} = 6$$

die einzige Nullstelle von $\det(A)$. Damit ist A für $m \neq 6$ regulär, womit $\mathbf{g}_2$ für $m \neq 6$ eindeutig aus den Vektoren $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{h}$ und $\mathbf{u}$ kombiniert werden kann.
Damit lässt sich der Geburtstagsvektor von Carl Friedrich Gauß für $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ aus den Geburtstagsvektoren von Hermann Grassmann, William Hamilton und „Unbekannt“ kombinieren.

(d1) (6 Punkte)

Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe. Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch gelegentliche Arbeiten nur 10′000 Franken verdient. Er beschliesst, jedes Jahr 10% seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

Wie gross ist sein Vermögen V_n n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20+n)-$ten Geburtstag?

Wie gross ist also sein Vermögen V_{10} am 30. Geburtstag?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite eine Differenzengleichung auf Basis der Einnahmen und Ausgaben her.
2. Bestimme die Größe des Vermögens.

1. Leite eine Differenzengleichung auf Basis der Einnahmen und Ausgaben her

Da Max vor seinem 20. Geburtstag keine Ersparnisse sammeln konnte ist das Ausgangsvermögen durch

$$V_0 = 2 \cdot 10^6 = 2'000'000 \text{ CHF}$$

gegeben. Nun gibt Max jährlich 10% seines Vermögens aus und nimmt jährlich 10′000 CHF ein. Dies resultiert in der Differenzengleichung

$$V_{n+1} = V_n - \underbrace{0.1V_n}_{\text{Ausgaben Jahr } n} + \underbrace{10'000}_{\text{Einnahmen Jahr } n} = 0.9V_n + 10'000.$$

Hierbei steht er Summand $0.1V_n$ für die Ausgabe von 10% seines Vermögens und der Summand 10′000 steht für die jährlichen Einnahmen von Max. Hierbei gehen wir davon aus, dass die Einnahmen erfolgen, nachdem die 10% des Vermögens ausgegeben wurden.

2. Bestimme die Größe des Vermögens

Damit liegt eine Differenzengleichung in Normalform mit $A = 0.9$ und $B = 10000$ vor. Mit

$$V^* = \frac{B}{1-A} = \frac{10000}{1-0.9} = \frac{10000}{0.1} = 100000 = 10^5$$

erhalten wir die explizite Darstellung

$$V_n = A^n(V_0 - V^*) + V^* = 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5.$$

Das Vermögen nach 10 Jahren erhalten wir dann durch

$$V_{10} = 0.9^{10}(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5 \approx 762'489.05 \text{ CHF}.$$

Bemerkung:
Wir gehen nun davon aus, dass die $10'000$ CHF eingenommen werden und dann 10% des Vermögens ausgegeben werden. Dann erhalten wir die Differenzengleichung

$$V_{n+1} = V_n + \underbrace{10'000}_{\text{Einnahmen Jahr } n} - \underbrace{0.1(V_n + 10'000)}_{\text{Ausgaben Jahr } n} = 0.9V_n + 9'000.$$

mit $A = 0.9$ und $B = 9'000$. Als explizite Darstellung folgt:

$$V_n = 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 90'000) + 90'000.$$

Das Vermögen nach 10 Jahre ist dann:

$$V_n = 0.9^{10}(2 \cdot 10^6 - 90'000) + 90'000 \approx 755'975.80 \text{ CHF}.$$

(d2) (4 Punkte)

Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe. Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch gelegentliche Arbeiten nur 10'000 Franken verdient. Er beschliesst, jedes Jahr 10% seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

V_n bezeichnet sein Vermögen n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20+n)-$ten Geburtstag $(n = 0, 1, 2, ...)$.

(*Wichtige Bemerkung:* Wenn Sie Aufgabe **(d1)** nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $V_n = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.9^n + 2.2 \cdot 10^5$.)

Welchem Wert würde sich V_n nähern, wenn Max unendlich lange leben würde?

Wann würde sein Vermögen die Grenze von 500'000 Franken unterschreiten?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Grenzwert von V_n.
2. Berechne, wann die 500'000 Franken unterschritten werden.

1. Bestimme den Grenzwert von V_n

Wir betrachten die explizite Darstellung

$$V_n = 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5$$

aus der Aufgabe (d1). Die Folge 0.9^n ist eine geometrische Folge. Wegen $0.9 < 1$ gilt $0.9^n \to 0$ für $n \to \infty$. Also gilt mithilfe der Grenzwertsätze für Folgen:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V_n &= \lim_{n\to\infty}(0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5) = \lim_{n\to\infty} 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + \lim_{n\to\infty} 10^5 \\ &= (2 \cdot 10^6 - 10^5) \cdot \lim_{n\to\infty} 0.9^n + 10^5 = 0 + 10^5 = 10^5.\end{aligned}$$

Dieses Resultat erhalten wir auch direkt aus der Aufgabe (d1). Die Differenzengleichung liegt in der Normalenform

$$V_{n+1} = AV_n + B$$

mit $A = 0.9$ und $B = 10'000$ vor. Damit ist der Grenzwert bereits durch

$$V^* = \frac{B}{1-A} = ... = 10^5$$

gegeben.

2. Berechne, wann die $500'000$ Franken unterschritten werden

Nun überlegen wir uns, wann das Vermögen von Max den Wert von $500'000$ Franken unterschreitet. Wegen $|A| < 1$ und $A > 0$ ist die Folge V_n streng monoton fallend (und konvergent). Wir suchen das kleinste $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$V_N < 500000$$

gilt. Damit ist die Ungleichung aufgrund der Monotonie für alle $n \geq N$ erfüllt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
V_n < 500'000 &\Leftrightarrow 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5 < 5 \cdot 10^5 \Leftrightarrow 0.9^n(10^5 \cdot (2 \cdot 10 - 1)) < 4 \cdot 10^5 \\
&\Leftrightarrow 0.9^n < \frac{4 \cdot 10^5}{10^5 \cdot (2 \cdot 10 - 1)} \\
&\Leftrightarrow 0.9^n < \frac{4}{19} \\
&\Leftrightarrow n \underbrace{\ln(0.9)}_{<0} < \ln(4) - \ln(19) \\
&\Leftrightarrow n > \frac{\ln(4) - \ln(19)}{\ln(0.9)} \approx 14.79.
\end{aligned}$$

Damit ist $V_n < 500'000$ für alle $n \geq N = 15$ erfüllt. Also unterschreitet das Vermögen von Max zwischen seinem 34. und 35. Geburtstag die $500'000$ Franken Grenze.

Bemerkung (I):
Für die alternative Lösung aus (d1) erhalten wir durch analoges Vorgehen:

$$\lim_{n \to \infty} V_n = V^* = 90'000$$

und

$$V_n < 500'000 \Leftrightarrow n > 14.55.$$

Damit unterschreitet auch hier das Vermögen die $500'000$ Frankengrenze zwischen dem 34. und 35.-ten Geburtstag.

Bemerkung (II):
Falls mit $V_n = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.9^n + 2.2 \cdot 10^5$ gerechnet wird, erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} V_n = 2.2 \cdot 10^5$$

und

$$V_n < 500000 \Leftrightarrow n > 18.66.$$

In diesem Fall unterschreitet das Vermögen von Max zwischen dem 38. und 39.-ten Geburtstag die Schranke von $500'000$ Franken.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y)$ habe in (x_0, y_0) einen stationären Punkt, d.h. $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Hinreichend dafür, dass f in (x_0, y_0) einen *Sattelpunkt* hat, ist

(a) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$.

(b) $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

(c) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$.

(d) Keine der vorangehenden Bedingungen ist hinreichend für einen Sattelpunkt in (x_0, y_0).

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Bedingung für einen Sattelpunkt an.
2. Wähle die richtige Antwort aus.

1. Gebe die Bedingung für einen Sattelpunkt an

Sei (x_0, y_0) ein stationärer Punkt, dann ist die Bedingung

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0$$

hinreichend dafür, dass ein Sattelpunkt vorliegt.

2. Wähle die richtige Antwort aus

Wir wissen, dass $-(f_{xy}(x_0, y_0))^2$ negativ ist. Damit die Bedingung erfüllt ist, muss

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

negativ sein. Dies gilt sicher, wenn $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0)$ negativ ist. Das heißt, dass $f_{xx}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ unterschiedliche Vorzeichen haben. Damit ist Möglichkeit (c) hinreichend.

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2(e^y - 2) - y^2$$

hat ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3+2y^4-4xy = 0$ ein lokales Minimum in $P = (1, 1)$.

(b) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3+2y^4-4xy = 0$ ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$.

(c) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2y^4 - 4xy + 1 = 0$ ein lokales Maximum in $P = (0, 0)$.

(d) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3+2y^4-4xy = 0$ ein lokales Minimum in $P = (0, 0)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überprüfe zunächst die Nebenbedingungen.
2. Eliminiere die restlichen Lösungen mithilfe des Kurvenverlaufs.

1. Überprüfe zunächst die Nebenbedingungen

Wir werden die verschiedenen Möglichkeiten seperat betrachten. Mit φ_a und P_a bezeichnen wir die in (a) aufgeführte Nebenbedingung bzw. den aufgeführten Punkt.

Wegen

$$\varphi_a(P_a) = 1 + 2 - 4 = -1 \neq 0$$

erfüllt $P_a = (1, 1)$ die Nebenbedingung φ_a nicht. Damit ist die (a) falsch.

Ebenso gilt:

$$\varphi_c(P_c) = 0 + 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

Damit erfüllt P_c die Nebenbedingung φ_c nicht. Also ist (c) falsch.

Wegen

$$\varphi_b(P_b) = \varphi_d(P_d) = 0^3 + 2 \cdot 0^4 - 4 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

sind die Antworten (b) und (d) noch relevant.

2. Eliminiere die restlichen Lösungen mithilfe des Kurvenverlaufs

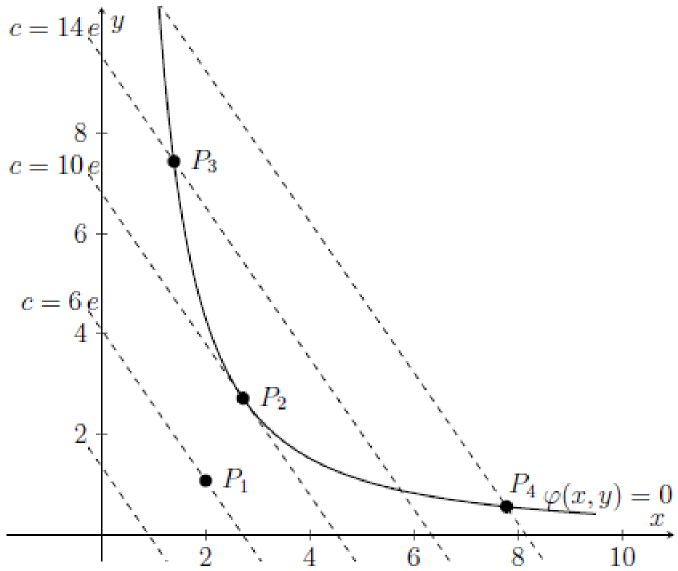
Wir wissen, dass f ein lokales Maximum in $P = (0, 0) = P_d$ besitzt. Das heißt, dass wir von P_d aus in jede Richtung nach unten laufen. In der unmittelbaren Umgebung von P_d sind alle Funktionswerte von f kleiner als in P_d. Damit kann es in P_d auch kein lokales Minimum unter der Nebenbedingung φ_d geben und (d) ist falsch.

Damit bleibt die korrekte Antwort (b). Die Begründung erhalten wir durch das lokalen Maximum von f. Da wir von P_b aus in jede Richtung nach unten laufen, gilt dies insbesondere auch für die Nebenbedingung.

Also ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = 6x+4y$ zu verschiedenen Niveaus c und die Kurve $\varphi(x,y) = \frac{3}{5}\ln(x) + \frac{2}{5}\ln(y) - 1 = 0$.



Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ an der Stelle

(a) P_1 ein Minimum.

(b) P_2 ein Minimum.

(c) P_2 ein Maximum.

(d) P_4 ein Maximum.

Lösung:

<u>**Vorgehensweise:**</u>

1. Überlege dir, wann die Nebenbedingung eine Niveaulinie der Funktion berührt.

<u>1. Überlege dir, wann die Nebenbedingung eine Niveaulinie der Funktion berührt</u>
Sei P eine Extremstelle unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$. Dann berührt die Nebenbedingung die Niveaulinie $f(x,y) = f(P)$ und überquert diese nicht.. Der anschauliche Grund ist: Wenn wir über/unter das Niveau der Extremstelle laufen würden, wäre dies keine Extremstelle.

Anmerkung:
Dies gilt im Allgemeinen lokal um den Punkt P. In der Aufgabe ist dies nicht relevant, da es sich hier um ein globales Extremum handelt.

Nach diesen Überlegungen kommen die Punkte P_1, P_3 und P_4 nicht infrage. Die offene Frage ist, ob es bei P_2 ein Minimum oder Maximum unter der Nebenbedingung φ handelt. Da die Niveaus von links nach rechts wachsen, ist P_2 der kleinste Wert unter der Nebenbedingung φ.

Also ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Funktion f und g schneiden sich bei a, b und c, wobei $a < b < c$. Zwischen a und b verläuft der Graph von g über dem Graphen von f, zwischen b und c verläuft der Graph von g unterhalb des Graphen von f.

Der Inhalt der von f und g zwischen a und c eingeschlossenen Fläche ist gleich

(a) $\int_a^c (g(x) - f(x))\, dx$.

(b) $\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx - \int_b^c |g(x) - f(x)|\, dx$.

(c) $\int_b^c (f(x) - g(x))\, dx - \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

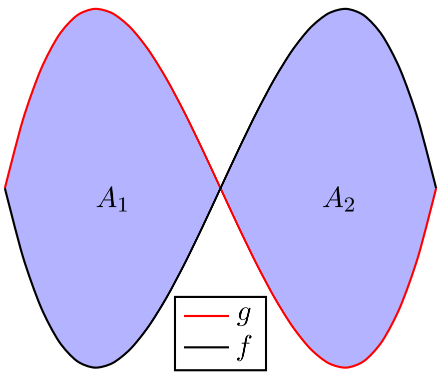
Lösung:

Vorgehensweise:

1. Veranschauliche die Situation grafisch und berechne die Fläche.

1. Veranschauliche die Situation grafisch und berechne die Fläche

Schematisch ist die Situation durch das Bild



dargestellt. A_1 bezeichnet die Fläche zwischen den Schnittpunkten bei a und b und A_2 die Fläche zwischen den Schnittpunkten b und c. Damit ist der Inhalt der von f und g zwischen a und c eingeschlossenen Fläche ist gegeben durch:

$$A_1 + A_2 = \int_a^c |g(x) - f(x)|\, dx = \int_a^b |\underbrace{g(x) - f(x)}_{\geq 0}|\, dx + \int_b^c |\underbrace{g(x) - f(x)}_{\leq 0}|\, dx$$

$$= \underbrace{\int_a^b g(x) - f(x)\, dx + \int_b^c |g(x) - f(x)|\, dx}_{\text{(b)}} = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx + \int_b^c f(x) - g(x)\, dx.$$

Also ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \left(2t^2 - \frac{1}{2}t + 3\right)\, dt.$$

Dann folgt

(a) $f(0) = 3$.

(b) $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

(c) $f''(0) = -\frac{1}{2}$.

(d) $f'''(0) = 3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde die korrekte Antwort durch Differenzieren.

1. Finde die korrekte Antwort durch Differenzieren

Durch Einsetzen erhalten wir durch

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^{0} \left(2t^2 - \frac{1}{2}t + 3\right)\, dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + 3t\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3}0^3 - \frac{1}{4}0^2 + 3\cdot 0 - (\frac{2}{3}(-1)^3 - \frac{1}{4} - 3) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + 3 \neq 3, \end{aligned}$$

dass die Möglichkeit (a) falsch aus. Mit dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung erhalten wir

$$f'(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \;\Rightarrow\; f'(0) = 3 \neq -\frac{1}{2}.$$

Die Möglichkeit (b) ist somit falsch. Wegen

$$f''(x) = 4x - \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; f''(0) = -\frac{1}{2}$$

ist die Antwort (c) korrekt. An $f'''(0) = 4 \neq 3$ erkennen wir auch, dass (d) falsch ist.

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

A sei eine $(n \times m)-$Matrix, B sei eine $(p \times q)-$Matrix.
Wenn die Matrix $C = BA$ existiert, folgt:

(a) $n = q$ oder $m = p$.

(b) $m = p$ und $q = n$.

(c) $n = p$ und $m = q$.

(d) $n = m = p = q$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir den Zusammenhang zwischen Zeilen und Spalten bei einem Matrixprodukt.

1. Überlege dir den Zusammenhang zwischen Zeilen und Spalten bei einem Matrixprodukt
Wir kennzeichnen mit $A_{n\times m}$, dass die Matrix A n Zeilen und m Spalten besitzt. Wir betrachten das Produkt

$$C_{p\times m} = B_{p\times q} \cdot A_{n\times m}.$$

Dieses Produkt existiert nur, wenn die Anzahl der Spalten von B mit der Anzahl der Zeilen von A übereinstimmt. Damit erhalten wir $q = n$, womit (c) falsch ist.

Als Zweites untersuchen wir die Möglichkeit (b). Falls $m = p$ und $q = n$ folgt, so gilt

$$C_{p\times m} = C_{p\times p} = C_{m\times m}.$$

Damit muss C quadratisch sein. Im Allgemeinen ist dies jedoch falsch:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun zu der Möglichkeit (d). Falls $n = m = p = q$ folgt, gilt:

$$C_{n\times n} = B_{n\times n} \cdot A_{n\times n}.$$

Damit müssen A, B und C quadratisch sein. Auch dies ist mit dem letzten Gegenbeispiel im Allgemeinen nicht erfüllt.

Nur die Aussage (a) gilt uneingeschränkt, falls $q = n$ gilt. Dies lässt sich auch aussagenlogisch begründen. C existiert genau dann, wenn $n = q$. Dann ist die Aussage (a) wegen dem „oder“ unabhängig von m und p wahr.

Frage 7 (4 Punkte)

Eine Matrix M heißt *idempotent*, falls $M^2 = M$ ist.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn M idempotent ist, dann folgt $\det(M) = 1$.

(b) M ist genau dann idempotent, wenn $\det(M) = 0$ oder $\det(M) = 1$ gilt.

(c) Wenn $\det(M) = 0$ ist, dann ist M idempotent.

(d) Keine der vorangehenden Aussagen ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Schreibe M^2 aus.
2. Suche passende Gegenbeispiele.

1. Schreibe M^2 aus

Der Ausdruck M^2 bedeutet

$$M^2 = M \cdot M.$$

Für die Determinante gilt:

$$\det(M^2) = \det(M \cdot M) = \det(M) \cdot \det(M).$$

2. Suche passende Gegenbeispiele

Wegen $\det(\mathbf{0}) = 0$ ist die Nullmatrix ein Gegenbeispiel zur Aussage (a).

Wir betrachten die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Für diese erhalten wir

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

und

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1.$$

Damit haben wir eine nicht idempotente Matrix mit $\det(M) = 1$ und somit ein Gegenbeispiel für (b) gefunden.

Für $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot M.$$

Für die Determinante erhalten wir

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

Also folgt aus $\det(M) = 0$ nicht, dass M idempotent ist, wodurch (c) falsch ist.

Damit bleibt nur noch die korrekte Antwort (d) übrig.

Frage 8 (3 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist richtig für eine reellwertige Funktion f?

(a) Der Gradient von f in einem lokalen Extremum ist immer der Nullvektor.

(b) Der Gradient von f im Punkt (x_0, y_0) ist immer parallel zur Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0).

(c) Der Vektor, der die Richtung des steilsten Abstiegs des Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) angibt, ist parallel zur Tangenten an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0).

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Definiere eine reellwertige Funktion.
2. Benenne die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum.

1. Definiere eine reellwertige Funktion

Eine Funktion $f : D_f \to W_f$ heißt reellwertig, falls

$$f(x) \in \mathbb{R}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Andere Notation: $f(D_f) = W_f \subseteq \mathbb{R}$.

2. Benenne die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum

Sei (x_0, y_0) eine Extremstelle von f. Dann folgt

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = 0.$$

Das heißt $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extrempunkts von f an der Stelle (x_0, y_0).

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 9 (3 Punkte)

Welche der folgenden Behauptungen ist **nicht wahr**?

(a) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(b) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(c) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig.

(d) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überprüfe die Antwortmöglichkeiten.

1. Überprüfe die Antwortmöglichkeiten

Wir beginnen mit Möglichkeit (a). Das System ist linear unabhängig genau dann, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn deren Determinante ungleich null ist. Wir erhalten

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}) = -14 \neq 0.$$

Damit ist die in (a) enthaltene Aussage wahr.

Nun zur Aussage in (c). Es ist unmöglich, dass vier Vektoren im dreidimensionalen Raum linear unabhängig sind. Den drei linear unabhängige Vektoren im dreidimensionalen Raum liefern bereits die Möglichkeit jeden Vektor darzustellen.

Die Aussage in (d) lösen wir, indem die Determinante nach der letzten Spalte entwickelt wird. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} 6 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 5) \neq = 0$$

ist das System in (d) linear unabhängig. Man könnte auch sagen, dass die Matrix ein Dreieckssystem bilden. Dann sind nur die Diagonaleinträge für die Determinante relevant.

Als letzte Möglichkeit bleibt (b). Wegen

$$(-4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ist die dort aufgeführte Aussage nicht wahr.

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 10 (4 Punkte)

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten und $\mathbf{b} = 0$.
Nachdem man den Gaußschen Algorithmus angewendet hat, bekommt man aus der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ die neue Matrix $(A^*, \mathbf{b}^*)$, die genau k Zeilen mit lauter Nullen hat.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn $k \geq 1$ ist, dann hat das System keine Lösung.

(b) Wenn $k = 1$ ist, dann hat das System genau eine Lösung.

(c) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension k.

(d) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension $n + k - m$.

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Betrachte die erweiterte Koeffizienten nach der Anwendung von Gauß.

1. Betrachte die erweiterte Koeffizienten nach der Anwendung von Gauß

Der Übergang von $(A|b)$ zu $(A^*|b^*)$ liefert

$$(A^*|\mathbf{b}^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} a^*_{1,1} & \dots & a^*_{1,n} & b^*_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^*_{m-k,1} & \dots & a^*_{m-k,n} & b^*_{m-k} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0, \end{array}\right)$$

wobei der untere Teil den k Nullzeilen entspricht. Wegen

$$\mathbf{rg}(A) = \mathbf{rg}(A^*) = \mathbf{rg}(A^*, \mathbf{b}^*) = \mathbf{rg}(A, \mathbf{b}) = m - k < n$$

ist das System für $k \geq 1$ lösbar. Also ist (a) falsch. Für $k = 1$ hat das System bereits unendlich viele Lösungen, da

$$\dim\ L = n - (m-1) = n - m + 1 > 0$$

gilt. Damit ist auch (b) falsch.
Für $k \geq 1$ und $n > m$ gilt für die Dimension der Lösungsraums:

$$\dim L = n - \mathbf{rg}(A) = n - m + k.$$

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{und} \quad f(0) = 0.$$

Dann muss gelten:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + 2.$

(b) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + x - \ln(2).$

(c) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2).$

(d) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + 2.$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme durch Ausschließen die korrekte Antwort.

1. Bestimme durch Ausschließen die korrekte Antwort

Zunächst bestimmen wir die Ableitung von $\ln(e^{2x} + 1)$. Hierfür gilt mit der Kettenregel:

$$\left(\ln(e^{2x} + 1)\right)' = \frac{1}{e^{2x} + 1} 2e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1}.$$

Damit können wir direkt die Antworten (a) und (b) ausschließen. Nun betrachten wir die Ableitung von $\ln(e^x + e^{-x})$. Der Term $-\ln(2)$ fällt bei Antwort (c) und der Term $+2$ bei Antwort (d) durch das Differenzieren weg. Für diese gilt

$$\left(\ln(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{e^x + e^{-x}}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Wegen $\ln(e^0 + e^0) = \ln(1 + 1) = \ln(2)$ ist die Bedingung $f(0) = 0$ nur für die Antwort (c) erfüllt.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 2 (5 Punkte)

Die stetige Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \frac{17}{24}$.

Dann gilt:

(a) $a = 6, b = -6$.

(b) $a = 1, b = \frac{3}{2}$.

(c) $a = 6, b = -5$.

(d) $a = \frac{3}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Nutze die Bedingung für eine Dichtefunktion.
2. Bestimme den Erwartungswert von X.
3. Ermittle die korrekte Antwort.

1. Nutze die Bedingung für eine Dichtefunktion

Die Funktion f ist eine Dichtefunktion, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$$

erfüllt ist. Da das f in der Aufgabenstellung eine Dichtefunktion ist, heißt das, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{1} ax + bx^2\ dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{a}{2}1^2 + \frac{b}{3}1^3 - \left(\frac{a}{2}0^2 + \frac{b}{3}0^3\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1$$

erfüllt sein muss. Damit ergibt mit

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 1 \ \Leftrightarrow\ 3a + 2b = 6$$

eine bruchfreie Bedingung.

2. Bestimme den Erwartungswert von X
Da die Zufallsvariable die Dichtefunktion f besitzt, gilt für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 x(ax+bx^2)\ dx = \int_0^1 ax^2+bx^3\ dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{4}x^3\bigg|_0^1 \\ &= \frac{a}{3}1^3 + \frac{b}{4}1^3 - \left(\frac{a}{3}0^3 + \frac{b}{4}0^3\right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{17}{24}.\end{aligned}$$

Heraus erhalten wir:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} = \frac{17}{24} \ \Leftrightarrow\ 8a + 6b = 17.$$

3. Ermittle die korrekte Antwort
Insgesamt erhalten wir die Bedingungen:

$$\begin{aligned} 3a + 2b &= 6 \\ 8a + 6b &= 17. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit den Variablen a und b. Wenn wir dieses System in eine erweiterte Koeffizientenmatrix übertragen und das Gauß-Verfahren anwenden, erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ + \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 3 \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \mid \cdot (-1) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Damit ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $a = 1$ und $b = \frac{3}{2}$.

Also ist Antwort (b) korrekt

Bemerkung:
Das Finden der Antwort lässt sich durch Ausschließen beschleunigen. Damit ist gemeint, dass das lineare Gleichungssystem nicht gelöst werden muss. Die Bedingung für die Dichtefunktion schließt die Antworten (c) und (d) direkt aus. Die korrekte Antwort finden wir nun, indem wir die restlichen Kombinationen in die Gleichung für den Erwartungswert von X einsetzen.

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3\ln(x^2+y^2) - (3-a)\ln(y).$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Länge des Gradienten an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ gleich 5?

(a) $a = \pm 4$.

(b) $a = \pm 2$.

(c) $a = \pm\sqrt{2}$.

(d) Es gibt kein solches $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Gradienten.
2. Bestimme die Länge des Gradienten und die passenden a.

1. Bestimme den Gradienten

Zuerst bestimmen wir die partiellen Ableitungen von f:

$$f_x(x,y) = 3 \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{6x}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; f_x(1,1) = \frac{6\cdot 1}{1+1} = \frac{6}{2} = 3$$
$$f_y(x,y) = \frac{6y}{x^2+y^2} - (3-a)\frac{1}{y} \;\Rightarrow\; f_y(1,1) = \frac{6\cdot 1}{1+1} - (3-a)\frac{1}{1} = 3-3+a = a.$$

Der Gradient ist durch

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} f_x(1,1) \\ f_y(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}$$

gegeben.

2. Bestimme die Länge des Gradienten und die passenden a

Für die Länge muss

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2+a^2} = 5 \;\Leftrightarrow\; 9+a^2 = 25 \;\Leftrightarrow\; a^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; a = \pm 4$$

erfüllt sein.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) den Rang 1.

(b) den Rang 2.

(c) den Rang 3.

(d) den Rang 4.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende das Gauß-Verfahren an und bestimme den Rang.

1. Wende das Gauß-Verfahren an und bestimme den Rang

Durch Anwendung des Gauß-Verfahrens erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 1 \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-4) \\ + \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit liefert das Gauß-Verfahren zwei Nullzeilen. Folglich hat die Matrix den Rang 2.

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -2$.

(b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 2$.

(c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überprüfe die Antwortmöglichkeiten.
2. Überlege dir, welche Möglichkeiten keine Eigenvektoren sein können.

1. Überprüfe die Antwortmöglichkeiten

Ein Vektor $\mathbf{x} \neq 0$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ, falls

$$M\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

gilt. Das heißt $M\mathbf{x}$ muss ein Vielfaches von $\mathbf{x}$ sein. Ansonsten ist $\mathbf{x}$ kein Eigenvektor.

2. Überlege dir, welche Möglichkeiten keine Eigenvektoren sein können

Wir beginnen mit der Aussage (a). Es gilt:

$$M \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zu dem Eigenwert 2. Aber nicht zu $\lambda = -2$. Also ist die Antwort (a) falsch.

Für die Aussage (b) betrachten wir:

$$M \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathbf{x}$ kein Eigenvektor und die Antwort (b) falsch.

Wegen

$$M \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist die Antwort (c) korrekt. Denn $\mathbf{x}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Zur Vollständigkeit noch die Aussage (d):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit $y_k = 3 \cdot 2^k - 1$ löst die Differenzengleichung

(a) $2y_{k+1} - y_k = -1$.

(b) $y_{k+1} + 2y_k - 1 = 0$.

(c) $y_{k+1} + 2y_k - 2 = 0$.

(d) $y_{k+1} - 2y_k = 1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Untersuche die in den Antworten vorkommenden Folgenglieder.

1. Untersuche die in den Antworten vorkommenden Folgenglieder

Die Antworten enthalten die Glieder y_k und y_{k+1}. Diese sind durch

$$y_k = 3 \cdot 2^k - 1$$
$$y_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 1$$

gegeben. Wegen

$$2y_{k+1} - y_k = 3 \cdot 2^{k+2} - 2 - 3 \cdot 2^k + 1 = 2^k(3 \cdot 2^2 - 3) - 1 = 2^k \cdot 9 - 1 \neq -1$$

ist Antwort (a) falsch. In (b) - (d) ist der Term $2y_k$ enthalten. Für diesen gilt

$$2y_k = 2 \cdot 3 \cdot 2^k - 2 = 3 \cdot 2^{k+1} - 2.$$

Wegen

$$y_{k+1} + 2y_k = 3 \cdot 2^{k+1} - 1 + 3 \cdot 2^{k+1} - 2 = 3 \cdot 2^{k+2} - 3$$

können (b) und (c) nicht erfüllt sein. Übrig bleibt noch die korrekte Antwort (d). Dies wollen wir überprüfen:

$$y_{k+1} - 2y_k = 3 \cdot 2^{k+1} - 1 - (3 \cdot 2^{k+1} - 2) = 1.$$

Also ist Antwort (d) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{3}{4}y_k - \pi e y_{k+1} + \frac{1}{8}y_k - 3.2 = -2y_k \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Normalform an.
2. Bestimme anhand der Eigenschaften von A die richtige Lösung.

1. Gebe die Normalform an

Die Normalform einer Differenzengleichung ist durch

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ gegeben. Durch

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}y_k - \pi e y_{k+1} + \frac{1}{8}y_k - 3.2 = -2y_k \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{6}{8}y_k + \frac{1}{8}y_k - \pi e y_{k+1} - 3.2 = -\frac{16}{8}y_k \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{7}{8}y_k - \pi e y_{k+1} - 3.2 = -\frac{16}{8}y_k \\
&\Leftrightarrow \quad -\pi e y_{k+1} - 3.2 = -\frac{23}{8}y_k \\
&\Leftrightarrow \quad -\pi e y_{k+1} = -\frac{23}{8}y_k + 3.2 \\
&\Leftrightarrow \quad \pi e y_{k+1} = \frac{23}{8}y_k - 3.2 \\
&\Leftrightarrow \quad y_{k+1} = \underbrace{\frac{23}{8\pi e}}_{A:=} y_k - \underbrace{\frac{3.2}{\pi e}}_{B:=}
\end{aligned}$$

erhalten wir die Normalform der Differenzengleichung.

2. Bestimme anhand der Eigenschaften von A die richtige Lösung

Eine Differenzengleichung in Normalenform

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

konvergiert für $|A| < 1$ und divergiert für $|A| > 1$. Für $A > 0$ ist das Verhalten monoton und für $A < 0$ oszillierend. Wegen $8\pi e > 23$ gilt $0 < A < 1$, also $A > 0$ und $|A| < 1$. Damit ist die Lösung der Gleichung monoton und konvergent.

Also ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+1)y_{k+1} - (3-a)y_k + 8 = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ ist genau dann oszillierend und konvergent, wenn

(a) $-1 < a < 1$.

(b) $1 < a < 3$.

(c) $a = -1$ oder $a > 3$.

(d) Die allgemeine Lösung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ oszillierend und konvergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Normalform an.
2. Suche die a so, dass die Lösung oszillierend und konvergent ist.

1. Gebe die Normalform an
Die Normalform ist durch

$$(a+1)y_{k+1} - (3-a)y_k + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; (a+1)y_{k+1} = (3-a)y_k - 8 \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = \underbrace{\frac{3-a}{a+1}}_{A:=} y_k - \underbrace{\frac{8}{a+1}}_{B:=}$$

gegeben.

2. Suche die a so, dass die Lösung oszillierend und konvergent ist
Die Lösung der Differenzengleichung ist oszillieren und konvergent, falls $-1 < A < 0$ gilt. Wir müssen alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ finden, sodass

$$-1 < \frac{a-3}{a+1} < 0$$

gilt. Hierfür müssen wir die Fälle $a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$ und $a + 1 < 0 \Leftrightarrow a < -1$ unterscheiden. Dies ist wichtig, da die Multiplikation mit einer negativen Zahl die Richtung der Ungleichung verändert. Zur Illustration die Multiplikation mit (-1):

$$1 < 2 \;\Leftrightarrow\; -1 > -2.$$

Für den Fall $a > -1$ gilt:

$$\begin{aligned}
-1 < \frac{a-3}{a+1} < 0 \;&\Leftrightarrow\; -a-1 < a-3 < 0 \\
&\Leftrightarrow\; -a+2 < a < 3 \\
&\Leftrightarrow\; -a+2 < a \;\wedge\; a < 3 \\
&\Leftrightarrow\; 2 < 2a \;\wedge\; a < 3 \\
&\Leftrightarrow\; 1 < a \;\wedge\; a < 3 \\
&\Leftrightarrow\; 1 < a < 3
\end{aligned}$$

Es bleibt der Fall $a < -1$ übrig:

$$\begin{aligned} -1 < \frac{a-3}{a+1} < 0 &\Leftrightarrow -a-1 > a-3 > 0 \\ &\Leftrightarrow -a+2 > a > 3 \\ &\Leftrightarrow \\ 2 > 2a \ \wedge \ a > 3 &\Leftrightarrow 1 > a \ \wedge \ a > 3. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

Insgesamt ist die Lösung der Differenzengleichung für $1 < a < 3$ oszillierend und konvergent.

Damit ist die Antwort (b) korrekt.