Teil I: Offene Aufgaben (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x,y) = (x+y+a)e^x - e^y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein ein Sattelpunkt vorliegt.

(b) (7 Punkte)

Die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass in $(1,1)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um eine Extremstelle handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum) wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{0.5\ \pi}} x\ \sin(x^2)\ \left(\cos(x^2)\right)^3 dx.$$

(d) (6 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^e |\ln(x)| dx.$$

Bemerkung: Sie dürfen das in Mathematik A bewiesene Resultat, dass gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} x \ \ln(x) = 0,$$

voraussetzen.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär, A sei ausserdem symmetrisch.

Beweisen Sie:

$$B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1} = (A^{-1}B)^\top.$$

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = a\ln(x-2) + x\ y^2 + 8\ y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (8, 2)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (8, 2)$ in der Richtung $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ am stärksten zunimmt?

(c) (3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ t \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ *keine* Basis des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$?

(d) (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -3a & 5a \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

Berechnen Sie den Vektor $M^n\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) (8 Punkte)

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 0. \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

Für den Unterraum

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \wedge 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \wedge x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\}$

ist eine Basis anzugeben.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = y$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ihr Minimum in

(a) $P = (-5, 0)$.

(b) $P = (0, 3)$.

(c) $P = (0, 0)$.

(d) $P = (0, -3)$.

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{8}, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Frage 3 (2 Punkte)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige, auf dem Intervall $[a,b]$ definierte Funktion.

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) Wenn das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ existiert, dann ist f stetig auf $[a,b]$.

(b) Wenn f nicht stetig ist auf $[a,b]$, dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ nicht.

(c) Wenn f differenzierbar ist auf $[a,b]$, dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a,b]$.

(d) Das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ existiert immer.

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 2$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^{-1}BA$.

(a) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 1$.

(b) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 2^n$.

(c) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 2^n \cdot 5^n$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Frage 6 (2 Punkte)

A ist eine 6×5 Matrix, das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 4$.

(c) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$..

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int \ln(x\ e^x)\ dx,\ (x > 0)$$

ist

(a) $x\ \ln(x) + x^2 - x + C$.

(b) $x\ \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C$.

(c) $x\ \ln(x) + x^2 + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix},\ \text{wobei } a \neq 0.$$

(a) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(b) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ genau einen reellen Eigenwert.

(c) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert..

(d) Die Matrix A hat abhängig von $a \neq 0$ keinen, einen oder zwei reelle Eigenwerte.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi 2\ \sin(x)\ \cos(x)\ dx$$

hat den Wert

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) Keines der obigen Resultate ist korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 9 \end{pmatrix}$ orthogonal?

(a) $t = 5$.

(b) $t = 5$ oder $t = -5$.

(c) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

(d) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

Frage 3 (4 Punkte)

Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)

Gesucht ist eine Matrix X, sodass

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Es gibt keine Matrix X, die die Gleichung erfüllt.

Frage 5 (2 Punkte)

Die $n \times n$ Matrix habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dann hat die Matrix A^2

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)y_k = a, \text{ wobei } a \neq -1, a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = 2(1+a)^k$.

(b) $y_k = 3(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4(1+a)^k - 1$.

(d) $y_k = 5(1+a)^k - 2$.

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3(y_k - y_{k+1}) + 3 = 2y_k - 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2+c)y_{k+1} + (1-c)y_k = 5$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist, ist genau dann monoton und divergent, wenn

(a) $c < -2$.

(b) $c \in (-2, 0)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ monoton und divergent.

Lösungen

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x,y) = (x+y+a)e^x - e^y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein ein Sattelpunkt vorliegt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die partiellen Ableitungen von f.
2. Gebe die Bedingung für einen stationären Punkt an und finde Kandidaten hierfür.
3. Entscheide, welche Art von Extremum vorliegt.

1. Bestimme die partiellen Ableitungen von f

Die partiellen Ableitungen erhalten wir durch

$$f_x(x,y) = 1 \cdot e^x + (x+y+a)e^x = (x+y+a+1)e^x$$
$$f_y(x,y) = e^x - e^y.$$

2. Gebe die notwendigen Bedingung für einen stationären Punkt an und finde Kandidaten hierfür

Ein stationärer Punkt ist gegeben, falls

$$f_x(x,y) = (x+y+a+1)e^x = 0$$
$$f_y(x,y) = e^x - e^y = 0$$

erfüllt ist. Wegen $e^x = e^y$ muss $x = y$ gelten. Für die partielle Ableitung nach x erhalten wir somit

$$(x+y+a+1)e^x = 0 \;\Leftrightarrow\; x+y+a+1 = 0 \;\overset{x=y}{\Leftrightarrow}\; 2x+a+1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{a+1}{2} = y.$$

Dementsprechend liegt ein stationärer Punkt für

$$P := (x_0, y_0) := \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$$

vor.

3. Entscheide, welche Art von Extremum vorliegt

Für die Entscheidung benötigen wir die zweiten Ableitung:

$$f_{xx}(x,y) = 1 \cdot e^x + (x+y+a+1)e^x = (x+y+a+2)e^x$$
$$f_{yy}(x,y) = -e^y$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^x.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x_0, y_0) &= \left(-\frac{a+1}{2} - \frac{a+1}{2} + a + 2\right) e^{x_0} \\
&= \left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2} - \frac{a}{2} - \frac{1}{2} + a + 2\right) e^{x_0} \\
&= (-a - 1 + a + 2)e^{x_0} = 1 \cdot e^{x_0} > 0 \\
f_{yy}(x_0, y_0) &= -e^{y_0} < 0 \\
f_{xy}(x_0, y_0) &= e^{x_0} > 0.
\end{aligned}$$

Falls

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$$

gilt, liegt eine Minimum oder Maximum in (x_0, y_0) vor. Wenn

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0$$

erfüllt ist, liegt ein Sattelpunkt in (x_0, y_0) vor. Wegen

$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 = e^{x_0}(-e^{y_0}) - (e^{x_0})^2 = -e^{2x_0} - e^{2x_0} = -2e^{2x_0} < 0.$$

befindet sich an (x_0, y_0) ein Sattelpunkt.

(b) (7 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass in $(1, 1)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um eine Extremstelle handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum) wird nicht verlangt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die Lagrangefunktion und die Bedingung für eine mögliche Extremstelle auf.
2. Bestimme a und b, sodass an $(1, 1)$ eine Extremstelle vorliegen kann.

1. Stelle die Lagrangefunktion und die Bedingung für eine mögliche Extremstelle auf

Die Lagrangefunktion ist durch

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(ax^2 + bxy + 5y^2 - 16)$$

gegeben. Hieraus ergeben sich die Lagrangebedingungen

$$\begin{aligned} F_x(x, y, \lambda) &= 2x + \lambda(2xa + by) = 0 \\ F_y(x, y, \lambda) &= 2y + \lambda(10y + bx) = 0 \\ F_\lambda(x, y, \lambda) &= \varphi(x, y) = ax^2 + bxy + 5y^2 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Damit wir an $(1, 1)$ eine Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ erhalten können, muss

$$\begin{aligned} F_x(1, 1, \lambda) &= 2 + \lambda(2a + b) = 0 \\ F_y(1, 1, \lambda) &= 2 + \lambda(10 + b) = 0 \\ F_\lambda(1, 1, \lambda) &= \varphi(1, 1) = a + b + 5 - 16 = 0. \end{aligned}$$

erfüllt sein. Das heißt wir suchen nun a und b, damit die Lagrangebedingungen an der Stelle $(1, 1)$ gleich Null sind.

2. Bestimme a und b, sodass an $(1, 1)$ eine Extremstelle vorliegen kann

Für $F_x(1, 1, \lambda) = 0$ gilt

$$2 + \lambda(2a + b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(2a + b) - 2 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{2}{2a + b}.$$

Ebenso gilt für $F_y(1,1,\lambda) = 0$:

$$2 + \lambda(10 + b) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(10 + b) = -2 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\frac{2}{10 + b}.$$

Für λ liefert uns dies die Darstellungen

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{2}{2a + b} \\ \lambda &= -\frac{2}{10 + b} \end{aligned}$$

und durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} -\frac{2}{2a + b} = -\frac{2}{10 + b} \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{2a + b} = \frac{1}{10 + b} \\ &\Leftrightarrow\; 2a + b = 10 + b \\ &\Leftrightarrow\; 2a = 10 \\ &\Leftrightarrow\; a = 5. \end{aligned}$$

Mit der Nebenbedingung ergibt sich:

$$\varphi(1,1) = 5 + b + 5 - 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; b - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 6.$$

Also könnte für $a = 5$ und $b = 6$ eine Extremstelle an $(1,1)$ vorliegen.

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{0.5\ \pi}} x\ \sin(x^2)\ \left(\cos(x^2)\right)^3 dx.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme eine geeignete Substitution, um das Integral zu berechnen.

1. Bestimme eine geeignete Substitution, um das Integral zu berechnen
Die allgemeine Formel für Integration durch Substitution ist anhand von

$$\int\limits_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)\ dt$$

für f stetig und g stetig differenzierbar gegeben. Eine passende Substitution kürzt störende Terme in einem Integral weg. Dies Erreichen wir mit der Wahl

$$t = \cos(x^2),$$

denn es gilt

$$\frac{dt}{dx} = -2x\sin(x^2) \ \Leftrightarrow\ dx = \frac{dt}{-2x\sin(x^2)}.$$

Wichtig ist, auch an die Substitution der Grenzen zu denken. Hierfür erhalten wir

$$\begin{aligned} t_1 &= \cos\left((\sqrt{0.5\pi}^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ t_0 &= \cos(0) = 1. \end{aligned}$$

Für das Integral gilt somit

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{0.5\ \pi}} x\ \sin(x^2)\ \left(\cos(x^2)\right)^3 dx. &= \int_1^0 x\ \sin(x^2) t^3\ \frac{dt}{-2x\sin(x^2)} \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^3\ dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^3\ dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}1^4 - \frac{1}{4}0^4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(d) (6 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^e |\ln(x)| dx.$$

Bemerkung: Sie dürfen das in Mathematik A bewiesene Resultat, dass gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} x \; \ln(x) = 0,$$

voraussetzen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Teile das Integral auf, um den Betrag aufzulösen.
2. Bestimme die Stammfunktion mit partieller Integration.
3. Verwende die Stammfunktion, um das Integral zu berechnen.

1. Teile das Integral auf, um den Betrag aufzulösen

Für den Logarithmus gilt

$$\ln(x) < 0 \text{ falls } x \in (0,1)$$
$$\ln(x) \geq 0 \text{ falls } x \in [1,\infty),$$

womit für das Integral mithilfe der Definition des Betrags

$$\int_0^e |\ln(x)| \; dx = \int_0^1 |\ln(x)| \; dx + \int_1^e |\ln(x)| \; dx = \int_0^1 -\ln(x) \; dx + \int_1^e \ln(x) \; dx$$

folgt.

2. Bestimme die Stammfunktion mit partieller Integration

Die Formel für partielle Integration ist durch

$$\int u'(x) \cdot v(x) \; dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x)v'(x) \; dx$$

für stetig differenzierbare u, v gegeben. Durch partielle Integration erhalten wir mit

$$\int \ln(x) \; dx = \int 1 \cdot \ln(x) \; dx = x\ln(x) - \int x\frac{1}{x} \; dx = x\ln(x) - \int 1 \; dx = x\ln(x) - x + C$$

die gesuchte Stammfunktion.

3. Verwende die Stammfunktion, um das Integral zu berechnen

Zuerst bestimmen wir das einfachere Integral:

$$\int_1^e \ln(x) \; dx = [x\ln(x) - x]_1^e = e\ln(e) - e - \ln(1) + 1 = 1.$$

Für den zweiten Teil benötigen wir die Aussage

$$\lim_{x\searrow 0} x \;\ln(x) = 0,$$

da $\lim_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$ gilt. Also ist der Logarithmus für $x = 0$ nicht definiert und es liegt ein unbestimmtes Integral vor. Das Integral berechnen wir nun wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 -\ln(x)\;dx &= -\int_0^1 \ln(x)\;dx = -\lim_{a\searrow 0}\int_a^1 \ln(x)\;dx = -\lim_{a\searrow 0}\,[x\ln(x) - x]_a^1 \\ &= -\lim_{a\searrow 0}(1\cdot\ln(1) - 1 - a\ln(a) + a) = 1 - \lim_{a\searrow 0}(-a\ln(a) + a) = 1.\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int_0^e |\ln(x)|\;dx = \int_0^1 -\ln(x)\;dx + \int_1^e \ln(x)\;dx = 1 + 1 = 2.$$

Alternativ lässt sich auch die partielle Integration für bestimmte Integrale verwenden, falls man die Bestimmung der Stammfunktion und die Berechnung des Integrals kombinieren möchte.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär, A sei ausserdem symmetrisch.

Beweisen Sie:

$$B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1} = (A^{-1}B)^\top.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die notwendigen Rechengesetze in Erinnerung.
2. Beweise die Aussage.

1. Rufe dir die notwendigen Rechengesetze in Erinnerung

Wir rufen uns die nötigen Rechengesetze in Erinnerung. Eine Matrix A heißt symmetrisch, falls

$$A = A^\top$$

gilt. Dementsprechend erhalten wir

$$A^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Außerdem gelten:

$$\begin{aligned}(AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}\\ (AB)^\top &= B^\top A^\top.\end{aligned}$$

2. Beweise die Aussage

Durch die Umformungen

$$\begin{aligned}
B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1} &= B^\top B^\top A^\top (A^{-1})^\top (B^{-1})^\top BB^{-1}A^{-1}\\
&= B^\top B^\top A^\top (A^\top)^{-1} (B^{-1})^\top BB^{-1}A^{-1}\\
&= B^\top B^\top I (B^{-1})^\top BB^{-1}A^{-1}\\
&= B^\top B^\top I (B^\top)^{-1} BB^{-1}A^{-1}\\
&= B^\top I BB^{-1}A^{-1}\\
&= B^\top A^{(-1)}\\
&= ((A^{-1})^\top B)^\top\\
&= (A^{-1}B)^\top
\end{aligned}$$

erhalten wir die Aussage.

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = a\ln(x-2) + x\ y^2 + 8\ y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (8, 2)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (8, 2)$ in der Richtung $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ am stärksten zunimmt?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne den Gradienten an der Stelle (x_0, y_0).
2. Richte den Gradienten nach $\mathbf{b}$ aus.

1. Berechne den Gradienten an der Stelle (x_0, y_0)

Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen von f. Hierfür erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{a}{x-2} + y^2 \\ f_y(x,y) &= 2xy + 8, \end{aligned}$$

wodurch für den Gradienten

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{a}{x-2} + y^2 \\ 2xy + 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{grad} f(8,2) = \begin{pmatrix} \frac{a}{6} + 4 \\ 40 \end{pmatrix}$$

gilt.

2. Richte den Gradienten nach $\mathbf{b}$ aus

Der Gradient an der Stelle (x_0, y_0) zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs. Dementsprechend muss

$$\lambda \mathbf{b} = \mathbf{grad} f(8,2) \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{6} + 4 \\ 40 \end{pmatrix}$$

erfüllt sein. Aus der zweiten Komponente erhalten wir $\lambda = 10$. Die erste Komponente liefert dann mit

$$10 \cdot 3 = \frac{a}{6} + 4 \Leftrightarrow 30 - 4 = 26 = \frac{a}{6} \Leftrightarrow a = 6 \cdot 26 = 156$$

das passende a.

(c) (3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ t \end{pmatrix}, \ \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ *keine* Basis des dreidimensionalen Raumes $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir den Zusammenhang von linearer Abhängigkeit und der Determinante einer Matrix.

1. Überlege dir den Zusammenhang von linearer Abhängigkeit und der Determinante einer Matrix

Die drei Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ bilden keine Basis, wenn diese linear abhängig sind. $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ sind linear abhängig genau dann, wenn

$$\det\left(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right) = 0$$

gilt. Wir bestimmen nun die Determinante abhängig von t. Wir werden nach der ersten Spalte entwickeln, da dort eine Null vorkommt. Mit der Entwicklung nach der ersten Spalte gilt:

$$\begin{aligned} \det\left(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2t & 8 \\ t & 4 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix} - t \det \begin{pmatrix} 2t & 8 \\ t & t^2 \end{pmatrix} \\ &= 4t^2 - t^2 - t(2t^3 - 8t) = 3t^2 - 2t^4 + 8t^2 \\ &= -2t^4 + 11t^2 = t^2(11 - 2t^2). \end{aligned}$$

Für $t = 0$ ist diese Determinante gleich null. Außerdem gilt

$$11 - 2t^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ t^2 = \frac{11}{2} \ \Leftrightarrow \ t = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

Damit sind die Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ für

$$\left\{ -\sqrt{\frac{11}{2}}, 0, \sqrt{\frac{11}{2}} \right\}$$

linear abhängig.

(d) (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -3a & 5a \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

Berechnen Sie den Vektor $M^n\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren.
2. Bestimme den gesuchten Vektor.

1. Berechne die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren

Die Eigenwerte der Matrix M bestimmen wir, indem wir die Gleichung

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

lösen. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2a \\ -3a & 5a - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(5a - \lambda) - (-3a) \cdot 2a = -\lambda(5a - \lambda) + 6a^2 = \lambda^2 - 5a\lambda + 6a^2,$$

womit wir

$$\lambda_{1/2} = \frac{5a \pm \sqrt{(-5a)^2 - 4 \cdot 6a^2}}{2} = \frac{5a \pm \sqrt{25a^2 - 24a^2}}{2} = \frac{5a \pm \sqrt{a^2}}{2} = \frac{5a \pm a}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = 3a$$

erhalten. Zuerst bestimmen wir die Eigenvektoren zu λ_1. Hierfür lösen wir

$$(M - \lambda_1 I)x = 0.$$

Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 0 - \lambda_1 & 2a \\ -3a & 5a - \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2a & 2a \\ -3a & 5a - 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 2a \\ -3a & 3a \end{pmatrix} \begin{array}{l} | \cdot (\frac{1}{2a}) \\ | \cdot (\frac{1}{3a}) \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei wir die rechte Seite bewusst weglassen. Damit gilt insbesondere

$$-x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

wodurch wir die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

zu λ_1 erhalten. Für λ_2 lösen wir

$$(M - \lambda_2 I)x = 0.$$

Die Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_2 & 2a \\ -3a & 5a-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-2a & 2a \\ -3a & 5a-3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a & 2a \\ -3a & 2a \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \cdot \frac{1}{3}a$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

führen auf

$$-x_1 + \frac{2}{3}x_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = \frac{2}{3}x_2$$

Dies liefert uns die Eigenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

für den Eigenwert λ_2.

2. Bestimme den gesuchten Vektor

Der Wert λ heißt *Eigenwert* zum Eigenvektor $\mathbf{x} \neq 0$, falls

$$M \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

gilt. Der Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2a$. Dementsprechend gilt

$$M^n\mathbf{x} = \lambda_1 M^{n-1}\mathbf{x} = \cdots = \lambda_1^n \mathbf{x} = (2a)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n+1}a^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) (8 Punkte)

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 0. \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

Für den Unterraum

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \wedge 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 = 0 \wedge x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0\}$

ist eine Basis anzugeben.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.
2. Löse das System und gebe die Basis von W an.

1. Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist durch

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

gegeben. Da die rechte Seite null ist, können wir diese bei weiteren Umformungen ignorieren.

2. Löse das System und gebe die Basis von W an

Die Lösung des Systems erhalten wir durch elementare Zeilenumformungen. Diese Umformungen liefern

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

wodurch wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_4 + 8x_5 = 0 &\Leftrightarrow x_1 = 7x_4 - 8x_5 \\ x_2 + 13x_4 - 11x_5 &\Leftrightarrow x_2 = -13x_4 + 11x_5 \\ x_3 - 5x_4 + 4x_5 &\Leftrightarrow x_3 = 5x_4 - 4x_5 \end{aligned}$$

extrahieren können. Die x_1, x_2 und x_3 Komponente hängen also von x_4 und x_5 ab. Dies bedeutet, dass sich die allgemeine Lösung durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_4 - 8x_5 \\ -13x_4 + 11x_5 \\ 5x_4 - 4x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

darstellen lässt. Damit gilt für die Lösungsmenge

$$W = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Lösungsmenge W ist gleichzeitig der gesuchte Unterraum und die Basis ist durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = y$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ihr Minimum in

(a) $P = (-5, 0)$.

(b) $P = (0, 3)$.

(c) $P = (0, 0)$.

(d) $P = (0, -3)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überprüfe, welche Antwortbedingungen die Nebenbedingung erfüllen.
2. Bestimme die korrekte Antwort im Ausschlussverfahren.

1. Überprüfe, welche Antwortbedingungen die Nebenbedingung erfüllen
Wir setzen $P_1 = (-5, 0)$, $P_2 = (0, 3)$, $P_3 = (0, 0)$ und $P_4 = (0, -3)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1) &= \frac{(-5)^2}{25} + \frac{0^2}{9} = \frac{25}{25} + 0 = 1 \\
\varphi(P_2) &= \frac{0^2}{25} + \frac{3^2}{9} = 0 + \frac{9}{9} = 1 \\
\varphi(P_3) &= \frac{0^2}{25} + \frac{0^2}{9} = 0 \neq 1 \\
\varphi(P_4) &= \frac{0^2}{25} + \frac{(-3)^2}{9} = 0 + \frac{9}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Damit erfüllt P_3 die Nebenbedingung nicht.

2. Bestimme die korrekte Antwort im Ausschlussverfahren
Da die anderen Punkte die Nebenbedingung erfüllen, vergleichen wir nun deren Funktionswerte:

$$\begin{aligned}
f(P_1) &= 0 \\
f(P_2) &= 3 \\
f(P_4) &= -3.
\end{aligned}$$

Da der Funktionswert an dem Punkt P_4 am kleinsten ist, befindet sich dort das Minimum.

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{8}, & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne das Integral über f in Abhängigkeit von a.
2. Verwende die Definition einer Dichtefunktion.

1. Berechne das Integral über f in Abhängigkeit von a

Für das Integral über f gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^4 ax + \frac{1}{8}\,dx = \left[a\frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x\right]_0^4 = a\frac{4^2}{2} + \frac{4}{8} - \left(a\frac{0^2}{2} + \frac{0}{8}\right) = 8a + \frac{1}{2}.$$

2. Verwende die Definition einer Dichtefunktion

Eine Funktion $f \geq 0$ heißt Dichtefunktion auf $(-\infty, \infty)$, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

gilt. Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 8a + \frac{1}{2} = 1 \;\Leftrightarrow\; 8a = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{16}$$

und wegen $a > 0$ erhalten wir $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Damit ist sind die Eigenschaften einer Dichtefunktion für $a = \frac{1}{16}$ erfüllt.

Somit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 3 (2 Punkte)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion.

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) Wenn das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert, dann ist f stetig auf $[a, b]$.

(b) Wenn f nicht stetig ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ nicht.

(c) Wenn f differenzierbar ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmte Integral von f über $[a, b]$.

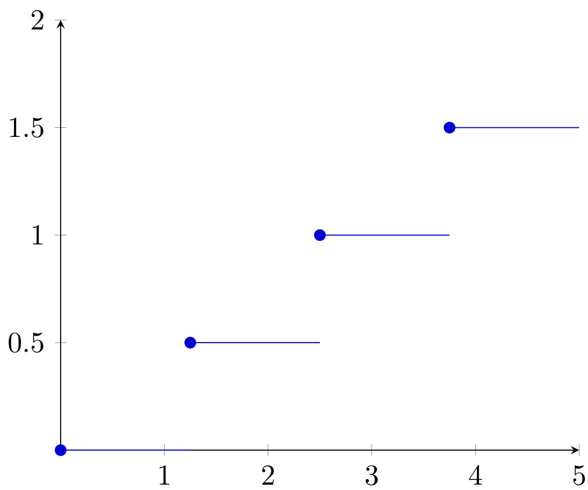
(d) Das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert immer.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Eliminiere Lösungen mithilfe des Verständnisses von Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit.

1. Eliminiere Lösungen mithilfe des Verständnisses von Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit.
Folgende Grafik veranschaulicht eine Sprungfunktion. Das Integral über diese Funktion existiert auf dem Intervall $[0, 5]$, jedoch ist diese offensichtlich nicht stetig. Damit ist (a) und (b) falsch.



Wir betrachten nun die Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}.$$

Das bestimmte Integral über $[a, b]$ existiert in diesem Fall nicht. Jedoch würde die Begründung unseren Rahmen sprengen. Damit ist (d) auch falsch und es bleibt nur (c) übrig.

Wenn f differenzierbar auf $[a, b]$ ist, ist f auch stetig auf $[a, b]$. Stetige Funktionen auf $[a, b]$ sind immer integrierbar.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 2$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^{-1}BA$.

(a) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 1$.

(b) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 2^n$.

(c) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N} : \det(C^n) = 2^n \cdot 5^n$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Rechenregeln der Determinante.

1. Verwende die Rechenregeln der Determinante

Für quadratische Matrizen X und Y gilt

$$\det(X \cdot Y) = \det(X) \cdot \det(Y).$$

Insbesondere gilt dann auch

$$\det(C^n) = \underbrace{\det(C) \cdots \det(C)}_{n-\text{mal}} = (\det(C))^n.$$

Außerdem benötigen wir noch

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Wir erhalten

$$\det(C) = \det(A^{-1}BA) = \frac{1}{\det(A)} \det(B) \det(A) = \det(B) = 2 \;\Rightarrow\; \det(C^n) = 2^n.$$

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, ob die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ linear unabhängig sind.

1. Überlege dir, ob die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ linear unabhängig sind

Die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$ ist. Wir entwickeln nach der dritten Spalte, da dort zwei Nullen auftreten. Durch die Entwicklung nach der dritten Spalte erhalten wir:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1) = 2 \cdot (-3) = 6.$$

Damit bilden die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Insbesondere lässt sich mit diesen jeder beliebige Vektor des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (2 Punkte)

A ist eine 6×5 Matrix, das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 4$.

(c) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3.$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne den Rang der Matrix A.

1. Berechne den Rang der Matrix A

Da das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist, gilt

$$rg(A) = rg(Ab).$$

Sie L der Lösungsraum des LGS $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $n = 5$ die Anzahl der Variablen. Dann gilt

$$\dim\ L = n - rg(A) \ \Leftrightarrow\ 2 = 5 - rg(A) \ \Leftrightarrow\ rg(A) = 3.$$

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int \ln(x\ e^x)\ dx,\ \ (x > 0)$$

ist

(a) $x\ \ln(x) + x^2 - x + C$.

(b) $x\ \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C$.

(c) $x\ \ln(x) + x^2 + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Vereinfache den Integranden.
2. Bestimme die Stammfunktion.

1. Vereinfache den Integranden und bestimme die Stammfunktion

Für den Integranden gilt

$$f(x) := \ln(xe^x) = \ln(x) + \ln(e^x) = \ln(x) + x.$$

Mit der Vorüberlegung erhalten wir

$$\int f(x)\ dx = \int \ln(x)\ dx + \int x\ dx = \int \ln(x)\ dx + \frac{x^2}{2} + C,$$

wodurch wir nur noch die Stammfunktion von $\ln(x)$ bestimmen müssen.

2. Bestimme die Stammfunktion

Aufgrund der Stammfunktion von x liegt jedoch die Vermutung nahe, dass die Antworten (a) und (c) falsch sind, da in beiden Fällen der Faktor $\frac{1}{2}$ fehlt. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int 1 \cdot \ln(x)\ dx = x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x\ln(x) - x + C.$$

Insgesamt folgt dann

$$\int f(x)\ dx = x\ln(x) - x + \frac{x^2}{2} + C.$$

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Alternativ lässt sich die korrekte Antwort durch Differenzieren der Möglichkeiten (a)-(c) herleiten.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}, \text{ wobei } a \neq 0.$$

(a) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene reelle Eigenwerte.

(b) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ genau einen reellen Eigenwert.

(c) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ keinen reellen Eigenwert..

(d) Die Matrix A hat abhängig von $a \neq 0$ keinen, einen oder zwei reelle Eigenwerte.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Eigenwerte der Matrix A.

1. Bestimme die Eigenwerte der Matrix A

Die Eigenwerte der Matrix A sind die Lösungen der Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Es gilt

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - a^2 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - a^2.$$

Die Nullstellen hiervon erhalten wir durch

$$\lambda_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4 - a^2)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4a^2}}{2} = \frac{4 \pm 2|a|}{2} = 2 \pm |a|.$$

Damit hat A zwei reelle Eigenwerte. Alternativ lassen sich die Nullstellen auch wie folgt bestimmen:

$$(2-\lambda)^2 - a^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2-\lambda)^2 = a^2 \;\Leftrightarrow\; 2 - \lambda = \pm|a| \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2 \pm |a|.$$

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} 2\ \sin(x)\ \cos(x)\ dx$$

hat den Wert

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) Keines der obigen Resultate ist korrekt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme den Integranden um und finde die korrekte Antwort.

1. Forme den Integranden um und finde die korrekte Antwort

Das Additionstheorem der Sinusfunktion besagt

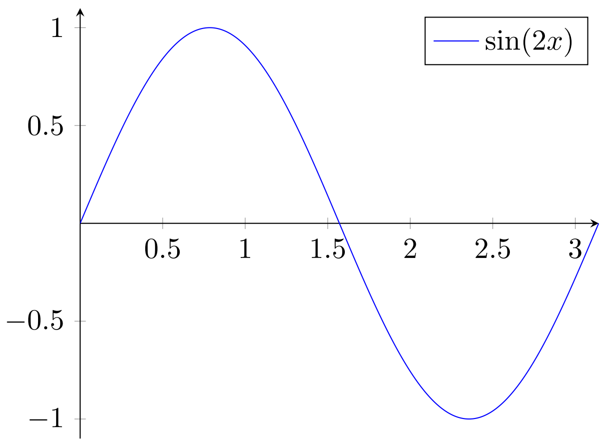
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \cos(x)\cdot\sin(y).$$

Mit $x = y$ erhalten wir den Integranden:

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Der Term $\sin(2x)$ ist auf dem Intervall $[0,\pi]$ punktsymmetrisch in der Achse $\frac{\pi}{2}$. Dementsprechend folgt

$$\int_0^{\pi} 2\ \sin(x)\ \cos(x)\ dx = \int_0^{\pi} \sin(2x)\ dx = 0.$$



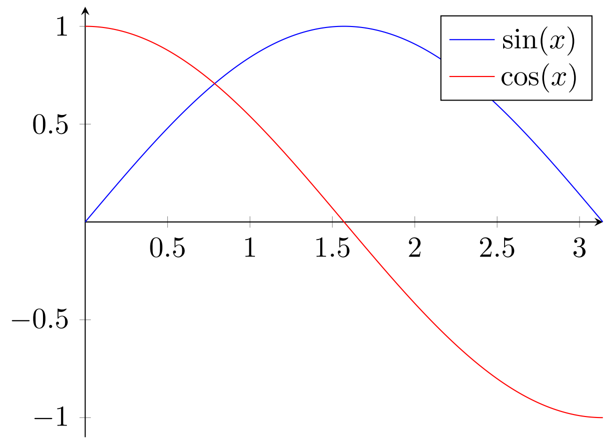
Die Aufgabe lässt sich auch durch Substitution lösen. Mit $t = \sin(x)$ erhalten wir wegen $\frac{dt}{dx} = \cos(x)$ das Resultat

$$\int_0^{\pi} 2\ \sin(x)\ \cos(x)\ dx = \int_0^0 2t\ dt = 0.$$

Wichtig ist hierbei, dass die Grenzen mit substituiert wurden.

Damit ist Antwort (a) korrekt.

Da $\sin(x)$ *achsensymmetrisch und* $\cos(x)$ *punktsymmetrisch auf dem Intervall* $[0, \pi]$ *in der Achse* $\frac{\pi}{2}$ *ist, ist deren Produkt auch punktsymmetrisch in der Achse* $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$.



Damit folgt auch direkt, dass (a) die korrekte Antwort ist.

Frage 2 (3 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 9 \end{pmatrix}$ orthogonal?

(a) $t = 5$.

(b) $t = 5$ oder $t = -5$.

(c) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

(d) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren.

1. Berechne das Skalarprodukt der Vektoren

Das Skalarprodukt liefert

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 9 \end{pmatrix} = (t-2) \cdot 1 + t(t-1) + 3 \cdot 9 = t - 2 + t^2 - t + 27 = t^2 + 25.$$

Die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind genau dann orthogonal, falls

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = t^2 + 25 = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 = -25$$

gilt. Nun ist $t^2 = -25$ für kein $t \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende das Gauß-Verfahren an.
2. Bestimme den Rang mithilfe der Nullzeilen.

1. Wende das Gauß-Verfahren an

Das Gauß-Verfahren liefert:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -16 & 16 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 24 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-\frac{1}{4}) \\ \mid \cdot (\frac{1}{2}) \\ \mid \cdot (\frac{1}{6}) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^\star.$$

2. Bestimme den Rang mithilfe der Nullzeilen

Die Matrix hat zwei Nullzeilen. Folglich gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4 - 2 = 2$.

Damit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Gesucht ist eine Matrix X, sodass

$$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) $X = \begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

(b) $X = \begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

(c) $X = \begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

(d) Es gibt keine Matrix X, die die Gleichung erfüllt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde die Lösung durch invertieren einer Matrix.

1. Finde die Lösung durch das Invertieren einer Matrix

Zunächst betrachten wir die Gleichung

$$X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Die bekannte Matrix ist invertierbar, da

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 2 = 1 \neq 0$$

gilt. Für die Inverse einer 2×2 Matrix gilt:

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot 1 - 2\cdot 0}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und es folgt:

$$\begin{aligned}X\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow X &= \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4\cdot 1 + 3\cdot 0 & 4\cdot(-2) + 3\cdot 1\\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Da hier 2×2 Matrizen gegeben sind, bietet es sich auch an, die Möglichkeiten einzusetzen und nachzurechnen.

Frage 5 (2 Punkte)

Die $n \times n$ Matrix habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dann hat die Matrix A^2

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1, 2\lambda_2, \ldots, 2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Definition eines Eigenwertes in Erinnerung und löse damit die Aufgabe.

1. Rufe dir die Definition eines Eigenwertes in Erinnerung und löse damit die Aufgabe

Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann heißt $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor zu dem Eigenwert λ, falls

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

gilt. Dementsprechend erhalten wir mit

$$A^2\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v} = \lambda \cdot \lambda\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v},$$

dass λ^2 ein Eigenwert von A^2 ist.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$y_{k+1} - (1+a)y_k = a, \text{ wobei } a \neq -1, a \neq 0,$$
$$y_0 = 2$$

hat die Lösung

(a) $y_k = 2(1+a)^k$.

(b) $y_k = 3(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4(1+a)^k - 1$.

(d) $y_k = 5(1+a)^k - 2$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bringe die Differenzengleichung in Normalform.

1. Bringe die Differenzengleichung in Normalform
Die Normalform der Differenzengleichung erhalten wir durch

$$y_{k+1} - (1+a)y_k = a \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = (1+a)y_k + a,$$

wobei $A = 1 + a$ und $B = a$ ist. Die allgemeine Lösung ist dann durch

$$y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^* = (1+a)^k(y_0 - y^*) + y^*$$

mit $y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{a}{1-(1+a)} = -1$ gegeben. Eingesetzt liefert dies mit der Anfangsbedingung $y_0 = 2$:

$$y_k = 3(1+a)^k - 1.$$

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Die Antworten (c) und (d) erfüllen $y_0 = 2$ nicht.
Die Antwort (a) erfüllt wegen

$$y_{k+1} - (1+a)y_k = 2(1+a)^{k+1} - (1+a)2(1+a)^k = 0 \neq a$$

die Differenzengleichung nicht.

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3(y_k - y_{k+1}) + 3 = 2y_k - 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Normalform der Differenzengleichung.

1. Bestimme die Normalform der Differenzengleichung
Die Normalform der Gleichung ist durch

$$3(y_k - y_{k+1}) + 3 = 2y_k - 12 \;\Leftrightarrow\; 3y_k - 3y_{k+1} + 3 = 2y_k - 12 \;\Leftrightarrow\; -3y_{k+1} = -y_k - 15$$
$$\Leftrightarrow\; y_{k+1} = \frac{1}{3}y_k + 5$$

gegeben. Damit ist $A = \frac{1}{3}$.

Eine Differenzengleichung in Normalenform

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

konvergiert für $|A| < 1$ und divergiert für $|A| > 1$. Für $A > 0$ ist das Verhalten monoton und für $A < 0$ oszillierend.

Wegen $|A| < 1$ und $A > 0$ ist die Lösung monoton und konvergent.

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2+c)y_{k+1} + (1-c)y_k = 5$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist, ist genau dann monoton und divergent, wenn

(a) $c < -2$.

(b) $c \in (-2, 0)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ monoton und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Normalform der Differenzengleichung.
2. Überlege dir, wann die Lösung monoton und divergent ist.

1. Bestimme die Normalform der Differenzengleichung

Die Normalform der Differenzengleichung ist durch

$$\begin{aligned}(2+c)y_{k+1} + (1-c)y_k = 5 \;&\Leftrightarrow\; (2+c)y_{k+1} = -(1-c)y_k + 5 \\ &\Leftrightarrow\; y_{k+1} = -\frac{1-c}{2+c}y_k + \frac{5}{2+c} = \frac{c-1}{2+c}y_k + \frac{5}{2+c}\end{aligned}$$

gegeben. Hierbei setzen wir $A = \frac{c-1}{2+c}$.

2. Überlege dir, wann die Lösung monoton und divergent ist

Eine Differenzengleichung in Normalenform

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

konvergiert für $|A| < 1$ und divergiert für $|A| > 1$. Für $A > 0$ ist das Verhalten monoton und für $A < 0$ oszillierend.

Die Lösung ist monoton und divergent, falls

$$A > 1$$

gilt. Wegen dem Vorzeichen müssen wir zwei Fälle betrachten.

Fall (1) $c + 2 > 0$: Damit gilt $c > -2$ und wir erhalten

$$\frac{c-1}{c+2} > 1 \;\Leftrightarrow\; c - 1 > c + 2 \;\Leftrightarrow\; -1 > 2.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Fall (2) $c + 2 < 0$ Damit gilt $c < -2$ und wir erhalten

$$\frac{c-1}{c+2} > 1 \;\Leftrightarrow\; c - 1 < c + 2 \;\Leftrightarrow\; -1 < 2.$$

Dies ist eine wahre Aussage.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.