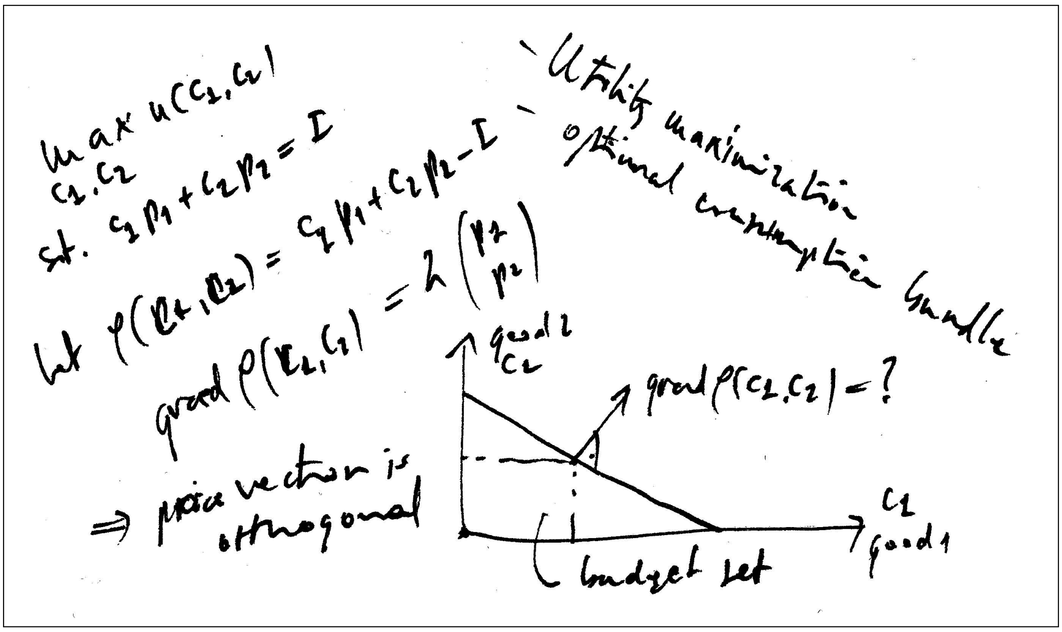
Enrico G. De Giorgi

Mathematik B
Alte Prüfungen 2006-2016

Frühjahrssemester 2017



Lehrstuhl für Mathematik
Universität St.Gallen

Diese Version: 29. März 2017.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort **E-3**

Prüfung Herbst 2006, Prof. Dr. Heinz Müller **E-5**

Prüfung E-6

Musterlösung E-10

Prüfung Herbst 2007, Prof. Dr. Heinz Müller **E-19**

Prüfung E-20

Musterlösung E-24

Prüfung Sommer 2008, Prof. Dr. Heinz Müller **E-33**

Prüfung E-34

Musterlösung E-38

Prüfung Sommer 2009, Prof. Dr. Heinz Müller **E-49**

Prüfung E-50

Musterlösung E-54

Prüfung Frühjahrssemester 2010, Prof. Dr. Enrico De Giorgi **E-65**

Prüfung E-66

Musterlösung E-90

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010, Prof. Dr. Enrico De Giorgi **E-105**

Prüfung E-106

Musterlösung E-130

Prüfung Frühjahrssemester 2011, Prof. Dr. Enrico De Giorgi **E-147**

Prüfung E-148

Musterlösung E-172

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011, Prof. Dr. Enrico De Giorgi **E-193**

Prüfung E-194

Musterlösung E-218

Prüfung Frühjahrssemester 2012, Prof. Dr. Enrico De Giorgi **E-235**

Prüfung E-236

Musterlösung E-261

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-281

Prüfung E-282

Musterlösung E-306

Prüfung Frühjahrssemester 2013, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-321

Prüfung E-322

Musterlösung E-352

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2013, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-369

Prüfung E-370

Musterlösung E-400

Prüfung Frühjahrssemester 2014, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-419

Prüfung E-420

Musterlösung E-453

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-467

Prüfung E-468

Musterlösung E-501

Prüfung Frühjahrssemester 2015, Dr. Reto Schuppli E-515

Prüfung E-516

Musterlösung E-552

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015, Dr. Reto Schuppli E-567

Prüfung E-568

Musterlösung E-604

Prüfung Frühjahrssemester 2016, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-617

Prüfung E-618

Musterlösung E-655

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016, Prof. Dr. Enrico De Giorgi E-673

Prüfung E-674

Musterlösung E-711

Vorwort

Diese Zusammenstellung enthält eine Sammlung alter Prüfungen und deren Lösungen von Sommersemester 2006 bis zum Frühjahrssemester 2016. Die dazugehörigen Nachholprüfungen werden ab dem Frühjahrssemester 2010 ebenfalls veröffentlicht. Für die aktuelleren Prüfungen (ab Nachholprüfung FS 2010) enthalten die Lösungen den kompletten Rechenweg. Diese Lösungen illustrieren wie Antworten in den Prüfungen formuliert werden sollten, im Speziellen auch die Argumentationsstruktur, den Rechenweg und die Notation. In den Prüfungen wird erwartet, dass die Studierenden diese Notation korrekt verwenden. Letzteres wird in Zukunft daher ebenfalls in die Bewertung der Antworten einfliessen. Ab Frühjahrssemester 2013 enthalten die Prüfungen ausserdem Multiple- Choice-Aufgaben, wie sie auch im Übungsbuch gefunden werden können.

Prüfung Herbst 2006

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik II: Prüfung Herbst 2006, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 31 Punkte

9

a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 10\ln x - 2xy - 8x + y^2, \qquad x > 0$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

9

b) Die Funktion

$$f(x,y) = x^a y^{1-a}, \qquad x>0,\ y>0,\ 0<a<1$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf Kandidaten für mögliche Extremalstellen.
<u>Bemerkung:</u> Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

6

c) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx$$

7

d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \le 0 \\ ax^{0.5} & , x>0 \end{cases}$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 0$$

Aufgabe 2 22 Punkte

8 a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & c \end{pmatrix}$$

a.1) Berechnen Sie $A^T A$.

a.2) Suchen Sie c $\in \mathbb{R}$, so dass $A^T A$ singulär ist.

4 b) Die quadratischen Matrizen $\underset{n\times n}{A}$, $\underset{n\times n}{B}$ seien regulär. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(B^{-1}A\right)^T \left(AB\right)^T \left(A^{-1}\right)^T = A^T$$

10 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2x^{0.5}y^{0.5} + ax$$

c.1) Berechnen Sie **grad** $f\left(x,y\right)$.

c.2) Bestimmen Sie a $\in \mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $\left(x_0, y_0\right) = \left(1, 4\right)$ durch den Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

Mathematik II: Prüfung Herbst 2006, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 3 24 Punkte

12

a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ t \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$$

a.1) Klären Sie ab, bei welchen Vektorsystemen $\{\mathbf{b},\mathbf{c}\}$, $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$, $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ lineare Unabhängigkeit, respektive lineare Abhängigkeit vorliegt.

a.2) Für welche Werte $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ paarweise orthogonal?

12

b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 4m \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 &= -2m \end{aligned}$$

Klären Sie ab, für welches $m \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem lösbar ist und ermitteln Sie für diesen Fall die zugehörige Lösung.

Mathematik II: Prüfung Herbst 2006, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 4 23 Punkte

11

a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a.1) Zeigen Sie, dass $\lambda = 5$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

a.2) Berechnen Sie die weiteren Eigenwerte.

12

b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+1)y_{k+1} - (a-1)y_k = b \qquad k = 0,1,2,\ldots$$
$$a \neq -1,\ a \neq 1$$

b.1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b.2) Für welche ist die allgemeine Lösung monoton?

b.3) Für welche a $\in \mathbb{R}$, b $\in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, k=0,1,2,...

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 1$$

Mathematatik II: Musterlösung Herbst 2006

Prof. Dr. Heinz Müller*

30. September 2006

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlösung. Bei der Prüfung müssen Ihre Antworten alle Rechenschritte enthalten, diese mssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

a)

I) Notwendige Bedingungen

$$f_x(x,y) = \frac{10}{x} - 2y - 8 \quad , \quad f_y(x,y) = -2x + 2y,$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{10}{x^2} \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2$$

II) Kandidaten für mögliche Extrema

$$\begin{array}{lcll} f_x(x,y) = 0 & : & \frac{10}{x} - 2y - 8 & = 0 \quad (1) \\ f_y(x,y) = 0 & : & -2x + 2y & = 0 \quad (2) \end{array}$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} \frac{10}{x} - 2x - 8 &= 0 \\ 10 - 2x^2 - 8x &= 0 \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \\ (x+5)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x^* = 1$ ($x = -5$ scheidet aus,
weil $\ln x$ nicht definiert ist.)

$$(x^*, y^*) = (1,1)$$

III) Hinreichende Bedingungen

$$\begin{array}{ll} f_{xx}(1,1) = -10 < 0 & , \quad f_{xx}(1,1) = 2 > 0 \\ f_{xx}(1,1) \cdot f_{yy}(1,1) - (f_{xy}(1,1))^2 & = -20 - 4 < 0 \\ (x^*, y^*) = (1,1) & \text{Sattelpunkt} \end{array}$$

b)

Lagrange-Funktion

$$F(x,y,\lambda) = x^a \cdot y^{1-a} + \lambda(x + y - 1)$$

Lagrange-Bedingungen

$$\begin{array}{lcll} F_x(x,y,\lambda) = 0 & : & ax^{a-1}y^{1-a} + \lambda & = 0 \quad (1) \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 & : & (1-a)x^a y^{-a} + \lambda & = 0 \quad (2) \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 & : & x + y - 1 & = 0 \quad (3) \end{array}$$

$$(1),\ (2) \quad \Rightarrow \quad \frac{ax^{a-1}y^{1-a}}{(1-a)x^a y^{-a}} = 1$$

$$\frac{ay}{(1-a)x} = 1$$

$$y = \frac{(1-a)x}{a}$$

Eingesetzt in (3)

$$\begin{aligned} x + \frac{(1-a)}{a}x &= 1 \\ a \cdot x + (1-a)x &= a \\ x &= a \end{aligned}$$

$$(x^*, y^*) = (a, 1-a)$$

c)

$$\begin{aligned} \int_0^N 2xe^{-x^2}dx &= -e^{-x^2}\Big|_0^N \\ &= -e^{-N^2} + 1 \quad \xrightarrow{N\to\infty} \quad 1 \\ \int_0^\infty 2xe^{-x^2}dx &= 1 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x)dx &= \int_{-2}^0 xdx + \int_0^1 a \cdot x^{0.5}dx \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0 + \frac{a}{1.5}x^{1.5}\Big|_0^1 \\ &= 0 - 2 + \frac{a}{1.5} - 0 \\ &= \frac{a}{1.5} - 2 \end{aligned}$$

$$\int_{-2}^1 f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Aufgabe 2

a)

a.1)

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2c-1 \\ 2c-1 & 1+c^2 \end{pmatrix}$$

a.2)

$$\begin{aligned} A^TA \ \text{ singulär} \quad &\Longleftrightarrow \quad \det(A^TA) = 0 \\ 5(1+c^2) - (2c-1)^2 &= 0 \\ 5 + 5c^2 - 4c^2 + 4c - 1 &= 0 \\ c^2 + 4c + 4 &= 0 \\ c &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{Alternative:} \quad & \det(AA^T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \\ & \det(A) = c + 2 = 0 \ \Leftrightarrow \quad c = -2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (B^{-1}A)^T(AB)^T(A^{-1})^T \quad &= A^T(B^{-1})^T B^T A^T (A^T)^{-1} \\ &= A^T(B^T)^{-1}B^T \cdot I \\ &= A^T \cdot I \\ &= A^T \end{aligned}$$

c)

c.1)

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{-0.5}y^{0.5} + a \\ x^{0.5}y^{-0.5} \end{pmatrix}$$

c.2)

Stärkste Funktionszunahme in (x_0, y_0) in Richtung von

$$\mathbf{grad} f(x_0,y_0) \quad = \begin{pmatrix} 2+a \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{grad} f(x_0,y_0) \quad = t \cdot \mathbf{n}$$

$$\begin{pmatrix} 2+a \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} 6t \\ t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t = 0.5 \ \ , a = 1$$

Augabe 3

a)

a.1)

1) $\mathbf{b},\ \mathbf{c}$ linear unabhängig (Es gilt weder $\mathbf{b} = k_1 \cdot \mathbf{c}$ noch $\mathbf{c} = k_2 \cdot \mathbf{b}$).

2) $$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ linear unabhängig.

3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ linear abhängig, denn 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

a.2)

$$\begin{array}{lcllr} \mathbf{a}^T\mathbf{e} = 0 & : & r + 2 & = 0 & (1) \\ \mathbf{a}^T\mathbf{f} = 0 & : & 1 + 2s + t & = 0 & (2) \\ \mathbf{e}^T\mathbf{f} = 0 & : & r + s & = 0 & (3) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (1) & \Rightarrow & r = -2 \\ (2) & \Rightarrow & s = 2 \\ (3) & \Rightarrow & t = -5 \end{array}$$

b)

Gauss-Algorithmus

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & 4m \\ 1 & 1 & -5 & -1 & -2m \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3I \\ -I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 2 & 4m+3 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & -2m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +II \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 4m+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m+4 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist somit lösbar für $m = -2$.

Lösung für $m = -2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right) \quad -2II$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & & - & 10x_3 & - & 3x_4 & = 9 & & \\ & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = -5 & & \\ & & & x_3 = s & , & x_4 = t & \Rightarrow & & x_1 = 9 + 10s + 3t, \\ & & & & & & & & x_2 = -5 - 5s - 2t \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & +10s & +3t \\ -5 & -5s & -2t \\ & s & \\ & & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ,s,t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

a)

a.1)

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Für $\lambda = 5$ gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & & +2x_3 & = 0 \\ & -3x_2 & & = 0 \\ 2x_1 & & -4x_3 & = 0 \end{array}$$

Weil die letzte Gleichung redundant ist, liegt kein reguläres Gleichungssystem vor.

Somit ist $\lambda = 5$ ein Eigenwert.

Berechnung des zugehörigen Eigenvektors:

Setze $x_3 = c$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

a.2)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 5\lambda + 4 - 4\right] \\ &= (2-\lambda)\,\lambda \cdot (\lambda - 5) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad \lambda_3 = 2$$

b)

Normalform

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a-1}{a+1}}_{=A} \cdot y_k + \underbrace{\frac{b}{a+1}}_{=B} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ...$$

b.1)

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^*) + y^* \quad , \ y^* = \frac{B}{1-A} \quad , \ k = 0,1,2,...$$

$$y^* = \frac{\frac{b}{a+1}}{1 - \frac{a-1}{a+1}} = \frac{b}{2}$$

$$y_k = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^k \left(y_0 - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2} \quad , \ k = 0,1,2,...$$

b.2)

$$\text{Monotonie: } A > 0$$

$$\frac{a-1}{a+1} > 0$$

i) $\underline{a > -1}$

$a - 1 > 0$

$\underline{a > 1} \qquad \Rightarrow \ a > 1$

ii) $\underline{a < -1}$

$a - 1 < 0$

$\underline{a < 1} \qquad \Rightarrow \ a < -1$

Lösung: $\quad a > 1 \ \text{ oder } \ a < -1$

b.3)

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1 \ \Rightarrow \ y^* = \frac{b}{2} = 1 \quad , \ \left|\frac{a-1}{a+1}\right| < 1$$

$$\begin{aligned} & |a-1| &<& \ |a+1| \\ \Longleftrightarrow \quad & (a-1)^2 &<& \ (a+1)^2 \\ & a^2 - 2a + 1 &<& \ a^2 + 2a + 1 \\ & 0 &<& \ 4a \\ & 0 &<& \ a \end{aligned}$$

Lösung: $\ a > 0 \ , b = 2$

Prüfung Herbst 2007

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik II: Prüfung Herbst 2007, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 29 Punkte

9 a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2(y-1)e^{y-2}$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

9 b) Die Funktion

$$f(x,y) = x^a y^b, \quad x > 0,\ y > 0,\ a > 0,\ b > 0,$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

<u>Bemerkung:</u>
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

5 c) Berechnen Sie

$$\int_a^{a+1} 2(x-a)e^{(x-a)^2}\,dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

6 d) Berechnen Sie

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \ln x\,dx.$$

Mathematik II: Prüfung Herbst 2007, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 2 21 Punkte

6

a) Die Matrix A_{2x2} ist definiert durch

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ , wobei } i = 1,2 \text{ und } j = 1,2.$$

Berechnen Sie

$$A,\ A^2,\ A^{100}.$$

5

b) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welches x $\in \mathbb{R}$ gilt $A = A^{-1}$?

5

c) Die quadratischen Matrizen A_{nxn}, B_{nxn} seien regulär und symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(AB^{-1}\right)^T \left(B^{-1}A\right)^{-1} \left(A^T B^T\right)^{-1} = (AB)^{-1}.$$

5

d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = e^{a(x_1^2 + x_2^2 - 25)} \quad , a \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie den Gradienten **grad** $f(x_1, x_2)$ an der Stelle $(x_1, x_2) = (3,4)$.

Mathematik II: Prüfung Herbst 2007, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 3 25 Punkte

8

a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ r \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad r \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$$

a.1) Für welche Werte bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

a.2) Für welche Werte $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$ paarweise orthogonal?

5

b) Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$W = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0, 3x_2 + x_4 = 0\}$$

12

c) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + (m^2 - 6)x_3 &= m - 1 \end{aligned}$$

c.1) Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

i) genau eine Lösung,

ii) unendlich viele Lösungen,

iii) keine Lösung?

c.2) Lösen Sie das Gleichungssystem für $m = 2$.

Mathematik II: Prüfung Herbst 2007, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 4 25 Punkte

9

a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

16

b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$ay_{k+1} - (a+2)y_k = 2 \qquad , k = 0,1,2,\ldots$$
$$\text{wobei} \quad a \neq 0,\ a \neq -2.$$

b.1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b.2) Für welche a $\in$ $\mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

b.3) Für welche a $\in$ $\mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

b.4) Für welche a $\in$ $\mathbb{R}$ besitzt die Differenzengleichung eine Lösung

$$y_k,\ k = 0,1,2,\ldots \quad \text{mit} \ y_9 = -2,\ y_{11} = -5\,?$$

Mathematik II: Musterlösung Herbst 2007

Prof. Dr. Heinz Müller*

30. September 2007

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlösung. Bei der Prüfung müssen Ihre Antworten alle Rechenschritte enthalten, diese mssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

a)

(1) Berechnung der benötigten Ableitungen

$$\begin{array}{lllllll} f_x(x,y) & = & 2x-2y & f_y(x,y) & = & -2x+2e^{y-2}+2\,(y-1)\cdot e^{y-2} & = & -2x+2y\cdot e^{y-2} \\ f_{xx}(x,y) & = & 2 & f_{yy}(x,y) & = & 2\cdot e^{y-2}+2y\cdot e^{y-2} & = & 2\,(1+y)\cdot e^{y-2} \\ f_{xy}(x,y) & = & = f_{yx}-2 & & & & & \end{array}$$

(2) Kandidaten für mögliche Extremalstellen

$$\begin{array}{llrll} f_x(x,y)=0 & \rightarrow & 2x-2y & =0 & (I) \\ f_y(x,y)=0 & \rightarrow & -2x+2y\cdot e^{y-2} & =0 & (II) \end{array}$$

$(I) \rightarrow x = y$

Einsetzen in (II) ergibt

$$\begin{array}{rcl} -2y+2y\cdot e^{y-2} & = & 0 \\ y\cdot\left(-1+e^{y-2}\right) & = & 0 \end{array}$$

Lösungen

$$\begin{array}{lllll} i) & y_1 & =0 & & (x_1,y_y)=(0,0) \\ ii) & e^{y_2-2}-1 & =0 & \rightarrow y_2=2 & (x_2,y_2)=(2,2) \end{array}$$

(3) Hinreichende Bedingungen

$(x_1, y_1) = (0, 0)$

$$\begin{array}{rclll} f_{xx}(0,0) & = & 2 & f_{yy}=2\cdot e^{-2} & f_{xy}=-2 \\ f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0)-(f_{xy}(0,0))^2 & = & 4\cdot e^{-2}-4<0 & \rightarrow \text{ Sattelpunkt} & \end{array}$$

$(x_2, y_2) = (2, 2)$

$$\begin{array}{rcll} f_{xx}(2,2) & = & 2>0 & f_{yy}=6>0 \\ f_{xx}(2,2)\cdot f_{yy}(2,2)-(f_{xy}(2,2))^2 & = & 12-4>0 & \rightarrow \text{ lokales Minimum} \end{array}$$

b)

(1) Lagrange - Funktion

$F(x, y, \lambda) = x^a y^b + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right)$

(2) Lagrange - Bedingungen

$$\begin{array}{lrll} F_x(x,y,\lambda)=0: & a\cdot x^{a-1}y^b+2\lambda x & =0 & (I) \\ F_y(x,y,\lambda)=0: & b\cdot x^a y^{b-1}+2\lambda y & =0 & (II) \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0: & x^2+y^2-1 & =0 & (III) \end{array}$$

Aus $(I), (II)$

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot x^{a-1} y^b}{b \cdot x^a y^{b-1}} &= \frac{-2\lambda x}{-2\lambda y} \\ \frac{ay}{bx} &= \frac{x}{y} \\ ay^2 &= bx^2 \\ y &= \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot x \qquad (x > 0, y > 0) \end{aligned}$$

Eingesetzt in (III)

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a} \cdot x^2 &= 1 \\ (a+b) \cdot x^2 &= a \qquad (x > 0) \\ x &= \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \qquad y = \sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{aligned}$$

Kandidat für Extremalstelle:

$$(x, y) = \left(\sqrt{\frac{a}{a+b}}, \sqrt{\frac{b}{a+b}} \right)$$

c)

Substitutionsmethode

$$\int_a^{a+1} 2(x-a) \cdot e^{(x-a)^2} dx = \qquad \left[e^{(x-a)^2} \right]_a^{a+1} = \qquad e^1 - e^0 = e - 1$$

d)

Partielle Integration

$$\begin{aligned} u'(x) &= \tfrac{1}{x^2} & v(x) &= \ln x \\ u(x) &= -\tfrac{1}{x} & v'(x) &= \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^N \frac{1}{x^2} \cdot \ln x dx &= \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln x \right]_1^N + \int_1^N \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{N} \ln N + \ln 1 - \left[\frac{1}{x} \right]_1^N \\ &= -\frac{1}{N} \ln N - \frac{1}{N} + 1 \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
A^{100} &= 2^{99} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b)

$A = A^{-1}$ gilt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
A \cdot A &= I \\
\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ x & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 0 & 2x+1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to x = 0
\end{aligned}$$

c)

Weil A und B symmetrisch sind, gilt

$$A^\top = A, \qquad B^\top = B$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}
\left(AB^{-1}\right)^\top \cdot \left(B^{-1}A\right)^{-1} \cdot \left(A^\top B^\top\right)^{-1} &= \left(B^{-1}\right)^\top A^\top A^{-1} \left(B^{-1}\right)^{-1} \left(B^\top\right)^{-1} \left(A^\top\right)^{-1} \\
&= \left(B^\top\right)^{-1} AA^{-1}BB^{-1}A^{-1} \\
&= B^{-1} \cdot I \cdot I \cdot A^{-1} \\
&= B^{-1}A^{-1} \\
&= (AB)^{-1}
\end{aligned}$$

d)

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax_1 \cdot e^{a\left(x_1^2+x_2^2-25\right)} \\ 2ax_2 \cdot e^{a\left(x_1^2+x_2^2-25\right)} \end{pmatrix}$$

Für $(x_1,x_2) = (3,4)$

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6a \cdot e^0 \\ 8a \cdot e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a \\ 8a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a)

a1)

$\{a, b, c\}$ Basis des $\mathbb{R}^3 \iff \{a, b, c\}$ linear unabhängig $\iff \det(a, b, c) \neq 0$

$$\iff \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & r \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\iff \quad 2r - 10 \neq 0 \to r \neq 5$$

a2)

$$\begin{array}{llllllll} c \bullet d = 0: & 10+ & 2r & & & = 0 & (1) & \Longrightarrow r = -5 \\ c \bullet e = 0: & & r+ & 5t & & = 0 & (2) & \Longrightarrow t = 1 \\ d \bullet e = 0: & 2+ & & 2t & +s & = 0 & (3) & \Longrightarrow s = -4 \end{array}$$

$$\Longrightarrow r = -5, \qquad t = 1, \qquad s = -4$$

b)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W \iff \begin{array}{llll} x_1+ & 2x_2 & & = 0 \\ & 3x_2 & +x_4 & = 0 \end{array}$$

Für $x_2 = s, \qquad x_3 = t \qquad$ gilt

$$x_1 = -2s, \qquad x_4 = -3s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ t \\ -3s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Basis von W:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

Gauss - Algorithmus

c1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & m^2-6 & m-1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2I \\ -I \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & m^2-7 & m-2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ +3II \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-4 & m-2 \end{array}\right)$$

i) Genau eine Lösung: $rg\,(A) = rg\,(A;\mathbf{b}) = 3$:

$$\begin{aligned} m^2 - 4 &\neq 0 \\ (m-2)\,(m+2) &\neq 0 \Longrightarrow m \neq 2, m \neq -2 \end{aligned}$$

ii) Unendlich viele Lösungen: $rg\,(A) = rg\,(A;\mathbf{b}) = 2$:

$$\left.\begin{array}{ll} rg\,(A) = 2 & \Longrightarrow m = 2 \quad \text{oder } m = -2 \\ rg\,(A;\mathbf{b}) = 2 & \Longrightarrow m = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow m = 2$$

iii) Keine Lösung: $rg\,(A) = 2, \qquad rg\,(A;\mathbf{b}) = 3$:

$$\left.\begin{array}{ll} rg\,(A) = 2 & \Longrightarrow m = 2 \quad \text{oder } m = -2 \\ rg\,(A;\mathbf{b}) = 3 & \Longrightarrow m \neq 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow m = -2$$

c2)

$m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rrl} x_1+ & & x_3 \;= 1 \\ & x_2+ & x_3 \;= 0 \end{array}$$

Setze $x_3 = s \Longrightarrow x_1 = 1 - s, \qquad x_2 = -s$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad s \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

a)

Eigenwerte

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} (2-\lambda)(4-\lambda)-3 &= 0 \\ \lambda^2-6\lambda+8-3 &= 0 \\ \lambda^2-6\lambda+5 &= 0 \\ (\lambda-5)(\lambda-1) &= 0 \\ \lambda_1 &= 1, \qquad \lambda_2 = 5 \end{aligned}$$

Eigenvektoren

$$(A-\lambda I)\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$\lambda_1 = 1:$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x_1+3x_2 &= 0 \Longrightarrow \mathbf{x}^{(1)} = t_1\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 5:$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrl} -3x_1+ & 3x_2 & =0 \\ x_1- & x_2 & =0 \end{array} \Longrightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t_2\in\mathbb{R}$$

b)

Normalform

$$y_{k+1} = \underbrace{\left(1+\frac{2}{a}\right)}_{=A} y_k + \underbrace{\frac{2}{a}}_{=B}$$

b1)

Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} y^* &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{2}{a}}{-\frac{2}{a}} = -1 \\ y_k &= A^k \cdot (y_0 - y^*) + y^* \\ &= \left(1 + \frac{2}{a}\right)^k (y_0 + 1) - 1 \end{aligned}$$

b2)

Monotonie: $A > 0 \Longrightarrow 1 + \frac{2}{a} > 0$

$$\begin{aligned} i) \quad a &> 0: \quad a + 2 > 0 \Longrightarrow a > 0 \\ ii) \quad a &< 0: \quad a + 2 < 0 \Longrightarrow a < -2 \\ a &> 0 \text{ oder } a < -2 \end{aligned}$$

b3)

Konvergenz: $|A| < 1 \Longleftrightarrow A^2 < 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2}{a}\right)^2 &< 1 \\ (a+2)^2 &< a^2 \\ a^2 + 4a + 4 &< a^2 \\ 4a &< -4 \Longrightarrow a < -1 \end{aligned}$$

b4)

$$\begin{aligned} y_9 &= \left(1 + \frac{2}{a}\right)^9 \cdot (y_0 + 1) - 1 = -2 \qquad (I) \\ y_{11} &= \left(1 + \frac{2}{a}\right)^{11} \cdot (y_0 + 1) - 1 = -5 \qquad (II) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{a}\right)^9 \cdot (y_0 + 1) &= -1 \qquad (I') \\ \left(1 + \frac{2}{a}\right)^{11} \cdot (y_0 + 1) &= -4 \qquad (II') \end{aligned}$$

$(II') : (I')$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 &= 4 \\ 1 + \frac{2}{a} &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \frac{2}{a_1} = 1 \Longrightarrow a_1 = 2 \\ &\Longrightarrow \frac{2}{a_2} = -3 \Longrightarrow a_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Prüfung Sommer 2008

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik II: Prüfung Sommer 2008, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 **29 Punkte**

11 a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x + 2y + \frac{a^4}{xy^2} \quad , \; x \neq 0, y \neq 0, a > 0$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

7 b) Die Funktion

$$f(x,y) = 6x + 4y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 0.6\ln x + 0.4\ln y - a = 0 \quad , x > 0, y > 0, \; a \in \mathbb{R}$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

5 c) Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} dx.$$

6 d) Berechnen Sie

$$\int_1^e 3x^2 \ln x dx.$$

Aufgabe 2 20 Punkte

7 a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

a.1) Berechnen Sie $A^T B$.

a.2) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist AB^T symmetrisch?

4 b) Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ seien regulär. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(A^T B^{-1} A\right)^{-1} = A^{-1} B \left(A^{-1}\right)^T.$$

9 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \quad , x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

c.1) Berechnen Sie $\mathbf{grad}\ f\left(x_1, x_2\right)$.

c.2) In welchem Punkt der Niveaulinie $f\left(x_1, x_2\right) = 21$ erfolgt die stärkste Funktionszunahme in der Richtung des Vektors $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 3 27 Punkte

14

a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a.1) Untersuchen Sie, welche der folgenden Vektorsysteme eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}, \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}, \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}, \{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}.$$

a.2) Ermitteln Sie einen Vektor der Länge 1, welcher zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal ist.

5

b) Für welchen Wert $r \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & r & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

singulär?

8

c) Gegeben ist die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + \quad cx_2 &= 2 \\ 2x_1 + \left(c^2 - 3\right)x_2 &= c + 5 \end{aligned}$$

Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

i) genau eine Lösung,
ii) unendlich viele Lösungen,
iii) keine Lösung?

Aufgabe 4 24 Punkte

7 a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von A .

Bemerkung
Die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren wird nicht verlangt.

17 b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(c-2)y_{k+1} + cy_k = 4(c-1) \quad , k = 0,1,\ldots \text{ , wobei } c \neq 2, c \neq 1, c \neq 0.$$

b.1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b.2) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung oszillierend?
b.3) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?
b.4) Für welche $c \in \mathbb{R}$ besitzt die Differenzengleichung eine Lösung y_k , $k = 0,1,\ldots$ mit $y_3 = 3, y_7 = 18$?

Mathematatik II: Musterlösung Sommer 2008

Prof. Dr. Heinz Müller*

10. Juli 2008

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlösung. Bei der Prüfung müssen Ihre Antworten alle Rechenschritte enthalten, diese mssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

a) **Partielle Ableitungen**

$$f_x(x,y) = 1 - \frac{a^4}{x^2y^2}, \qquad f_y(x,y) = 2 - 2 \cdot \frac{a^4}{xy^3}$$

$$f_{xx}(x,y) = 2 \cdot \frac{a^4}{x^3y^2}, \qquad f_{yy}(x,y) = 6 \cdot \frac{a^4}{xy^4}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2 \cdot \frac{a^4}{x^2y^3}$$

Kandidaten für lokale Extrema

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 0: \qquad 1 - \frac{a^4}{x^2y^2} = 0 \qquad (1) \\ f_y(x,y) &= 0: \qquad 2 - 2 \cdot \frac{a^4}{xy^3} = 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)\,,(2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{a^4}{x^2y^2} = \frac{a^4}{xy^3} \\ &\Longrightarrow \quad x^2y^2 = xy^3 \qquad (x \neq 0, y \neq 0) \\ &\Longrightarrow \quad y = x \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a^4}{x^4} \\ x^4 &= a^4 \\ x &= \pm a, \\ (x_1, y_1) &= (a,a)\,, \qquad (x_2,y_2) = (-a,-a) \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen

$(x_1, y_1) = (a,a):$

$$f_{xx}(a,a) = \frac{2}{a}, \qquad f_{yy}(a,a) = \frac{6}{a}, \qquad f_{xy}(a,a) = \frac{2}{a}$$

$$f_{xx}(a,a) > 0, \qquad f_{yy}(a,a) > 0, \qquad f_{xx}(a,a) \cdot f_{yy}(a,a) - (f_{xy}(a,a))^2 = \frac{12}{a^2} - \frac{4}{a^2} > 0$$

$$\Longrightarrow \text{lokales Minimum}$$

$(x_2, y_2) = (-a,-a):$

$$f_{xx}(-a,-a) = -\frac{2}{a}, \qquad f_{yy}(-a,-a) = -\frac{6}{a}, \qquad f_{xy}(-a,-a) = -\frac{2}{a}$$

$$f_{xx}(-a,-a)<0, \qquad f_{yy}(-a,-a)<0, \qquad f_{xx}(-a,-a)\cdot f_{yy}(-a,-a)-(f_{xy}(-a,-a))^2=\frac{12}{a^2}-\frac{4}{a^2}>0$$

$$\Longrightarrow \text{lokales Maximum}$$

b) Lagrange - Funktion

$$\begin{aligned}F(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda\cdot\varphi(x,y)\\ &= 6x+4y+\lambda(0.6\cdot\ln x+0.4\cdot\ln y-a)\end{aligned}$$

Lagrange - Bedingungen

$$\begin{aligned}F_x(x,y,\lambda) &= 0: \quad 6+0.6\lambda\cdot\frac{1}{x}=0 \qquad (1)\\ F_y(x,y,\lambda) &= 0: \quad 4+0.4\lambda\cdot\frac{1}{y}=0 \qquad (2)\\ F_\lambda(x,y,\lambda) &= 0: \quad 0.6\ln x+0.4\ln y-a=0 \qquad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1),(2) &\Longrightarrow \lambda\cdot\frac{1}{x}=\lambda\cdot\frac{1}{y} \qquad (\lambda\neq 0, x>0, y>0)\\ &\Longrightarrow x=y\end{aligned}$$

Einsetzen in (3) ergibt:

$$\begin{aligned}\ln x &= a\\ x^* &= e^a\end{aligned}$$

Mögliche Extremalstelle: $(x^*,y^*)=(e^a,e^a)$

c) Substitutionsmethode

$$\begin{aligned}\int_0^N \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx &= -\frac{1}{1+e^x}\Big|_0^N=-\frac{1}{1+e^N}-\left(-\frac{1}{2}\right)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\\ \int_0^\infty \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

d) Partielle Integration mit

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2, \qquad f(x)=x^3\\ g(x) &= \ln x, \qquad g'(x)=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e 3x^2 \cdot \ln x \cdot dx &= x^3 \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\
&= e^3 \cdot \ln e - \ln 1 - \int_1^e x^2 \cdot dx \\
&= e^3 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^e \\
&= e^3 - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot e^3 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

a.1)

$$A^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ c & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5c & -5 & c \\ 3 & 0 & 3c \\ -c & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a.2)

$$AB^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c-3 \\ 5-c & 5c \end{pmatrix}$$

$AB^\top$ ist symmetrisch, falls

$$\begin{aligned} c-3 &= 5-c \\ 2c &= 8 \\ c &= 4 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(A^\top B^{-1} A\right)^{-1} &= A^{-1}\left(B^{-1}\right)^{-1}\left(A^\top\right)^{-1} \\ &= A^{-1} B \left(A^{-1}\right)^\top \end{aligned}$$

c)

c.1)

$$\mathbf{grad} f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

c.2) Stärkste Funktionszunahme in Richtung $\mathbf{n}$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

Punkt liegt auf Niveaulinie

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 21 \qquad (2)$$

$$(1) \Longrightarrow 6x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 4x_2$$

$$4x_1 = x_2$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\begin{aligned} x_1^2 + 4x_1^2 + 16x_1^2 &= 21 \\ 21x_1^2 &= 21 \\ x_1^2 &= 1 \qquad (x_1 \geq 0) \\ x_1 &= 1, \qquad x_2 = 4 \\ (x_1, x_2) &= (1, 4) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

a.1)

i)

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 8 \\ -3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 24 + 36 - 36 - 24 = 0$$

$$\Longrightarrow \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \text{ linear abhängig} \Longrightarrow \text{keine Basis des } \mathbb{R}^3$$

Lösungsvariante:

$$\mathbf{c} = 3\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

ii)

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 12 - 12 = -4 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}$ sind drei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

iii) 4 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig und bilden somit keine Basis.

iv)

$$\det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -4 & 8 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 24 + 12 = 12 \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$ sind drei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und bilden somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

a.2)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ orthogonal zu } \mathbf{a}, \mathbf{b}. \\
\mathbf{a}^\top \mathbf{x} &= 0: \quad x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \qquad (1) \\
\mathbf{b}^\top \mathbf{x} &= 0: \quad -4x_2 + 3x_3 = 0 \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) + (2) \quad &: \quad x_1 = 0 \\
(2) \quad &: \quad -4x_2 + 3x_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\mathbf{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= 1: \\
\|\mathbf{x}\|^2 &= t^2 \cdot (9+16) = 1 \\
t^2 &= \frac{1}{25} \Longrightarrow t = \pm\frac{1}{5} \\
\mathbf{x}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \\ -0.8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Der Gauss-Algorithmus verändert den Rang einer Matrix nicht.

$$\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & r & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -r \cdot I \end{array} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1-r & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} +III \\ +2 \cdot III \\ \\ +(1-r) \cdot III \end{array} \\
&\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C ist singulär, falls

$$\begin{aligned}
6 - 3r &= 0 \\
r &= 2
\end{aligned}$$

c) Anwendung des Gauss-Algorithmus

$$\begin{aligned}
(A, \mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 2 \\ 2 & c^2-3 & c+5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \cdot I \end{array} \\
&\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & 2 \\ 0 & c^2-2c-3 & c+1 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\text{A regulär} \quad &\Leftrightarrow \quad c^2 - 2c - 3 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (c-3)(c+1) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad c \neq 3, \qquad c \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \quad \text{genau eine Lösung.} \\
\text{A singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad c = 3 \text{ oder } c = -1
\end{aligned}$$

ii)

$$c = -1 : rg\,(A) = rg\,(A, \mathbf{b}) = 1 : \text{ unendlich viele Lösungen}$$

iii)

$$c = 3 : rg\,(A) < rg\,(A, \mathbf{b}) : \text{ keine Lösung}$$

Aufgabe 4

a) Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= 0\\
\begin{vmatrix} 8-\lambda & 0 & -4\\ 0 & 5-\lambda & 0\\ -4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0\\
(8-\lambda)(5-\lambda)(2-\lambda) - 16\cdot(5-\lambda) &= 0\\
(5-\lambda)\left[(8-\lambda)(2-\lambda)-16\right] &= 0\\
(5-\lambda)\left[\lambda^2 - 10\lambda + 16 - 16\right] &= 0\\
(5-\lambda)\left(\lambda^2 - 10\lambda\right) &= 0\\
(5-\lambda)\,\lambda\,(\lambda - 10) &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Eigenwerte von A:} \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 5, \qquad \lambda_3 = 10$$

b) Normalform

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= -\frac{c}{c-2}\cdot y_k + \frac{4(c-1)}{c-2}\\
&\Longrightarrow \quad A = -\frac{c}{c-2}, \qquad B = \frac{4(c-1)}{c-2}
\end{aligned}$$

b.1)

$$\begin{aligned}
y^* &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{4(c-1)}{c-2}}{1+\frac{c}{c-2}}\\
&= \frac{4(c-1)}{c-2+c} = \frac{4c-4}{2c-2} = 2
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
y_k &= A^k\left(y_0 - y^*\right) + y^*, \qquad k = 0,1,2,...\\
y_k &= \left(\frac{c}{2-c}\right)^k \cdot (y_0 - 2) + 2, \qquad k = 0,1,2,...
\end{aligned}$$

b.2) Allgemeine Lösung oszillierend:

$$A < 0 \Longleftrightarrow \frac{c}{2-c} < 0 \qquad | \cdot (2-c)$$

Fall i) c ¡ 2: $c < 0 \Longrightarrow c < 0$

Fall ii) c ¿ 2: $c > 0 \Longrightarrow c > 2$

$$\Longrightarrow c < 0 \text{ oder } c > 2$$

b.3) Allgemeine Lösung konvergent:

$$\begin{aligned} |A| &< 1 \\ &\Longleftrightarrow A^2 < 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{c^2}{(2-c)^2} < 1 \\ c^2 &< (2-c)^2 \\ c^2 &< 4 - 4c + c^2 \\ 4c &< 4 \\ c &< 1 \end{aligned}$$

b.4)

$$\begin{aligned} y_3 = 3: \quad 3 &= \left(\tfrac{c}{2-c}\right)^3 \cdot (y_0 - 2) + 2 \quad (1) \\ y_7 = 18: \quad 18 &= \left(\tfrac{c}{2-c}\right)^7 \cdot (y_0 - 2) + 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\tfrac{c}{2-c}\right)^3 \cdot (y_0 - 2) \quad (1') \\ 16 &= \left(\tfrac{c}{2-c}\right)^7 \cdot (y_0 - 2) \quad (2') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1'), (2') &\Longrightarrow \left(\frac{c}{2-c}\right)^4 = 16 \\ \frac{c}{2-c} &= \pm 2 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} \frac{c}{2-c} = 2 \Longrightarrow \quad c &= 4 - 2c \\ 3c &= 4 \\ c &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

ii)

$$\frac{c}{2-c} = -2 \Longrightarrow c = -4 + 2c \Longrightarrow c = 4$$

$$c_1 = \frac{4}{3}, \qquad c_2 = 4$$

Prüfung Sommer 2009

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik II: Prüfung Sommer 2009, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 29 Punkte

11 a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = y^2 - 2ye^x + 6e^x - 4x$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

8 b) Die Funktion

$$f(x,y) = x + \ln y \quad , y > 0$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf Kandidaten für Extremalstellen.

Bemerkung
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

6 c) Berechnen Sie

$$\int_{-2}^{1} 3(1+|x|)^2 dx .$$

4 d) Berechnen Sie

$$\int_{0}^{\infty} 4x^3 e^{-x^4} dx .$$

Aufgabe 2 **20 Punkte**

9 a) Gegeben sind die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}0 & m\\ 5 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}m & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

a.1) Berechnen Sie AB.

a.2) Für welche $m\in\mathbb{R}$ ist AB singulär?

a.3) Berechnen Sie $(AB)^{-1}$ für $m=-1$.

4 b) Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ seien regulär. Zudem sei $A_{n\times n}$ symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$\left(AB^{-1}\right)^{T}(BA)^{-1}\left(A^{T}B^{-1}\right)^{-1}=\left(AB^{T}\right)^{-1}.$$

7 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=ax^{2}+(a-6)\ln(y-1).$$

c.1) Berechnen Sie den Gradienten von $f(x,y)$ im Punkt $(x_0,y_0)=(1,2)$.

c.2) Bestimmen Sie $a\in\mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x_0,y_0)=(1,2)$ durch den Vektor $\mathbf{n}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ gegeben ist.

Aufgabe 3 **28 Punkte**

5 a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix},\mathbf{d}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Klären Sie ab, bei welchen Vektorsystemen $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\},\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\},\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ lineare Unabhängigkeit, respektive lineare Abhängigkeit vorliegt.

5 b) Für welche Werte $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}r\\1\\2\end{pmatrix},\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0\\2\\s\end{pmatrix},\mathbf{w}=\begin{pmatrix}-5\\t\\2\end{pmatrix}$$

paarweise orthogonal?

5 c) Für welche Werte $r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2&3\\2&1&r&7\\3&2&4&s\end{pmatrix}$$

den Rang 2?

13 d) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1+x_2\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad&=1\\2x_1+x_2+x_3+\quad x_4\quad\quad&=0\\x_1+\quad\quad x_3+\left(a^2-a-1\right)x_4&=a\end{aligned}$$

d.1) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem mindestens eine Lösung?

d.2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems für $a=1$.

Aufgabe 4 23 Punkte

11 a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2+m & 1-m \\ 1+m & 2-m \end{pmatrix} \quad , m \in \mathbb{R}$$

12 b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = 6 \quad , k = 0,1,2,\ldots \text{ , wobei } a \neq 0,\ a \neq 3.$$

b.1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

b.2) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung oszillierend?

b.3) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Mathematik II: Musterlösung Sommer 2009

Prof. Dr. Heinz Müller*

3. August 2009

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlösung. Bei der Prüfung müssen Ihre Antworten alle Rechenschritte enthalten, diese mssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

Aufgabe 1

a) Partielle Ableitungen:

$f_x(x,y) = -2ye^x + 6e^x - 4 \quad , \quad f_y(x,y) = 2y - 2e^x$

$f_{xx}(x,y) = -2ye^x + 6e^x \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2e^x$

Kandidaten für lokale Extrema:

$$\begin{array}{rcrl}
f_x(x,y) = 0 & : & -2ye^x + 6e^x - 4 & = 0 \quad (1) \\
f_y(x,y) = 0 & : & 2y - 2e^x & = 0 \quad (2) \\
\hline
\end{array}$$

$(2) \Rightarrow e^x = y$

Einsetzen in (1) ergibt:

$$\begin{aligned}
-2y^2 + 6y - 4 &= 0 \\
y^2 - 3y + 2 &= 0 \\
(y-2)(y-1) &= 0
\end{aligned}$$

$y_1 = 1$

$y_2 = 2$

$(x_1, y_1) = (0, 1)$

$(x_2, y_2) = (\ln 2, 2)$

Hinreichende Bedingungen:

$\underline{(x_1, y_1) = (0, 1)}$

$f_{xx}(0,1) = 4, \quad f_{yy}(0,1) = 2, \quad f_{xy}(0,1) = -2$

$f_{xx}(0,1) > 0, \quad f_{yy}(0,1) > 0$

$f_{xx}(0,1) \cdot f_{yy}(0,1) - (f_{xy}(0,1))^2 = 8 - (-2)^2 = 4 > 0$

lokales Minimum

$\underline{(x_2, y_2) = (\ln 2, 2)}$

$f_{xx}(\ln 2, 2) = 4, \quad f_{yy}(\ln 2, 2) = 2, \quad f_{xy}(\ln 2, 2) = -4$

$f_{xx}(\ln 2, 2) \cdot f_{yy}(\ln 2, 2) - (f_{xy}(\ln 2, 2))^2 = 8 - (-4)^2 < 0$

Sattelpunkt

b) Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda\varphi(x,y) \\ &= x+\ln y+\lambda(x^2+y^2-20) \quad ,y>0 \end{aligned}$$

Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda)=0 &: \quad 1+2\lambda x &= 0 \quad (1) \\ F_y(x,y,\lambda)=0 &: \quad \tfrac{1}{y}+2\lambda y &= 0 \quad (2) \\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0 &: \quad x^2+y^2-20 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1),(2) \Rightarrow y^2 = x$

Eingesetzt in (3)

$$\begin{aligned} x^2+x-20 &= 0 \\ (x-4)(x+5) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 4$

Die Lösung $x_2 = -5$ scheidet wegen $x = y^2 \geq 0$ aus.

$x_1 = 4 \Rightarrow y_1 = 2$ (wegen $y > 0$)

Kandidat für Extremalstelle:

$$(x_1, y_1) = (4, 2)$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{1} 3(1+|x|)^2dx &= \int_{-2}^{0} 3(1+|x|)^2dx + \int_0^1 3(1+|x|)^2dx \\ &= \int_{-2}^{0} 3(1-x)^2dx + \int_0^1 3(1+x)^2dx \\ &= -(1-x)^3\Big|_{-2}^{0} + (1+x)^3\Big|_0^1 \\ &= -(1-3^3)+2^3-1 \\ &= 26+7=33 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int_0^N 4x^3e^{-x^4}dx &= -e^{-x^4}\Big|_0^N \\ &= -e^{-N^4}-(-1) \overset{n\to\infty}{\to} 1 \\ \int_0^\infty 4x^3e^{-x^4}dx &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a$_1$)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 0 & m \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2m & m \\ 5m-2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a$_2$)

$$\begin{aligned} AB \quad \text{singulär} \ \Leftrightarrow \det(AB) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -12m - m(5m-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -5m^2 - 10m &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad m^2 + 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad m(m+2) &= 0 \end{aligned}$$

AB ist singulär für $m_1 = 0$ und für $m_2 = -2$.

Variante:

$$\begin{aligned} \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad -5m \cdot (m+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow m_1 = 0, m_2 = -2 & \end{aligned}$$

a$_3$) $m = -1$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = 12 - 7 = 5$$

Gemäss Formelsammlung

$$(AB)^{-1} = \tfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.2 \\ 1.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b) A symmetrisch$\Leftrightarrow A^T = A$

$(AB^{-1})^T (BA)^{-1} (A^T B^{-1})^{-1}$

$$= (B^{-1})^T \underbrace{A^T}_{=A} A^{-1} B^{-1} \underbrace{(B^{-1})^{-1}}_{=B} \underbrace{(A^T)^{-1}}_{=A^{-1}}$$

$$= (B^{-1})^T I \; I \; A^{-1}$$

$$= (B^T)^{-1} A^{-1} = (AB^T)^{-1}$$

c$_1$)

$$\textbf{grad } f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ax \\ \frac{a-6}{y-1} \end{pmatrix} \overset{(x,y)=(1,2)}{=} \begin{pmatrix} 2a \\ a-6 \end{pmatrix}$$

c$_2$) Richtung stärkste Funktionszunahme:

$$\textbf{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2a \\ a-6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; , \; \lambda > 0$$

$$\tfrac{2a}{a-6} = \tfrac{1}{-1}$$

$$-2a = a - 6$$

$$6 = 3a \Rightarrow a = 2$$

$$\textbf{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a_1) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 4 - 12 = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ linear abhängig

Variante: $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

a_2) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 12 - 6 = 12 \neq 0$$

$\Rightarrow \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}$ linear unabhängig

a_3) $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}$

4 Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

Variante: Bereits $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ sind linear abhängig.

b) $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ paarweise orthogonal $\Leftrightarrow \mathbf{u}^T\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{u}^T\mathbf{w} = 0,\ \mathbf{v}^T\mathbf{w} = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T\mathbf{v} &= 2 + 2s &= 0 \quad (1) \\ \mathbf{u}^T\mathbf{w} &= 4 - 5r + t &= 0 \quad (2) \\ \mathbf{v}^T\mathbf{w} &= 2s + 2t &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow s = -1$

$(3) \Rightarrow t = -s = 1$

$(2) \Rightarrow 5r = 4 + t = 5 \Rightarrow r = 1$

$$\underline{r = 1, s = -1, t = 1}$$

c) Gauss-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & r & 7 \\ 3 & 2 & 4 & s \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ -2\,\mathrm{I} \\ -3\,\mathrm{I} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & r-4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & s-9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ -2\,\mathrm{II} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & r-4 & 1 \\ 0 & 0 & 6-2r & s-11 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 2 \Leftrightarrow \underline{r = 3, s = 11}$

d) Gauss-Algorithmus

$$(A, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a^2-a-1 & a \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -2\,\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & a^2-a-1 & a-1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{a^2-a-2}_{(a-2)(a+1)} & a+1 \end{array}\right)$$

d$_1$)

$rg(A) \geq 2$

Keine Lösung, falls

$$rg(A) = 2, \qquad rg(A, \mathbf{b}) = 3$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0, \qquad a+1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Folglich besitzt das Gleichungssystem mindestens eine Lösung, falls:

$$\underline{a \neq 2}$$

d$_2$) $\underline{a = 1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +\frac{1}{2}\ \text{III} \\ :(-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ & - & x_2 & + & x_3 & & & = & -1 \\ & & & & & + & x_4 & = & -1 \end{array}$$

Freie Variable $x_2 = t$

$\Rightarrow x_1 = 1 - t, \qquad x_3 = -1 + t, \qquad x_4 = -1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ -1+t \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

a) Eigenwerte

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\begin{vmatrix} 2+m-\lambda & 1-m \\ 1+m & 2-m-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}
[(2-\lambda)+m][(2-\lambda)-m]-(1+m)(1-m) &= 0\\
(2-\lambda)^2-m^2-(1-m^2) &= 0\\
4-4\lambda+\lambda^2-1 &= 0\\
\lambda^2-4\lambda+3 &= 0\\
(\lambda-3)(\lambda-1) &= 0
\end{aligned}$$

$$\underline{\lambda_1=1,\lambda_2=3}$$

Eigenvektoren:

$$(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$\underline{\lambda_1=1}$

$$\begin{aligned}
(1+m)x_1+(1-m)x_2 &= 0 \quad (1)\\
(1+m)x_1+(1-m)x_2 &= 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} m-1 \\ m+1 \end{pmatrix}, \qquad c_1\in\mathbb{R}$$

$\underline{\lambda_2=3}$

$$\begin{aligned}
(m-1)x_1+(1-m)x_2 &= 0 \quad (1)\\
(m+1)x_1-(m+1)x_2 &= 0 \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_2\in\mathbb{R}$$

b) Normalform:

$$y_{k+1}=\underbrace{\frac{a-3}{a}}_{A}y_k+\underbrace{\frac{6}{a}}_{B}, \qquad k=0,1,2,...$$

b$_1$) Allgemeine Lösung

$$y^*=\tfrac{B}{1-A}=\tfrac{\frac{6}{a}}{1-\frac{a-3}{a}}=\tfrac{6}{a-(a-3)}=\tfrac{6}{3}=2$$

$y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^*$

$= (\frac{a-3}{a})^k(y_0 - 2) + 2, \qquad k = 0, 1, 2, ...$

b$_2$) Lösung oszillierend: $A < 0$

$\Leftrightarrow \frac{a-3}{a} < 0$

i) $a > 0:$ $\quad a - 3 < 0$

$a < 3 \qquad \Rightarrow \underline{0 < a < 3}$

ii) $a < 0:$ $\quad a - 3 > 0$

$a > 3 \qquad \Rightarrow \phi$

Lösung: $\underline{0 < a < 3}$

b$_3$)

$$\begin{array}{lrcr} \text{Lösung konvergent:} & |A| & < & 1 \\ \Leftrightarrow & A^2 & < & 1 \\ \Leftrightarrow & (\frac{a-3}{a})^2 & < & 1 \\ \Leftrightarrow & (a-3)^2 & < & a^2 \\ \Leftrightarrow & a^2 - 6a + 9 & < & a^2 \\ \Leftrightarrow & 9 & < & 6a \\ \Leftrightarrow & 1.5 & < & a \end{array}$$

Prüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematatik II

Prüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

28. Juni 2010

Aufgabe 1 (30 Punkte)

(a) (12 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2\,y + \frac{3}{2}\,\ln(x) + \frac{1}{2}\,x\,y^2, \quad x > 0,\; y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) **(7 Punkte)** Die Funktion

$$f(x,y) = 2\,e^x + 4\,e^y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 4\,x + 8\,y - 12 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^2 x^3 \, ln(x) \, dx.$$

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\,(ln(x))^n}\,dx, \quad \text{wobei} \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Aufgabe 2 (21 Punkte)

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (2 Punkte). Berechnen Sie $A^T B$.

Aufgabe 2

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $A\,B^T$ regulär?

Aufgabe 2

(b) (5 Punkte). Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ seien regulär. $B_{n\times n}$ ist auch symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$B^{-1}\,(A^T\,B)^T\,(B\,A)^T\,B^{-1} = A\,A^T.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 + x_1\,\ln(x_2) + e^{a\,x_1}, \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

(c1) (4 Punkte). Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2).$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3\,x_1^2 + x_1\,\ln(x_2) + e^{a\,x_1}, \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0,\; a \in \mathbb{R}.$$

(c2) (6 Punkte). Zeigen Sie, dass ein Punkt $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ existiert, so dass der Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal zur Tangente an die Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$ in $\hat{\mathbf{x}}$ ist.

Aufgabe 3 (25 Punkten)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(4 Punkten).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal?

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte). Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2\,x_4 = 0,\; 3\,x_1 + x_2 = 0\}.$$

Aufgabe 3

(c) (12 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & m \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 1 \\ m\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (30 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a1) (6 Punkte). Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 4

(a1)

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a2) (5 Punkte). Zeigen Sie, dass für $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, -1)^T$

$$A^{100}\,\hat{\mathbf{x}} = 2^{100}\,\hat{\mathbf{x}}$$

gilt.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a^2\, y_{k+1} - (a+2)\, y_k = a+1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\; a \neq 2$$

(b1) (4 Punkte). Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a^2\, y_{k+1} - (a+2)\, y_k = a + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\ a \neq 2$$

(b2) (3 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a^2\, y_{k+1} - (a+2)\, y_k = a + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\, a \neq 2$$

(b3) (8 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a^2\, y_{k+1} - (a+2)\, y_k = a+1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\, a \neq 2$$

(b4) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1.$$

Mathematatik II

Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

28. Juni 2010

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen für Maxima, Minima und Sattelpunkte. Dazu berechnen wir die partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x\,y + \frac{3}{2\,x} + \frac{1}{2}\,y^2 \\ f_y(x,y) &= x^2 + x\,y \\ f_{xx}(x,y) &= 2\,y - \frac{3}{2\,x^2} \\ f_{xy} &= 2\,x + y \\ f_{yy} &= x \end{aligned}$$

<u>Notwendige Bedingungen:</u>

$$f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x\,y + \frac{3}{2\,x} + \frac{1}{2}\,y^2 = 0 \tag{I}$$

$$f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x\,y = 0 \tag{II}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{II}) \;&\Rightarrow\; x\,(x+y) = 0 \\ &\Rightarrow\; x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -y. \end{aligned}$$

Die Lösung $x = 0$ ist ausgeschlossen wegen $x > 0$. Somit folgt

$$x = -y \tag{III}$$

und

$$\begin{aligned} (\mathrm{III}) \text{ in } (\mathrm{I}) \quad &\Rightarrow \quad -2y^2 - \frac{3}{2y} + \frac{1}{2}y^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y^3 = -1 \\ &\Rightarrow \quad y = -1 \\ &\overset{(\mathrm{III})}{\Rightarrow} \quad x = 1 \end{aligned}$$

<u>Hinreichende Bedingungen:</u>

$$\begin{aligned} f_{xx}(1,-1) &= 2\,(-1) - \frac{3}{2\cdot 1^2} = -2 - \frac{3}{2} < 0, \quad \text{und} \\ f_{yy}(1,-1) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

und somit ist $(1, -1)$ ein Sattelpunkt.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Langrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$F(x, y, \lambda) \quad = \quad f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y) = 2\, e^x + 4\, e^y + \lambda\, (4x + 8y - 12).$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned} F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\, e^x + 4\, \lambda = 0 && \text{(I)} \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4\, e^y + 8\, \lambda = 0 && \text{(II)} \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4x + 8y - 12 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,(\mathrm{I}) \; - \; (\mathrm{II}) \quad &\Rightarrow \quad 2\,(2e^x + 4\,\lambda) - (4e^y + 8\,\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow \quad 4\,(e^x - e^y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad e^x = e^y \\ &\Rightarrow \quad x = y. && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\mathrm{IV}) \text{ in } (\mathrm{III}) \quad &\Rightarrow \quad 4\,x + 8\,x - 12 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 12\,x - 12 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = 1 \\ &\overset{(\mathrm{IV})}{\Rightarrow} \quad (x, y) = (1, 1) \end{aligned}$$

Variante Substitutionsmethode

Man löst die Nebenbedingung nach x auf:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4\,x + 8\,y - 12 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x = -2\,y + 3. && \text{(V)} \end{aligned}$$

Man substituiert x mit $-2\,y + 3$ in der Zielfunktion f. Es folgt:

$$f(x, y) \quad = \quad f(-2\,y + 3, y) = 2\, e^{-2\,y+3} + 4\, e^y = g(y).$$

Die erste Ableitung von g ist:

$$g'(y) = -4\,e^{-2\,y+3} + 4\,e^{y} = 4\,e^{y}\,(1 - e^{-3\,y+3}).$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} g'(y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4\,e^{y}\,(1 - e^{-3\,y+3}) = 0 \\ &\overset{4\,e^{y}>0}{\Rightarrow} \quad 1 - e^{-3\,y+3} = 0 \\ &\Rightarrow \quad e^{0} = 1 = e^{-3\,y+3} \\ &\Rightarrow \quad 0 = -3\,y + 3 \\ &\Rightarrow \quad y = 1 \\ &\overset{\text{(V)}}{\Rightarrow} \quad x = -2 \cdot 1 + 3 = 1. \end{aligned}$$

(c) Partielle Integration:

$$\int_1^2 \underbrace{x^3}_{u'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx$$

$$\begin{aligned} u'(x) = x^3 \quad &\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{4}x^4 \\ v(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln(x)\,dx \quad &= \quad \underbrace{\frac{1}{4}\,x^4}_{u(x)}\,\underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{4}\,x^4}_{u(x)}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx \\ &= \quad \frac{1}{4}\,x^4\,\ln(x) - \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,x^4 + c \\ &= \quad \frac{1}{4}\,x^4\,\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + c. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3 \,\ln(x)\, dx &= \frac{1}{4}\, x^4 \left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right)\Big|_1^2 \\
&= 4\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{4}\right) \\
&= 4\,\ln(2) - \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

(d) Substitutionsmethode:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_e^N \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\, dx.$$

Man setzt

$$y = \ln x.$$

Es folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_e^N \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\, dx &= \int_1^{\ln(N)} \frac{1}{y^n}\, dy \\
&= \frac{1}{(1-n)\, y^{n-1}}\Big|_1^{\ln(N)} \\
&= \frac{1}{1-n}\, \frac{1}{(\ln(N))^{n-1}} - \frac{1}{1-n}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\, dx &= \lim_{N\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{1-n}\, \frac{1}{(\ln(N))^{n-1}}}_{\to 0 \text{ wenn } N\to\infty} - \frac{1}{1-n}\right) \\
&= -\frac{1}{1-n} \\
&= \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4a & -4+4a & a \end{pmatrix}.$$

(a2)

$$A B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -1 & 4+a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB^T \text{ regulär} &\iff \det(AB^T) \neq 0 \\ &\iff a\,(4+a) - 4\,(-1) \neq 0 \\ &\iff a^2 + 4\,a + 4 \neq 0 \\ &\iff (a+2)^2 \neq 0 \\ &\iff a \neq -2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B^{-1}\,(A^T\,B)^T\,(B\,A)^T\,B^{-1} &= B^{-1}\,B^T\,(A^T)^T\,A^T\,B^T\,B^{-1} \\ &\overset{B=B^T}{=} \underbrace{B^{-1}\,B}_{I}\,A\,A^T\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{I} \\ &= A\,A^T \end{aligned}$$

(c1)

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2) &= 6\,x_1 + \ln(x_2) + a\,e^{a\,x_1} \\ f_{x_2}(x_1, x_2) &= \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) \quad = \quad \begin{pmatrix} 6\, x_1 + \ln(x_2) + a\, e^{a\, x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}.$$

(c2) <u>Vektor $\mathbf{n}$ ist orthogonal zur Tangente an eine Niveaulinie in $\hat{\mathbf{x}}$:</u>

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \lambda\, \mathbf{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ & \begin{pmatrix} 6\, \hat{x}_1 + \ln(\hat{x}_2) + a\, e^{a\, \hat{x}_1} \\ \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow\ & \hat{x}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \hat{x}_2 > 0 \quad \text{beliebig.} \end{aligned} \tag{I}$$

<u>$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ auf der Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$:</u>

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad = \quad 3\, \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1 \ln(\hat{x}_2) + e^{a\, \hat{x}_1} = 1 \tag{II}$$

$$\begin{aligned} \text{(I) in (II)} \quad \Rightarrow &\quad 3 \cdot 0^2 + 0 \cdot \ln(\hat{x}_2) + e^{a \cdot 0} = 1 \\ \Rightarrow &\quad 1 = 1 \quad \text{immer erfüllt für } \hat{x}_2 > 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle Punkte $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ mit $\hat{x}_1 = 0$ and $\hat{x}_2 > 0$ ist der Vektor $\mathbf{n}$ orthogonal zur Tangente and die Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$ in $\hat{\mathbf{x}}$ ist.

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \text{ Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 0 & t & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 2\,t - 5\,t^2 = t\,(2 - 5\,t).$$

Es folgt, dass $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, falls $t \neq 0$ und $t \neq \frac{2}{5} = 0.4$, d.h. $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 0.4\}$.

(a2)

$\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal genau dann wenn diese drei Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} c^T\, d = 0 &\iff s + t = 0 && \text{(I)} \\ c^T\, e = 0 &\iff s + t = 0 && \text{(II)} \\ d^T\, e = 0 &\iff 2\,t + s^2 + 1 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\text{(I)}\ ,\ \text{(II)} \implies t = -s \qquad \text{(IV)}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (III)} &\implies s^2 - 2\,s + 1 = 0 \\ &\iff (s-1)^2 = 0 \\ &\iff s = 1 \text{ (und } t = -1) \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal sind genau dann wenn $s = 1$ und $t = -1$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_4 &= 0 && \text{(I)} \\ 3\,x_1 + x_2 &= 0, && \text{(II)} \end{aligned}$$

wobei x_1 und x_3 freie Variablen sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= s \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}) &\implies x_4 = -\frac{s}{2} \\ (\mathrm{II}) &\implies x_2 = -3\,s \end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} \in W$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -3\,s \\ 0 \\ \frac{-s}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für W ist.

(c) Gauss-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ m & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -m\cdot(I) \end{array} \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 2-2m & 1-m & 1-m^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot(II) \\ \\ +(2\,m-2)\cdot(II) \end{array} \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-2m & m-2 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2m^2-2m+1-m}_{2m^2-3m+1=(2m-1)(m-1)} & \underbrace{2m-2+1-m^2}_{-(m^2-2m+1)=-(m-1)^2} \end{array}\right) \end{aligned}$$

(i) Genau eine Lösung: $\mathrm{rg}(A) = 3 \Longleftrightarrow m \neq 1, m \neq \frac{1}{2}$,

(ii) Unendlich viele Lösungen: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) = 2 \Longleftrightarrow m = 1$,

(iii) Keine Lösung: $\mathrm{rg}(A) = 2$ und $\mathrm{rg}(A, b) = 3 \Longleftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

(a1)

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } A \text{ genau dann wenn } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 8 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - 8\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^3 - 9\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\,[(2-\lambda)^2 - 9] \\
&= (2-\lambda)\,(5-\lambda)\,(-1-\lambda).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = 0 &\iff (2-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\
&\iff \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1.
\end{aligned}$$

(a2)

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$A\,\hat{x} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\,\hat{x}.$$

Somit ist $\hat{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 2$. Es folgt für $n \geq 1$

$$A^n\,\hat{x} = A^{n-1}\,A\,\hat{x} = A^{n-1}\,2\,\hat{x} = 2\,A^{n-1}\,\hat{x} = \cdots = 2^n\,\hat{x}.$$

Insbesondere gilt

$$A^{100}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2^{100}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(b1)

$$a^2 y_{k+1} - (a+2)y_k = a+1$$

<u>Normalform:</u>

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+2}{a^2}}_{A} y_k + \underbrace{\frac{a+1}{a^2}}_{B} \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots$$

Man berechnet zuerst

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a+1}{a^2}}{1-\frac{a+2}{a^2}} \\ &= \frac{a+1}{a^2-a-2} = \frac{a+1}{(a-2)(a+1)} \\ &= \frac{1}{a-2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+2}{a^2}\right)^k \left(y_0 - \frac{1}{a-2}\right) + \frac{1}{a-2}. \end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$\begin{aligned} A > 0 &\iff \frac{a+2}{a^2} > 0 \\ &\iff a+2 > 0 \\ &\iff a > -2. \end{aligned}$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$|A| < 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{a+2}{a^2}\right| < 1$$

Zwei Fälle:

(i) $a \geq -2$: $\left|\frac{a+2}{a^2}\right| = \frac{a+2}{a^2}$

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Longleftrightarrow \frac{a+2}{a^2} < 1 \\ &\Longleftrightarrow a^2 - a - 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow (a-2)(a+1) > 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in [-2, -1) \cup (2, \infty). \end{aligned}$$

(ii) $a < -2$: $\left|\frac{a+2}{a^2}\right| = -\frac{a+2}{a^2}$

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Longleftrightarrow -\frac{a+2}{a^2} < 1 \\ &\Longleftrightarrow -a - 2 < a^2 \\ &\Longleftrightarrow a^2 + a + 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in (-\infty, -2). \end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls $a \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

(b4) <u>Notwendige Bedingung für die Konvergenz:</u>

$$\lim_{k\to\infty} y_k \quad = \quad y^\star$$

Es folgt

$$y^\star = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a-2} = 1 \Leftrightarrow a = 3.$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a+2}{a^2}\right| < 1.$$

Für $a = 3$

$$\left|\frac{3+2}{3^2}\right| = \frac{5}{9} < 1$$

ist diese Bedingung erfüllt. Somit ist $a = 3$ die gesuchte Lösung.

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

9. Februar 2011

Aufgabe 1 (32 Punkte)

(a) (12 Punkte). Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2\,(x-1)\,e^{x-1} + y^2 - 2\,x\,y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) (7 Punkte). Die Funktion

$$f(x,y) = x^2\,y^3, \quad x > 0,\, y > 0$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 8 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte). Berechnen Sie

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2} \ln(x^2)\, dx.$$

Aufgabe 1

(d) (7 Punkte). Berechnen Sie

$$\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\, dx.$$

Aufgabe 2 (18 Punkte)

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (2 Punkte). Berechnen Sie $A^T B$.

Aufgabe 2

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) (5 Punkte). Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $A\,B^T = (A\,B^T)^{-1}$?

Aufgabe 2

(b) (5 Punkte). Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} + a\, x_1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

(c1) (2 Punkte). Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2).$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 3\,e^{x_1+x_2-6} + a\,x_1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

(c2) **(4 Punkte).** Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x_1, x_2)^T = (4, 2)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (21 Punkten)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} r \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ orthogonal?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} r \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(4 Punkte).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte). Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1 + 2\,x_2 = 0,\ 3\,x_2 + 4\,x_5 = 0,\ 3\,x_3 + 2\,x_5 = 0,\ x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_5 = 0\}.$$

Aufgabe 3

(c) (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 4\,x_3 & = & 1 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & (m^2-12)\,x_3 & = & m-2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung?

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (29 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte).** Zeigen Sie, dass $\lambda = 6$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

Aufgabe 4

(a1)

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a2) (5 Punkte). Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} - (a^2 - 2)\,y_k = b + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\ a \neq 2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b1) (4 Punkte). Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} - (a^2 - 2)\,y_k = b + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\ a \neq 2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b2) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a^2 - 2)\, y_k = b + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\ a \neq 2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b3) (6 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} - (a^2 - 2)\,y_k = b + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0, \, a \neq 2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b4) (4 Punkte). Zeigen Sie, dass mit $a = \frac{3}{2}$ und $b = \frac{1}{4}$ für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots,$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 1.$$

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

9. Februar 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,y \\
f_y(x,y) &= 2\,y - 2\,x \\
f_{xx}(x,y) &= 4\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} \\
f_{xy}(x,y) &= -2 \\
f_{yy}(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,y = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,y - 2\,x = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\text{(II)} \;\Rightarrow\; x = y \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{aligned}
\text{(III) in (I)} \quad &\Rightarrow\; 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,x = 0 \\
&\Rightarrow\; e^{x-1}\,(2 + 2x - 2) - 2x = 0 \\
&\Rightarrow\; 2x\,(e^{x-1} - 1) = 0 \\
&\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} x_2 & = & 1 \\ y_2 & = & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(0,0) &= 4\,e^{-1} - 2\,e^{-1} = 2\,e^{-1} > 0, \\
f_{yy}(0,0) &= 2 > 0, \\
f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 &= 4\,e^{-1} - 4 < 0,
\end{aligned}$$

und somit ist $(0,0)$ ein **Sattelpunkt**.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= 4 > 0, \\
f_{yy}(1,1) &= 2 > 0, \\
f_{xx}(1,1)\,f_{yy}(1,1) - f_{xy}(1,1)^2 &= 4\,.\,2 - (-2)^2 = 4 > 0,
\end{aligned}$$

und somit ist $(1,1)$ ein **Minimum**.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Langrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2\,y^3 + \lambda\,(2x^2 + 2y^2 - 8) \end{aligned}$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x\,y^3 + \lambda\,(4\,x) = 0 \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,x^2\,y^2 + \lambda\,(4\,y) = 0 \tag{II}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x^2 + 2\,y^2 - 8 = 0 \tag{III}$$

$$\text{(I)} \overset{x\,,y\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = -\frac{2\,x\,y^3}{4\,x} = -\frac{1}{2}\,y^3 \tag{IV}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad 3\,x^2\,y^2 - (\frac{1}{2}\,y^3)(4\,y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad 3\,x^2 - 2\,y^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{3}\,y^2 \end{aligned} \tag{V}$$

$$\begin{aligned} \text{(V) in (III)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,(\frac{2}{3}\,y^2) + 2\,y^2 = 8 \\ &\Rightarrow \quad \frac{4}{3}\,y^2 + 2\,y^2 = 8 \\ &\Rightarrow \quad \frac{10}{3}\,y^2 = 8 \\ &\overset{y>0}{\Rightarrow} \quad y = \sqrt{\frac{12}{5}} \\ &\overset{(V)}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt{\frac{8}{5}}. \end{aligned} \tag{VI}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\,x^2 + 2\,y^2 - 8 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = 4 - y^2. \end{aligned} \tag{VII}$$

Man substituiert x^2 mit $4 - y^2$ in der Zielfunktion f. Es folgt:

$$f(x,y) \;=\; 2\,(4-y^2)\,y^3 = 8\,y^3 - 2\,y^5 = g(y).$$

Die erste Ableitung von g ist:

$$g'(y) = 24\,y^2 - 10\,y^4.$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} g'(y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 24\,y^2 - 10\,y^4 = 0 \\ &\overset{(y>0)}{\Rightarrow} \quad 24 - 10\,y^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y^2 = \frac{12}{5} \\ &\overset{(y>0)}{\Rightarrow} \quad y = \sqrt{\frac{12}{5}} \\ &\overset{(\text{VII})}{\Rightarrow} \quad x = \sqrt{\frac{8}{5}}. \end{aligned}$$

(c) <u>Partielle Integration:</u>

$$\int_1^{\sqrt{e}} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'(x)} \underbrace{\ln(x^2)}_{v(x)}\, dx$$

$$\begin{aligned} u'(x) = \frac{1}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = \ln(x^2) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x^2}\,2\,x = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2}\ln(x^2)\,dx &= \underbrace{-\frac{1}{x}}_{u(x)}\ \underbrace{\ln(x^2)}_{v(x)} - \int \underbrace{(-\frac{1}{x})}_{u(x)}\ \underbrace{\frac{2}{x}}_{v'(x)}\,dx \\
&= -\frac{1}{x}\ \ln(x^2) + \int \frac{2}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{x}\ \ln(x^2) - \frac{2}{x} + c \\
&= -\frac{1}{x}\Big(\ \ln(x^2) + 2\Big) + c.
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2}\ln(x^2)\,dx &= -\frac{1}{x}\Big(\ \ln(x^2) + 2\Big)\Big|_1^{\sqrt{e}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e}}\Big(\ln(e) + 2\Big) - (-1)\Big(\ln(1) + 2\Big) \\
&= 2 - \frac{3}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

(d) Substitutionsmethode:

$$\int \Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)\,dx$$

Man setzt:

$$\begin{aligned}
y &= \ln(x+\sqrt{x}) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x+\sqrt{x}}\Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)\,dx &= \int y\,dy \\
&= \frac{1}{2}\,y^2 + c \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln(x+\sqrt{x})\Big)^2 + c.
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \Big(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)dx &= \frac{1}{2}\Big(\ \ln(4+\sqrt{4})\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\ \ln(1+\sqrt{1})\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big((\ln 6)^2 - (\ln 2)^2\Big).\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ A^T\,B &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a & -2a \\ 4a & 7 & -26 \\ a & 2 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned} A\,B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ a^2-2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(AB^T)^{-1} = \frac{1}{-1-2\,(a^2-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -(a^2-2) & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (AB^T)^{-1} = AB^T \\ &\Longleftrightarrow \quad -1-2\,(a^2-2) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2 = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) <u>Gauss Verfahren:</u>

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2\,\text{(I)} \\ \\ -4\,\text{(I)} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -2\,(\mathrm{III}) \\ +5\,(\mathrm{III}) \\ \\ +4\,(\mathrm{III}) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lr} & -3\,(\mathrm{II}) \\ :(-6) & \\ & +(\mathrm{II}) \\ & +6\,(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{Rg}\ (\mathrm{A}) = 3.$$

(c1)

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2) &= 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} + a \\ f_{x_2}(x_1, x_2) &= 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} + a \\ 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} \end{pmatrix}.$$

(c2) <u>Der stärksten Funktionionszunahme im Punkt $(x_1, x_2)^T = (4,2)^T$ durch den Vektor $\mathbf{n} = \binom{6}{1}$</u>

$$\mathbf{grad}\, f(4,2) = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\,e^{4+2-6} + a \\ 3\,e^{4+2-6} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{I}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 + a \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{II}$$

$$\overset{\text{(II)}}{\Rightarrow} \lambda = 3. \tag{III}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad 3 + a = 3 \cdot 6 \\ &\Rightarrow \quad a = 15. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5+t\\2\end{pmatrix}\\
\mathbf{d}+\mathbf{e} &= \begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+1\\t+1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{e}) &= 1\cdot(t+1)+(5+t)(t+1)+2\cdot 2\\
&= t+1+5t+5+t^2+t+4\\
&= t^2+7t+10\\
&= (t+5)(t+2).
\end{aligned}$$

$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ and $\mathbf{d}+\mathbf{e}$ orthogonal genau dann wenn:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{e}) = 0\\
\Leftrightarrow\ &(t+5)(t+2)=0\\
\Leftrightarrow\ &t\in\{-5,-2\}.
\end{aligned}$$

(a2)

$$\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \text{ ist eine Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) &= \begin{vmatrix}0 & r & 1\\ t & 3 & t\\ 1 & t & 1\end{vmatrix}\\
&= 0+r\cdot t+t^2-3-0-r\cdot t\\
&= t^2-3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) \neq \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad t^2 - 3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0 && \text{(I)} \\ 3\,x_2 + 4\,x_5 &= 0 && \text{(II)} \\ 3\,x_3 + 2\,x_5 &= 0 && \text{(III)} \\ x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_5 &= 0 && \text{(IV)} \end{aligned}$$

wobei x_4 und x_5 freie Variablen sind:

$$\begin{aligned} x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = -\frac{4}{3}\,t \\ \text{(III)} \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = -\frac{2}{3}\,t \\ \text{(I)} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -2\,x_2 \overset{\text{(II)}}{=} -2\left(-\frac{4}{3}\,t\right) = \frac{8}{3}\,t. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} \in W$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} 8/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^5 \ : \ \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t\,,\ s \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) <u>Gauss-Algorithmus:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m^2 - 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m^2-12 & m-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3\,(\mathrm{I}) \\ -2\,(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & m^2-12-8 & m-2-2 \end{array}\right) \ : (-1) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & -1 & m^2-20 & m-4 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\,(\mathrm{II}) \\ \\ +\,(\mathrm{II}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-9 & m-3 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

(i) Genau eine Lösung: $m^2 - 9 \neq 0 \Longleftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

(ii) Unendlich viele Lösungen: $m^2 - 9 = 0$ und $m - 3 = 0 \Longleftrightarrow m = 3$.

(iii) Keine Lösung: $m^2 - 9 = 0$ und $m - 3 \neq 0 \Longleftrightarrow m = -3$.

Aufgabe 4

(a1) <u>Gleichungssystem:</u>

$$(A - 6\,I_d)\ \underline{\mathbf{x}} = 0 \quad (*)$$

besitzt eine nicht-triviale Lösung $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$\begin{aligned} (3-6)\,x_1 + 5\,x_3 &= 0 && \text{(I)} \\ (2-6)\,x_2 &= 0 && \text{(II)} \\ 3\,x_1 + (1-6)\,x_3 &= 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 0 && \text{(IV)} \\ \text{(I) oder (III)} \quad &\Rightarrow \quad x_3 = \frac{3}{5}\,x_1 && \text{(V)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ sind nicht-triviale Losungen von (*)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 6 \text{ ist Eigenwert mit Eigenvektoren } c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \; c \in \mathbb{R}.$$

(a2) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 15\,(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda) - 15\Big) \\ &= (2-\lambda)\Big(3 - 3\,\lambda - \lambda + \lambda^2 - 15\Big) \\ &= (2-\lambda)\Big(\lambda^2 - 4\,\lambda - 12\Big) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=0 &\iff (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2)=0\\ &\iff \lambda_1=2,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-2.\end{aligned}$$

(b1)

$$ay_{k+1}-(a^2-2)y_k=b+1$$

<u>Normalform:</u>

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a^2-2}{a}}_{A}\,y_k+\underbrace{\frac{b+1}{a}}_{B} \qquad \text{für } k=0,1,2,\ldots$$

Man berechnet zuerst:

$$\begin{aligned}y^\star &= \frac{B}{1-A}=\frac{\frac{b+1}{a}}{1-\frac{a^2-2}{a}}\\ &= \frac{b+1}{a-a^2+2}.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}y_k &= A^k\,(y_0-y^\star)+y^\star\\ &= \left(\frac{a^2-2}{a}\right)^k\left(y_0-\frac{b+1}{a-a^2+2}\right)+\frac{b+1}{a-a^2+2}.\end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a^2-2}{a} > 0.$$

$$\begin{aligned}
a > 0: \quad a^2 - 2 > 0 &\iff a^2 > 2 \\
&\iff a > \sqrt{2}. \\
a < 0: \quad a^2 - 2 < 0 &\iff a^2 < 2 \\
&\iff a \in (-\sqrt{2},\, 0) \\
&\overset{(a\neq -1)}{\iff} a \in (-\sqrt{2},\, 0) \;\setminus\; \{-1\}.
\end{aligned}$$

Monotonie falls:

$$a \in (-\sqrt{2},\, -1) \;\cup\; (-1, 0) \;\cup\; (\sqrt{2},\, \infty).$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned}
|A| &= \left|\frac{a^2-2}{a}\right| \\
|A| < 1 &\iff \left|\frac{a^2-2}{a}\right| < 1 \\
&\iff \left(\frac{a^2-2}{a}\right)^2 < 1 \\
&\iff a^4 - 4a^2 + 4 < a^2 \\
&\iff a^4 - 5a^2 + 4 < 0 \\
&\iff (a^2-4)(a^2-1) < 0 \\
&\iff a^2 \in (1, 4) \\
&\iff a \in (-2, -1) \;\cup\; (1, 2).
\end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls $a \in (-2, -1) \;\cup\; (1, 2)$.

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star &= \frac{b+1}{a-a^2+2}\\ &= \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2}\\ &= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{6}{4}-\frac{9}{4}+\frac{8}{4}}\\ &= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1.\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a^2-2}{a}\right| < 1.$$

Für $a = \frac{3}{2}$:

$$\left|\frac{(\frac{3}{2})^2-2}{\frac{3}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}{\frac{6}{4}}\right| = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{4}} = \frac{1}{6} < 1$$

ist diese Bedingung erfüllt.

Prüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematatik II
Prüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2011

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) (8 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{y} - \frac{1}{3}\,y, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) **(9 Punkte)** Die Funktion

$$f(x, y) = x^2\, y + 2\, y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\, dx.$$

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_{4/3}^{3} e^{x^2+\sqrt{3\,x}} \left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12\,x}}\right)\,dx.$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (6 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det(A\,A^T) = \det(B\,B^T)$?

Aufgabe 2

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) (4 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $A\,B^T = B\,A^T$?

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte) Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ seien regulär. $A_{n\times n}$ ist auch symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$(B\,B^T)\,(A\,B^{-1})^T\,(B\,A)^{-1}\,(B\,A^T) = B\,A.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 3\,x^2\,y + 4\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\,\sqrt{x\,y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

(c1) **(3 Punkte)** Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\,f(x, y).$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3\,x^2\,y + 4\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\,\sqrt{x\,y}, \quad x > 0,\ y > 0.$$

(c2) **(6 Punkte)** Geben Sie die Gleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$, so dass die Richtung der stärksten Zunahme der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ orthogonal zur Gerade ist. Geben Sie die Interpretation dieser Geraden in Bezug auf die Niveaulinien von f.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\,t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\,t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(4 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die zwei Vektoren $t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$ orthogonal?

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

Aufgabe 3

(c) (12 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (a^2 - a - 11)\,x_4 & = & a+2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist und berechnen Sie den dazu zugehörigen Eigenvektor.

Aufgabe 4

(a1)

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a2) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{u} = (4, 3, -7)^T$ und $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)^T$

$$(A^{100}\,\mathbf{u})^T\,(A^{100}\,\mathbf{v}) = -11\,(-2)^{100}$$

gilt.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -2,\, a \neq 4.$$

(b1) **(4 Punkte)** Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -2,\, a \neq 4.$$

(b2) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3 \quad ,k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -2,\, a \neq 4.$$

(b3) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -2,\, a \neq 4.$$

(b4) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 2?$$

Mathematik II
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

27. Juni 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= x^3 - \frac{x^2}{y} \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{3}\frac{x^3}{y^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{y^2} - 1\right) \\
f_{xx}(x,y) &= 3\,x^2 - \frac{2x}{y} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{x^2}{y^2} \\
f_{yy}(x,y) &= -\frac{2}{3}\frac{x^3}{y^3}
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingungen:

$$
f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - \frac{x^2}{y} = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0 \tag{I}
$$

$$
f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{y^2} - 1\right) = 0 \tag{II}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(II)} &\;\Rightarrow\; x \neq 0 \\
\text{(I)} &\;\Rightarrow\; x = \frac{1}{y}
\end{aligned} \tag{III}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(III) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad x^5 = 1 \quad\Rightarrow\quad x = 1 \quad\Rightarrow\quad y = 1 \\
&\Rightarrow \quad \text{Kandidat für Extremstelle ist} \quad (x^*, y^*) = (1,1).
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= 3\,(\,1\,)^2 - \frac{2\cdot 1}{1} = 3 - 2 = 1 > 0 \\
f_{yy}(1,1) &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1^3}{1^3} = -\frac{2}{3} < 0
\end{aligned}
$$

und somit ist $(1,1)$ ein **Sattelpunkt**.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Lagrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2\,y + 2\,y + \lambda\,(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 \;&\Rightarrow\; 2\,x\,y + 2\,\lambda\,x = 0 && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \;&\Rightarrow\; x^2 + 2 + 2\,\lambda\,y = 0 && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;&\Rightarrow\; x^2 + y^2\, -\, 1 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\text{(I)} \;\Rightarrow\; 2\,x\,(\,y + \lambda\,) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0, & \textbf{Fall 1}, \\ y = -\,\lambda, & \textbf{Fall 2}. \end{cases}$$

Fall 1, $x = 0:$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \;\Rightarrow\; 2 + 2\,\lambda\,y = 0 \;&\Rightarrow\; 2\,(\,1 + \lambda\,y\,) = 0 \\ &\Rightarrow\; y = -\,\frac{1}{\lambda}. && \text{(IV)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (III)} \;&\Rightarrow\; \left(-\,\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\,1 \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} (x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, -1) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Fall 2, $y = -\lambda:$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \;&\Rightarrow\; x^2 + 2 + 2\,\lambda\,(-\,\lambda\,) = 0 \\ &\Rightarrow\; x^2 = 2\,\lambda^2\, -\, 2 && \text{(V)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(V) in (III)} \;&\Rightarrow\; 2\,\lambda^2\, -\, 2 + (-\,\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\; 3\,\lambda^2 = 3 \\ &\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\,1 \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} (x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, -1) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Zweite Variante:

(I), (II), und (III) wie vorher und dann:

Falls $x = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(III)}}{\Rightarrow} \quad y^2 = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \\
&\overset{\text{(II)}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} (x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, -1) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

Falls $x \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y + 2\,\lambda = 0 \\
&\Rightarrow \quad y = -\,\lambda && \text{(VI)} \\
\text{(VI) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y^2 = x^2 + 2 \\
&\Rightarrow \quad x^2 = 2\,y^2 - 2 && \text{(VII)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(VII) in (III)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y^2 - 2 + y^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad 3\,y^2 = 3 \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad \text{Widerspruch für den Fall } x \neq 0.
\end{aligned}
$$

Variante Substitutionsmethode:

Die Nebenbedingung nach x auflösen:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x, y) \quad &= \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 = -\,y^2 + 1.
\end{aligned}
$$

x^2 in der Zielfunktion $f(x,y)$ mit $-y^2+1$ substituieren. Es folgt:

$$\begin{aligned} F(y) &= f(x,y) \\ &= x^2\,y + 2\,y \\ &= (-\,y^2\,+\,1)\,y\,+\,2\,y \\ &= -\,y^3\,+\,3\,y. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von $F(y)$ ist:

$$F'(y) = -\,3\,y^2\,+\,3.$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} F'(y)=0 \quad &\Rightarrow \quad -\,3\,y^2\,+\,3=0 \\ &\Rightarrow \quad y^2=1 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-1 \end{cases} \\ &\overset{\text{Nebenbed.}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} (x_1,y_1)=(0,1) \\ (x_2,y_2)=(0,-\,1). \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Partielle Integration:

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x^5}}_{u'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx$$

$$\begin{aligned} u'(x) = \frac{1}{x^5} \quad &\Rightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{4\,x^4} \\ v(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5}\ln(x)\,dx &= \underbrace{-\frac{1}{4\,x^4}}_{u(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{4\,x^4}\right)}_{u(x)}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{v'(x)}dx \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\ln(x) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^5}\,dx \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\ln(x) - \frac{1}{16}\frac{1}{x^4} + c \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\left(\ln(x) + \frac{1}{4}\right) + c. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx &= -\frac{1}{4\,x^4}\left(\ln(x) + \frac{1}{4}\right)\Big|_1^e \\ &= -\frac{1}{4\,e^4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} - \frac{5}{16\,e^4}. \end{aligned}$$

(d) Substitutionsmethode:

Man setzt:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{3x}$$

$$f'(x) = 2\,x + \frac{3}{2\,\sqrt{3\,x}} = 2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int \left(e^{x^2 + \sqrt{3x}}\right)\left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}\right) dx &= \int e^y \, dy \\ &= e^y + c \\ &= e^{x^2 + \sqrt{3x}} + c. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{4}{3}}^{3} \left(e^{x^2 + \sqrt{3x}}\right)\left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}\right) dx &= e^{(3)^2 + \sqrt{3 \cdot 3}} - e^{(\frac{4}{3})^2 + \sqrt{3 \cdot \frac{4}{3}}} \\ &= e^{12} - e^{\frac{34}{9}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$
\begin{aligned}
A^T &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
A\,A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & a^2+5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^T &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
B\,B^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \det\,(\,A\,A^T\,) = \det\,(\,B\,B^T\,) \\
\iff\ & 5\,(\,a^2\,+\,5\,)\,-\,16 = 2\,(\,a^2\,+\,10\,)\,-\,4 \\
\iff\ & 5\,a^2\,+\,25\,-\,16 = 2\,a^2\,+\,20\,-\,4 \\
\iff\ & 3\,a^2 = 7 \\
\iff\ & a = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}
$$

(a2)

$$
\begin{aligned}
A\,B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ a^2-1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B\,A^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & a^2-1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow A\,B^T = B\,A^T \iff\; & a^2 - 1 = 3 \\
\iff\; & a^2 = 4 \\
\iff\; & a = \pm\, 2.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
(\,B\,B^T\,)\,(\,A\,B^{-1}\,)^T\,(\,B\,A\,)^{-1}\,(\,B\,A^T\,) &= B\,B^T\,(\,B^{-1}\,)^T\,A^T\,A^{-1}\,B^{-1}\,B\,A^T \\
&= \overbrace{B\,\underbrace{\Big(B^T\,(\,B^T\,)^{-1}\Big)}_{=I}\,\underbrace{\Big(A\,A^{-1}\Big)}_{=I}\,\underbrace{\Big(B^{-1}\,B\Big)}_{=I}\,A}^{A=A^T \text{ da A symmetrisch, und } (\,B^{-1}\,)^T = (\,B^T\,)^{-1}} \\
&= B\,A
\end{aligned}
$$

(c1)

$$
\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 3\,x^2\,y + 4\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\,\sqrt{x\,y} \\
&= 3\,x^2\,y + 4\,\ln(x) - 4\ln(y) - 2\,\sqrt{x\,y} \\
f_x(x,y) &= 6\,x\,y + \frac{4}{x} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\
&= 6\,x\,y + \frac{4}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}} \\
f_y(x,y) &= 3\,x^2 - \frac{4}{y} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \\
&= 3\,x^2 - \frac{4}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}}
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x\,y + \frac{4}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}} \\ 3\,x^2 - \frac{4}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$$

(c2) Richtung der stärksten Zunahme der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)$ ist $\mathbf{grad}\ f(1,1)$:

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden: $A\,x + B\,y + C = 0$

Bedingung 1: Gerade orthogonal zu $\mathbf{grad}\ f(1,1) \Rightarrow \begin{cases} A = 9 \\ B = -\,2 \end{cases}$.

Bedingung 2: Gerade durch $(1,1)^T \Rightarrow A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = -\,A - B = -\,9 + 2 = -7.$

Somit ist die Gleichung der Geraden: $9\,x - 2\,y - 7 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{9}{2}\,x - \frac{7}{2}.$

Interpretation: Diese Gerade ist die Tangente an der Niveaulinie von f im Punkt $(1,1)^T$.

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ ist eine Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & t \\ 0 & 2t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0+4+0-2\,t^2-3-0 \\
&= -2\,t^2+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,t^2+1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t \neq \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^3 \text{ falls } t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

(a2)

$$t\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b} = t\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\2\,t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\,t\\2\,t^2\\2\,t\end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
(t\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b})\cdot\mathbf{d} &= \begin{pmatrix}7\,t\\2\,t^2\\2\,t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-5\end{pmatrix} \\
&= 14\,t+4\,t^2-10\,t \\
&= 4\,t^2+4\,t \\
&= 4\,t\,(t+1)
\end{aligned}$$

$t\,\mathbf{a}+t\,\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$ sind genau dann orthogonal, wenn:

$$
\begin{aligned}
& (t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 4\,t\,(t+1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & t = 0\ ,\ t = -\,1.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Falls $t = 0$ dann ist $t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ der Nullvektor.

(b) Man löst das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 &= 0 && \text{(I)} \\
x_2 + 2\,x_3 &= 0 && \text{(II)} \\
x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 &= 0 && \text{(III)}
\end{aligned}
$$

<u>Variante Gauss-Verfahren:</u>

$$
\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ -\,(\mathrm{I}) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -\,2\,(\mathrm{II}) \\ \\ -\,(\mathrm{II}) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & x_1 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x_2 + 2\,x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2\,x_3
\end{aligned}
$$

wobei x_3 eine freie Variable ist:

$$x_3 = t.$$

Die Lösung ist:

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -\,2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

und somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von W.

<u>Variante Substitutionsmethode:</u>
Da (III) = (I) + (II), ist (III) erfüllt wenn (I) und (II) erfüllt sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = -2\,x_3 && \text{(IV)} \\ \text{(IV) in (I)} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -2\,x_2 - 4\,x_3 = -2\,(-2\,x_3) - 4\,(x_3) = 0 \end{aligned}$$

wobei x_3 eine freie Variable ist. Die Lösung ist:

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \, t \in \mathbb{R}$$

und somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von W.

(c) Gauss-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & (a^2-a-11) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) \quad &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & (a^2-a-11) & a+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\,(\mathrm{I}) \\ -\,(\mathrm{I}) \\ -\,(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & (a^2-a-11) & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\,(\mathrm{II}) \\ \cdot\,(-\,1) \\ -\,(\mathrm{II}) \\ \\ \end{array} \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-a-12) & a+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\,(\mathrm{IV}) \\ +\,(\mathrm{IV}) \\ \\ \\ \end{array} \\
&\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-a-12) & a+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\text{Genau eine Lösung:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - a - 12 \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a-4)(a+3) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \neq 4\,,\ a \neq -3.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\text{Unendlich viele Lösungen:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A,b) < 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - a - 12 = 0 \quad \text{und} \quad a+3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\,a = 4 \quad \text{oder} \quad a = -3\,) \quad \text{und} \quad a = -3 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = -3.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\text{Keine Lösung:} \quad &\iff \operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A, b)\\ &\iff a^2 - a - 12 = 0 \quad \text{und} \quad a + 3 \neq 0\\ &\iff (\, a = 4 \quad \text{oder} \quad a = -3\,) \quad \text{und} \quad a \neq -3\\ &\iff a = 4.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1) <u>Gleichungssystem:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\lambda = 0:$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(A) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 6 + 45 + 5 - 12 - 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ist ein Eigenwert von A.

$\mathbf{x}$ ist genau ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 0$, wenn $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir lösen das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\,(\mathrm{I}) \\ +\,(\mathrm{I}) +\,(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\,2\,(\mathrm{II}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :\,(-11) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\,4\cdot(\mathrm{I}) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 1 & 0 & 10/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{3}{11}\,x_3 \\ x_1 &= -\frac{10}{11}\,x_3 \end{aligned}$$

wobei x_3 eine freie Variable ist. Somit sind

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$.

(a2) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
A\,\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = -2\,\mathbf{u} \\
A\,\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
(\,A^{100}\,\mathbf{u}\,)^T\,(\,A^{100}\,\mathbf{v}\,) &= \big((-2)^{100}\,\mathbf{u}\big)^T\;\mathbf{v} \\
&= (-2)^{100}\,\mathbf{u}^T\,\mathbf{v} \\
&= (-2)^{100}\,(-11) \\
&= -11 \cdot (-2)^{100}
\end{aligned}
$$

(b1)

$$
(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3
$$

<u>Normalform:</u>

$$
y_{k+1} = \underbrace{\frac{a-4}{a+2}}_{A}\,y_k + \underbrace{\frac{a^2+3}{a+2}}_{B} \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots
$$

Berechnen zuerst:

$$
\begin{aligned}
y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a^2+3}{a+2}}{1 - \frac{a-4}{a+2}} \\
&= \frac{a^2+3}{6}
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\
&= \left(\frac{a-4}{a+2}\right)^k \left(y_0 - \frac{a^2+3}{6}\right) + \frac{a^2+3}{6}.
\end{aligned}
$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a-4}{a+2} > 0$$

$$\begin{aligned} a > -2: \quad & \frac{a-4}{a+2} > 0 \iff a - 4 > 0 \iff a > 4 \\ a < -2: \quad & \frac{a-4}{a+2} > 0 \iff a - 4 < 0 \Longrightarrow a < -2 \end{aligned}$$

Monotonie falls:

$$a \in (-\infty,\, -2) \,\cup\, (4,\, \infty)$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\frac{a-4}{a+2}\right| \\ |A| < 1 &\iff \left|\frac{a-4}{a+2}\right| < 1 \\ &\iff (a-4)^2 < (a+2)^2 \\ &\iff a^2 - 8a + 16 < a^2 + 4a + 4 \\ &\iff 12 < 12a \\ &\iff a > 1 \quad (\, a \neq 4\,) \end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls:

$$a \in (1,\, \infty) \;\setminus\; \{4\}.$$

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 2 \\ \Rightarrow\ & y^\star = \frac{a^2+3}{6} = 2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 + 3 = 12 \\ \Leftrightarrow\ & a^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & a = \pm\, 3 \end{aligned}$$

<u>Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:</u>

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a-4}{a+2}\right| < 1.$$

Für $a = 3:$

$$|A| = \left|\frac{3-4}{3+2}\right| = \frac{1}{5} < 1$$

Für $a = -3:$

$$|A| = \left|\frac{-3-4}{-3+2}\right| = \frac{-7}{-1} = 7 > 1$$

$\Rightarrow$ Konvergent gegen 2 für $a = 3$

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

18. Februar 2012

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) (8 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) **(9 Punkte)** Die Funktion

$$f(x, y) = 200\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 50\, x + 100\, y - 150 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^4 x^2 \ln(4\,x)\,dx.$$

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^e e^{e^x+\ln(x)} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Inverse $(A^T B)^{-1}$ nicht existiert.

Aufgabe 2

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) (4 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $rg(A\,B^T) = 2$?

Aufgabe 2

(b) (5 Punkte). Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{-a\,x^3+2\,x-\frac{a^2}{2}\,y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

(c1) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \lambda \begin{pmatrix} -3\,a+2 \\ -a^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{-a\,x^3+2\,x-\frac{a^2}{2}\,y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

(c2) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3\,t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(5 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3\,t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(3 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die zwei Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ orthogonal?

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

Aufgabe 3

(c) (12 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & m \\ 3\,x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3\,x_2 & + & m^2\,x_3 & = & m+1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von A ist und berechnen Sie den dazugehörigen Eigenraum.

Aufgabe 4

(a1)

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a2) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{u} = (-3, 4, 0, 1)^T$ und $n = 1, 2, \ldots$

$$A^n\,\mathbf{u} = 3^n\,\mathbf{u}$$

gilt.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+5)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = a^2 + \frac{31}{4} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -5,\, a \neq 3.$$

(b1) **(4 Punkte)** Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+5)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = a^2 + \frac{31}{4} \quad, k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -5,\ a \neq 3.$$

(b2) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+5)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = a^2 + \frac{31}{4} \quad ,k = 0,1,2,\dots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -5,\, a \neq 3.$$

(b3) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+5)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = a^2 + \frac{31}{4} \quad, k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -5,\, a \neq 3.$$

(b4) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1?$$

Mathematatik II

Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

18. Februar 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1) \\
f_y(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y) \\
f_{xx}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1)^2+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2x) \\
f_{xy}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)(-x^2+1) \\
f_{yy}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)^2+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2)
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y)=0 \Rightarrow \quad & \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+1=0 && \text{(I)} \\
f_y(x,y)=0 \Rightarrow \quad & \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2y=0 && \text{(II)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &\Rightarrow x=\pm 1 \\
\text{(II)} &\Rightarrow y=0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \text{Kandidaten für Extremstellen} \quad (x_1^*,y_1^*)=(1,0) \quad \text{und} \quad (x_2^*,y_2^*)=(-1,0).$$

Hinreichende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{+\frac{2}{3}} < 0 \\
f_{yy}(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{+\frac{2}{3}} < 0 \\
f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0)-f_{xy}^2(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}(-2\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}})-0 \\
&= 4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} > 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad (1,0) \quad \text{ist ein Maximum.}$$

$$
\left.\begin{aligned}
f_{xx}(-1,0) &= 2\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} > 0 \\
f_{yy}(-1,0) &= -2\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} < 0
\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (-1,0) \quad \text{ist ein Sattelpunkt}
$$

(b) <u>Lagrange Funktion</u>

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(50x + 100y - 150) \end{aligned}$$

<u>Lagrange-Bedingungen</u>

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}200x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 50\lambda = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}200x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} + 100\lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 50x + 100y - 150 = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = -50\lambda \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{(II)} \quad \Rightarrow \quad 50x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} = -100\lambda \qquad \text{(V)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{(V)}}{\text{(IV)}} \quad &\Rightarrow \quad \frac{50x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}}{100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} = \frac{-100\lambda}{-50\lambda} \\ &\Rightarrow \quad \frac{x}{2y} = 2 \\ &\Rightarrow \quad x = 4y \qquad \text{(VI)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VI)} \quad \text{in} \quad \text{(III)} \quad &\Rightarrow \quad 50(4y) + 100y = 150 \\ &\Rightarrow \quad 300y = 150 \\ &\Rightarrow \quad \underline{y = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\overset{\text{(VI)}}{\Rightarrow} \quad \underline{x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2}$$

Zweite Variante (Substitutionsmethode)

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \Rightarrow \quad & x + 2y = 3 \\ \Rightarrow \quad & x = 3 - 2y \qquad \text{(VII)} \end{aligned}$$

(VII) in f:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & g(y) = f(3-2y, y) = 200(3-2y)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} \\ \Rightarrow \quad & g'(y) = 200 \frac{1}{2}(3-2y)^{-\frac{1}{2}}(-2)y^{\frac{1}{4}} + 200(3-2y)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} \\ \Rightarrow \quad & g'(y) = 50(3-2y)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}[3-2y-4y] = 50(3-2y)^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{4}}[3-6y] \end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} g'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & 3 - 6y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \\ \overset{\text{(VII)}}{\Rightarrow} \quad & \underline{x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2} \end{aligned}$$

(c) <u>Partielle Integration:</u>

$$
\begin{aligned}
u'(x) = x^2 \qquad &\Rightarrow \qquad u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\
v(x) = \ln(4x) \qquad &\Rightarrow \qquad v'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_1^4 \underbrace{x^2}_{u'(x)} \underbrace{\ln(4x)}_{v(x)} dx &= \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u(x)} \underbrace{\ln(4x)}_{v(x)} \Big|_1^4 - \int_1^4 \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln(4x)\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{3}x^2 dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 \ln(4x)\Big|_1^4 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^4 \\
&= \frac{1}{3}4^3 \ln(4\cdot 4) - \frac{1}{3}1^3 \ln(4) - \left[\frac{1}{9}4^3 - \frac{1}{9}1^3\right] \\
&= \frac{64}{3}\ln(4^2) - \frac{1}{3}\ln(4) - \left[\frac{64}{9} - \frac{1}{9}\right] \\
&= \frac{128}{3}\ln(4) - \frac{1}{3}\ln(4) - \frac{63}{9} \\
&= \underline{\frac{127}{3}\ln(4) - 7}
\end{aligned}
$$

(d) Substitutionsregel:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^x + \ln(x) \\
f'(x) &= \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow &\quad \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + \ln(x)} \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \right) dx \\
= &\quad \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^e + 1} \mathrm{e}^y \, dy \\
= &\quad \mathrm{e}^y \Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^e + 1} \\
= &\quad \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + 1)} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \\
= &\quad \underline{\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

(a1) $(A^T\,B)^{-1}$ existiert genau dann wenn $\det(A^T B) \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 2a \\ a & 1 & 1+a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A^T B) &= a^2 + (1+a)a - 2a^2 - a \\ &= a^2 + a + a^2 - 2a^2 - a \\ &= 0 \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (A^T B)^{-1} \text{ existiert nicht für alle } a \in \mathbb{R}$$

(a2)

$$\begin{aligned} A\,B^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+1 & 1+a \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(AB^T) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(AB^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 1 - (1+a)a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 1 - a - a^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(AB^T) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

(b) Gauss Verfahren

$$
\begin{array}{rcll}
A & = & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{(I)} \\ -2\,\text{(I)} \\ -4\text{(I)} \\ -\text{(I)} \end{array} \\
 & \to & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ -\text{(II)} \\ -\text{(II)} \end{array} \\
 & \to & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = 2$$

(c1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2}(-3ax^2+2) \\ \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2}(-a^2y) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2} \begin{pmatrix} -3ax^2+2 \\ -a^2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{grad} f(1,1) = \underbrace{\mathrm{e}^{-a+2-\frac{a^2}{2}}}_{=\lambda} \begin{pmatrix} -3a+2 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

(c2)

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\quad -3a+2 = -a^2 \\
\Rightarrow &\quad a^2-3a+2 = 0 \\
\Rightarrow &\quad (a-1)(a-2) = 0 \\
\Rightarrow &\quad \underline{a=1} \quad \text{oder} \quad \underline{a=2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \neq \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 1 & 3t & 1 \\ 0 & t & t & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3\,(3t^2 + t^2 - 3t^3 - t^2) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 9t^2(1-t) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{t \neq 0} \quad \text{und} \quad \underline{t \neq 1}
\end{aligned}$$

(a2)

$$\mathbf{b} \text{ und } \mathbf{c} \text{ orthogonal}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 + 3t + t^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (t+2)(t+1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{t = -2} \quad \text{oder} \quad \underline{t = -1}
\end{aligned}$$

(b) Gauss-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{I}) \leftrightarrow (\mathrm{II}) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \\ -3(\mathrm{I}) \\ -2(\mathrm{I}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad : (-2) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{r} -2(\mathrm{II}) \\ \\ -2(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 4x_3$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = -3x_3$$

wobei x_3 eine freie Variable ist:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Variante Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad &= 0 \qquad (\mathrm{I}) \\ x_1 + 2x_2 \quad +2x_3 &= 0 \qquad (\mathrm{II}) \\ 2x_1 + 6x_2 \quad +10x_3 &= 0 \qquad (\mathrm{III}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}) \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}x_2 && (\mathrm{IV}) \\ (\mathrm{IV}) \text{ in } (\mathrm{II}) \quad &\Rightarrow \quad -\frac{4}{3}x_2 + 2x_2 = -2x_3 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{3}x_2 = -2x_3 \\ &\Rightarrow \quad x_2 = -3x_3 && (\mathrm{V}) \\ &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}x_2 = -\frac{4}{3}(-3x_3) = 4x_3 && (\mathrm{VI}) \end{aligned}$$

$$(\mathrm{V}) \text{ und } (\mathrm{VI}) \text{ in } (\mathrm{III}) \quad \Rightarrow \quad 8x_3 + (-18)x_3 + 10x_3 = 0 \quad \forall x_3$$

x_3 freie Variable (für Basis siehe oben)

(c) Gauss-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3(\mathrm{I}) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & -5 & -3 & -3m \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-5) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3/5 & 3m/5 \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2(\mathrm{II}) \\ \\ -3(\mathrm{II}) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -1m/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3m/5 \\ 0 & 0 & m^2-9/5 & 1-4m/5 \end{array}\right)$$

(i)

$$\begin{aligned} \text{Genau eine Lösung:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad m^2 - \frac{9}{5} \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad m \neq \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Unendlich viele Lösungen:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A,b) < 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad m^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{4}{5}m = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{und} \quad m = \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad \text{nie unendlich viele Lösungen} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \text{Keine Lösung:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) < \mathrm{rg}\,(A,b) \\ &\Longleftrightarrow \quad m^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{4}{5}m \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{und} \quad m \neq \frac{5}{4} \\ &\Longleftrightarrow \quad m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1) $\lambda = 2$ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\det(A - 2\,I) = 0$. Es gilt:

$$\det(A - 2\,I) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ gehört zum Eigenraum für den Eigenwert $\lambda = 2$ genau dann wenn

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = 0.$$

Es gilt

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - 3x_4 & = 0 \\ 10x_3 + 4x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 = x_4 = 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ freie Variablen}$$

Es folgt den Eigenraum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(a2)

$$
\begin{aligned}
n=1 \qquad A\,\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 3 ist ein Eigenwert von A und $\mathbf{u}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 3

$$
\begin{aligned}
n=2 \qquad A^2\mathbf{u} &= A(A\mathbf{u}) = A(3\mathbf{u}) = 3A\mathbf{u} \\
&= 3 \cdot 3\mathbf{u} = 3^2\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n=3 \qquad A^3\mathbf{u} &= A(A^2\mathbf{u}) = A(3^2\mathbf{u}) = 3^2 A\mathbf{u} \\
&= 3^2 \cdot 3\mathbf{u} = 3^3\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n-1 \to n \qquad A^n\mathbf{u} &= A^{n-1}(A\mathbf{u}) = A^{n-1}(3\mathbf{u}) = 3A^{n-1}\mathbf{u} \\
&= 3 \cdot 3^{n-1}\mathbf{u} = 3^n\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

(b1) Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{-\frac{3-a}{a+5}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}{1-\frac{a-3}{a+5}} \\ &= \frac{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}{\frac{a+5-a+3}{a+5}} = \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^k \left(y_0 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{31}{32}\right) + \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} \end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a-3}{a+5} > 0$$

$$a+5>0 \Leftrightarrow a>-5: \quad \frac{a-3}{a+5} > 0 \iff a-3>0 \Longleftrightarrow \underline{a>3}$$

$$a+5<0 \Leftrightarrow a<-5: \quad \frac{a-3}{a+5} > 0 \iff a-3<0 \Longrightarrow \underline{a<3}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung der Differenzengleichung ist monoton falls: $a \in (-\infty,\, -5) \,\cup\, (3,\, \infty)$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$
\begin{aligned}
|A| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a-3}{a+5}\right| < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^2 < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a-3)^2 < (a+5)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - 6a + 9 < a^2 + 10a + 25 \\
&\Longleftrightarrow \quad 16a > -16 \\
&\Longleftrightarrow \quad a > -1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls: $a \in (-1, \infty) \setminus \{3\}$

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 1 \\
\Rightarrow \quad & y^\star = \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{32} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & a = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

$$a = \frac{1}{2}: \quad \left|\frac{a-3}{a+5}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}+5}\right| = \frac{5}{11} < 1$$

$$a = -\frac{1}{2}: \quad \left|\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+5}\right| = \left|\frac{-7}{9}\right| = \frac{7}{9} < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}$$

Prüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

25. Juni 2012

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) (8 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = -x^4 - y^4 + 4\,x\,y, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) **(7 Punkte)** Die Funktion

$$f(x, y) = 2\,x^3\,y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (7 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1/2 \\ c \ln(2\,x)/x^2, & \text{für } 1/2 \leq x \leq e/2 \\ 0, & \text{für } x > e/2 \end{cases}, \qquad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^e \sqrt{\sqrt{2\,x} + \ln(x)}\,\left(\frac{2+\sqrt{2\,x}}{2\,x}\right)\,dx.$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte)** Für welche Werte von a ist die Matrix $A\,A^T$ regulär?

Aufgabe 2

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Matrix $A^T A$ für alle Werte von a singulär ist.

Aufgabe 2

(b) (5 Punkte). Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(b)

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^{a^3+2\,a^2+1}\,y^{a^2+12\,a+1}\right), \quad x>0, \quad y>0, \quad a>0.$$

(c1) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \begin{pmatrix} a^3 + 2\,a^2 + 1 \\ a^2 + 12\,a + 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^{a^3+2\,a^2+1}\, y^{a^2+12\,a+1}\right), \quad x>0, \quad y>0, \quad a>0.$$

(c2) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie $a>0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3\,d \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte)** Für welche Werte von d sind die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3\,d \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(5 Punkte)** Sei A eine 3×3-Matrix mit Kolonnenvektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Zeigen Sie, dass $rg(A) \geq 2$ für alle $d \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 10\,x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & & - & 8\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie die Dimension von W.

Aufgabe 3

(c) (11 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,a\,x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & & & + & a\,x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & b\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor mit Länge $\sqrt{2}$.

Aufgabe 4

(a1)

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a2) **(6 Punkte)** Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(2\,a+1)\,y_{k+1}-(a+5)\,y_k = b-1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-5, -1/2, 4\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b1) (4 Punkte) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(2\,a+1)\,y_{k+1}-(a+5)\,y_k = b-1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-5, -1/2, 4\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b2) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(2\,a{+}1)\,y_{k+1}{-}(a{+}5)\,y_k = b{-}1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-5, -1/2, 4\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b3) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(2\,a+1)\,y_{k+1}-(a+5)\,y_k = b-1, \quad k = 0,1,2,\ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-5,-1/2,4\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b4) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0,1,\ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = b-1?$$

Mathematik II
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

25. Juni 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x^3+4y \\ f_y(x,y) &= -4y^3+4x \\ f_{xx}(x,y) &= -12x^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 4 \\ f_{yy}(x,y) &= -12y^2 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y)=0 \Rightarrow &\quad -4x^3+4y=0 \\ f_y(x,y)=0 \Rightarrow &\quad -4y^3+4x=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y = x^3 \qquad \text{(I)}$$
$$\Rightarrow \quad x = y^3 \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned} \text{(I) in (II)}: \qquad & x = y^3 = (x^3)^3 = x^9 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^8-1) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1 \end{aligned}$$

Drei Kandidaten für Extremalstellen $P_1(0,0)$ und $P_2(1,1)$, und $P_3(-1,-1)$

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 0 \\ f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0)-f_{xy}^2(0,0) &= -16<0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_1(0,0)$ ist ein Sattelpunkt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= -12 \,<\, 0 \\
f_{yy}(1,1) &= -12 \,<\, 0 \\
f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) &= (-12 \cdot -12) - 16 > 0 \\
&= 128 > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_2(1,1)$ ist ein relatives Maximum

$$\begin{aligned}
f_{xx}(-1,-1) &= -12 \,<\, 0 \\
f_{yy}(-1,-1) &= -12 \,<\, 0 \\
f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) &= (12 \cdot 12) - 16 > 0 \\
&= 128 > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_3(-1,-1)$ ist ein relatives Maximum

(b) Erste Variante (Lagrange Funktion)

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 2x^3y + \lambda(x^2+y^2-4) \end{aligned}$$

Lagrange Bedingungen

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 6x^2y + \lambda(2x) = 0 && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2x^3 + \lambda(2y) = 0 && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; x^2+y^2-4 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Zwei Fälle

i) $x = 0$

$$\text{(III)} \;\Rightarrow\; y = \pm 2$$

ii) $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{(II)} &\;\Rightarrow\; y \neq 0 \text{ und } -\lambda(2y) = 2x^3 && \text{(IV)} \\ \text{(I)} &\;\Rightarrow\; -\lambda(2x) = 6x^2y && \text{(V)} \\ \frac{\text{(IV)}}{\text{(V)}} &\;\Rightarrow\; \frac{-\lambda(2x)}{-\lambda(2y)} = \frac{6x^2y}{2x^3} \\ &\;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y} = 3\frac{y}{x} \\ &\;\Leftrightarrow\; x^2 = 3y^2 && \text{(VI)} \\ \text{(VI) in (III)} &\;\Rightarrow\; 3y^2 + y^2 = 4 \\ &\;\Leftrightarrow\; y = \pm 1 \\ &\;\overset{\text{(VI)}}{\Rightarrow}\; x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kandidaten für Extremalstellen:

$$\underline{(0,2), (0,-2), (1,\sqrt{3}), (1,-\sqrt{3}), (-1,\sqrt{3}), (-1,-\sqrt{3})}$$

Zweite Variante (Substitution Methode)

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4-y^2}$$

Definiere:

$$\begin{aligned} g_+(y) &= f(+\sqrt{4-y^2}, y) &= 2(\sqrt{4-y^2})^3 y \\ g_-(y) &= f(-\sqrt{4-y^2}, y) &= 2(-\sqrt{4-y^2})^3 y \end{aligned}$$

Weil $g_-(y) = -g_+(y)$; ein lokales Maximum von $g_+(y)$ ist ein lokales Minimum von $g_-(y)$ und vice versa. Es genügt $g_+(y)$ zu untersuchen

$$\begin{aligned} g_+'(y) &= 6(4-y^2)\frac{1}{2}((4-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)y + 2(\sqrt{4-y^2})^3 \\ &= 2(4-y^2)^{\frac{1}{2}}[-3y^2 + (4-y^2)] \\ &= 2(4-y^2)^{\frac{1}{2}}(4-4y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_+'(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = \pm 2,\ y = \pm 1 \\ &\underset{x \geq 0}{\Rightarrow} \quad x = 0,\ x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Für q_- haben wir:

$$\begin{aligned} g_-'(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = \pm 2,\ y = \pm 1 \\ &\underset{x \leq 0}{\Rightarrow} \quad x = 0,\ x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kandidaten für Extremalstelle cf. erste Variante.

(c) Zwei Bedingungen für Dichtefunktion:

$$\begin{array}{ll} (1) & f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \\ (2) & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{array}$$

(1) ist erfüllt für $c > 0$
(2):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} c\frac{\ln(2x)}{x^2}dx \\ &= c\int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \frac{\ln(2x)}{x^2}dx \end{aligned}$$

Antiderivativ:

$$\int \frac{\ln(2x)}{x^2}dx$$

Partielle Integration

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(2x) \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^{-2} \quad &\Rightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(2x)}{x^2}dx &= \underbrace{\ln(2x)}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v}dx \\
&= -\frac{\ln(2x)}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&\Rightarrow\ 1 = c\int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \frac{\ln(2x)}{x^2}dx = c\left[-\frac{ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \\
&= c\left[-\frac{ln(2\frac{\mathrm{e}}{2})}{\mathrm{e}/2} - \frac{1}{\mathrm{e}/2} - \left(-\frac{ln(2\frac{1}{2})}{1/2} - \frac{1}{1/2}\right)\right] \\
&= c\left(-\frac{4}{\mathrm{e}} + 2\right) \\
&\Rightarrow\ c = \frac{1}{2 - \frac{4}{\mathrm{e}}}
\end{aligned}$$

Merke $\ln(\mathrm{e}) = 1$ und $\ln(1) = 0$

(d) Substitution Regel:

Wir setzten $u(x) = \sqrt{2x} + \ln(x)$, dann haben wir:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{x} = \frac{2+\sqrt{2x}}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\sqrt{2x} + \ln(x)} \left(\frac{2+\sqrt{2x}}{2x} \right) dx \\ &= \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}\,\mathrm{e}} \sqrt{u}\, du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}\,\mathrm{e}} \\ &= \frac{2}{3}(1+\sqrt{2}\,\mathrm{e})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(1+\sqrt{2}\,\mathrm{e})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ a+1 & 2+a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AA^T \text{ regulär} &\Rightarrow \det(AA^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2+a^2) - (1+a)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 + 2a^2 - 1 - 2a - a^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + 2 \neq 0 \quad \text{immer erfüllt für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad AA^T$ regulär für alle $a \in \mathbb{R}$

(a2)

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & a \\ 1+a & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T A \text{ singulär} &\Rightarrow \det(A^T A) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(1+a^2) + a(1+a) + a(1+a) - (1+a)^2 - 2a^2 - (1+a^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2a^2 + a + a^2 + a + a^2 - 1 - 2a - a^2 - 2a^2 - 1 - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{immer erfüllt} \end{aligned}$$

(b) Gauss Methode

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} (\div 2) \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (\div 2) \\ \\ \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -1/2 \cdot (\mathrm{II}) \\ \\ -1/2 \cdot (\mathrm{II}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -(\mathrm{III}) \\ \\ \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}}
$$

(c1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \\
f(x,y) &= \ln(x^{a^3+2a^2+1} y^{a^2+12a+1}) \\
&= \ln(x^{a^3+2a^2+1}) + \ln(y^{a^2+12a+1}) \\
&= (a^3+2a^2+1)\ln(x) + (a^2+12a+1)\ln(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f_x(x,y) &= \frac{a^3+2a^2+1}{x} \\
f_y(x,y) &= \frac{a^2+12a+1}{y} \\
f_x(1,1) &= a^3+2a^2+1 \\
f_y(1,1) &= a^2+12a+1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} a^3+2a^2+1 \\ a^2+12a+1 \end{pmatrix}$$

(c2) Folgendes muss gelten:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & a^3+2a^2+1 = a^2+12a+1 \\
\Leftrightarrow \quad & a^3+a^2-12a = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a^2+a-12) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a+4)(a-3) = 0 \\
\Rightarrow \quad & \quad a=0,\ a=3 \text{ or } a=-4
\end{aligned}$$

Da $a > 0$, $\underline{a = 3}$ folgt direkt.

Aufgabe 3

(a1) $\{a,b,c\}$ linear unabhänging genau dann wenn $\det[a,b,c] \neq 0$

$$\begin{aligned}
\det[a,b,c] &= \begin{vmatrix} 3d & d & d \\ 1 & 0 & d \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + d^2 + d - 0 - 3d^2 - 2d \\
&= -2d^2 - d \\
&= -2d\left(d + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{a,b,c\}$ linear unabhänging genau dann wenn $d \in \mathbb{R} \ / \big\{0, -\frac{1}{2}\big\}$

(a2) Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 3d & d & d \\ 1 & 0 & d \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{Substit. (I) mit (III)}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & d \\ 3d & d & d \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(\mathrm{I}) \\ -(3d)\cdot(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & d-2 \\ 0 & d & d-3d^2 \end{pmatrix} \div(-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2-d \\ 0 & d & d-3d^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(\mathrm{II}) \\ \\ -d\cdot(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-(2-d) \\ 0 & 1 & 2-d \\ 0 & 0 & d-3d^2-d(2-d) \end{pmatrix}$$

$\{a,b\}$ linear unabhänging und darum $\operatorname{rank}(A) \geq 2$.

Zweite Lösung:
Zeige dass $\{a,b\}$ linear unabhänging

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} 3\lambda_1 d & + & \lambda_2 d & = & 0 \quad \text{(I)} \\ \lambda_1 & & & = & 0 \quad \text{(II)} \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 \quad \text{(III)} \end{array}$$

(II) $\Rightarrow \lambda_1 = 0$, einsetzten in (III) gibt $\lambda_2 = 0$. Darum ist $\{a, b\}$ linear unabhängig.

(b) Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Substit. (I) mit (II)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3\text{(I)} \\ -2\text{(I)} \\ -2\text{(I)} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \div(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\text{(II)} \\ \\ -2\text{(II)} \\ +4\text{(II)} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \div(-10) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +3\text{(III)} \\ -5/2 \cdot \text{(III)} \\ \\ -10\text{(III)} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A, 0) = 3 < 4 = n$$
$$\Rightarrow \dim(W) = 4 - 3 = 1$$

Zweiter Weg das Problem anzugehen: Explizite Ableitung des Lösungsraums

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + x_4 &= 0 && \text{(I)}\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 && \text{(II)}\\
2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - x_4 &= 0 && \text{(III)}\\
2x_1 - 8x_3 + 4x_4 &= 0 && \text{(IV)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \Rightarrow x_4 &= -3x_1 - 4x_2 && \text{(V)}\\
\text{(II)} \Rightarrow x_1 &= -2x_2 - 2x_3 - 2x_4\\
&\overset{\text{(V)}}{=} -2x_2 - 2x_3 - 2(-3x_1 - 4x_2)\\
&= 6x_2 - 2x_3 + 6x_1\\
\Rightarrow 5x_1 &= -6x_2 + 2x_3\\
\Rightarrow x_1 &= -\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 && \text{(VI)}\\
\text{(VI) in (V)}:\ x_4 &= -3(-\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3) - 4x_2\\
&= -\frac{2}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 && \text{(VII)}\\
\text{(VI) und (VII) in (IV)}:\ 0 &= 2(-\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3) - 8x_3 + 4(-\frac{2}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3)\\
&\Leftrightarrow -4x_2 - 12x_3 = 0\\
&\Leftrightarrow x_2 = -3x_3 && \text{(VIII)}\\
\text{(VIII) in (VI)}:\ &\Rightarrow x_1 = -\frac{6}{5}(-3x_3) + \frac{2}{5}x_3 = 4x_3\\
\text{(VIII) in (VII)}:\ &\Rightarrow x_4 = -\frac{2}{5}(-3x_3) - \frac{6}{5}x_3 = 0
\end{aligned}
$$

x_3 ist eine freie Variable

$$W = \left\{ c \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ :\ c \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim(W) = 1$$

(c) Gauss Methode:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -(\mathrm{I}) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & -2a & a-1 & 1-b \\ 0 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Substit. } \underset{\rightarrow}{(\mathrm{II})} \text{ mit } (\mathrm{III}) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & -2a & a-1 & 1-b \end{array}\right) \begin{array}{c} -2a(\mathrm{II}) \\ \\ +2a(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-2ab & b-2a \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & a-1+2ab & 1-b+2a \end{array}\right)$$

System hat unendlich viele Lösungen genau dann wenn

$$\begin{cases} a-1+2ab=0 & (\mathrm{I}) \\ 1-b+2a=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(\mathrm{II})}{\Rightarrow} b = 1+2a \quad (\mathrm{III}) \\ (\mathrm{III}) \text{ in } (\mathrm{I}): &\ a-1+2a(1+2a)=0 \\ &\Leftrightarrow a-1+2a+4a^2=0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2+3a-1=0 \\ &\Leftrightarrow (4a-1)(a+1)=0 \\ &\Leftrightarrow a_1=\frac{1}{4},\ a_2=-1 \end{aligned}$$

System hat unendlich viele Lösungen genau dann wenn $\underline{(a,b)=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)}$ oder $\underline{(a,b)=(-1,-1)}$

Aufgabe 4

(a1) $\lambda = 1$ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - 1 \cdot Id) = 0$

$$\begin{aligned} \det(A - 1\,I) &= \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 45 + 6 - 0 - 6 - 45 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Eigenvektoren zu Eigenwert $\lambda = 1$ erfüllen

$$(A - \; Id)\,\mathbf{x} = 0.$$

Mit Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3(\mathrm{I}) \\ +5(\mathrm{I}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = -x_1$$
$$x_1 = c \quad \text{freie Variable}$$

$$\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Länge $\sqrt{2}$:</u>

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sqrt{c^2+0^2+c^2} = \sqrt{2}\cdot|c| = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow c = \pm 1 \\ &\Rightarrow \underline{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(a2) Eigenwerte λ von A erfüllen $\det(a - \lambda Id) = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 45 + 6 + 5(1-\lambda) + 9(-4-\lambda) - 6(2-\lambda) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 8 - 8\lambda = 0$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-8+2\lambda+\lambda^2+8) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -2$$

(b1) Normale Form:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+5}{2a+1}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{b-1}{2a+1}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{b-1}{2a+1}}{1-\frac{a+5}{2a+1}} \\ &= \frac{\frac{b-1}{2a+1}}{\frac{2a+1-a-5}{2a+1}} = \frac{b-1}{a-4} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+5}{2a+1}\right)^k \left(y_0 - \frac{b-1}{a-4}\right) + \frac{b-1}{a-4} \end{aligned}$$

(b2) Monoton falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a+5}{2a+1} > 0$$

$$2a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}: \quad \frac{a+5}{2a+1} > 0 \iff a+5 > 0 \iff \underline{a > -5}$$

$$2a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}: \quad \frac{a+5}{2a+1} > 0 \iff a+5 < 0 \Longrightarrow \underline{a < -5}$$

$\Rightarrow (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton $\Leftrightarrow a \in (-\infty, -5) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)\ /\{4\}$

(b3) <u>Konvergent falls $|A| < 1$:</u>

$$\begin{aligned} |A| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a+5}{2a+1}\right| < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a+5}{2a+1}\right)^2 < 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad (a+5)^2 < (2a+1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2 + 10a + 25 < 4a^2 + 4a + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3a^2 - 6a - 24 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3(a-4)(a+2) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a \in (4, \infty) \cup (-\infty, -2) \ /\{-5\} \end{aligned}$$

(b4) <u>Notwendige Bedingung:</u>

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{b-1}{a-4} \stackrel{!}{=} b-1 \\ &\Leftrightarrow a - 4 = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 5 \end{aligned}$$

<u>Hinreichende Bedingung:</u>

$$\begin{aligned} &|A| < 1 \\ &|A| = \left|\frac{a+5}{2a+1}\right| = \left|\frac{10}{11}\right| < 1. \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\underline{\lim_{k\to\infty} y_k \ = \ b-1 \ \Leftrightarrow \ a = 5}$

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II: Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2013

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) (6 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y + 2), \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a)

Aufgabe 1

(b) (7 Punkte) Die Funktion

$$f(x,y) = 60\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{5}{6}}$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 20\,x + 50\,y - 100 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b)

Aufgabe 1

(c) (8 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ 3\,c\,x^2 \ln(4\,x), & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{für } x > 4 \end{cases} \quad , \qquad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Aufgabe 1

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_e^{e^2} \ln\left(x^2 + \sqrt{\ln(x)}\right) \left(2\,x + \frac{1}{2\,x\,\sqrt{\ln(x)}}\right) dx.$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (5 Punkte) Für welche Werte von a ist die Matrix $A^2 = A\,A$ regulär?

Aufgabe 2

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Matrix $A^4 = A\,A\,A\,A$ symmetrisch ist.

Aufgabe 2

(b) (5 Punkte). Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(b)

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^{2\,a^3+a^2+1}\, y^{a^3+12\,a+1}\right), \quad x>0, \quad y>0, \quad a>0.$$

(c1) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass für alle $c>0$

$$\mathbf{grad}\, f(c,c) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 2\,a^3+a^2+1 \\ a^3+12\,a+1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^{2\,a^3+a^2+1}\,y^{a^3+12\,a+1}\right), \quad x>0, \quad y>0, \quad a>0.$$

(c2) **(5 Punkte)** Bestimmen Sie $a>0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (c,c)^T$ für alle $c>0$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (23 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(3 Punkte)** Für welche Werte von t sind die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 3

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a2) **(3 Punkte)** Für welche Werte von t sind die zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal?

Aufgabe 3

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

Aufgabe 3

(c) (12 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & (m-1)\,x_3 & = & m^2-1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3\,x_2 & + & m^2\,x_3 & = & m+2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 3

(c)

Aufgabe 4 (26 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(3 Punkte)** Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 4

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a2) **(8 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von A, die zu verschiedenen Eigenwerten gehöhren, orthogonal sind.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+7)\,y_{k+1} - (a+4)\,y_k = 3\,a^2 + 6\,a - 9, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4\}.$$

(b1) (4 Punkte) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+7)\,y_{k+1} - (a+4)\,y_k = 3\,a^2 + 6\,a - 9, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4\}.$$

(b2) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+7)\,y_{k+1} - (a+4)\,y_k = 3\,a^2 + 6\,a - 9, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4\}.$$

(b3) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 4

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+7)\,y_{k+1} - (a+4)\,y_k = 3\,a^2 + 6\,a - 9, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4\}.$$

(b4) (5 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 0?$$

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x+2y}{x^2+2y^2+2xy+2} \\
f_y(x,y) &= \frac{4y+2x}{x^2+2y^2+2xy+2} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+2y^2+2xy+2)-(2x+2y)(2x+2y)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2} \\
&= \frac{-2x^2-4xy+4}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{2(x^2+2y^2+2xy+2)-(2x+2y)(4y+2x)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2} \\
&= \frac{-2x^2-4y^2-8xy+4}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{4(x^2+2y^2+2xy+2)-(4y+2x)(4y+2x)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2} \\
&= \frac{-8y^2-8xy+8}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2x+2y = 0 && \text{(I)} \\
f_y(x,y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4y+2x = 0 && \text{(II)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} \quad &\Rightarrow \quad x = -y && \text{(III)} \\
\text{(III) in (II)} \quad &: \quad 4y + 2(-y) = 0 \Leftrightarrow 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0.
\end{aligned}
$$

Somit ist $P(0,0)$ ein Kandidat für eine Extremalstelle.

Hinreichende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(0,0) &= 1 > 0 \\
f_{yy}(0,0) &= 2 > 0 \\
f_{xy}(0,0) &= 1 \\
f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) &= 1 \cdot 2 - 1^2 = 1 > 0
\end{aligned}
$$

Somit ist $P(0,0)$ ein Minimum.

(b) Erste Variante (Lagrange Methode)

$$
\begin{aligned}
F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\
&= 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{6}} + \lambda(20x + 50y - 100)
\end{aligned}
$$

Lagrange Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
F_x(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow 60\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}} + 20\lambda = 0 && \text{(I)} \\
F_y(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow 60\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 50\lambda = 0 && \text{(II)} \\
F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow 20x + 50y - 100 = 0 && \text{(III)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &\Rightarrow \lambda = -x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}} && \text{(IV)} \\
\text{(II)} &\Rightarrow \lambda = -x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} && \text{(V)} \\
\text{(IV)} = \text{(V)} &\Rightarrow x = y && \text{(VI)} \\
\text{(VI) in (III)} &\Rightarrow 20x + 50x - 100 = 0 \\
&\Rightarrow x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7}
\end{aligned}
$$

Zweite Variante (Substitutionsmethode)

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100}{50} - \frac{20}{50}x = 2 - \frac{2}{5}x \tag{VII}$$

(VII) in die Zielfunktion f einsetzen:

$$h(x) = f\left(x, 2 - \frac{2}{5}\,x\right) = 60\,x^{\frac{1}{3}}\,(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}}$$

Die notwendige Bedingung für h ist:

$$h'(x) = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 60\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}} + 60x^{\frac{1}{3}}\frac{5}{6}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}} - 20x^{\frac{1}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}} \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left[2 - \frac{2}{5}x - x\right] \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left[2 - \frac{7}{5}x\right]. \end{aligned}$$

Somit

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{7}{5}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}.$$

(c) Zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion:

(i) $f(x) \geq 0 \quad$ für alle x;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Bedingung (i) ist genau dann erfüllt, wenn $c > 0$. Für Bedingung (ii) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^4 3cx^2 \ln(4x)dx \\
&= c\left\{ \left[x^3 \ln(4x)\right]_1^4 - \int_1^4 x^3 \frac{4}{4x} dx \right\} \\
&= c\left[x^3 \ln(4x) - \frac{1}{3}x^3\right]_1^4 \\
&= c\left[64\ln(16) - \frac{64}{3} - \ln(4) + \frac{1}{3}\right] \\
&= c\left[127\ln(4) - 21\right].
\end{aligned}$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{127\ln(4) - 21} > 0.$$

(d) <u>Substitutionsregel:</u>

Wir setzten $u(x) = x^2 + \sqrt{\ln(x)}$, damit haben wir:

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}\frac{1}{x}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln(x^2 + \sqrt{\ln(x)}) \left(2x + \frac{1}{2\,x\sqrt{\ln(x)}}\right) dx \\
&= \int_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} \ln(u)du \\
&= u\ln(u)\Big|_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} - \int_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} 1du \\
&= \left[u\ln(u) - u\right]_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} \\
&= (\mathrm{e}^4+\sqrt{2})\ln(\mathrm{e}^4+\sqrt{2}) - \mathrm{e}^4 - \sqrt{2} - (\mathrm{e}^2+1)\ln(\mathrm{e}^2+1) + e^2 + 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1) Lösung 1:

A^2 ist genau dann regulär wenn A regulär ist, d.h., $\det(A) \neq 0$. Es gilt:

$$\det(A) = a^2 - 1.$$

Somit sind A und A^2 genau dann regulär wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lösung 2:

$$A^2 = A\ A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\det(A^2) = \begin{vmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1)^2 - 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1.$$

Sei $x = a^2$, dann $\det(A^2) = x^2 - 2x + 1 = 0$ und

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Da $x = a^2$, es folgt

$$det(A^2) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

und somit ist A^2 genau dann regulär wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(a2) A ist symmetrisch da $A = A^T$. Es folgt:

$$\begin{aligned} (A^4)^T &= (AAAA)^T \\ &= A^T A^T A^T A^T \\ &= AAAA \\ &= A^4 \end{aligned}$$

Somit $(A^4)^T = A^4$, d.h., A^4 ist symmetrisch.

(b) <u>Gauss Methode</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(I)\leftrightarrow(II)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(III)-2(I)}{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}(II)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \overset{(III)+(II)}{}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\mathrm{Rg}(A) = 3.$$

(c1)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \ln(x^{2a^3+a^2+1}y^{a^3+12a+1}) \\ &= \ln(x^{2a^3+a^2+1}) + \ln(y^{a^3+12a+1}) \\ &= (2a^3+a^2+1)\ln(x) + (a^3+12a+1)\ln(y). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2a^3+a^2+1}{x} \\ f_y(x,y) &= \frac{a^3+12a+1}{y} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{grad} f(c,c) = \begin{pmatrix} f_x(c,c) \\ f_y(c,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a^3+a^2+1}{c} \\ \frac{a^3+12a+1}{c} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 2a^3+a^2+1 \\ a^3+12a+1 \end{pmatrix}.$$

(c2) Es existiert ein Parameter $\lambda > 0$ mit der Eigenschaft

$$\lambda \, \mathbf{grad} f(c,c) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

für alle $c > 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c}\begin{pmatrix} 2a^3 + a^2 + 1 \\ a^3 + 12a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{\lambda}{c} 2a^3 + a^2 + 1}{\frac{\lambda}{c} a^3 + 12a + 1} = \frac{e}{e} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2a^3 + a^2 + 1 = a^3 + 12a + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & a^3 + a^2 - 12a = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a^2 + a - 12) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a+4)(a-3) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0, \; a = -4, \; a = 3.
\end{aligned}$$

Da $a > 0$, ist die einzige Lösung $a = 3$.

Aufgabe 3

(a1) $\{a, b, c, d\}$ linear unabhänging genau dann wenn $\det[a, b, c, d] \neq 0$

$$\{a, b, c, d\} \quad = \quad \begin{pmatrix} t & t & 1 & 1 \\ 1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & +1 \end{pmatrix}$$

$\{a, b, c, d\}$ hat als eine Zeile den Nullvektor, somit $\det[a, b, c, d] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit sind $\{a, b, c, d\}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

(a2) $\{a, b\}$ orthogonal genau dann wenn $a^T b = 0$. Es gilt:

$$a^T b = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t^2 + t + 0 + t = t^2 + 2t = t\,(t + 2).$$

Somit $a^T b = 0$ genau dann wenn $t = 0$ und $t = -2$.

(b) Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(I)} \leftrightarrow \text{(I)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \scriptstyle \text{(II)} - 3\text{(I)} \\ \scriptstyle \text{(III)} - 2\text{(I)} \\ \scriptstyle \text{(IV)} - 2\text{(I)} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\,\text{(II)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \scriptstyle \text{(I)} - 2\text{(II)} \\ \\ \scriptstyle \text{(III)} - 2\text{(II)} \\ \scriptstyle \text{(IV)} + 4\text{(II)} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
8x_3 + 3x_4 = 0 &\Leftrightarrow x_3 = -\frac{3}{8}x_4 \\
x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 &\Leftrightarrow x_2 = -3x_3 - x_4 = \frac{9}{8}x_4 - x_4 = \frac{1}{8}x_4 \\
x_1 - 4x_3 - x_4 = 0 &\Leftrightarrow x_1 = 4x_3 + x_4 = -\frac{12}{8}x_4 + x_4 = -\frac{4}{8}x_4
\end{aligned}$$

Somit ist $\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}\right\}$ eine Basis von W.

(c) Gauss Methode:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & m^2 & (m+2) \end{array}\right) \text{(II)} - \text{(I)}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 0 & 0 & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 3 & m^2 & m+2 \end{array}\right) \text{(II)} \leftrightarrow \text{(III)}$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 0 & 3 & m^2 & (m+2) \\ 0 & 0 & 1-m & (1-m^2) \end{array}\right)$$

Es folgt:

(i) genau eine Lösung wenn $1 - m \neq 0$, d.h., $m \neq 1$.

(ii) unendlich viele Lösungen wenn $1 - m = 0$ und $1 - m^2 = 0$, d.h., $m = 1$.

(iii) keine Lösung wenn $1 - m = 0$ und $1 - m^2 \neq 0$. Diesen Fall ist hier nicht möglich.

Aufgabe 4

(a1) λ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix}-2-\lambda & 1\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (2+\lambda)^2 - 1\\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 3\\ &= (\lambda+3)(\lambda+1).\end{aligned}$$

Somit

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = -3.$$

(a2) <u>Lösung 1:</u>

Seien v_1 und v_2 die Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned}Av_1 = \lambda_1 v_1 &\Rightarrow v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1\\ Av_2 = \lambda_2 v_2 &\Rightarrow v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}0 &= v_1^T A v_2 - v_1^T A v_2\\ &= v_1^T A v_2 - v_2^T A^T v_1\\ &\overset{A=A^T}{=} v_1^T A v_2 - v_2^T A v_1\\ &= \lambda_2 v_1^T v_2 - \lambda_1 v_2^T v_1\\ &= \lambda_2 v_1^T v_2 - \lambda_1 v_1^T v_2\\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) v_1^T v_2.\end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist $v_1^T v_2 = 0$, somit sind v_1 und v_2 orthogonal.

<u>Lösung 2: Berechnung der expliziten Eigenvektoren</u>

<u>$\lambda_1 = -1$:</u>

$$(A - (-1)\cdot I)\, v = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0\\ v_1 - v_2 &= 0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Es folgt

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $c_1 \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda_1 = -3:}$

$$(A - (-3) \cdot I)\, v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 & = 0 \\ v_1 + v_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad v_1 = -v_2.$$

Es folgt:

$$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $c_2 \in \mathbb{R}$.

Somit ist das Skalarprodukt zwischen v_1 und v_2

$$v_1^T\, v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 c_2 (1 - 1) = 0,$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, d.h., v_1 und v_2 sind orthogonal.

(b1) <u>Normale Form:</u>

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+4}{a+7}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{3a^2 + 6a - 9}{a+7}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1 - A} = \frac{\frac{3a^2+6a-9}{a+7}}{1 - \frac{a+4}{a+7}} \\ &= \frac{3a^2 + 6a - 9}{a + 7 - a - 4} = \frac{3a^2 + 6a - 9}{3} \\ &= a^2 + 2a - 3. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+4}{a+7}\right)^k \big(y_0 - (a^2+2a-3)\big) + a^2 + 2a - 3. \end{aligned}$$

(b2) <u>Monoton falls $A > 0$:</u>

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{a+4}{a+7} > 0$$

Zwei Fälle:

$$\begin{aligned} a+7 > 0 (\Leftrightarrow a > -7): &\qquad \frac{a+4}{a+7} > 0 \Leftrightarrow a+4 > 0 \Leftrightarrow a > -4; \\ a+7 < 0 (\Leftrightarrow a < -7): &\qquad \frac{a+4}{a+7} > 0 \Leftrightarrow a+4 < 0 \Leftrightarrow a < -4 \end{aligned}$$

Somit ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann monoton wenn $a \in (-\infty, -7) \cup (-4, \infty)$.

(b3) <u>Konvergent falls $|A| < 1$:</u>

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{a+4}{a+7}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+4}{a+7}\right)^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow (a+4)^2 < (a+7)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 < a^2 + 14a + 49 \\ &\Leftrightarrow 6a > -33 \\ &\Leftrightarrow a > -\frac{33}{6} = -\frac{11}{2} \\ &\Leftrightarrow a \in (-\frac{11}{2}, \infty) \setminus \{-4\} \end{aligned}$$

(b4) Notwendige Bedingung: $\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y_k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (a+3)(a-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad a_1 = -3 \text{ oder } a_2 = 1\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: $|A| = \left|\frac{a_1+4}{a_1+7}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} a_1 = -3: &\qquad \left|\tfrac{a_1+4}{a_1+7}\right| = \left|\tfrac{-3+4}{-3+7}\right| = \left|\tfrac{1}{4}\right| < 1\\ a_2 = 1: &\qquad \left|\tfrac{a_2+4}{a_2+7}\right| = \left|\tfrac{1+4}{1+7}\right| = \left|\tfrac{5}{8}\right| < 1\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$ genau dann wenn $a \in \{-3, 1\}$.

Prüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

24. Juni 2013

Teil I: Multiple-Choice Fragen (23 Punkte)

Allgemeine Hinweise für Multiple-Choice Fragen:

(i) Die Lösungen sind in der Multiple Choice-Lösungsbogen einzutragen. Es werden ausschliesslich nur die Antworten auf dem Multiple Choice-Lösungsbogen bewertet. Der Platz unter der Aufgabenstellung ist nur für Entwürfe gedacht und wird nicht korrigiert.

(ii) Pro Aufgabe ist nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Somit darf Pro Aufgage nur eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden.

(iii) Wenn zwei oder mehr Antwortmöglichkeiten angekreuzt werden, wird dies als 0 Punkte gewertet, selbst wenn die richtige Antwort unter den angekreuzten Möglichkeiten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch.

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion f erfüllt $f(x) \geq -2$ für alle $x \in [5, 8]$ und $\int_5^8 f(x)\,dx = 5$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion?

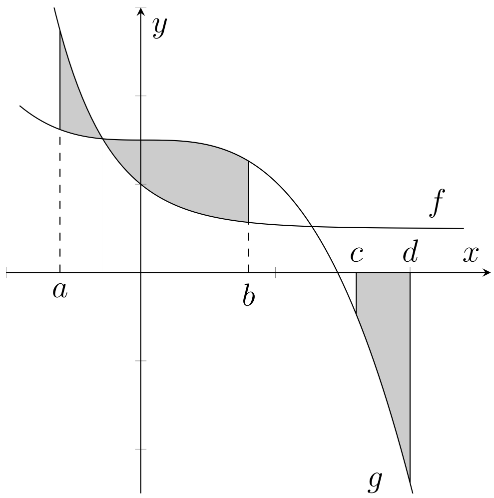
(a) $g_1(x) = f(x) + 2$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{5} f(x)$.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{5} f(x) + 2$.

(d) $g_4(x) = \frac{1}{11} f(x) + \frac{2}{11}$.

Frage 2 (3 Punkte)



Der Wert der grauschraffierten Fläche ist:

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx + \int_c^d |g(x)|\ dx.$

(b) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx + \int_c^d |g(x)|\ dx.$

(c) $\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx + \int_c^d g(x)\, dx.$

(d) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx + \int_c^d g(x)\, dx.$

Frage 3 (3 Punkte)

Die Matrix $A = (a_{ij})$ hat Dimension 5×4. Die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist regulär. Die Matrix A

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3 oder 4.

(c) hat Rang 5.

(d) ist regulär.

Frage 4 (2 Punkte)

A ist eine $(m \times n)$ Matrix, wobei $m > n$. Dann

(a) $\mathrm{rg}(A) > \mathrm{rg}(A^T)$.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

(c) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^T)$.

(d) alle Fälle $(>, <$ und $=)$ sind möglich.

Frage 5 (3 Punkte)

Für das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt $\mathrm{rg}(A) = 3$ und $\mathrm{rg}(A;\mathbf{b}) = 3$, wobei A eine (4×5) Matrix ist.

(a) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 1.

(d) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 2.

Frage 6 (2 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hat Rang

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Frage 7 (4 Punkte)

W ist ein Vektorraum des $\mathbb{R}^5$ und hat Dimension 3. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in W$ und $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ die Matrix mit Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Dann

(a) $\mathrm{rg}(A) \leq 3$

(b) $\mathrm{rg}(A) = 3$.

(c) $\mathrm{rg}(A) = 2$.

(d) $\mathrm{rg}(A) = 5$.

Frage 8 (3 Punkte)

Die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,y_{k+1} - 2\,y_k + 3 = 0$$

ist

(a) monoton, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -3$.

(b) monoton, explosiv.

(c) oszillierend, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -3$.

(d) oszillierend, explosiv.

Teil II: Offene Aufgaben

Allgemeine Hinweise für offene Fragen:

(i) Provisorische Berechnungen und Skizzen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind, gut gekennzeichnet als Entwurf, ebenfalls abzugeben.

(ii) Die Lösung zu einer Teilaufgabe darf nur in den unmittelbar auf die Teilaufgabe folgenden Lösungsplatz geschrieben werden. Sollte dieser Platz ausnahmsweise nicht ausreichen, so benützen Sie die entsprechende Rückseite oder zusätzlich ein separates Blatt. In jedem Fall ist auf die Rückseite oder auf das zusätzliche Blatt zu verweisen. Separate Blätter sind ausserdem mit dem Namen zu versehen.

(iii) Die definitive Lösung darf von jeder Teilaufgabe nur eine Version enthalten. Dabei müssen alle Rechenschritte klar ersichtlich sein.

(iv) Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den obenerwähnten Punktzahlen.

(v) Es werden nur Lösungen bewertet, welche in den dafür vorgesehenen Lösungsplatz geschrieben wurden oder auf der entsprechenden Rückseite bzw. auf separaten Blättern mit entsprechenden Verweisen stehen.

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2\,x^2 - 2\,x\,y + 2\,(y-1)\,e^{y-3}$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = 16\ \ln(x) - 9\ \ln(y)$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 4 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

Frage 1 (b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ c\,e^{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{für } 1 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{für } x > 4 \end{cases}, \qquad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Aufgabe 1

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5 \, \ln\left(\frac{1}{x}\right) \, dx.$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a und b ist die Matrix $A\,A^T$ singulär? .

Aufgabe 2

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 2 (b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{a\,x^2\,y + a^2\,y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (0.5, 1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,m\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & m \\ x_1 & & & + & 3\,m\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem *keine* Lösung?

Aufgabe 2

Frage 2 (d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor mit Länge 4.

Frage 3 (a1) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 3

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 3

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\, y_{k+1}-(2\,a-2)\, y_k = a\, b-(a-b)-1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 3

Frage 3 (b2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\,y_{k+1}-(2\,a-2)\,y_k = a\,b-(a-b)-1, \quad k=0,1,2,\ldots, \quad \text{wobei} \quad a\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad b\in\mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 3

Frage 3 (b3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\,y_{k+1}-(2\,a-2)\,y_k = a\,b-(a-b)-1, \quad k=0,1,2,\ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 3

Frage 3 (b4) (4 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\,y_{k+1}-(2\,a-2)\,y_k = a\,b-(a-b)-1, \quad k=0,1,2,\ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1?$$

Mathematik II
Musterlösungen Prüfung Frühlingssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

24. Juni 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Multiple-choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

Q1 (d). Eine Dichtefunktion muss zwei Bedingungen erfüllen: $g_i(x) \geq 0$ für alle $x \in [5, 8]$ und $\int_5^8 g_i(x)\, dx = 1$. Nur g_4 erfüllt diese Bedingungen.

Q2 (b). Die absoluten Werte werden gebraucht, da $f - g$ beide positiv und negativ zwischen a und b sind, und g negativ zwischen c und d ist.

Q3 (b). Da A eine 3×3 reguläre sub-Matrix hat, muss A mindestens 3 linear unabhängige Kolonnenvektoren haben. Im weiteren hat A vier Kolonnenvektoren. Deshalb können höchstens 4 Kolonnenvektoren unabhängig sein. Es folgt, dass der Rang von A entweder 3 oder 4 ist.

Q4 (b). Da die maximale Anzahl linear unabhängiger Kolonnenvektoren einer Matrix identisch der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der gleichen Matrix ist und zusätzlich dem Rang der Matrix entspricht, hat die transponierte Matrix (Zeilenvektoren werden Kolonnenvektoren und umgekehrt) den gleichen Rang wie die originale Matrix.

Q5 (d). Da $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3 < n = 5$ hat das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen. Im weiteren ist die Dimension des Lösungsraumes $n - \text{rg}(A) = 5 - 3 = 2$.

Q6 (c). Es gilt $\det(A) = 31 \neq 0$. Folglich ist A regulär und $\text{rg}(A) = n = 3$, wobei n die Anzahl der Kolonnen-(Zeilen-)vektoren in A ist.

Q7 (a). Da $\dim(W) = 3$ existieren höchstens 3 linear unabhängige Vektoren in W. Folglich kann der Rang der Matrix A, welche die Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in W$ hat, nicht höher als 3 sein. Im Weiteren können $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ auch linear abhängig sein. In diesem Fall könnte die Matrixa A Rang 1 oder 2 haben.

Q8 (a). Die normale Form der Differenzengleichung ist $y_{k+1} = \frac{2}{3}\, y_k - 1$, d.h., $A = \frac{2}{3}$ und $B = -1$. Da $|A| < 1$, gilt für die allgemeine Lösung der Differenzengleichung, dass sie konvergent ist. Die allgemeine Lösung konvergiert zu $y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{-1}{1-\frac{2}{3}} = -3$.

Teil II: Offene Fragen

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Die notwendige Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen deshalb die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und wir erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4\,x - 2\,y, \\ f_y(x,y) &= -2\,x + 2\,e^{y-3} + 2\,(y-1)\,e^{y-3} = -2\,x + 2\,y\,e^{y-3}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x^\star - 2\,y^\star = 0 \\ -2\,x^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0 \end{cases}.$$

Von $4\,x^\star - 2\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$x^\star = \frac{1}{2}\,y^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $-2\,x^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0$ ein und finden, dass

$$-2\,\frac{1}{2}\,y^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0 \Leftrightarrow y^\star\,\left(2\,e^{y^\star-3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow y^\star = 0 \text{ oder } y^\star = 3 - \ln(2).$$

Es folgt, dass

$$P_1 = (0,0) \text{ und } P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$$

Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichende Bedingungen: falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendige Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Für die hinreichende Bedingungen brauchen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 2\, e^{y-3} + 2\, y\, 3^{y-3} = 2\, e^{y-3}\,(1+y) \\ f_{xy}(x,y) &= -2 \end{aligned}$$

Für $P_1 = (0,0)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \\ f_{yy}(0,0) = 2\, e^{-3} > 0 \\ f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 8\, e^{-3} - 4 < 0 \end{array} \right. .$$

Es folgt, dass $P_1 = (0,0)$ ein Sattelpunkt ist.

Für $P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) = 4 > 0 \\ f_{yy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) = 4 - \ln(2) > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right)\, f_{yy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) - \left(f_{xy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right)\right)^2 = 12 - 4\,\ln(2) > 0 \end{array} \right. .$$

Es folgt, dass $P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$ ein Minimum ist.

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Wir zeigen hier zwei verschiedene Lösungswege auf.

Lagrange Methode:
Wir definieren die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) \\ &= 16\,\ln(x) - 9\, ln(y) + \lambda(x^2 - y^2 - 4). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f, unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$, sind die sogenannten Lagrange Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda)=0 &\Rightarrow \frac{16}{x}+2\,\lambda\,x=0, && \text{(I)}\\ F_y(x,y,\lambda)=0 &\Rightarrow \frac{-9}{y}-2\,\lambda\,y=0, && \text{(II)}\\ F_\lambda(x,y,\lambda)=0 &\Rightarrow x^2-y^2-4=0. && \text{(III)} \end{aligned}$$

Aus (I) erhalten wir

$$16=-2\,\lambda\,x^2. \qquad \text{(IV)}$$

Aus (II) erhalten wir

$$-9=2\,\lambda\,y^2. \qquad \text{(V)}$$

Dividieren wir (IV) mit (V) ergibt dies

$$-\frac{16}{9}=\frac{-2\,\lambda\,x^2}{2\,\lambda\,y^2}=-\frac{x^2}{y^2},$$

d.h.,

$$x^2=\frac{16}{9}\,y^2. \qquad \text{(VI)}$$

Wir setzen (VI) in (III) und erhalten:

$$\frac{16}{9}\,y^2-y^2-4=0 \Leftrightarrow \frac{7}{9}\,y^2=4 \Leftrightarrow y^2=\frac{36}{7}.$$

Da $y>0$ (sonst wäre $\ln(y)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$y=\frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Nutzen wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$x^2=\frac{16}{9}\,\frac{36}{7}=\frac{64}{7}.$$

Da $x>0$ (sonst wäre $\ln(x)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$x=\frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Es folgt, dass $P=\left(\frac{8}{\sqrt{7}},\frac{6}{\sqrt{7}}\right)$ ein Kandidate für eine Extremalstelle von f unter Nebenbedingung ist.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $x^2 - y^2 - 4 = 0$, um x als eine Funktion von y zu erhalten, d.h., $x = \pm\sqrt{y^2+4}$. Da $x > 0$ (sonst wäre $\ln(x)$ nicht definiert), erhalten wir

$$x = \sqrt{y^2+4}. \tag{VII}$$

Wir ersetzen nun im Ausdruck f x mit $\sqrt{y^2+4}$, d.h., wir definieren die Funktion h als

$$h(y) = f(\sqrt{y^2+4}, y) = 16\,\ln(\sqrt{y^2+4}) - 9\,\ln(y).$$

Die Optimierung unter Nebenbedingung von f, gegeben die Nebenbedingung $x^2 - y^2 - 4 = 0$, ist äquivalent zur Optimierung ohne Nebenbedingung von h. Es folgt, dass wir die notwendige Bedingung $h'(y) = 0$ nach einer Extremalstelle y von h lösen. Es gilt:

$$h'(y) = \frac{16}{\sqrt{y^2+4}}\,\frac{2\,y}{2\,\sqrt{y^2+4}} - \frac{9}{y} = \frac{16\,y}{y^2+4} - \frac{9}{y}.$$

Es folgt, dass:

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{16\,y}{y^2+4} - \frac{9}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{16\,y^2 - 9\,(y^2+4)}{(y^2+4)\,y} = 0 \Leftrightarrow \frac{7\,y^2 - 36}{(y^2+4)\,y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Da $y > 0$ (sons wäre $\ln(y)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$y = \frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Benutzen wir (VII), erhalten wir:

$$x = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion sind:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle x;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

(i) ist erfüllt für alle $c \geq 0$. Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad = \quad \int_{1}^{4} c\, e^{2\sqrt{x}}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Wir berechnen das Integral mittels Substitutionsregel. Wir setzen $y = 2\sqrt{x}$, somit ist $\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Es folgt,

$$\int_{1}^{4} c\, e^{2\sqrt{x}}\, \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad = \quad \int_{2}^{4} c\, e^{y}\; dy = c\, e^{y}\Big|_{2}^{4} = c\,(e^4 - e^2).$$

Im Weiteren erhalten wir:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \Leftrightarrow 1 = c\,(e^4 - e^2) \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^4 - e^2} > 0.$$

Folglich muss c gleich

$$c = \frac{1}{e^4 - e^2}$$

sein, damit f eine Dichtefunktion ist.

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Es gilt

$$\int_{1}^{2} \frac{4}{3}\, x^5\, \ln\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \int_{1}^{2} \frac{4}{3}\, x^5\, \ln\left(x^{-1}\right)\, dx = \int_{1}^{2} \frac{4}{3}\, x^5\, (-1)\, \ln(x)\, dx = -\int_{1}^{2} \frac{4}{3}\, x^5\, \ln(x)\, dx.$$

Wir berechnen das Integral $\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, \ln(x)\, dx$ mittels der partiellen Integralregel. Sei

$$v'(x) = \frac{4}{3}\, x^5$$

und

$$u(x) = \ln(x).$$

Also ist,

$$v(x) = \frac{4}{3}\,\frac{1}{6}\, x^6 = \frac{2}{9}\, x^6$$

und

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \underbrace{\frac{4}{3}\,x^5}_{=v'(x)}\ \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\ dx \\
&= \left[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\ \underbrace{\frac{2}{9}\,x^6}_{=v(x)}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{2}{9}\,x^6}_{=v(x)}\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\ dx \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \frac{2}{9}\int_1^2 x^5\,dx \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \left[\frac{2}{9}\,\frac{1}{6}\,x^6\right]_1^2 \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \left[\frac{1}{27}\,x^6\right]_1^2 \\
&= \ln(2)\,\frac{2}{9}\,2^6 - \ln(1)\,\frac{2}{9}\,1^6 - \frac{1}{27}\,\left(2^6 - 1^6\right) \\
&= \ln(2)\,\frac{128}{9} - \frac{63}{27} \\
&= \ln(2)\,\frac{128}{9} - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\int_1^2 \frac{4}{3}\,x^5\ \ln\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = -\int_1^2 \frac{4}{3}\,x^5\ \ln(x)\ dx = \frac{7}{3} - \frac{128}{9}\ \ln(2).$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Folgendes gilt:

$$A\,A^T \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ 1+a & 1+b^2+a^2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb erhalten wir,

$$\begin{aligned} AA^T \text{ singulär} &\Leftrightarrow \det(AA^T) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,(1+b^2+a^2) - (1+a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2\,b^2 + 2\,a^2 - 1 - 2\,a - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\,a + a^2 + 2\,b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-a)^2 + 2\,b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ und } b = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass AA^T singulär für $(a, b) = (1, 0)$ ist.

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Wir wenden die Gauss Methode an:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (:2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (:2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ -\frac{1}{2}\,(II) \\ +\frac{1}{2}\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(III) \\ \\ -(III) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,(IV) \\ -\frac{1}{2}\,(IV) \\ +\frac{1}{2}\,(IV) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Es folgt, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (0.5,1)^T$ ist

$$\mathbf{grad} f(0.5,1).$$

Folglich ist die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (0.5,1)^T$ genau dann durch $\mathbf{n}$ gegeben, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0.5,1).$$

Es muss Folgendes gelten:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a\,x^2\,y+a^2\,y^2}\,2\,a\,x\,y \\ e^{a\,x^2\,y+a^2\,y^2}\,(a\,x^2+2\,a^2\,y) \end{pmatrix} = e^{a\,x^2\,y+a^2\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,a\,x\,y \\ a\,x^2+2\,a^2\,y \end{pmatrix}.$$

D.h.,

$$\mathbf{grad} f(0.5,1) = e^{\frac{a}{4}+a^2}\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{4}+2\,a^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0.5,1) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} = e^{\frac{a}{4}+a^2}\begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{4}+2\,a^2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\lambda\,e}{\lambda\,e} = \frac{e^{\frac{a}{4}+a^2}\,a}{e^{\frac{a}{4}+a^2}\,\left(\frac{a}{4}+2\,a^2\right)} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 = \frac{a}{\frac{a}{4}+2\,a^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a}{4}+2\,a^2 = a \\
\Leftrightarrow\quad & a\left(2\,a-\frac{3}{4}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 0 \text{ or } a = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Da angenommen wird, dass a streng positiv sei ($a > 0$), ist die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (0.5,1)^T$ genau dann gleich $\mathbf{n}$, wenn $a = \frac{3}{8}$.

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Wir wenden die Gauss Methode an:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 1 & 0 & 3\,m & m^2 \\ 0 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(I) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2-m \\ 0 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (II)\leftrightarrow(III) \\ (III)\leftrightarrow(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2-m \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\,m\,(II) \\ \\ +2\,m\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2\,m^2 & m-2\,m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 3\,m-2+2\,m^2 & m^2-m+2\,m \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2\,m^2 & -m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 2\,m^2+3\,m-2 & m^2+m \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu

$$2\,m^2 + 3\,m - 2 = 0 \text{ und } m^2 + m \neq 0.$$

Es gilt:

$$2\,m^2 + 3\,m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\,(m+2)\left(m - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{2} \text{ or } m_2 = -2.$$

Da $m_1^2 + m_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \neq 0$ und $m_2^2 + m_2 = 4 - 2 = 2 \neq 0$ schliessen wir, dass das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung hat, wenn $m \in \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

$\lambda = 2$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - 2\,I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A - 2\,I) &= \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 - 2 + 1 + 1 - 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$ löst das System

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir wenden die Gauss Methode an und erhalten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \leftrightarrow (II) \\ (I) \leftrightarrow (II) \\ \end{matrix} \quad &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(I) \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(II) \\ \\ -2\,(II) \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Letzteres lineare Gleichungssystem ist

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right. .$$

Sei $x_3 = t$ die freie Variable, wir erhalten dann:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um einen Eigenvektor mit Länge 4 zu erhalten, brauchen wir:

$$4 = |\mathbf{x}| = \sqrt{(-t)^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{3\,t^2} = |t|\,\sqrt{3}.$$

Es folgt,

$$|t| = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t \in \{-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\}.$$

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 1 + (3-\lambda) - 2(2-\lambda) - 1(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^2 (3-\lambda) + (2-\lambda) - 2(2-\lambda) - (2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^2 (3-\lambda) - 2(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda) \left[(2-\lambda)(3-\lambda) - 2\right] \\
&= (2-\lambda) \left[4 - 5\lambda + \lambda^2\right] \\
&= (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2, 4\},$$

d.h., die Eigenwerte von A sind 1,2 und 4.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Als erstes ermitteln wir die normale Form der Differenzengleichung:

$$y_{k+1} = \frac{2a-2}{a^2-1} y_k + \frac{ab - (a-b) - 1}{a^2-1} = \frac{2(a-1)}{(a-1)(a+1)} y_k + \frac{(a+1)(b-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2}{a+1} y_k + \frac{b-1}{a-1},$$

d.h.,

$$y_{k+1} = \frac{2}{a+1} y_k + \frac{b-1}{a-1}.$$

Die Koeffizienten sind deshalb

$$A = \frac{2}{a+1} \text{ und } B = \frac{b-1}{a-1}.$$

Wir erhalten

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{b-1}{a-1}}{1-\frac{2}{a+1}} = \frac{\frac{b-1}{a-1}}{\frac{a+1-2}{a+1}} = \frac{(b-1)\,(a+1)}{(a-1)^2}.$$

und die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{2}{a+1}\right)^k \left(y_0 - \frac{(b-1)\,(a+1)}{(a-1)^2}\right) + \frac{(b-1)\,(a+1)}{(a-1)^2}.$$

Frage 3 (b2) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann monoton, wenn $A > 0$. Es gilt:

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a+1} > 0 \Leftrightarrow a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1.$$

Merke, dass b in der letzten Bedingung nicht vorkommt, deshalb darf b willkürlich ausgewählt werden. Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann monoton, wenn $a \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (b3) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|A| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{a+1}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{a+1}\right|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4}{(a+1)^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 4 < (a+1)^2 = a^2 + 2\,a + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a - 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a+3)(a-1) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a < -3 \text{ or } a > 1. \end{aligned}$$

Merke, dass b auch in dieser letzten Bedingung nicht vorkommt, deshalb darf b willkürlich ausgewählt werden. Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann konvergent, wenn $a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (b4) (4 Punkte)

Falls die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$ konvergiert, haben wir $\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star$. Folglich ist eine notwendige Bedingung für Konvergenz zu 1 $y^\star = 1$. Es gilt:

$$y^\star = 1 \Leftrightarrow \frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (b-1)(a+1) = (a-1)^2 \Leftrightarrow b - 1 = \frac{(a-1)^2}{a+1} \Leftrightarrow b = \frac{(a-1)^2}{a+1} + 1.$$

Wir erhalten des Weiteren:

$$b = \frac{(a-1)^2}{a+1} + 1 = \frac{a^2 - 2a + 1 + a + 1}{a+1} = \frac{a^2 - a + 2}{a+1}.$$

Eine hinreichende Bedingung für Konvergenz folgt von (b3), d.h.,

$$a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

Folglich konvergiert die allgemeine Lösung genau dann zu 1, wenn

$$(a, b) \in \left\{ \left(a, \frac{a^2 - a + 2}{a+1} \right) \, : \, a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \right\}.$$

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

5. Februar 2014

Teil I: Offene Aufgaben

Allgemeine Hinweise für offene Fragen:

(i) Provisorische Berechnungen und Skizzen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind, gut gekennzeichnet als Entwurf, ebenfalls abzugeben.

(ii) Die Lösung zu einer Teilaufgabe darf nur in den unmittelbar auf die Teilaufgabe folgenden Lösungsplatz geschrieben werden. Sollte dieser Platz ausnahmsweise nicht ausreichen, so benützen Sie die entsprechende Rückseite oder zusätzlich ein separates Blatt. In jedem Fall ist auf die Rückseite oder auf das zusätzliche Blatt zu verweisen. Separate Blätter sind ausserdem mit dem Namen zu versehen.

(iii) Die definitive Lösung darf von jeder Teilaufgabe nur eine Version enthalten. Dabei müssen alle Rechenschritte klar ersichtlich sein.

(iv) Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den obenerwähnten Punktzahlen.

(v) Es werden nur Lösungen bewertet, welche in den dafür vorgesehenen Lösungsplatz geschrieben wurden oder auf der entsprechenden Rückseite bzw. auf separaten Blättern mit entsprechenden Verweisen stehen.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 10\,\ln(x) - 2\,x\,y - 8\,x + y^2, \quad x > 0,$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = 12\,x + 20\,y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = 0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r = 0, \quad x > 0,\; y > 0,\; r \in \mathbb{R},$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

Frage 1 (b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \sqrt{2\,\ln(2)} \\ c^2\,x\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}, & \text{für } \sqrt{2\,\ln(2)} \le x \le \sqrt{2\,\ln(4)} \\ \frac{c}{3}\,x^3, & \text{für } \sqrt{2\,\ln(4)} < x \le 2 \\ 0, & \text{für } x > 2 \end{cases}, \quad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Aufgabe 1

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_1^e x^4 \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right) dx.$$

Aufgabe 2 (28 Punkte)

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist die Matrix $A^T A$ regulär?

Aufgabe 2

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Frage 2 (b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(a\,x^2\,y + a^2\,y^2), \quad x > 0,\, y > 0, \quad a > 0.$$

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0.5\,\sqrt{e} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 2

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,m\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & m \\ x_1 & & & + & 3\,m\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem *genau eine* Lösung?

Aufgabe 2

Frage 2 (d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 3 (23 Punkte)

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor mit Länge 12.

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 3

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Aufgabe 3

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} - (a+3)\,y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Aufgabe 3

Frage 3 (b2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} - (a+3)\,y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Aufgabe 3

Frage 3 (b3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Aufgabe 3

Frage 3 (b4) (4 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Differenzengleichung eine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$ mit $y_5 = 5$ und $y_7 = 7$?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (23 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf multiple-choice Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Wenn Sie sich bei einer Antwort umentscheiden, **füllen Sie das falsche Kästchen komplett aus** und kreuzen das richtige an. Beispiel:

(a)	(b)	(c)	(d)
☐	■	☐	☒

(v) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktionen f und g sind Dichtefunktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist

(a) $f + g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{3}\,f + \frac{4}{3}\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(c) $f\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(d) $\frac{1}{3}\,f + \frac{2}{3}\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 2 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral $\int_0^{4\,\pi} \cos(x)\,dx$ ist

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 3 (3 Punkte)

B und C sind $(n \times n)$ Matrizen und $A = B\,C$ ist regulär. Dann

(a) ist B regulär und C ist singulär.

(b) ist B singulär und C ist regulär.

(c) sind B und C singulär.

(d) sind B und C regulär.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 4 (2 Punkte)

A ist eine $(m \times n)$ Matrix und $B = A\,A^T$ ist regulär. Dann

(a) ist $\mathrm{rg}(B) > \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(b) ist $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(c) ist $\mathrm{rg}(B) < \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(d) sind alle Fälle $(>, <$ und $=)$ sind möglich.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 5 (3 Punkte)

Für das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt $\operatorname{rg}(A) = 3$ und $\operatorname{rg}(A; \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine (4×5) Matrix ist.

(a) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 1.

(d) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 2.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 6 (2 Punkte)

Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
hat Rang

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 7 (4 Punkte)

W ist ein Vektorraum des $\mathbb{R}^5$ und hat Dimension 4. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in W$ und $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}]$ die 5×5 Matrix mit Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$. Dann

(a) ist $\mathrm{rg}(A) = 3$.

(b) ist $\mathrm{rg}(A) = 4$.

(c) ist $\mathrm{rg}(A) = 5$.

(d) ist A singulär.

Multiple-Choice-Fragen

Frage 8 (3 Punkte)

Die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 2\,y_k + 1 = 0$$

ist

(a) monoton, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{1}{7}$.

(b) monoton, explosiv.

(c) oszillierend, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{1}{7}$.

(d) oszillierend, explosiv.

Mathematik II
Musterlösung Nacholprüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

8. Februar 2014

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Maxima, Minima und Sattelpunkte einer Funktion f sind stationäre Punkte von f. Ein Punkt (x_0, y_0) ist ein stationärer Punkt von f, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Daher müssen wir die ersten partiellen Ableitungen von f berechnen. Es gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{10}{x} - 2\,y - 8$$

und

$$f_y(x, y) = -2\,x + 2\,y.$$

Daraus folgt:

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow -2\,x_0 + 2\,y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Wir setzen die Gleichung $x_0 = y_0$ in die Bedingung $f_x(x_0, y_0) = 0$ ein und erhalten

$$\frac{10}{x_0} - 2\,x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 10 - 2\,x_0^2 - 8\,x_0 = 0 \Leftrightarrow -2\,(x_0^2 + 4\,x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow -2\,(x_0 + 5)\,(x_0 - 1) = 0.$$

Wir erhalten zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$, die $y_1 = x_1 = 1$ und $y_2 = x_2 = -5$ implizieren. Da $x > 0$ (andernfalls wäre der Logarithmus nicht definiert), ist

$$P = (x_1, y_1) = (1, 1)$$

der einzige stationäre Punkt von f.
Wir prüfen nun, ob der stationäre Punkt P eine Extremalstelle von f ist. Eine hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle im stationären Punkt (x_0, y_0) von f ist

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Daher benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\frac{10}{x^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -2. \end{aligned}$$

Für $P = (1, 1)$ gilt:

$$f_{xx}(1, 1)\, f_{yy}(1, 1) - (f_{xy}(1, 1))^2 = (-10) \cdot 2 - (-2)^2 = -24 < 0.$$

Daher ist $P = (1, 1)$ ein Sattelpunkt von f.

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Das zu lösende Problem lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = 12\,x + 20\,y \to \text{max! min!} \qquad (1)\\ &\text{sodass}\varphi(x,y) = 0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine Optimierung unter Nebenbedingungen. Wir wenden die Lagrange-Methode an.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) = 12\,x + 20\,y + \lambda\,(0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r)\,.$$

Notwendige Bedingungen für eine Extremalstelle (x_0, y_0, λ_0) sind die folgenden Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 12 + \lambda_0\,\frac{0.6}{x_0} = 0 \qquad (2)$$

$$F_y(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 20 + \lambda_0\,\frac{1}{y_0} = 0 \qquad (3)$$

$$F_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0.6\,\ln(x_0) + \ln(y_0) - r = 0 \qquad (4)$$

Wir lösen die Gleichungen (2) und (3) nach λ_0 auf und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{-12\,x_0}{0.6} = -20\,x_0 \quad \text{und}\\ \lambda_0 &= -20\,y_0. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen durcheinander teilen, erhalten wir:

$$1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{-20\,x_0}{-20\,y_0} = \frac{x_0}{y_0},$$

d. h.

$$x_0 = y_0.$$

Wir setzen $x_0 = y_0$ in die Gleichung (4) ein und erhalten

$$0.6\,\ln(x_0) + \ln(x_0) - r = 0 \Leftrightarrow 1.6\,\ln(x_0) = r \Leftrightarrow \ln(x_0) = \frac{r}{1.6} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{r}{1.6}}.$$

Unter Verwendung von $x_0 = y_0$ und der Gleichung (2) kommen wir schliesslich zum Ergebnis, dass der einzige Punkt, der den Lagrange-Bedingungen (2)-(4) genügt,

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)$$

ist.
Daraus folgt, dass

$$(x_0, y_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter Nebenbedingungen ist.

Nicht verlangt in der Prüfung: Leider sind die Lagrange-Bedingungen nur notwendig, aber nicht hinreichend für eine Extremalstelle der Optimierung unter Nebenbedingungen. Darüber hinaus muss die hinreichende Bedingung überprüft werden. Hinreichende Bedingung für ein Maximum (Minimum) ist

$$\begin{aligned}&2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)\\&\qquad -F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)^2-F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)\,\varphi_x(x_0,y_0)^2>0 \quad (<0).\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi_x(x,y)&=\frac{0.6}{x} &&\Rightarrow\quad \varphi_x\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}}\right)>0\\ \varphi_y(x,y)&=\frac{1}{y} &&\Rightarrow\quad \varphi_y\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}}\right)>0\\ F_{xx}(x,y,\lambda)&=-\lambda\,\frac{0.6}{x^2} &&\Rightarrow\quad F_{xx}\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}},-20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)>0\\ F_{xy}(x,y,\lambda)&=0 &&\Rightarrow\quad F_{xy}\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}},-20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)=0\\ F_{yy}(x,y,\lambda)&=-\lambda\,\frac{1}{y^2} &&\Rightarrow\quad F_{yy}\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}},-20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)>0\end{aligned}$$

Daher haben wir für $(x_0,y_0,\lambda_0)=\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}},-20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)$:

$$\begin{aligned}&2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,\underbrace{F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{=0}\\&\qquad -\underbrace{F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{>0}\,\varphi_y(x_0,y_0)^2-\underbrace{F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{>0}\,\varphi_x(x_0,y_0)^2<0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(x_0,y_0)=\left(e^{\frac{r}{1.6}},e^{\frac{r}{1.6}}\right)$ ein lokales Minimum der Optimierung unter Nebenbedingungen ist.

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Um eine Dichtefunktion zu sein, muss f die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Bedingung (i) ist erfüllt, wenn $c \geq 0$. Bedingung (ii) impliziert:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} c^2\,x\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}\,dx + \int_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} \frac{c}{3}\,x^3\,dx \\
&= c^2 \int_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} x\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}\,dx + \frac{c}{3} \int_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} x^3\,dx \\
&= c^2 \left[e^{\frac{1}{2}\,x^2}\right]_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} + \frac{c}{12}\,\left[x^4\right]_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} \\
&= c^2\,(4-2)) + \frac{c}{12}\,\big(4\,(4-(\ln(4))^2\big) \\
&= 2\,c^2 + \frac{c}{3}\,\big(4-(\ln(4))^2\big)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$2\,c^2 + \frac{c}{3}\,\big(4-(\ln(4))^2\big) - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen:

$$c_{1,2} = \frac{-\frac{1}{3}\,\big(4-(\ln(4))^2\big) \pm \sqrt{\frac{1}{9}\,\big(4-(\ln(4))^2\big)^2 + 8}}{4}.$$

Wir erhalten $c_1 \approx 0.5548$ und $c_2 \approx -0.9012$. Die Lösung c_2 muss ausgeschlossen werden, da Bedingung (i) nicht erfüllt ist. Daher:

$$c = c_1 \approx 0.5548.$$

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Zuerst schreiben wir das Integral wie folgt um:

$$\int_1^e x^4 \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right)\, dx = \int_1^e x^4 \ln\left(x^{-20}\right)\, dx = \int_1^e x^4\,(-20)\,\ln(x)\, dx = -20 \int_1^e x^4 \ln(x)\, dx.$$

In einem zweiten Schritt berechnen wir das Integral $\int_1^e x^4 \ln(x)\, dx$. Wir wenden das Verfahren der partiellen Integration an. Seien $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = x^4$. Dann sind $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \frac{1}{5}x^5$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \underbrace{x^4}_{=v'(x)}\ \underbrace{\ln(x)\, dx}_{=u(x)} \\
&= \Big[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\ \underbrace{\frac{1}{5}x^5}_{=v(x)}\Big]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{5}x^5}_{=v(x)}\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)}\ dx \\
&= \frac{1}{5}\left[\ln(x)\, x^5\right]_1^e - \frac{1}{5}\int_1^e x^4\, dx \\
&= \frac{1}{5}\left[\ln(x)\, x^5\right]_1^e - \frac{1}{5}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^e \\
&= \frac{1}{5}\left(\underbrace{\ln(e)}_{=1}\ e^5\right) - \frac{1}{5}\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0}\ 1^5\right) - \frac{1}{25}\left(e^5 - 1^5\right) \\
&= \frac{1}{5}\cdot e^5 - \frac{1}{25}e^5 + \frac{1}{25} \\
&= \frac{4}{25}\cdot e^5 + \frac{1}{25} \\
&\approx 23.786.
\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\int_1^e x^4 \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right)\, dx = -20\int_1^e x^4 \ln(x)\, dx = -\frac{16}{5}\cdot e^5 - \frac{4}{5} \approx -475.722.$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Die Matrix $A^T\,A$ ist regulär genau dann, wenn $\det(A^T\,A) \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A^T\,A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & a \\ 1+a & a & 1+a^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir

$$\det(A^T\,A) = 2\,(a^2+1) + a\,(1+a) + a\,(1+a) - (1+a)^2 - 2\,a^2 - (1+a^2) = 0.$$

Es folgt, dass $A^T\,A$ singulär für alle $a \in \mathbb{R}$ ist.

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Wir wenden das Gauss-Verfahren an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} :(2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(III) \\ \\ +2\,(III) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ ist gegeben durch

$$\mathbf{grad} f(1,1).$$

Daher ist die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, mit

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1).$$

Folgendes gilt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{a\,x^2\,y + a^2\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,a\,x\,y \\ a\,x^2 + 2\,a^2\,y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2\,y + a\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,x\,y \\ x^2 + 2\,a\,y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2\,a \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1) \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \lambda \begin{pmatrix} 0.5\sqrt{e} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2\,a \end{pmatrix} \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\,0.5\sqrt{e} &=& \frac{2}{1+a} \\ \lambda\sqrt{e} &=& \frac{1+2\,a}{1+a} \end{array} \right. \\
&\quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{1+a} = \frac{1}{2}\,\frac{1+2\,a}{1+a} \\
&\quad\Leftrightarrow\quad 4 = 1 + 2\,a \\
&\quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Wir wenden das Gauss-Verfahren an:

$$
\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 1 & 0 & 3m & m^2 \\ 0 & 1 & m & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -(I) \\ \\ \end{array} \quad
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 0 & -2m & 3m-2 & m^2-m \\ 0 & 1 & m & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (II) \leftrightarrow (III) \\ (III) \leftrightarrow (II) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2m & 2 & m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & -2m & 3m-2 & m^2-m \end{array}\right) \begin{array}{c} -2m\,(II) \\ \\ +2m\,(II) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2m^2 & m-4m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 3m-2+2m^2 & m^2-m+4m \end{array}\right) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2m^2 & -3m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 2m^2+3m-2 & m^2+3m \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu

$$2m^2 + 3m - 2 \neq 0.$$

Es gilt:

$$2m^2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(m+2)\left(m - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{2} \text{ or } m_2 = -2.$$

Daher hat das lineare Gleichungssystem genau dann eine Lösung, wenn $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \right| \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 0 - 0 - 1 \cdot 3 \cdot 8 \\
&= 12 + 12 - 24 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ löst das System

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir wenden das Gauss-Verfahren an und erhalten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \end{matrix} \quad &\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(2) \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4\,(II) \\ \\ -4\,(II) \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & & - & 6\,x_3 & = 0 \\ & x_2 & + & \frac{3}{2}\,x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & = & 6\,x_3 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}\,x_3 \end{array} \right. .$$

Sei $\frac{1}{2}\,x_3 = t$ die freie Variable. Wir erhalten:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\,t \\ -3\,t \\ 2\,t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Um einen Eigenvektor mit Länge 12 zu erhalten, brauchen wir:

$$12 = |\mathbf{x}| = \sqrt{(12\,t)^2 + (-3\,t)^2 + (2\,t)^2} = \sqrt{157\,t^2} = |t|\,\sqrt{57}\,|t|.$$

Daraus folgt

$$|t| = \frac{12}{\sqrt{157}} \Leftrightarrow t \in \{-\frac{12}{\sqrt{157}}, \frac{12}{\sqrt{157}}\}.$$

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 8 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(6-\lambda) + 12 - 24\,(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\,(12 - 8\,\lambda + \lambda^2) - 12 + 24\,\lambda \\
&= 12 - 8\,\lambda + \lambda^2 - 12\,\lambda + 8\,\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 24\,\lambda \\
&= 4\,\lambda + 9\,\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= \lambda\,(4 + 9\,\lambda - \lambda^2).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ oder } \lambda_2 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \text{ oder } \lambda_3 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Daraus folgt, dass die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \approx -0.424$ und $\lambda_3 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2} \approx 9.424$ sind.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Zunächst ermitteln wir die Normalform der Differenzengleichung. Es gilt:

$$y_{k+1} = \frac{a+3}{a}\, y_k + \frac{2}{a}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Das heisst, die Koeffizienten sind

$$A = \frac{a+3}{a} \text{ und } B = \frac{2}{a}.$$

Wir erhalten:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{2}{a}}{1 - \frac{a+3}{a}} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{a-(a+3)}{a}} = -\frac{2}{3}.$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung lautet:

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}.$$

Frage 3 (b2) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann monoton, wenn $A > 0$. Es gilt:

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a} > 0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $a > 0$: $\frac{a+3}{a} > 0 \Leftrightarrow a + 3 > 0 \Leftrightarrow a > -3$;

(ii) $a < 0$: $\frac{a+3}{a} > 0 \Leftrightarrow a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -3$;

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung genau dann monoton ist, wenn $a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$.

Frage 3 (b3) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|A| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a+3}{a}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a+3}{a}\right|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{(a+3)^2}{a^2} < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + 6\,a + 9 < a^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 6\,a + 9 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a < -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann konvergent, wenn $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \setminus \{-3\}$.

Frage 3 (b4) (4 Punkte)

Lösung 1:
Aus Frage 3 (b1) wissen wir, dass

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}.$$

Es gilt

$$y_k + \frac{2}{3} = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y_5 + \frac{2}{3} &= \left(\frac{a+3}{a}\right)^5 \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) \\ y_7 + \frac{2}{3} &= \left(\frac{a+3}{a}\right)^7 \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen durcheinander teilen, erhalten wir:

$$\frac{y_7 + \frac{2}{3}}{y_5 + \frac{2}{3}} = \left(\frac{a+3}{a}\right)^2 = \frac{(a+3)^2}{a^2}.$$

Da

$$\frac{y_7 + \frac{2}{3}}{y_5 + \frac{2}{3}} = \frac{7 + \frac{2}{3}}{5 + \frac{2}{3}} = \frac{23}{17},$$

erhalten wir:

$$\frac{23}{17} = \frac{(a+3)^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{23}{17}\,a^2 = a^2 + 6\,a + 9 \Leftrightarrow \frac{6}{17}\,a^2 - 6\,a - 9 = 0 \Leftrightarrow 2\,a^2 - 34\,a - 51 = 0.$$

Die Lösungen sind:

$$a_{12} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 2\cdot(-51)}}{4} = \frac{34 \pm \sqrt{1,564}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{391}}{2},$$

d. h., $a_1 \approx 18.387$ und $a_2 \approx -1.387$.

Lösung 2:
Aus der Rekursion

$$a\,y_{k+1} - (a+3)\,y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} a\,y_7 - (a+3)\,y_6 &= 2 \\ a\,y_6 - (a+3)\,y_5 &= 2 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a, die zweite Gleichung mit $(a + 3)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} a^2\, y_7 - a\,(a+3)\, y_6 &= 2\,a \\ a\,(a+3)\, y_6 - (a+3)^2\, y_5 &= 2\,(a+3) \end{aligned}$$

Dann addieren wir diese beiden Gleichungen und erhalten:

$$\begin{aligned} & a^2\, y_7 - a\,(a+3)\, y_6 + a\,(a+3)\, y_6 - (a+3)^2\, y_5 = 2\,a + 2\,(a+3) \\ & \Leftrightarrow \quad a^2\, y_7 - (a+3)^2\, y_5 = 2\,a + 2\,(a+3) \\ & \Leftrightarrow \quad 7\,a^2 - 5\,(a+3)^2 = 4\,a + 6 \\ & \Leftrightarrow \quad 7\,a^2 - 5\,a^2 - 30\,a - 45 = 4\,a + 6 \\ & \Leftrightarrow \quad 2\,a^2 - 34\,a - 51 = 0 \text{ (dieselbe Gleichung wie in Lösung 1).} \end{aligned}$$

Teil I: Multiple-choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☒	☐	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1 (d). Eine Dichtefunktion h in $\mathbb{R}$ muss die zwei Bedingungen $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 1$ erfüllen. Nur die Funktion in (d) erfüllt diese Bedingungen.

Q2 (c). Da $\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$, folgt $\int_0^{4\pi} \cos(x)\,dx = \sin(4\,\pi)-\sin(0) = 0-0 = 0$.

Q3 (d). Da A regulär ist, gilt $\det(A) \neq 0$. Da allerdings $\det(A) = \det(B)\,\det(C)$, gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(B) \neq 0$ und $\det(C) \neq 0$. Daher müssen B und C regulär sein.

Q4 (b). B und B^{-1} sind reguläre Matrizen derselben Dimension. Daher haben sie denselben Rang.

Q5 (a). Da $\operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A;\mathbf{b})$, kann $\mathbf{b}$ nicht als Linearkombination der Spaltenvektoren von A geschrieben werden. Daher hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Q6 (c). Da $\det(A) \neq 0$, ist A regulär mit $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Q7 (d). 5 Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum sind linear abhängig. Daher muss die korrespondierende Matrix singulär sein.

Q8 (c). Die Normalform der Differenzengelichung lautet $y_{k+1} = -\frac{2}{5}\,y_k - \frac{1}{5}$, d. h., $A = -\frac{2}{5}$ und $B = -\frac{1}{5}$. Da $-1 < A < 0$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem konvergiert die allgemeine Lösung zu $y^\star = \frac{B}{1-A} = -\frac{1}{7}$.

Prüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I
Prüfung Frühlingssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

23. Juni 2014

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x, y) = x + 2\,y + \frac{a^4}{x\,y^2},$$

wobei $a > 0$ ein reeller Parameter ist.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremalstellen, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (8 Punkte)

Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = x + \ln(y^2) \to \text{min! oder max!} \\ &\quad \text{so dass } \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ c + \frac{\sin(\ln(x))}{x}, & \text{für } 1 \leq x \leq e \\ 0, & \text{für } x > e \end{cases},$$

wobei c ein reeller Parameter ist.

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion auf $[1, e]$?

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right)\, dx,$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ a+1 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a und b ist das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ linear abhängig?

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2\,a \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A?

Aufgabe 2

(c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + a\,y^2 + 3\,x + 8\,y\right), \quad x, y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein strikt positiver reeller Parameter ist.

Bestimmen Sie a so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (1, 0.5)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & m\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & m+1 \\ x_1 & & & + & 2\,m\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung?

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

(a) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(b) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

(c) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(d) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion f erfüllt $f(x) \geq -3$ für alle $x \in [0, 10]$ und $\int_0^{10} f(x)\, dx = 5$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion auf $[0, 10]$?

(a) $g_1(x) = f(x) + 3$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{35}\, f(x) + 3$.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{35}\, f(x) + \frac{3}{35}$.

(d) $g_4(x) = f(x) + \frac{3}{35}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (3 Punkte)

Die Matrix $A = (a_{ij})$ hat die Dimension 6×3. Die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist regulär. Die Matrix A

(a) hat den Rang 2.

(b) hat den Rang 3.

(c) hat den Rang 5.

(d) ist regulär.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

Die Determinante der quadratischen Matrix A ist gleich 1. In diesem Fall

(a) ist A singulär.

(b) ist A nicht invertierbar.

(c) ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = -1$.

(d) ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = 1$.

Aufgabe 3

Frage 5 (2 Punkte)

Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear unabhängig.

(a) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear unabhängig für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear abhängig für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(d) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Aufgabe 3

Frage 6 (3 Punkte)

Für das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist bekannt, dass $\mathrm{rg}(A) = 5$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 5$, wobei A eine 6×10 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 5.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 6.

Aufgabe 3

Frage 7 (5 Punkte)

Sei $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem. Mit dem Gaußschen Eliminiationsverfarhren erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ (A^\star, \mathbf{b}^\star) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^\star & b_1^\star \\ 0 & 1 & 0 & b_2^\star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

wobei $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

(a) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

(b) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat.

(c) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, abhängig von den Parametern $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Frage 8 (4 Punkte)

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert der quadratischen Matrix A und $\mathbf{x} \neq 0$ eine dazugehöriger Eigenvektor.

(a) $3\,\lambda$ ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(b) λ^3 ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(c) λ ist ein Eigenwert von A^3 und $3\,\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(d) $3\,\lambda^3$ ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Sei $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Die marginalen Kosten entsprechen $K'(x) = 1 + x + x^2 + \sin(x)$ und die Fixkosten sind $K(0) = 20$. Welche der folgenden Funktionen ist die Kostenfunktion?

(a) $K(x) = x + x^2 + x^3 - \sin(x) + 20.$

(b) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + 20.$

(c) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \sin(x) + 21.$

(d) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + 21.$

Aufgabe 4

Frage 2 (2 Punkte)

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$, sind genau dann orthogonal, wenn:

(a) $t = 5$.

(b) $t \in \{-5, 5\}$.

(c) $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$.

(d) $t = 0$.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) hat den Rang 2.

(b) hat den Rang 3.

(c) hat den Rang 4.

(d) hat den Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Das reguläre lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

hat

(a) keine Lösung.

(b) unendlich viele Lösungen.

(c) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Zahlen ist ein Eigenwert der Matrix A?

(a) -1.

(b) 0.

(c) 4.

(d) 5.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,y_{k+1} - 2\,y_k + 5 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 2\,y_k - 12 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) divergiert.

(b) konvergiert monoton gegen 2.

(c) oszillierend konvergiert gegen 2.

(d) konvergiert monoton gegen 3.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} - y_k + (a^2-4) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert genau dann monoton gegen 0, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2014

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multi-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2014

2’200 Mathematik B

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik II
Musterlösungen Prüfung Frühlingssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

23. Juni 2014

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 1 - \frac{a^4}{x^2\,y^2}, \\ f_y(x,y) &= 2 - 2\,\frac{a^4}{x\,y^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^4}{(x^\star)^2\,(y^\star)^2} = 0 \\ 2 - 2\,\frac{a^4}{x^\star\,(y^\star)^3} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2 - 2\,\frac{a^4}{x^\star\,(y^\star)^3} = 0$ erhalten wir

$$x^\star = \frac{a^4}{(y^\star)^3}.$$

Wir setzen dieses Resultat in $1 - \frac{a^4}{(x^\star)^2\,(y^\star)^2} = 0$ ein und erhalten

$$1 - \frac{a^4}{\frac{a^8}{(y^\star)^6}\,(y^\star)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{(y^\star)^4}{a^4} = 0 \Leftrightarrow y^\star = a \text{ oder } y^\star = -a.$$

Daraus folgt:

$$P_1 = (a, a) \text{ und } P_2 = (-a, -a)$$

sind stationäre Punkte, d.h. Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2\,a^4}{x^3\,y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{6\,a^4}{x\,y^4}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{2\,a^4}{x^2\,y^3}. \end{aligned}$$

Für $P_1 = (a,a)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(a,a) = \frac{2}{a} > 0 \\ f_{yy}(a,a) = \frac{6}{a} > 0 \\ f_{xx}(a,a)\, f_{yy}(a,a) - (f_{xy}(a,a))^2 = \frac{12}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{8}{a^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daraus folgt, dass $P_1 = (a,a)$ ein Minimum ist.

Für $P_2 = (-a,-a)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\,(-a,-a) = -\frac{2}{a} < 0 \\ f_{yy}\,(-a,-a) = -\frac{6}{a} < 0 \\ f_{xx}\,(-a,-a)\;\; f_{yy}\,(-a,-a) - \left(f_{xy}\,(-a,-a)\right)^2 = \frac{12}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{8}{a^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daraus folgt, dass $P_2 = (-a,-a)$ ein Maximum ist.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x + \ln(y^2) + \lambda(x^2 + y^2 - 20). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 1 + 2\,\lambda\,x = 0, && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{2}{y} + 2\,\lambda\,y = 0, && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 20 = 0. && \text{(III)} \end{aligned}$$

Aus (I) erhalten wir

$$-1 = 2\,\lambda\,x. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$-\frac{2}{y} = 2\,\lambda\,y. \tag{V}$$

Dividieren wir (IV) durch (V) ergibt dies

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{y},$$

d.h.

$$y^2 = 2\,x. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$x^2 + y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\,x - 20 = 0.$$

Da $2\,x = y^2$ (cf. VI) und $y^2 > 0$ (sonst wäre $\ln(y^2)$ nicht definiert) ist gilt $x > 0$. Daraus folgt:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{84}}{2} = -1 + \sqrt{21} = \sqrt{21} - 1.$$

Nutzen wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$y^2 = 2\,x = 2\,\sqrt{21} - 2,$$

d.h.

$$y = \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2} \text{ oder } y = -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{21} - 1, \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}\right) \text{ und } P_2 = \left(\sqrt{21} - 1, -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}\right)$$

Kandidaten für Extremalstellen von f unter der o. g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:

Wir benutzen die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$, um y als Funktion von x zu erhalten, d.h. $y^2 = 20 - x^2$. Ausserdem, da $y^2 > 0$ ($y = 0$ ist ausgeschlossen, da andernfalls $\ln(y^2)$ nicht definiert wäre), gilt $20 - x^2 > 0$, d.h. $-\sqrt{20} < x < \sqrt{20}$. Wir ersetzen nun y^2 durch $20 - x^2$ im Ausdruck für f, d.h. wir definieren die Funktion h als

$$h(x) = f(x, 20 - x^2) = x + \ln(20 - x^2).$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ für eine Extremalstelle x von h. Es gilt:

$$h'(x) = 1 - \frac{2\,x}{20 - x^2}.$$

Daraus folgt:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2\,x}{20 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\,x - 20 = 0 \overset{x \in (-\sqrt{20}, \sqrt{20})}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{21} - 1.$$

Unter Verwendung von $y^2 = 20 - x^2$ erhalten wir

$$y = \sqrt{2\sqrt{21} - 2} \text{ oder } y = -\sqrt{2\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{21} - 1, \sqrt{2\sqrt{21} - 2}\right) \text{ und } P_2 = \left(\sqrt{21} - 1, -\sqrt{2\sqrt{21} - 2}\right)$$

Kandidaten für eine Extremalstelle von f unter der o. g. Nebenbedingung.

(c) (5 Punkte)

Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion auf $[1, e]$ sind:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, e]$;

(ii) $\int_1^e f(x)\,dx = 1$.

Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_1^e f(x)dx \\ &= \int_1^e \left[c + \frac{\sin(\ln(x))}{x}\right] dx \\ &= \int_1^e c\,dx + \int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx \\ &= c\,(e-1) + \int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Wir setzen $y = \ln(x)$, somit ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Es gilt:

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \int_0^1 \sin(y)\,dy = [-\cos(y)]_0^1 = 1 - \cos(1).$$

Daraus folgt:

$$1 = c\,(e-1) + 1 - \cos(1) \Leftrightarrow c = \frac{\cos(1)}{e-1}.$$

Da für $c = \frac{\cos(1)}{e-1}$ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, e]$ gilt, ist Bedingung (i) auch erfüllt. Daher muss

$$c = \frac{\cos(1)}{e-1}$$

sein, damit f eine Dichtefunktion auf $[1, e]$ ist.

(d) (5 Punkte)

Es gilt:

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) dx = \int x^n \ln(x^{-m})\, dx = \int x^n (-m) \ln(x)\, dx = -m \int x^n \ln(x)\, dx.$$

Wir berechnen das Integral $\int x^n \ln(x)\, dx$ mit der Methode der partiellen Integration. Sei

$$u(x) = \ln(x)$$

und

$$v'(x) = x^n.$$

Dann gilt:

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^n}_{=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} dx \\
&= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) dx = -m \int x^n \ln(x)\, dx = \frac{-m\, x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Das System der Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn die Matrix

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & a+1 \end{pmatrix}$$

mit den Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ singulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
A \text{ ist singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & a+1 \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,(a+1) - a\,b = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,a + 2 - a\,b = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a\,(2-b) = -2 \\
&\Leftrightarrow \quad a = \frac{2}{b-2} \text{ und } b \neq 2. \\
(\quad &\Leftrightarrow \quad b = \frac{2\,a+2}{a} \text{ und } a \neq 0.)
\end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ ist linear abhängig} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, b \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ a = \frac{2}{b-2} \right\}.$$

Oder:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ ist linear abhängig} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ b = \frac{2\,a+2}{a} \right\}.$$

(b) (4 Punkte)

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = \det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} a & 2\,a \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a\,(a+2) - 2\,a\,(a+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + 2\,a - 2\,a^2 - 2\,a = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -a^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a = 0.
\end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $a = 0$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (6 Punkte)

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x, y)^T = (1, 0.5)^T$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 0.5)$$

mit $\lambda > 0$.

Es gilt:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + a\,y^2 + 3\,x + 8\,y} \begin{pmatrix} 6\,a\,x + a^2\,y + 3 \\ a^2\,x + 2\,a\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1, 0.5) = \frac{1}{3\,a + 0.5\,a^2 + 0.25\,a + 7} \begin{pmatrix} 6\,a + 0.5\,a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 0.5) \\
\Leftrightarrow\quad &\lambda \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{3\,a + 0.5\,a^2 + 0.25\,a + 7} \begin{pmatrix} 6\,a + 0.5\,a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\quad &\frac{\lambda\,\pi}{\lambda\,2\,\pi} = \frac{6\,a + 0.5\,a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
\Leftrightarrow\quad &\frac{1}{2} = \frac{6\,a + 0.5\,a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
\Leftrightarrow\quad &12\,a + a^2 + 6 = a^2 + a + 8 \\
\Leftrightarrow\quad &11\,a = 2 \\
\Leftrightarrow\quad &a = \frac{2}{11}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x, y)^T = (0.5, 1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben ist, wenn $a = \frac{2}{11}$.

(d) (10 Punkte)

Wir wenden das Gauß-Verfahren an:

$$
\begin{array}{rcl}
(A, \mathbf{b}) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & m^2 \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 1 & 0 & 2\,m & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -(I) \end{array} \\[2ex]
& = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & m^2 \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & -m & 2\,m-3 & 3-m^2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -m\,(II) \\ \\ +m\,(II) \end{array} \\[2ex]
& \to & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m^2 & m^2 - m\,(m+1) \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & 0 & 2\,m-3+m^2 & 3-m^2+m\,(m+1) \end{array}\right) \end{array} \\[2ex]
(A^\star \mathbf{b}^\star) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m^2 & -m \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & 0 & m^2+2\,m-3 & 3+m \end{array}\right) \end{array} .
\end{array}
$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^\star) < \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star)$, d.h.

$$m^2 + 2\,m - 3 = 0 \text{ und } 3 + m \neq 0.$$

Es gilt:

$$m^2 + 2\,m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m+3)\,(m-1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = -3 \text{ oder } m_2 = 1.$$

Da $3 + m_1 = 0$ und $3 + m_2 \neq 0$ ist, hat das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung, wenn $m = m_2 = 1$.

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (d). Da das lokale Maximum im Punkt $P = (0,1)$ die Nebenbedingung $x + y = 1$ erfüllt, ist es auch ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung. Der Punkt $P = (0,1)$ hingegen erfüllt die Nebenbedingung $2\,x + y = 0$ nicht; deshalb sind (a) und (c) falsch. Ein lokales Maximum ohne Nebenbedingung schliesslich kann nicht zugleich ein lokales Minimum unter einer Nebenbedingung sein; daher ist (b) ebenfalls falsch.

Q2. (c). Nur g_3 erfüllt die Bedingungen für eine Dichtefunktion g auf $[0,10]$ $g(x) \geq 0$ für $x \in [0,10]$ und $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$.

Q3. (b). Da A die Dimension 6×3 hat, ist $\operatorname{rg}(A) \leq 3$. Da A eine reguläre 3×3 Untermatrix hat, gilt $\operatorname{rg}(A) \geq 3$. Daher ist $\operatorname{rg}(A) = 3$.

Q4. (d). Da $\det(A) \neq 0$, ist A invertierbar. Ausserdem ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$.

Q5. (b). Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

Q6. (c). Da $\operatorname{rg}(A) = 5 < n = 10$ und $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, \mathbf{b})$ ist, hat das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendliche viele Lösungen. Der Lösungsraum hat die Dimension $n - \operatorname{rg}(A) = 10 - 5 = 5$.

Q7. (c). Es gilt $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\star) = 2 < 3 = n$ und $\operatorname{rg}(A, b) = \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = 2 = \operatorname{rg}(A)$. Daher hat das System unendlich viele Lösungen.

Q8. (b). Da $A^3\,\mathbf{x} = A^2\,(A\,\mathbf{x}) = A^2\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A^2\,\mathbf{x} = \lambda\,A\,(A\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda^2\,A\,\mathbf{x} = \lambda^2\,\lambda\,\mathbf{x} = \lambda^3\,\mathbf{x}$ ist λ^3 ein Eigenwert von A^3 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (d). Es gilt $K(x) = \int K'(x)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Ausserdem $20 = K(0) = -1 + C$. Daher ist $C = 21$.

Q2. (b). Die Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Das Skalarprodukt beträgt $1 \cdot 0 + t \cdot t + 3 \cdot (-5) + (-5) \cdot 2 = t^2 - 25$. Daher ist das Skalarprodukt genau dann null, wenn $t \in \{-5, 5\}$.

Q3. (c). Die 4×4 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist regulär, da

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 4 \neq 0.$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A) \geq 4$. Da A die Dimension 4×5 hat, ist $\mathrm{rg}(A) \leq 4$. Daher gilt $\mathrm{rg}(A) = 4$.

Man kann den Rang von A auch mit Hilfe des Gauß-Verfahrens bestimmen (dies ist jedoch zeitaufwändiger):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(II) \\ \\ +(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(4) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \end{matrix}$$

$$A^{\star} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A^{\star}) = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^{\star}) = 4$.

Q4. (c). In Matrizennotation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(A) = 4$ ist, ist A regulär und wir können die Cramersche Regel anwenden, um das System zu lösen. Es gilt:

$$x_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{9}{4},$$

$$x_2 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{-1}{4},$$

und

$$x_3 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{-3}{4}.$$

Q5. (b). λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda) \left[(1-\lambda)^2 - 1 \right] \\
&= (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\,\lambda) \\
&= \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda - 2).
\end{aligned}$$

Daher sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ die Eigenwerte von A.

Q6. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{2}{3}\,y_k - \frac{5}{3}.$$

Daraus folgt, dass $A = \frac{2}{3}$ und $B = -\frac{5}{3}$. Da $A \in (0,1)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = -\frac{1}{2}\,y_k + 3.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{1}{2} \neq 1$ und $B = 3$. Da $A \in (-1,0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2.$$

Q8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{1}{a+2}\,y_k - \frac{a^2-4}{a+2},$$

d.h. $A = \frac{1}{a+2}$ und $B = -\frac{a^2-4}{a+2} = 2 - a$. Da $a \neq -1$ isst, ist $A \neq 1$, und eine notwendige Bedingung für Konvergenz der allgemeinen Lösung ist

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = -\frac{a^2-4}{a+1}.$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass die allgemeine Lösung gegen 0 konvergiert, ist $y^\star = 0$, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$ ist. Da per Definition der Differenzengleichung $a \neq -2$, erfüllt nur $a = 2$ die notwendige Bedingung. Für $a = 2$ überprüfen wir nun die hinreichende Bedingung $A \in (0,1)$ für monotone Konvergenz der allgemeinen Lösung. Es gilt:

$$A = \frac{1}{a+2} \overset{a=2}{=} \frac{1}{4} \in (0,1).$$

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematatik II

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

4. Februar 2015

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x, y) = 2\,x + 4\,y + \frac{2\,b^4}{x\,y^2},$$

wobei $b > 0$ ein reeller Parameter ist.

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (8 Punkte)

Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = \ln(x^4) + 2\,y \to \text{min! oder max!} \\ & \text{so dass } \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0. \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Spezifizierung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \ln(0.5) + \ln(\pi) \\ c \sin(e^x)\, e^x, & \text{für } \ln(0.5) + \ln(\pi) \le x \le \ln(\pi) \\ 0, & \text{für } x > \ln(\pi) \end{cases},$$

wobei c ein reeller Parameter ist.

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 1

(d) (5 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^n \left[\ln\left(x^m\right) - \ln\left(x^{m+2}\right)\right]\, dx,$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2\,b \\ 2\,a + 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a und b ist die Matrix $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ singulär?

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2\,a \\ a+3 & a \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A^5?

Aufgabe 2

(c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + \frac{1}{2}\,a\,y^2 + 3\,x + 8\,y}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie a so, dass die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2) + \ln(\pi) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & & & & = & m^2 \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (m^2-m-1)\,x_4 & = & m \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung?

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt:

(a) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(b) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

(c) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(d) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktionen f_1 und f_2 sind Dichtefunktionen auf $\mathbb{R}$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$?

(a) $g_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{2}\, f_1(x) + \frac{2}{3}\, f_2(x)$.

(c) $g_3(x) = -\frac{1}{2}\, f_1(x) + f_2(x)$.

(d) $g_4(x) = \frac{4}{5}\, f_1(x) + \frac{1}{5}\, f_2(x)$.

Aufgabe 3

Frage 3 (3 Punkte)

Die 6×3 Matrix $A = (a_{ij})$ hat Rang 3. Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) A^T hat Rang 6.

(b) A ist regulär.

(c) A ist singulär.

(d) A hat eine 3×3 reguläre Teilmatrix.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

Es sei $\det(A) = 1$ und $\det(B) = 0$. Dann gilt:

(a) $A\,B$ ist singulär.

(b) $A\,B$ ist invertierbar.

(c) $A\,B$ ist regulär.

(d) $\det(A\,B) \geq 1$.

Aufgabe 3

Frage 5 (2 Punkte)

Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a_3}\}$ ist linear unabhängig. Für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

(a) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ keine Lösung.

(b) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ genau eine Lösung.

(c) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ genau drei Lösungen.

(d) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 3

Frage 6 (3 Punkte)

Für das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist bekannt, dass $\text{rg}(A) = 5$ und $\text{rg}(A, \mathbf{b}) = 6$, wobei A eine 6×10 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 5.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 6.

Aufgabe 3

Frage 7 (5 Punkte)

Sei $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem. Mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A^\star, \mathbf{b}^\star) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^\star & b_1^\star \\ 0 & 1 & 0 & b_2^\star \\ 0 & 0 & 0 & b_3^\star \end{array}\right) \end{array}$$

wobei $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star \in \mathbb{R}$ und $b_3^\star \neq 0$. Es folgt, dass:

(a) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

(b) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat.

(c) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, abhängig von den Parametern $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star$.

Aufgabe 3

Frage 8 (4 Punkte)

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist ein Eigenwert der quadratischen Matrix A und $\mathbf{x} \neq 0$ ein dazugehöriger Eigenvektor. $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ist Eigenwert der quadratischen Matrix B und $\mathbf{x} \neq 0$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Es folgt:

(a) λ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(b) ξ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

(c) $\xi\,\lambda$ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

(d) $\frac{\lambda}{\xi}$ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Sei $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Die marginalen Kosten entsprechen $K'(x) = 1 + x^2 + e^x$ und die Fixkosten sind $K(0) = 50$. Welche der folgenden Funktionen ist die Kostenfunktion?

(a) $K(x) = x + x^3 + e^x + 50.$

(b) $K(x) = x + x^3 + \frac{1}{3}\, e^x + 50.$

(c) $K(x) = x + \frac{x^3}{3} + e^x + 50.$

(d) $K(x) = x + \frac{x^3}{3} + e^x + 49.$

Aufgabe 4

Frage 2 (2 Punkte)

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$, hat die Länge 6 genau dann, wenn:

(a) $t = 7$.

(b) $t \in \{-1, 1\}$.

(c) $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(d) $t = 3$.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Das reguläre lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & = & 1 \\ & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 3\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

hat

(a) keine Lösung.

(b) unendlich viele Lösungen.

(c) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Zahlen ist ein Eigenwert der Matrix A?

(a) -1.

(b) 0.

(c) 1.

(d) 2.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 4\,y_k + 2 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 3\,y_k - 28 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) divergiert.

(b) konvergiert monoton gegen 4.

(c) konvergiert oszillierend gegen 4.

(d) konvergiert monoton gegen 3.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} + (3-a)\, y_k - 6 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, ist genau dann oszillierend und konvergent, wenn

(a) $0 < a < 3$.

(b) $a > 3$.

(c) $a > \frac{3}{2}$.

(d) $\frac{3}{2} < a < 3$.

Nachholprüfung Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2014

2'200 Mathematik B

Anwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Name:	
Vorname:	
Matrikel Nummer:	

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Nachholprüfung Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2014

2'200 Mathematik B

Anwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Name:	
Vorname:	
Matrikel Nummer:	

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

4. Februar 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2 - 2\,\frac{b^4}{x^2\,y^2}, \\ f_y(x,y) &= 4 - 4\,\frac{b^4}{x\,y^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0 \\ 4 - 4\,\frac{b^4}{x_0\,y_0^3} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0$, erhalten wir

$$x_0^2\,y_0^2 = b^4.$$

Aus $4 - 4\,\frac{b^4}{x_0\,y_0^3} = 0$ erhalten wir $x_0\,y_0^3 = b^4$. Daraus folgt:

$$x_0^2\,y_0^2 = x_0\,y_0^3 \overset{x_0 \neq 0, y_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0 = y_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0$ ein und erhalten

$$x_0^4 = b^4 \Leftrightarrow x_0 = b \text{ oder } x_0 = -b.$$

Daraus folgt:

$$P_1 = (b, b) \text{ und } P_2 = (-b, -b)$$

sind stationäre Punkte, d.h., Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\,f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\,f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und
$$f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 < 0 \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{4\,b^4}{x^3\,y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{12\,b^4}{x\,y^4}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{4\,b^4}{x^2\,y^3}. \end{aligned}$$

Für $P_1 = (b,b)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(b,b) = \frac{4}{b} > 0 \\ f_{yy}(b,b) = \frac{12}{b} > 0 \\ f_{xx}(b,b)\, f_{yy}(b,b) - (f_{xy}(b,b))^2 = \frac{48}{b^2} - \frac{16}{b^2} = \frac{32}{b^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daher ist $P_1 = (b,b)$ ein Minimum.

Für $P_2 = (-b,-b)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\,(-b,-b) = -\frac{4}{b} < 0 \\ f_{yy}\,(-b,-b) = -\frac{12}{b} < 0 \\ f_{xx}\,(-b,-b)\;\, f_{yy}\,(-b,-b) - \left(f_{xy}\,(-b,-b)\right)^2 = \frac{48}{b^2} - \frac{16}{b^2} = \frac{32}{b^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daher ist $P_2 = (-b,-b)$ ein Maximum.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= \ln(x^4) + 2\,y + \lambda\,\left(x^2+y^2-20\right) \\ &= 4\,\ln(x) + 2\,y + \lambda\,\left(x^2+y^2-20\right). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{x} + 2\,\lambda\,x = 0, \qquad \text{(I)}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2 + 2\,\lambda\,y = 0, \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 20 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir

$$2\,\lambda\, x^2 = -4. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$2\,\lambda\, y = -2. \tag{V}$$

Gleichung (V) impliziert, dass $y \neq 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{2\,\lambda\, x^2}{2\,\lambda\, y} = \frac{-4}{-2},$$

d.h.

$$x^2 = 2\,y. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$2\,y + y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\,y - 20 = 0.$$

Da $x^2 = 2\,y$ (cf. VI) und $x^2 > 0$ (sonst wäre $\ln(x^4)$ nicht definiert), gilt $y > 0$. Daraus folgt:

$$y = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-20)}}{2} = \frac{-2+\sqrt{84}}{2} = -1 + \sqrt{21} = \sqrt{21} - 1.$$

Verwenden wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$x^2 = 2\,y = 2\,\sqrt{21} - 2,$$

d.h.,

$$x = \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2} \text{ oder } x = -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right) \text{ und } P_2 = \left(-\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right)$$

Kandidaten für Extremalstellen von f unter der o.g. Nebenbedingung.

<u>Substitutionsmethode:</u>
Wir verwenden die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$, um x^2 als eine Funktion von y zu erhalten, d.h. $x^2 = 20 - y^2$. Ausserdem, da $x^2 > 0$ ($x = 0$ ist ausgeschlossen, da andernfalls $\ln(x^4)$ nicht definiert wäre), gilt $20 - y^2 > 0$, d.h. $-\sqrt{20} < y < \sqrt{20}$. Wir ersetzen nun x^2 durch $20 - y^2$ im Ausdruck für f, d.h., wir definieren die Funktion h als

$$h(y) = \ln((20 - y^2)^2) + 2\,y = 2\,\ln(20 - y^2) + 2\,y.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(y) = 0$

für eine Extremalstelle y von h. Es gilt:

$$h'(y) = -\frac{4\,y}{20 - y^2} + 2.$$

Daraus folgt:

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4\,y}{20 - y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow -4\,y + 2\,(20 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\,y - 20 = 0 \overset{y \in (-\sqrt{20}, \sqrt{20})}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{21} - 1.$$

Unter Verwendung von $x^2 = 20 - y^2$ erhalten wir

$$x = \sqrt{2\sqrt{21} - 2} \text{ oder } x = -\sqrt{2\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{2\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right) \text{ und } P_2 = \left(-\sqrt{2\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right)$$

Kandidaten für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

(c) (5 Punkte)
Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion in $\mathbb{R}$ lauten:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{\ln(0.5)+\ln(\pi)}^{\ln(\pi)} c\,\sin(e^x)\;e^x\,dx \\ &= c\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin(e^x)\;e^x\,dx. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin(e^x)\;e^x\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Wir setzen $y = e^x$; somit ist $\frac{dy}{dx} = e^x$. Es gilt:

$$c\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin(e^x)\;e^x\,dx = c\int_{0.5\,\pi}^{\pi} \sin(y)\,dy = c\,[-\cos(y)]_{0.5\,\pi}^{\pi} = c.$$

Daraus folgt:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow c = 1.$$

Da für $c = 1$ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist Bedingung (i) auch erfüllt. Daher muss

$$c = 1$$

sein, damit f eine Dichtefunktion in $\mathbb{R}$ ist.

(d) (5 Punkte)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int x^n \left[\ln(x^m) - \ln(x^{m+2})\right] dx &= \int x^n \ln\left(\frac{x^m}{x^{m+2}}\right) dx \\
&= \int x^n \ln\left(x^{-2}\right) dx \\
&= -2 \int x^n \ln(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int x^n \ln(x)\, dx$ mit der Methode der partiellen Integration. Es sei

$$u(x) = \ln(x)$$

und

$$v'(x) = x^n.$$

Ausserdem:

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^n}_{=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} dx \\
&= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int x^n \left[\ln(x^m) - \ln(x^{m+2})\right] dx = -2 \int x^n \ln(x)\, dx = \frac{-2\, x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)
Die Matrix

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2 & 2\,b \\ a & 2\,a+2 \end{pmatrix}$$

mit den Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ ist genau dann singulär, wenn $\det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & 2\,b \\ a & 2\,a+2 \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,(2\,a+2) - 2\,a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 4\,a + 4 - 2\,a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,a\,(2-b) = -4 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{2}{b-2} \text{ und } b \neq 2. \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \text{ ist singulär} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, b \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\, a = \frac{2}{b-2} \right\}.$$

(b) (4 Punkte)
$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A^5, wenn $\det(A^5 - \lambda\, I) = \det(A^5) = (\det(A))^5 = 0$. Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A^5, wenn $\det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} a+1 & 2\,a \\ a+3 & a \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a+1)\,a - 2\,a\,(a+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + a - 2\,a^2 - 6\,a = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -a^2 - 5\,a = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -a\,(a+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \in \{-5, 0\}. \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $a \in \{-5, 0\}$.

(c) (6 Punkte)

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2) + \ln(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2\,\pi) \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1)$$

mit $\lambda > 0$.

Es gilt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = e^{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + \frac{1}{2}\,a\,y^2 + 3\,x + 8\,y} \begin{pmatrix} 6\,a\,x + a^2\,y + 3 \\ a^2\,x + a\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = e^{3\,a + a^2 + \frac{1}{2}\,a + 11} \begin{pmatrix} 6\,a + a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1) \\
&\Leftrightarrow\quad \lambda \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2\,\pi) \end{pmatrix} = e^{3\,a + a^2 + \frac{1}{2}\,a + 11} \begin{pmatrix} 6\,a + a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow\quad \frac{\lambda\,\ln(2\,\pi)}{\lambda\,\ln(2\,\pi)} = \frac{6\,a + a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
&\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{6\,a + a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
&\Leftrightarrow\quad a^2 + a + 8 = 6\,a + a^2 + 3 \\
&\Leftrightarrow\quad 5\,a = 5 \\
&\Leftrightarrow\quad a = 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben ist, wenn $a = 1$.

(d) (10 Punkte)
Wir wenden die Gauss-Methode an:

$$
\begin{array}{rcl}
(A,\mathbf{b}) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & m^2-m-1 & m \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -(I) \end{array} \\[2ex]
& = & \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m^2-m-1 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(-1) \\ \end{array} \\[2ex]
& \to & \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m^2-m-1 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -(II) \\ \\ +(II) \end{array} \\[2ex]
(A^{\star}\mathbf{b}^{\star}) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array}
\end{array}
$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A,\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^{\star}) < \mathrm{rg}(A^{\star},\mathbf{b}^{\star})$, d.h.,

$$m^2 - m - 2 = 0 \text{ und } m - m^2 \neq 0.$$

Es gilt:

$$m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2 \text{ or } m_2 = -1.$$

Da $m_1 - m_1^2 = 2 - 4 = -2 \neq 0$ und $m_2 - m_2^2 = -1 - 1 = -2$, hat das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung, wenn $m \in \{-1, 2\}$.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (b). Da das globale Minimum im Punkt $P = (0, 1)$ die Nebenbedingung $x + y = 1$ erfüllt, ist es auch ein globales Minimum unter der Nebenbedingung. Der Punkt $P = (0, 1)$ hingegen erfüllt die Nebenbedingung $2\,x + y = 0$ nicht; deshalb sind (a) und (c) falsch. Ein Minimum ohne Nebenbedingung schliesslich kann nicht zugleich ein Maximum unter einer Nebenbedingung sein. Daher ist (d) ebenfalls falsch.

Q2. (d). Nur g_4 erfüllt die Bedingungen für eine Dichtefunktion g in $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$.

Q3. (d). Da $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$, ist (a) falsch. Ausserdem sind reguläre und singuläre Matrizen immer quadratische Matrizen; deshalb sind (b) und (c) ebenfalls falsch. Schliesslich muss eine Matrix mit Rang 3 eine reguläre 3×3 Untermatrix haben; daher ist (d) korrekt.

Q4. (a). Da $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$ und $\det(B) = 0$, ist $\det(A\,B) = 0$. Daher ist $A\,B$ singulär. Daraus folgt auch, dass (b), (c) und (d) falsch sind.

Q5. (b). Drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$. Daher kann jeder Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ als eindeutige Linearkombination von $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ geschrieben werden.

Q6. (a). Da $5 = \mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 6$ ist, hat das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

Q7. (a). Zunächst stellen wir fest, dass $\mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = 3$, da $b_3^\star \neq 0$. Ausserdem: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2 < 3 = \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = \mathrm{rg}(A, b)$. Daher hat das System keine Lösung.

Q8. (c). Es gilt:

$$(A\,B)\,\mathbf{x} = A\,(B\,\mathbf{x}) = A\,(\xi\,\mathbf{x}) = \xi\,A\,\mathbf{x} = \xi\,\lambda\,\mathbf{x}.$$

Daher ist $\xi\,\lambda$ ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒

Q1. (d). Es gilt: $K(x) = \int K'(x)\,dx = x + \frac{x^3}{3} + e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Ausserdem: $50 = K(0) = e^0 + C = 1 + C$. Daher ist $C = 49$.

Q2. (b). Es gilt:

$$6 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + t^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{t^2 + 35}.$$

Daraus folgt:

$$t^2 + 35 = 36 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}.$$

Q3. (c). Wir bestimmen den Rang von A mit Hilfe des gausschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(2) \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(II) \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(2) \\ \\ \end{matrix}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(III) \\ -(III) \\ \\ +(III) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

Q4. (d). In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 9 - 2 = 7 \neq 0,$$

ist A regulär und wir können die Cramersche Regel anwenden, um das System zu lösen. Es gilt:

$$x_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{9-2-6}{7} = \frac{1}{7},$$

$$x_2 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{3-1+1}{7} = \frac{3}{7},$$

und

$$x_3 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{3+2-3}{7} = \frac{2}{7}.$$

Q5. (c). λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (7-\lambda)(-2-\lambda)(-8-\lambda) + 3 \cdot 18(-2-\lambda) \\
&= (-2-\lambda)\,[(7-\lambda)(-8-\lambda) + 54] \\
&= (-2-\lambda)(-56 + \lambda + \lambda^2 + 54) \\
&= (-2-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) \\
&= (-2-\lambda)(\lambda + 2)(\lambda - 1).
\end{aligned}$$

Daher sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von A.

Q6. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{4}{5}\, y_k - \frac{2}{5}.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{4}{5}$ und $B = -\frac{2}{5}$. Da $A \in (-1, 0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{3}{4}\, y_k + \frac{28}{4} = -\frac{3}{4}\, y_k + 7.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{3}{4} \neq 1$ und $B = 7$. Da $A \in (-1, 0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem:

$$\lim_{k \to \infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1 - A} = \frac{7}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = 4.$$

Q8. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{a-3}{a}\, y_k + \frac{6}{a},$$

d.h., $A = \frac{a-3}{a}$ und $B = \frac{6}{a}$. Die allgemeine Lösung oszilliert genau dann, wenn $A < 0$. Es gilt:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-3}{a} < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 3).$$

Die allgemeine Lösung konvergiert genau dann, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$|A| < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{a-3}{a} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{(a-3)^2}{a^2} < 1 \Leftrightarrow a^2 - 6\,a + 9 < a^2 \Leftrightarrow 6\,a > 9 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Daher oszilliert und konvergiert die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann, wenn

$$a \in \left(\frac{3}{2}, 3 \right).$$

Prüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli*

22. Juni 2015

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times (-4, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y + 14\,\ln(y + 4).$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (8 Punkte)

Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = 5\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} \quad (x>0,\ y>0) \quad \to \text{min! oder max!} \\ & \ \text{so dass } \varphi(x,y) = 2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte)

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2\, e^{-6\,x}\, dx.$$

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ \ln(x)}\, dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear unabhängig?

Aufgabe 2

(b1) (5 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -4\,a & 3 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass A den Eigenwert $\lambda = -1$ hat und berechnen Sie die weiteren Eigenwerte.

Aufgabe 2

(b1) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(b2) (4 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -4\,a & 3 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Aufgabe 2

(c) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 5\,\ln(x^2 + y^3) - (4-a)\,\ln(y) + 7\,x, \quad x, y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ beträgt die Länge des Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ 15?

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (9 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 5 \\ 3\,x_1 & + & a\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 12 \\ & & x_2 & + & a\,x_3 & = & -3 \end{array}\ .$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

(i) *genau eine* Lösung?

(ii) *keine* Lösung?

(iii) *unendlich viele* Lösungen?

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = x\,y - 2\;x^2$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x - 2y = 0$ hat

(a) ein Minimum im Punkt $(0,0)$.

(b) ein Maximum im Punkt $(0,0)$.

(c) einen Sattelpunkt im Punkt $(0,0)$.

(d) einen Sattelpunkt im Punkt $(2,1)$.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-cx}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

(a) f ist eine Dichtefunktion für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) Nur für $c = e$ ist f eine Dichtefunktion.

(c) f ist eine Dichtefunktion für alle $c > 0$.

(d) Nur für $c = 1$ ist f eine Dichtefunktion.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ sei eine 4×5 Matrix mit dem Rang 4. Dann gilt:

(a) A^T ist eine 4×5 Matrix vom Rang 4.

(b) A^T ist eine 4×5 Matrix vom Rang 5.

(c) A^T ist eine 5×4 Matrix vom Rang 4.

(d) A^T ist eine 5×4 Matrix vom Rang 5.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 1$.
Die Matrix $C = A^{-1}\, B^2\, A\, B^{-1}$ hat die Determinante

(a) 25.

(b) 5.

(c) 1.

(d) $\frac{1}{5}$.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sei linear *abhängig*. Weiter sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Vektorgleichung

$$x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 + x_3\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}.$$

(a) Die Gleichung hat keine Lösung.

(b) Die Gleichung hat genau eine Lösung.

(c) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

(d) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung ist abhängig von $\mathbf{b}$.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

Für das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 3$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 1.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx$$

hat den Wert

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Die Matrix A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., λ_n. Dann hat die Matrix $B = 5\,A$

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $5\lambda_1$, $5\lambda_2$, ..., $5\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $\frac{1}{5}\lambda_1$, $\frac{1}{5}\lambda_2$, ..., $\frac{1}{5}\lambda_n$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int x\, e^{5x^2+1}\, dx$$

ist

(a) $x\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{5}\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(c) $\frac{1}{10}\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(d) $\ln(5)\, x\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Frage 2 (4 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathbf{a}$ die Länge

(a) 6.

(b) $\sqrt{34}$.

(c) $\sqrt{39}$.

(d) $\mathbf{a}$ steht für kein $t \in \mathbb{R}$ senkrecht auf $\mathbf{b}$.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(d) A hat keine Inverse.

Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Frage 6 (3 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k + 1$$

löst die Differenzengleichung

(a) $3\,y_{k+1} - y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) $4\,y_{k+1} - y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(c) $8\,y_{k+1} - 2y_k = 3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,y_{k+1} - 7\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(2-a)\,y_{k+1} + (a+3)\,y_k - a = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, divergiert genau dann oszillierend, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $-\frac{1}{2} \leq a < 2$.

(c) $a \leq -\frac{1}{2}$ oder $a > 2$.

(d) Es gibt kein $a \in \mathbb{R}$, so dass die allgemeine Lösung oszillierend divergiert.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2015

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multi-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2015

2'200 Mathematik B

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

22. Juni 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{14}{y+4} = 3\,x + 14\,(y+4)^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 14\,(y^\star+4)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 14\,(y^\star+4)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 14\left(-\frac{2}{3}\,x^\star + 4\right)^{-1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,(x^\star)^2 + 12\,x^\star + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^\star)^2 - 6\,x^\star - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^\star+1)\,(x^\star-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star = -1 \text{ oder } x^\star = 7 \end{aligned}$$

Aus $y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star$ folgt $y^\star = \frac{2}{3}$ für $x^\star = -1$, und $y^\star = -\frac{14}{3}$ für $x^\star = 7$. Da $\left(7, -\frac{14}{3}\right) \notin D_f$, ist

$$P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

der einzige stationäre Punkte von f, d.h. Kandidat für Maxima, Minima oder Sattelpunkt.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und
$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2, \\ f_{yy}(x,y) &= -14\,(y+4)^{-2} = -\frac{14}{(y+4)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Für $P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = 2 > 0 \\ f_{yy}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{14} < 0 \\ f_{xx}\left(-1, \frac{2}{3}\right)\, f_{yy}\left(-1, \frac{2}{3}\right) - \left(f_{xy}\left(-1, \frac{2}{3}\right)\right)^2 = 2\left(-\frac{9}{14}\right) - 3^2 < 0 \end{array} \right. .$$

Daraus folgt, dass $P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$ ein Sattelpunkt ist.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) \\ &= 5\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + \lambda \left(2\, x^{\frac{1}{3}} + 2\, y^{\frac{2}{3}} - 16\right). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{3}\, x^{-\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\, \lambda\, x^{-\frac{2}{3}} = 0, \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{10}{3}\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}\, \lambda\, y^{-\frac{1}{3}} = 0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\, x^{\frac{1}{3}} + 2\, y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0. \tag{III}$$

Da $x > 0$, erhalten wir aus (I)

$$5\, y^{\frac{2}{3}} = -2\,\lambda. \tag{IV}$$

Mit $y > 0$ erhalten wir aus (II)

$$5\, x^{-\frac{1}{3}} = -2\,\lambda. \tag{V}$$

Dividieren wir (IV) durch (V) ergibt dies

$$y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}},$$

d.h.

$$x = y^2. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$4\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow y = 8.$$

Da $x = y^2$ (siehe VI) folgt $x = 64$. Daher ist

$$P = (64, 8)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

<u>Substitutionsmethode:</u>
Wir benutzen die Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$, um y als Funktion von x zu erhalten, d.h. $y^{\frac{2}{3}} = 8 - x^{\frac{1}{3}}$. Wir ersetzen nun $y^{\frac{2}{3}}$ im Ausdruck für f durch $8 - x^{\frac{1}{3}}$, d.h. wir definieren die Funktion h als

$$h(x) = 5\,x^{\frac{1}{3}}\left(8 - x^{\frac{1}{3}}\right) = 40\,x^{\frac{1}{3}} - 5\,x^{\frac{2}{3}}.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ für eine Extremalstelle x von h. Es gilt:

$$h'(x) = \frac{40}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}.$$

Daraus folgt:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{40}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow x = 64.$$

Wegen $y^{\frac{2}{3}} = 8 - x^{\frac{1}{3}}$ erhalten wir

$$y = (8 - 64^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Daher ist

$$P = (64, 8)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

(c) (6 Punkte)

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int x^2 \, e^{-6\,x} \, dx$ mit Hilfe der Methode der partiellen Integration. Sei

$$u(x) = x^2$$

und

$$v'(x) = e^{-6\,x}.$$

Dann gilt

$$u'(x) = 2\,x$$

und

$$v(x) = -\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^2}_{=u(x)} \, \underbrace{e^{-6\,x}}_{=v'(x)} \, dx \\
&= \underbrace{x^2}_{=u(x)} \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} - \int \underbrace{2\,x}_{=u'(x)} \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} \, dx \\
&= -\frac{1}{6}\,x^2\,e^{-6\,x} + \frac{1}{3}\int x\,e^{-6\,x}\,dx.
\end{aligned}$$

Um das unbestimmte Integral $\int x\,e^{-6\,x}\,dx$ zu berechnen, verwenden wir erneut partielle Integration. Sei

$$u(x) = x$$

und

$$v'(x) = e^{-6\,x}.$$

Dann gilt

$$u'(x) = 1$$

und

$$v(x) = -\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x}_{=u(x)} \, \underbrace{e^{-6\,x}}_{=v'(x)} \, dx \\
&= \underbrace{x}_{=u(x)} \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} - \int \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\,e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} \, dx \\
&= -\frac{1}{6}\,x\,e^{-6\,x} + \frac{1}{6}\int e^{-6\,x}\,dx \\
&= -\frac{1}{6}\,x\,e^{-6\,x} - \frac{1}{36}\,e^{-6\,x} + C.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int x^2\, e^{-6\,x} = -\frac{1}{6}\,x^2\,e^{-6\,x} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}\,x\,e^{-6\,x} - \frac{1}{36}\,e^{-6\,x}\right) = -\frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{18}\right)\,e^{-6\,x} + C.$$

Damit können wir nun das bestimmte Integral berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2\,e^{-6\,x}\,dx &= \left[-\frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{18}\right)\,e^{-6\,x}\right]_0^1 \\
&= -\frac{25}{108}\,e^{-6} + \frac{1}{108} \\
&= \frac{1}{108}\left(1 - 25\,e^{-6}\right) \\
&\approx 0.0087.
\end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = \ln(x)$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$\frac{1}{x}\,dx = du.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\,\ln(x)}\,dx = \int \frac{\ln(u)}{u}\,du.$$

Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir ein weiteres Mal die Substitutionsmethode. Sei $v = \ln(u)$, dann gilt:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}$$

und

$$\frac{1}{u}\,du = dv.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\ln(u)}{u}\,du = \int v\,dv = \frac{1}{2}\,v^2 + C = \frac{1}{2}\,\left(\ln(u)\right)^2 + C.$$

Insgesamt folgt:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\,\ln(x)}\,dx = \frac{1}{2}\,\left(\ln(\ln(x))\right)^2 + C.$$

Aufgabe2

(a) (3 Punkte)

Das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix

$$A = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

mit Spaltenvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, und $\mathbf{b}_3$ regulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist regulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \right| \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t + t^2 + 0 + 1 - 3\,t - 0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - 2\,t + 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t-1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Daher ist das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b1) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 8 & -4\,a & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda\,(5-\lambda)\,(3-\lambda) - 6\,(3-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)\,(\lambda^2 - 5\,\lambda - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)\,(\lambda+1)\,(\lambda-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-1, 3, 6\}. \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert von A.

(b2) (4 Punkte)

$\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = -1$, wenn

$$(A - \lambda\, I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A + I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir erhalten also:

$$(A + I)\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 8 & -4\,a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das System mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$(A, \mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -4\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -(I) \\ -8\,(I) \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\,a - 48 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (II) \leftrightarrow (III) \\ (III) \leftrightarrow (II) \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4\,a - 48 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ : (-4) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & a + 12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 6\,x_2 & & & = & 0 \\ & & (a+12)\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Daher ist $x_2 = t$ eine freie Variable und es gilt $x_1 = -6\,x_2 = -6\,t$ sowie $x_3 = (a{+}12)\,x_2 = (a{+}12)\,t$. Damit ist der zum Eigenwert $\lambda = -1$ gehörige Eigenraum von A gegeben durch:

$$V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \; : \; \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ a + 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) (4 Punkte)

Der Gradient einer Funktion f ist definiert als:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{10\,x}{x^2+y^3} + 7 \\ \frac{15\,y^2}{x^2+y^3} + \frac{a-4}{y} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 \\ a + \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{grad} f(1,1)\| = 15 \\
&\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{grad} f(1,1)\|^2 = 15^2 = 225 \\
&\Leftrightarrow \quad 12^2 + \left(a + \frac{7}{2}\right)^2 = 225 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{7}{2}\right)^2 = 225 - 12^2 = 81 = 9^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a + \frac{7}{2} = \pm 9 \\
&\Leftrightarrow \quad a \in \left\{-\frac{25}{2}, \frac{11}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

(d) (9 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A,\mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & a & 10 & 12 \\ 0 & 1 & a & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -3\cdot(I) \\ \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & a & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (II)\leftrightarrow(III) \\ (III)\leftrightarrow(II) \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-3 & 4 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(a-3)\cdot(II) \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & 4-a\,(a-3) & -3+3\,(a-3) \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+1)\,(a-4) & 3\,(a-4) \end{array}\right) \end{array}$$

$$(A^\star\mathbf{b}^\star) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+1)\,(a-4) & 3\,(a-4) \end{array}\right) \end{array} .$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(i) $\mathrm{rg}(A^\star) = n = 3$, d.h., $-(a+1)\,(a-4) \neq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a \neq -1$ und gleichzeitig $a \neq 4$.
Das System hat genau eine Lösung.

(ii) $\mathrm{rg}(A^\star) = \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) < 3$, i.e., $-(a+1)\,(a-4) = 0$ und $3\,(a-4) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = 4$.
Das System hat unendlich viele Lösungen.

(iii) $\mathrm{rg}(A^\star) < \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star)$, i.e., $-(a+1)\,(a-4) = 0$ und $3\,(a-4) \neq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = -1$.
Das System hat keine Lösung.

Part II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (b). Aus der Nebenbedingung $x - 2\,y = 0$ folgt $x = 2\,y$. Indem wir x durch $2\,y$ in der Funktion f ersetzen, erhalten wir $h(y) = f(2\,y, y) = (2\,y)\,y - 2\,(2\,y)^2 = -6\,y^2$. Die Funktion h ist eine quadratische Funktion mit einem Maximum in $y = 0$. Daher hat die Funktion f ein Maximum in $(0, 0)$.

Q2. (c). Die Funktion f ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn (i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Aus Bedingung (i) folgt $c \geq 0$. Um Bedingung (ii) zu prüfen, berechnen wir das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b c\,e^{-c\,x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-c\,x}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-c\,b}\right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } c > 0 \\ 0 & \text{if } c = 0 \\ -\infty & \text{if } c < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Daher ist f genau dann eine Dichtefunktion, wenn $c > 0$.

Q3. (c). Da A eine 4×5 Matrix ist, ist A^T eine 5×4 Matrix. Da im Weiteren $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ gilt, ist der Rang von A^T ebenfalls gleich 4.

Q4. (c). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det(A^{-1}\,B^2\,A\,B^{-1}) \\
&= \det(A^{-1})\,\det(B)^2\,\det(A)\,\det(B^{-1}) \\
&= \frac{1}{\det(A)}\,\det(B)^2\,\det(A)\,\frac{1}{\det(B)} \\
&= \det(B) = 1.
\end{aligned}$$

Q5. (d). Da $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) < n = 3$, hat das System entweder keine oder unendlich viele Lösungen, abhängig davon, ob $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{b}) > \mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$ oder $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{b}) = \mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$.

Q6. (a). Da $\mathrm{rg}(A) = 3 < 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$ hat das System keine Lösung.

Q7. (c). Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Q8. (b). Es gilt:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow 5\, \det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \det(5\, A - 5\, \lambda\, I) = 0 = \det(B - 5\, \lambda\, I).$$

Daher ist λ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $5\, \lambda$ ein Eigenwert von B ist.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☒	☐	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (c). Lediglich die Funktionen in Antwort (c) sind Stammfunktionen des Integranden

$$f(x) = x\, e^{5\,x^2+1}.$$

Q2. (b). Da $\mathbf{a}$ senkrecht zu $\mathbf{b}$ ist, gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Es folgt:

$$0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 7\,t + 14 \Leftrightarrow t = -2.$$

Daher gilt

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Q3. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3\,(I) \\ \\ -2\,(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -(II) \\ -(II) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ (III) \leftrightarrow (V) \\ \\ (V) \leftrightarrow (III) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \\ \\ \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 3$ und damit $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 3$.

Q4. (b). Zunächst überprüfen wir, ob A invertierbar ist:

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Da $\det(A) \neq 0$, ist A tatsächlich invertierbar. Weiterhin gilt für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det(A) = a\,d - c\,b \neq 0$, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Daher folgt:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q5. (a). Ein Eigenvektor $\mathbf{v}$ von A erfüllt die Gleichung $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Lediglich der Vektor in Antwort (a) hat diese Eigenschaft (für $\lambda = 7$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Q6. (d). Indem wir die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k + 1$, in die drei Differenzengleichungen in (a), (b), und (c) einsetzen, überprüfen wir leicht, dass keine der Gleichungen von $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt wird.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{7}{3}\, y_k + \frac{1}{3}.$$

Es folgt, dass $A = \frac{7}{3} > 1$ und $B = \frac{1}{3}$. Da $A > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

Q8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{a+3}{a-2}\, y_k + \frac{a}{2-a},$$

d.h., $A = \frac{a+3}{a-2}$ und $B = \frac{a}{2-a}$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist genau dann divergent und oszillierend, wenn $A \leq -1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $a > 2$. Dann gilt:

$$A \leq -1 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a-2} \leq -1 \Leftrightarrow a+3 \leq 2-a \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{2}.$$

Die letzte Bedingung steht im Widerspruch zu $a > 2$.

(ii) $a < 2$. Dann gilt:

$$A \leq -1 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a-2} \leq -1 \Leftrightarrow a+3 \geq (2-a) \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}.$$

Für $a < 2$ ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $-\frac{1}{2} \leq a < 2$.

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli*

10. Februar 2016

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : (4, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x,y) = 3\,x\,y + \frac{45}{2}\,\ln(x-4) + y^2.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (8 Punkte)

Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = 7\,x^{\frac{1}{4}}\,y^{\frac{3}{4}} \quad (x>0,\; y>0) \quad \to \text{min! oder max!} \\ &\ \text{so dass } \varphi(x,y) = 2\,x^{\frac{1}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte)

Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\, dx.$$

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3[\ln(\ln(x))]^2}{x\,\ln(x)}\,dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -0.8 \\ t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear abhängig?

Aufgabe 2

(b1) (5 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 8 & 16\,a & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach, dass A den Eigenwert $\lambda = -2$ hat, und berechnen Sie die weiteren Eigenwerte.

Aufgabe 2

(b2) (4 Punkte)

Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 8 & 16\,a & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -2$.

Aufgabe 2

(b2) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{(x^3+y^2)^4}{x^{10-a}}\right) + 3\,y, \quad x,y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ beträgt die Länge des Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$ 25?

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (9 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & a\,x_3 & = & 2\,. \\ 2\,x_1 & + & a\,x_2 & + & 5\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

(i) *genau eine* Lösung?

(ii) *keine* Lösung?

(iii) *unendlich viele* Lösungen?

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = x\,y^2 - 2\,x^3$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x - 2y = 0$ hat

(a) ein Minimum im Punkt $(0,0)$.

(b) ein Maximum im Punkt $(0,0)$.

(c) einen Sattelpunkt im Punkt $(0,0)$.

(d) einen Sattelpunkt im Punkt $(2,1)$.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x^2}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

(a) f ist eine Dichtefunktion für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) Nur für $c = 1$ ist f eine Dichtefunktion.

(c) Nur für $c = 2$ ist f eine Dichtefunktion.

(d) f ist eine Dichtefunktion für alle $c > 0$.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ sei eine 5×4 Matrix mit dem Rang 3. Welche der folgenden Behauptungen ist *richtig*?

(a) A^T hat den Rang 5.

(b) A ist singulär.

(c) A hat eine reguläre Teilmatrix vom Rang 3.

(d) $\det(A) \neq 0$.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = \frac{1}{2}$.
Die Matrix $C = (A\,B^{-1})^2\,A^{-1}\,B$ hat die Determinante

(a) $\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) 2.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sei linear *unabhängig*. Weiter sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Vektorgleichung

$$x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 = x_3\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{b}.$$

(a) Die Gleichung hat keine Lösung.

(b) Die Gleichung hat genau eine Lösung.

(c) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

(d) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung ist abhängig von $\mathbf{b}$.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

Für das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\text{rg}(A) = 4$ und $\text{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 1.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\, dx$$

hat den Wert

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Die Matrix A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., λ_n. Dann hat die Matrix $B = 2\,A^2$

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, ..., $2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $2\lambda_1^2$, $2\lambda_2^2$, ..., $2\lambda_n^2$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int (3\,x^3 + 1)\, e^{x^3}\, dx$$

ist

(a) $e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $x^2\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $x^3\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

Frage 2 (4 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ t \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathbf{a}$ die Länge

(a) 5.

(b) $\sqrt{60}$.

(c) $\sqrt{62}$.

(d) $\mathbf{a}$ steht für kein $t \in \mathbb{R}$ senkrecht auf $\mathbf{b}$.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) A hat keine Inverse.

Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 27 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Frage 6 (3 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3$$

löst die Differenzengleichung

(a) $3\,y_{k+1} - y_k = 5, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) $4\,y_{k+1} - y_k = 8, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(c) $6\,y_{k+1} - 2\,y_k = 12, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 7\,y_k = -3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+3)\,y_{k+1} + (2-a)\,y_k + a = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, konvergiert genau dann oszillierend, wenn

(a) $a < 2$.

(b) $a < -\frac{1}{2}$ oder $a > 2$.

(c) $-\frac{1}{2} < a < 2$.

(d) Es gibt kein $a \in \mathbb{R}$, so dass die allgemeine Lösung oszillierend konvergiert.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2015

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multi-Choice-Fragen

Name:	
Vorname:	
Matrikel Nummer:	

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2015

2'200 Mathematik B

Name:	
Vorname:	
Matrikel Nummer:	

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

10. Februar 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte (x_0, y_0) sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3\,y - \frac{45}{2\,(x-4)}, \\ f_y(x, y) &= 3\,x + 2\,y. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,y_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ 3\,x_0 + 2\,y_0 = 0 \end{cases}.$$

Aus $3\,x_0 + 2\,y_0 = 0$ erhalten wir

$$y_0 = -\frac{3}{2}\,x_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,y_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & 3\left(-\frac{3}{2}\,x_0\right) + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{9}{2}\,x_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -9\,x_0\,(x_0-4) + 45 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -9\,x_0^2 + 36\,x_0 + 45 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_0^2 - 4\,x_0 - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x_0-5)\,(x_0+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_{0,1} = 5, \quad (x_{0,2} = -1 \notin (4, \infty)!). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P = (5, -7.5)$$

ist der einzige stationäre Punkt von f, d.h., ein Kandidat für ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\,f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}(x_0,y_0)<0 \\ f_{yy}(x_0,y_0)<0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0)-(f_{xy}(x_0,y_0))^2>0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0)-(f_{xy}(x_0,y_0))^2<0 \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\frac{45}{2\,(x-4)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= 2, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Weil $f_{xx}(x,y)<0$ und $f_{yy}(x,y)>0$ für alle $(x,y)\in D_f$, ist P ein Sattelpunkt:

$$f_{xx}(5,-7.5)\,f_{yy}(5,-7.5)-(f_{xy}(5,-7.5))^2=-\frac{45}{2}\cdot 2-3^2=-54<0.$$

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 7\,x^{\frac{1}{4}}\,y^{\frac{3}{4}}+\lambda\left(2\,x^{\frac{1}{4}}+2\,y^{\frac{3}{4}}-32\right). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda)=0 \;\Rightarrow\; \frac{7}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,y^{\frac{3}{4}}+\lambda\,\frac{2}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}=0, \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda)=0 \;\Rightarrow\; 7\cdot\frac{3}{4}\,x^{\frac{1}{4}}\,y^{-\frac{1}{4}}+\lambda\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\,y^{-\frac{1}{4}}=0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda)=0 \;\Rightarrow\; 2\,x^{\frac{1}{4}}+2\,y^{\frac{3}{4}}-32=0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\,\lambda=-\frac{7}{4}\,y^{\frac{3}{4}}. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$\frac{3}{2}\,\lambda=-\frac{21}{4}\,x^{\frac{1}{4}}. \tag{V}$$

Aus Gleichung (IV) oder (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$, da $x > 0$, $y > 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{\frac{1}{2}\,\lambda}{\frac{3}{2}\,\lambda} = \frac{-\frac{7}{4}\,y^{\frac{3}{4}}}{-\frac{21}{4}\,x^{\frac{1}{4}}},$$

d.h.,

$$x^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{3}{4}}. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$2\,y^{\frac{3}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{3}{4}} = 8 \Leftrightarrow y = 16.$$

Aus (VI) folgt, dass:

$$x = y^3 = 4096.$$

Daher ist

$$P = (4096, 16)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:

Wir benutzen die Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0$, um $y^{\frac{3}{4}}$ als Funktion von x zu erhalten, d.h., $y^{\frac{3}{4}} = 16 - x^{\frac{1}{4}}$. Setzen wir dies in die Zielfunktion f ein, erhalten wir:

$$F(x) = f\left(x, \left(16 - x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) = 7\,x^{\frac{1}{4}}\,\left(16 - x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle von F ist $F'(x) = 0$. Da

$$F'(x) = \frac{7}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(16 - x^{\frac{1}{4}}) - \frac{7}{4}\,x^{\frac{1}{4}}\,x^{-\frac{3}{4}}$$

gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(16 - x^{\frac{1}{4}}) - \frac{7}{4}\,x^{\frac{1}{4}}\,x^{-\frac{3}{4}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (16 - x^{\frac{1}{4}}) - x^{\frac{1}{4}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 16 = 2\,x^{\frac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{4}} = 8 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 4096. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in $y^{\frac{3}{4}} = 16 - x^{\frac{1}{4}}$ ein, erhalten wir $y = 16$. Dies führt zum selben Resultat wie oben.

(c) (6 Punkte)
Wir berechnen das Integral mit der Methode der partiellen Integration. Sei $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann gilt $u'(x) = 2\,x$ und $v(x) = \sin(x)$. Daraus folgt:

$$\int x^2 \cos(x)\,dx = x^2 \sin(x) - \int 2\,x \sin(x)\,dx.$$

Um das Integral $\int 2\,x \sin(x)\,dx$ zu lösen, wenden wir noch einmal die Methode der partiellen Integration an. Sei $u(x) = 2\,x$ und $v'(x) = \sin(x)$. Daraus folgt $u'(x) = 2$ und $v(x) = -\cos(x)$. Es gilt:

$$\int 2\,x \sin(x)\,dx = -2\,x \cos(x) + \int 2 \cos(x)\,dx = -2\,x \cos(x) + 2 \sin(c) + C.$$

Schliesslich erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\,dx \\
&= \left[x^2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-2\,x \cos(x) + 2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2 \sin(0) \\
&\qquad - \left[-2\,\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2 \sin(0)\right] \\
&= \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 - 0 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2 \ (\approx 0.4674).
\end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)
Wir wenden die Substitutionsregel an. Sei $y = \ln(\ln(x))$. Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

Daraus folgt:

$$\int \frac{3\,[\ln(\ln(x))]^2}{x \ln(x)}\,dx = \int 3\,y^2\,dy = y^3 + C = [\ln(\ln(x))]^3 + C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)
Das System der Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn die Matrix $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ singulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
B \text{ ist singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(B) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & -0.8 \\ 0 & 5 & t \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 + 0 + 5\,t - 0 + 4 - t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 + 4\,t + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2.
\end{aligned}$$

Daher ist das System der Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genau dann linear abhängig, wenn $t = -2$.

(b1) (5 Punkte)
λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -6 & -5-\lambda & 0 \\ 8 & 16\,a & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\lambda\,(-5-\lambda)\,(2-\lambda) + 6\,(2-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,\left[-\lambda\,(-5-\lambda) + 6\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,\left[\lambda^2 + 5\,\lambda + 6\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,(\lambda+2)\,(\lambda+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-3, -2, 2\}.
\end{aligned}$$

Daher sind $-3, -2$ und 2 die Eigenwerte von A.

(b2) (4 Punkte)
Der Vektor $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eigenvektor A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda = -2$, wenn

$$(A + 2\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

d.h.,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} :(2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ +6\,(I) \\ -8\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a - 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = -0.5\,x_2$$

und

$$x_3 = (1 - 4\,a)\,x_2.$$

Daher ist $x_2 = t$ eine freie Variable und

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 - 4\,a \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der Eigenraum von A zum zugehörigen Eigenwert $\lambda = -2$.

(c) (4 Punkte)
Der Gradient von f im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{4}{x^3+y^2} \cdot 3\,x^2 - \frac{10-a}{x} \Rightarrow f_x(1,1) = a-4$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{4}{x^3+y^2} \cdot 2\,y + 3 \Rightarrow f_y(1,1) = 7.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} a-4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{grad} f(1,1)\| = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(a-4)^2+7^2} = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-4)^2+7^2 = 25^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-4)^2 = 25^2-7^2 = 576 = 24^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a-4 = \pm 24 \\ \Leftrightarrow \quad & a \in \{-20, 28\}. \end{aligned}$$

(d) (10 Punkte)
Wir wenden das Gauß-Verfahren an:

$$
(A,\mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 2 & a & 5 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ -2\,(I) \end{array} \end{array}
$$

$$
\rightarrow \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & 3 & -6 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(a-2)\,(II) \end{array} \end{array}
$$

$$
(A^{\star}\mathbf{b}^{\star}). \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & \underbrace{3-a\,(a-2)}_{=-(a-3)\,(a+1)} & \underbrace{-6-2\,(a-2)}_{-2\,(a+1)} \end{array}\right) \end{array} \quad =
$$

(i) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = 3$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^{\star}) = 3$, d.h.,

$$
-(a-3)\,(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}.
$$

(ii) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^{\star}) < \mathrm{rg}(A^{\star}, \mathbf{b}^{\star})$, d.h.,

$$
-(a-3)\,(a+1) = 0 \;\text{ und }\; -2\,(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a = 3.
$$

(iii) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < 3$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^{\star}) = \mathrm{rg}(A^{\star}, \mathbf{b}^{\star}) < 3$, d.h.,

$$
-(a-3)\,(a+1) = 0 \;\text{ und }\; -2\,(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1.
$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (c). Da $\varphi(x,y)=0$, gilt $x=2\,y$. Setzen wir dies in die Zielfunktion f ein, erhalten wir:

$$F(y)=f(2\,y,y)=2\,y\,y^2-2\,(2\,y)^3=-14\,y^3.$$

Die Funktion F hat einen Sattelpunkt an der Stelle $y_0=0$, aber nicht an der Stelle $\tilde{y}_0=1$. Daher ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f.

Q2. (c). f ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn $f(x)\geq 0$ für $x\in\mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. $f(x)\geq 0$ impliziert $c\geq 0$. Da

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{\infty} c\,x\,e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^N 2\,x\,e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N^2} e^{-y}\,dy \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^{N^2} \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-N^2}+e^0\right] \\
&= \frac{c}{2},
\end{aligned}$$

gilt $c=2$. (Substituiert man $y=x^2$, erhält man $dy=2\,x\,dx$. Die Integrationsgrenzen sind dann $0^2=0$ und N^2.)

Q3. (c). Da $\mathrm{rg}(A)=3$, hat A genau drei linear unabhängige Spalten/Zeilen. Dies impliziert, dass A eine reguläre Untermatrix mit Rang 3 hat.

Q4. (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det((A\,B^{-1})^2\,A^{-1}\,B) \\
&= (\det(A\,B^{-1}))^2\,\det(A^{-1}\,B) \\
&= \left(\frac{\det(A)}{\det(B)}\right)^2\frac{\det(B)}{\det(A)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\det(A)}{\det(B)} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Q5. (b). Da das System der Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ linear unabhängig ist, bildet es eine Basis in $\mathbb{R}^3$. Daher existiert für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ eine *eindeutige* Linearkombination, sodass

$$x_1\, \mathbf{u}_1 + x_2\, \mathbf{u}_2 - x_3\, \mathbf{u}_3 = \mathbf{b}.$$

Q6. (d). Da $4 = \text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) < 6 = n$, hat das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension $n - \text{rg}(A) = 6 - 4 = 2$.

Q7. (c). Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\, dx = \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -\underbrace{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0.$$

Alternativ kann man den Graphen von $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ zwischen 0 und 2π zeichnen. Es zeigt sich, dass die Flächen über und unter der x-Achse gleich groß sind.

Q8. (c). Sei λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor, d.h., $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Es gilt:

$$B\,\mathbf{x} = 2\,A^2\,\mathbf{x} = 2\,A\,(A\,\mathbf{x}) = 2\,A\,\lambda\,\mathbf{x} = 2\,\lambda\,A\,\mathbf{x} = 2\,\lambda\,\lambda\,\mathbf{x} = 2\,\lambda^2\,\mathbf{x}.$$

Daher ist $2\,\lambda^2$ ein Eigenwert von B und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (b). Indem man die Ableitung bildet, kann man leicht überprüfen, dass $F(x) = x\,e^{x^3} + C$ die einzigen Stammfunktionen von $f(x) = (3\,x^3 + 1)\,e^{x^3}$ sind.

Q2. (d). Vektor $\mathbf{a}$ ist genau dann orthogonal zum Vektor $\mathbf{b}$, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Jedoch gilt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 + 8 + t^2 + 12 + 2 = t^2 + 25 \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Q3. (c). Wir bestimmen den Rang von A mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\,(I) \\ \\ -2\,(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \\ -(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Da $A^\star$ vier linear unabhängige Zeilen hat, gilt $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

Q4. (a). Für eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

existiert die Inverse, falls $\det(A) = a\,d - c\,b \neq 0$. In diesem Fall gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{a\,d - c\,b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\det(A) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q5. (b). Man kann leicht sehen, dass $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ nur für $\mathbf{v}$ aus Antwort (b) gelten kann. In diesem Fall erhalten wir

$$A\,\mathbf{v} = 10\,\mathbf{v}.$$

Q6. (c). Setzt man $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in die Differenzengleichungen in (a), (b) und (c) ein, wird deutlich, dass nur die Gleichung in (c) erfüllt wird. Es gilt:

$$6\,y_{k+1} - 2\,y_k = 6\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} + 3\right] - 2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + 3\right] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + 18 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k} - 6 = 12.$$

Q7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = -\frac{7}{4}\,y_k - \frac{3}{4}.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{7}{4} \neq 1$ und $B = -\frac{3}{4}$. Da $A < -1$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und divergent.

Q8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{a-2}{a+3}\,y_k - \frac{a}{a+3},$$

d.h., $A = \frac{a-3}{a+3}$ und $B = -\frac{a}{a+3}$. Die allgemeine Lösung ist genau dann oszillierend, wenn $A < 0$. Es gilt:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-2}{a+3} < 0 \Leftrightarrow a \in (-3, 2).$$

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$|A| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-2}{a+3}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{(a+3)^2} < 1 \Leftrightarrow a^2 - 4\,a + 4 < a^2 + 6\,a + 9 \Leftrightarrow 10\,a > -5 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}.$$

Daher ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann konvergent, wenn

$$a \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

Prüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2016

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u : \mathbb{R}_+ \times R_+ \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = c_1^{0.6}\, c_2^{0.4}$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$. Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.

Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.

Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times (-5, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y + 16\,\ln(y + 5).$$

Sei $g : R_f \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion einer reellen Variablen mit $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$, wobei R_f der Wertebereich von f ist. Schliesslich sei die Komposition h gegeben als

$$h : D_f \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) = g(f(x, y)),$$

D_f ist dabei das Definitionsgebiet von f.

Untersuchen Sie die Funktion h auf *stationäre Punkte*, d.h., Maxima, Minima, und Sattelpunkte.

Hinweis:
Dank der Eigenschaften von g ist es möglich, das Problem in eine handhabbare Form zu bringen.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte)

Ein Investment Fonds generiert innerhalb der Zeitspanne von $t = 0$ zu $T = 12$ einen stetigen Cashflow von $B(t) = 10\,t+5$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$.

Bestimmen Sie den Nettobarwert $PV(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $T = 12$ generiert.

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\,\cos(\ln(x))}{x}\,dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist der Rang von A gleich 3?

Aufgabe 2

(b) (6 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1.5	3
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2
Rezession	1.5	0.5

Ermitteln Sie, ob das folgende Auszahlungsschema für den Investor möglich ist, wenn er nur in die Aktien 1 und 2 investiert:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	1'500
wirtschaftliche Stabilität	2'000
Rezession	1'000

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (6 Punkte)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A.

Aufgabe 2

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x, y) = e^{2\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung (allgemeine Form) einer Ebene β so, dass der Vektor $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^T$ orthogonal zu β ist, wobei $(x_0, y_0)^T = \mathbf{grad} f(0, 0)$ und $z_0 = f(0, 0)$ gilt.

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(e) (6 Punkte)

Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & 7 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & -1 \end{array} .$$

Aufgabe 2

(e) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$. Dann gilt:

(a) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(b) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 5\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(c) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ für $x \in [0,1]$, und

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$.

Dann gilt:

(a) $g_1 = \frac{1}{3} f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(b) $g_2 = f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(c) $g_3 = \frac{1}{6} f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(d) $g_4 = \frac{1}{6} f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 4. Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 4×4 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 4×4 Untermatrix von A.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A^{-1} B^2 A^2 B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A und B unendlich viele Lösungen, keine Lösung, oder eine eindeutig Lösung.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear *abhängig*. Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

Für das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 4$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

A ist ein quadratische Matrix und $\lambda = 0$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) Da aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hat A keinen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^T \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $t = 0, 1, \ldots$

Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 2$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]\,dx$$

ist

(a) $x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3\,x + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3\,x^2 + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\,x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

Frage 2 (3 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A\,\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1$.

(b) $t \in \{1, -2\}$.

(c) $t = -2$.

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A\,\mathbf{x}$ ist.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) A ist singulär.

Aufgabe 4

Frage 5 (5 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Dann gilt:

(a) $\lambda_1 \, \lambda_2 = 0$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

(c) $\mathbf{v}_1^T \, \mathbf{v}_2 = 0$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 4 - \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$4\,y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 4$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 6\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$m\, y_{k+1} + y_k = m^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2016

2'200 Mathematik B

Multiple-choice Antwort sheet

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2016

2'200 Mathematik B

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (6 Punkte)

Das Optimierungsproblem des Konsumenten lautet:

$$\begin{aligned} u(c_1, c_2) &= c_1^{0.6}\, c_2^{0.4} \to \max \\ \text{sodass } \varphi(c_1, c_2) &= p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - e = 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \lambda) &= u(c_1, c_2) + \lambda\, \varphi(c_1, c_2) \\ &= c_1^{0.6}\, c_2^{0.4} + \lambda\, (3\, c_1 + 4\, c_2 - 15)\,. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von u unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_{c_1}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 0.6\, c_1^{-0.4}\, c_2^{0.4} + 3\,\lambda = 0, \tag{I}$$
$$F_{c_2}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 0.4\, c_1^{0.6}\, c_2^{-0.6} + 4\,\lambda = 0, \tag{II}$$
$$F_{\lambda}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0. \tag{III}$$

Wegen $c_1 > 0$ erhalten wir aus (I)

$$3\,\lambda = -0.6 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{0.4}. \tag{IV}$$

Mit $c_2 > 0$ folgt aus (II)

$$4\,\lambda = -0.4 \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{0.6}. \tag{V}$$

Aus den Gleichungen (IV) und (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$. Dividieren wir ausserdem (IV) durch (V) ergibt dies

$$\frac{3\,\lambda}{4\,\lambda} = \frac{3}{2}\, \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = 2\, c_2.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (III) ein und erhalten:

$$3\,(2\, c_2) + 4\, c_2 - 15 = 0 \Leftrightarrow 10\, c_2 = 15 \Leftrightarrow c_2 = 1.5.$$

Mit $c_1 = 2\, c_2$ folgt $c_1 = 3$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

<u>Substitutionsmethode:</u>
Wir benutzen die Nebenbedingung $\varphi(c_1, c_2) = p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - e = 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0$, um c_1 als Funktion von c_2 zu schreiben, d.h. $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\, c_2$. Wir ersetzen nun c_1 mit $5 - \frac{4}{3}\, c_2$ im Ausdruck für u, d.h. wir definieren die Funktion U als

$$U(c_2) = u\left(5 - \frac{4}{3}\, c_2, c_2\right) = \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} c_2^{0.4}.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von u unter der Nebenbedingung $3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von U ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $U'(c_2) = 0$ für eine Extremalstelle c_2 von U. Es gilt:

$$U'(c_2) = 0.6\, \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{-0.4} \left(-\frac{4}{3}\right) c_2^{0.4} + \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} 0.4\, c_2^{-0.6}\,.$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
& U'(c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 0.6\, \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{-0.4} \left(-\frac{4}{3}\right) c_2^{0.4} + \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} 0.4\, c_2^{-0.6} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{c_2}{5 - \frac{4}{3} c_2}\right)^{0.4} \left[-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\, \frac{5 - \frac{4}{3}\, c_2}{c_2}\right] = 0 \\
\overset{c_2 \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad & -\frac{4}{5}\, c_2 + \frac{2}{5}\, (5 - \frac{4}{3}\, c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{15}\right) c_2 = -2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{20}{15}\, c_2 = 2 \\
\Leftrightarrow \quad & c_2 = 1.5.
\end{aligned}$$

Aus $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\, c_2$ erhalten wir $c_1 = 3$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

(b) (9 Punkte)
Wegen $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$ stimmen die stationären Punkte von h mit den stationären Punkten von f überein. Tatsächlich gilt:

$$h_x(x, y) = g'(f(x, y))\, f_x(x, y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_x(x, y) = 0,$$

$$h_y(x, y) = g'(f(x, y))\, f_y(x, y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_y(x, y) = 0.$$

Folglich finden wir die stationären Punkte von h, indem wir die von f bestimmen.

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ von f sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{16}{y+5} = 3\,x + 16\,(y+5)^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 16\,(y^\star + 5)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 16\,(y^\star + 5)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 16\left(-\frac{2}{3}\,x^\star + 5\right)^{-1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,(x^\star)^2 + 15\,x^\star + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star \in \left\{\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{15+\sqrt{353}}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star$ finden wir demnach zwei mögliche stationäre Punkte für f (und h):

$$P_1 = \left(\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{-15+\sqrt{353}}{6}\right)$$

und

$$P_2 = \left(\frac{15+\sqrt{353}}{4}, \frac{-15-\sqrt{353}}{6}\right).$$

Da P_2 *nicht* im Definitionsgebiet von f liegt, verbleiben wir mit nur einem einzelnen stationären Punkt von f (und h).

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star,y^\star)\,f_{yy}(x^\star,y^\star)-(f_{xy}(x^\star,y^\star))^2<0 \Rightarrow (x^\star,y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{16}{(y+5)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Wegen $f_{xx}(x,y)>0$ und $f_{yy}(x,y)<0$ für alle $(x,y)\in D_f$ ist P_1 ist ein Sattelpunkt von f (und h).

(c) (6 Punkte)

Der Barwert $PV(0)$ aller Zahlungsströme entspricht:

$$PV(0)=\int_0^T B(t)\,e^{-i\,t}\,dt=\int_0^{12}(10\,t+5)\,e^{-0.05\,t}\,dt.$$

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int(10\,t+5)\,e^{-0.05\,t}\,dt$ mittels partieller Integration. Sei

$$u(t)=10\,t+5$$

und

$$v'(t)=e^{-0.05\,t}.$$

Dann gilt:

$$u'(t)=10$$

und

$$v(t)=-\frac{1}{0.05}\,e^{-0.05\,t}.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} &\int \underbrace{(10\,t+5)}_{=u(t)}\,\underbrace{e^{-0.05\,t}}_{=v'(t)}\,dt \\ =\;& \underbrace{(10\,t+5)}_{=u(t)}\underbrace{\left(-\frac{1}{0.05}\,e^{-0.05\,t}\right)}_{=v(t)}-\int \underbrace{10}_{=u'(t)}\underbrace{\left(-\frac{1}{0.05}\,e^{-0.05\,t}\right)}_{=v(t)}\,dt \\ =\;& -20\,(10\,t+5)\,e^{-0.05\,t}+200\int e^{-0.05\,t}\,dt \\ =\;& -20\,(10\,t+5)\,e^{-0.05\,t}-4000\,e^{-0.05\,t}+C \\ =\;& -(200\,t+4100)\,e^{-0.05\,t}+C. \end{aligned}$$

Demnach können wir den Barwert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} PV(0) &= \int_0^T B(t)\, e^{-i\,t}\, dt \\ &= \int_0^{12} (10\,t+5)\, e^{-0.05\,t}\, dt \\ &= \left[-(200\,t+4100)\, e^{-0.05\,t}\right]_0^{12} \\ &= -6500\, e^{-0.6} + 4100 \\ &\approx 532.70. \end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = \sin(\ln(x))$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

und

$$\frac{\cos(\ln(x))}{x}\, dx = du.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x)}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}\ (\sin(\ln(x)))^2 + C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)

Folgendes gilt:

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix} \right| \\
&= 2\,t^2 + 0 + 2\,t + t + 0 - 4\,t^2 \\
&= -2\,t^2 + 3\,t \\
&= -t\,(2\,t - 3).
\end{aligned}$$

Demnach folgt:

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -t\,(2\,t-3) \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}.$$

(b) (6 Punkte)

Der Payoff des Investors lässt sich genau dann realisieren, wenn λ_1 und λ_2 so existieren, dass

$$\begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Da die Payoff-Vektoren der Wertpapiere 1 und 2 linear unabhängig sind, gilt dies genau dann, wenn das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

linear abhängig ist, oder äquivalent, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1500 & 1.5 & 3 \\ 2000 & 1.5 & 2 \\ 1000 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

singulär ist.

Wegen

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left|\begin{pmatrix} 1500 & 1.5 & 3 \\ 2000 & 1.5 & 2 \\ 1000 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}\right| \\
&= 1125 + 3000 + 900 - 4500 - 4500 - 1500 \\
&= 2625 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

ist A regulär und folglich das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Demnach ist das Auszahlungsschema des Investors nicht zu verwirklichen.

(c) (6 Punkte)

$\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= 2\left|\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4\,s & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| \\
&= 2\,(0 + 0 + 3 + 4\,s) \\
&= 6 + 8\,s\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow 6 + 8\,s = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{4}.$$

Folglich ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $s = -\frac{3}{4}$.

Wir nehmen nun $s = -\frac{3}{4}$ an und berechnen die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$. Wir lösen das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mittels dem Gauß-Verfahren:

$$
(A,\mathbf{b}) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ :(2) \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -(I) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(5) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -3\,(II) \\ -(II) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ :\left(-\frac{18}{5}\right) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{5}\,(III) \\ \\ +\frac{6}{5}\,(III) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .
$$

Folglich gilt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \frac{1}{6}\,x_4 \\ x_3 & = & \frac{1}{6}\,x_4 \end{array}.$$

Wir wählen $x_4 = t$ als eine freie Variable und erhalten $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{6}\,t$ und $x_3 = \frac{1}{6}\,t$. Daher sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$ gegeben durch:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(d) (4 Punkte)

Da $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^T$ senkrecht auf der Ebene β steht, hat β die Ebenengleichung

$$\beta \,:\, x_0\,x + y_0\,y + z_0\,z + d = 0.$$

Mit

$$\mathbf{grad} f(x,y) = e^{2\,x^2+y^3+3\,x+2\,y} \begin{pmatrix} 4\,x+3 \\ 3\,y^2+3 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$(x_0, y_0)^T = \mathbf{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem gilt:

$$z_0 = f(0,0) = 1.$$

Daher hat β die folgende allgemeine Form:

$$\beta \,:\, 3\,x + 3\,y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(e) (6 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ (A, \mathbf{b}) & = & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(I) \\ -2\,(I) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array}$$

$$\stackrel{\text{tausche } x_3 \text{ und } x_4}{\rightarrow} \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\,(III) \\ -2\,(III) \\ \\ \end{array}$$

$$(A^\star, b^\star) = \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) .$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_3 \\ x_2 &= -3 - x_3 \\ x_4 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und $x_3 = t$ ist eine freie Variable. Damit erhalten wir die Lösungsmenge:

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒

F1. (d). (b) ist falsch, da der Punkt P die Nebenbedingung $5\,x + 2\,y - 1 = 0$ wegen $5\,(-1) + 2\,\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = -1 \neq 0$ nicht erfüllt. (a) und (d) sind im Allgemeinen falsch, da der Punkt P unter der neuen Nebenbedingung nicht notwendigerweise wieder ein Extrempunkt von f sein muss, selbst wenn er die Bedingung erfüllt.

F2. (d). Die Funktion g ist genau dann eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn (i) $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, und (ii) $\int_I g(x)\,dx = 1$. Folglich gilt: (a) ist falsch, da g_1 auf $[0,1]$ nicht notwendigerweise positiv ist nachdem wir lediglich wissen, dass $g_1(x) = \frac{1}{3}\,f(x) \geq -1$. (b) ist falsch, da $\int_0^1 g_2(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 1$. (c) ist falsch, da $\int_0^1 g_3(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx + 3 = \frac{1}{6}3 + 3 = \frac{7}{2} \neq 1$. (d) ist richtig, da $g_4(x) = \frac{1}{6}\,f(x) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{6}\,(-3) + \frac{1}{2} = 0$ und $\int_0^1 g_4(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{2} = 1$. Demnach erfüllt g_4 die Eigenschaften einer Dichtefunktionen.

F3. (d). Da die Matrix A Rang 4 hat, hat sie 4 linear unabhängige Spalten. Folglich ist die 4×4 Matrix, die aus eben diesen 4 linear unabhängigen Spalten besteht, regulär. Antworten (a), (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, was man leicht anhand des folgenden Beispiels erkennen kann. Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 4, da die letzten 4 Spalten linear unabhängig sind. Allerdings ist ihre 4×4 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär, da eine Reihe der Nullvektor ist. Ausserdem ist die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär und die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär.

F4. (c). Wegen

$$\det(C) = \frac{1}{\det(A)} (\det(B))^2 (\det(A))^2 \frac{1}{\det(B)} = \det(B) \det(A) = -1 \neq 0$$

ist C regulär. Demnach hat das System $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung.

F5. (b). Da die Matrix A singulär ist, gilt $\det(A) = 0$. Wegen $\det(A^n) = (\det(A))^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daher, dass auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ singulär ist.

F6. (d). Wegen $\mathrm{rg}(A) = 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 6$ hat das System unendlich viele Lösungen. Ausserdem hat der Lösungsraum aufgrund von $n - \mathrm{rg}(A) = 2$ die Dimension 2.

F7. (c). Da $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist, gilt $\det(A) = 0$, d.h. A ist singulär. Folglich hat das homogene System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen. Die Lösungen dieses Systems, die nicht der Nullvektor sind, sind aber gerade die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$.

Allgemeiner ist für jeden Eigenwert λ der Matrix A die Matrix $A - \lambda\,I$ singulär, da $\det(A - \lambda\,I) = 0$ per Definition von λ gilt. Also hat das homogene System $(A - \lambda\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

F8. (b). Wegen $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ entspricht die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ dem Eigenwertproblem

$$A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t.$$

Dieses Problem ist für $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$ lösbar, wenn λ ein Eigenwert von A ist, d.h. wenn

$$\det(A - \lambda\,I) = 0.$$

Da allerdings

$$\det(A - \lambda\,I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 2 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, kann die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ nie erfüllt sein.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

F1. (d). Lediglich die Funktionen in Antwort (d) sind Stammfunktionen des Integranden $f(x) = 6\,x+(2\,x^2+1)\,e^{x^2}$. Dies lässt sich durch Ableiten der gegebenen Funktionen leicht überprüfen.

F2. (c). $\mathbf{y}$ ist orthogonal zu $A\,\mathbf{x}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}\cdot(A\,\mathbf{x}) = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}\cdot(\lambda\,\mathbf{x}) = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \lambda\,(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) = 0 \\
&\quad \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 3\cdot t + t\cdot 4 + 1\cdot 3 = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 7\,t + 14 = 0 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad t = -2.
\end{aligned}$$

F3. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(I) \\ \\ -2\,(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -(II) \\ -(II) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(III) \\ -4\,(III) \\ \\ +5\,(III) \\ +3\,(III) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{3}{5}\,(IV) \\ -\frac{2}{5}\,(IV) \\ \\ -\frac{1}{5}\,(IV) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also gilt $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

F4. (a). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -(I) \\ -(I) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(II) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(III) \\ +(III) \\ \\ \end{matrix}$$

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

F5. (c). Zunächst berechnen wir die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\,\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\,(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\}.$$

Aus diesem Resultat folgt bereits, dass (a) und (b) falsch sind.

Nun bestimmen wir die Eigenvektoren:

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Folglich gilt

$$\mathbf{v}_1^T\,\mathbf{v}_2 = s\,t\,(-1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$, d.h. (c) ist richtig.

Antwort (d) ist dagegen falsch, wie man leicht durch ein Gegenbeispiel verifizieren kann.

F6. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}\,y_k + 3\,,$$

d.h. $A = \frac{1}{4}$ und $B = 3$. Folglich gilt:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = 4.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung gegeben durch:

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{1}{4}\right)^k (y_0 - 4) + 4.$$

Mit $y_0 = 3$ erhalten wir die spezielle Lösung:

$$y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k (3-4) + 4 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Also löst die Folge das gegebene Anfangswertproblem für $a = 4$.

F7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{6}{5}\, y_k + \frac{1}{5}.$$

Folglich gilt $A = -\frac{6}{5}$ und $B = \frac{1}{5}$. Wegen $A < 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und divergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{1}{m}\, y_k + m,$$

d.h. $A = -\frac{1}{m}$ und $B = m$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0,1)$, oder $A = 1$ und $B = 0$. Weil $B = 0$ wegen $m \neq 0$ unmöglich ist, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0,1)$. Es gilt:

$$A \in [0,1) \Leftrightarrow 0 \le -\frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{m} \le 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematatik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2017

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = a \ln(c_1) + b \ln(c_2),$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ reellwertige Parameter sind.

Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.

Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.

Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times (-6, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y + 12\,\ln(y + 6).$$

Sei $h : D_f \to \mathbb{R}$, wobei D_f das Definitionsgebiet von f ist, eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$h(x, y) = e^{(f(x,y))^3 + f(x,y)}.$$

Untersuchen Sie die Funktion h auf *stationäre Punkte.* Für jeden stationären Punkt ist abzuklären, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.

Hinweis:
Die Funktion h ist so definiert, dass sich das Problem in eine handhabbarere Form bringen lässt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (6 Punkte)

Die Funktion $B(t) = a\,t + 6$ mit $a > 0$ sei der durch einen Investment Fonds zum Zeitpunkt t generierte stetige Cashflow, wobei $t \in [0, 12]$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zu einem jährlichen Zinssatz von $i = 0,05$.

Bestimmen Sie den Parameter $a > 0$ so, dass für den Nettobarwert zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 12$ generiert, gilt, dass $PV(0) = 100$.

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sin\left(e^{x}\right)\,\cos\left(e^{x}\right)\,e^{x}\,dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist die Matrix A singulär?

Aufgabe 2

(b) (6 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1,5	3
wirtschaftliche Stabilität	1,5	2
Rezession	1,5	0,5

Die Bank führt ein neues Investmentprodukt (Wertpapier) ein, mit jährlichem Payoff wie folgt:

Konjunktur	Payoff
Expansion	1,5
wirtschaftliche Stabilität	2,0
Rezession	1,0

Untersuchen Sie, ob die drei Wertpapiere linear unabhängig sind, oder ob sich der Payoff eines der Wertpapiere durch eine Kombination der zwei anderen Wertpapiere erzielen lässt.

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (6 Punkte)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Aufgabe 2

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = e^{a\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von a, sodass die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (0,0)$ durch den Vektor $\mathbf{n} = (1,1)^T$ gegeben ist.

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(e) (6 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soll mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ und } \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear kombiniert werden.

Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um alle möglichen Lösungen dieses Problems zu bestimmen.

Aufgabe 2

(e) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f zweier reeller Variablen unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$. Die Funktion einer reeller Variablen g genüge der Bedingung $D_g = R_f$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in D_g$. Sei $h = g \circ f$. Dann gilt:

(a) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$.

(b) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = g(3\,x + 2\,y - 2) = 0$.

(c) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ for $x \in [0,1]$,

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, und

(iii) $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = 2$.

Dann gilt:

(a) $g = \frac{1}{3} f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{7}{12}$.

(b) $g = \frac{1}{3} f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{1}{3}$.

(c) $g = \frac{1}{6} f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{7}{12}$.

(d) $g = \frac{1}{6} f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 3. Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 2×2 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 2×2 Untermatrix von A.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 0$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A\,B^2\,A^2\,B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A, B und $\mathbf{b}$ keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear *unabhängig*. Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

Für das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\text{rg}(A) = 4$ und $\text{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

A ist eine quadratische Matrix und $\lambda = 1$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) A hat keine zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörende Eigenvektoren.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^T \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $t = 0, 1, \ldots$

Die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} - \lambda\,\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 3$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int 2\left[3\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]\,dx$$

ist

(a) $x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3\,x + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3\,x^2 + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\,x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 4

Frage 2 (3 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A^5\,\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1$.

(b) $t \in \{1, -2\}$.

(c) $t = -\frac{3}{2}$.

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A^5\,\mathbf{x}$ ist.

Aufgabe 4

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) A ist singulär.

Aufgabe 4

Frage 5 (5 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Es gilt:

(a) $\lambda_1 - \lambda_2 = -4$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$.

(c) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 2\,a - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$3\,y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 3$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$6\,y_{k+1} - 7\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$-m\, y_{k+1} + y_k = m^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2016

2,200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2016

2,200 Mathematik B

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (6 Punkte)

Das Optimierungsproblem des Konsumenten lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} u(c_1, c_2) &= a\,\ln(c_1) + b\,\ln(c_2) \to \max \\ \text{sodass } \varphi(c_1, c_2) &= p_1\,c_1 + p_2\,c_2 - e = 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \lambda) &= u(c_1, c_2) + \lambda\,\varphi(c_1, c_2) \\ &= a\,\ln(c_1) + b\,\ln(c_2) + \lambda\,(3\,c_1 + 4\,c_2 - 15)\,. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von u unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_{c_1}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c_1} + 3\,\lambda = 0, \tag{I}$$

$$F_{c_2}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{c_2} + 4\,\lambda = 0, \tag{II}$$

$$F_{\lambda}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir wegen $c_1 > 0$:

$$\frac{a}{c_1} = -3\,\lambda. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir wegen $c_2 > 0$:

$$\frac{b}{c_2} = -4\,\lambda. \tag{V}$$

Aus Gleichung (IV) oder (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$, da $a > 0$, $b > 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{3\,\lambda}{4\,\lambda} = \frac{a}{b}\,\frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow 4\,c_2 = 3\,\frac{b}{a}\,c_1.$$

Wir setzen dieses Resultat in (III) ein und erhalten:

$$3\,c_1 + 3\,\frac{b}{a}\,c_1 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3\,c_1\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 15 \Leftrightarrow c_1 = \frac{5}{1 + \frac{b}{a}}.$$

Wegen $c_2 = \frac{3}{4}\,\frac{b}{a}\,c_1$ gilt, dass

$$c_2 = \frac{3}{4}\,\frac{b}{a}\,\frac{5}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{15}{4 + 4\,\frac{a}{b}}.$$

Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = \left(\frac{5}{1+\frac{b}{a}}, \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $\varphi(c_1, c_2) = p_1\,c_1 + p_2\,c_2 - e = 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0$, um c_1 als Funktion von c_2 zu erhalten, d.h., $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\,c_2$. Wir ersetzen nun c_1 mit $5 - \frac{4}{3}\,c_2$ in der Zielfunktion u, d.h. wir definieren die Funktion U als:

$$U(c_2) = u\left(5 - \frac{4}{3}\,c_2, c_2\right) = a\,\ln\left(5 - \frac{4}{3}\,c_2\right) + b\,\ln(c_2).$$

Die Optimierung der Funktion u unter der Nebenbedingung $3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0$ ist nun äquivalent zu der Optimierung von U ohne Nebenbedingung. Eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle von U ist $U'(c_2) = 0$. Da

$$U'(c_2) = \frac{a}{5 - \frac{4}{3}\,c_2}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{b}{c_2}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
& U'(c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a}{5 - \frac{4}{3}\,c_2}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{b}{c_2} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a}{\frac{15}{4} - c_2} = \frac{b}{c_2} \\
\Leftrightarrow\quad & a\,c_2 = \left(\frac{15}{4} - c_2\right)\,b \\
\Leftrightarrow\quad & c_2 = \frac{\frac{15}{4}\,b}{a+b} = \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\,c_2$ ein, erhalten wir $c_1 = \frac{5}{1+\frac{b}{a}}$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = \left(\frac{5}{1+\frac{b}{a}}, \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

(b) (9 Punkte)

Wir definieren die Funktion g einer reellen Variablen als $g : R_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^3+x}$. Dann gilt:

$$h(x,y) = g(f(x,y)).$$

Wegen $g'(x) = e^{x^3+x}\,(2\,x^2+1) > 0$ für alle $x \in R_f$, stimmen die stationären Punkte von h mit den stationären Punkten von f überein. Tatsächlich gilt:

$$h_x(x,y) = g'(f(x,y))\,f_x(x,y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_x(x,y) = 0,$$

$$h_y(x,y) = g'(f(x,y))\,f_y(x,y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_y(x,y) = 0.$$

Folglich finden wir die stationären Punkte von h, indem wir die von f bestimmen.

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ von f sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star,y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star,y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{12}{y+6} = 3\,x + 12\,(y+6)^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star,y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star,y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 12\,(y^\star+6)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $4\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{4}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 12\,(y^\star+6)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 12\left(-\frac{4}{3}\,x^\star + 6\right)^{-1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3\,x^\star\left(-\frac{4}{3}\,x^\star + 6\right) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -4\,(x^\star)^2 + 18\,x^\star + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star \in \left\{\frac{18-\sqrt{516}}{8}, \frac{18+\sqrt{516}}{8}\right\} \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star \in \left\{\frac{9-\sqrt{129}}{4}, \frac{9+\sqrt{129}}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $y^\star = -\frac{4}{3}\,x^\star$ finden wir demnach zwei mögliche stationäre Punkte für f (und h):

$$P_1 = \left(\frac{9-\sqrt{129}}{4}, -\frac{9-\sqrt{129}}{3}\right)$$

und

$$P_2 = \left(\frac{9+\sqrt{129}}{4}, -\frac{9+\sqrt{129}}{3} \right).$$

Da $-\frac{9+\sqrt{129}}{3} < -6$, liegt P_2 *nicht* im Definitionsgebiet von f und P_1 ist der einzige stationären Punkt von f (und h).

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{array} \right. \qquad \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{12}{(y+6)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Wegen $f_{xx}(x,y) > 0$ und $f_{yy}(x,y) < 0$ für alle $(x,y) \in D_f$ ist P_1 ist ein Sattelpunkt von f (und h).

(c) (6 Punkte)

Der Barwert $PV(0)$ aller Zahlungsströme entspricht:

$$PV(0) = \int_0^T B(t)\, e^{-i\,t}\, dt = \int_0^{12} (a\,t+6)\, e^{-i\,t}\, dt.$$

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int (a\,t+6)\, e^{-i\,t}\, dt$ mittels partieller Integration. Sei

$$u(t) = a\,t + 6$$

und

$$v'(t) = e^{-i\,t}.$$

Dann gilt:

$$u'(t) = a$$

und

$$v(t) = -\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{(a\,t+6)}_{=u(t)}\, \underbrace{e^{-i\,t}}_{=v'(t)}\, dt \\
&= \underbrace{(a\,t+6)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} - \int \underbrace{a}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\
&= -\frac{a\,t+6}{i}\, e^{-i\,t} + \frac{a}{i} \int e^{-i\,t}\, dt \\
&= -\frac{a\,t+6}{i}\, e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\, e^{-i\,t} + C \\
&= -\left(\frac{a\,t+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-i\,t} + C.
\end{aligned}$$

Demnach können wir den Barwert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
PV(0) &= \int_0^{12} B(t)\, e^{-i\,t}\, dt \\
&= \int_0^{12} (a\,t+6)\, e^{-i\,t}\, dt \\
&= \left[-\left(\frac{a\,t+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-i\,t}\right]_0^{12} \\
&= -\left(\frac{12\,a+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-12\,i} + \left(\frac{6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) \\
&= -\frac{1}{i}\left(12\,a + 6 + \frac{a}{i}\right) e^{-12\,i} + \frac{1}{i}\left(6 + \frac{a}{i}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{i=0.05}{=} \quad -20\ (12\,a + 6 + 20\,a)\ e^{-0.6} + 20\ (6 + 20\,a) \\ &= \quad \left(400 - 640\,e^{0.6}\right)\ a + 120\,(1 - e^{-0.6}). \end{aligned}$$

Schliesslich gilt:

$$PV(0) = 100 \Leftrightarrow \left(400 - 640\,e^{0.6}\right)\ a + 120\,(1 - e^{-0.6}) = 100 \Leftrightarrow a = \frac{100 - 120\,(1 - e^{-0.6})}{400 - 640\,e^{-0.6}} \approx 0.940461.$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = \sin(e^x)$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx} = \cos(e^x)\,e^x$$

und

$$\cos(e^x)\,e^x\,dx = du.$$

Daraus folgt:

$$\int \sin(e^x)\cos(e^x)\,e^x\,dx = \int u\,du = \frac{1}{2}\,u^2 + C = \frac{1}{2}\,\sin^2(e^x) + C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)

Folgendes gilt:

$$A \text{ ist singulär} \Leftrightarrow \det(A) = 0.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix} \right| \\
&= 2\,t^2 + 0 + 2\,t + t + 0 - 8\,t^2 \\
&= 3\,t\,(1 - 2\,t).
\end{aligned}$$

Demnach folgt:

$$A \text{ is singulär} \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 3\,t\,(1 - 2\,t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

(b1) (5 Punkte)

Das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear unabhängig genau dann, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & 2 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Wegen

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & 2 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= 2.625 \\
&\neq 0\,,
\end{aligned}$$

ist A regulär und folglich das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Demnach lässt sich der Payoff des neuen Wertpapiers (bzw. der Payoff eines beliebigen der drei Wertpapiere) nicht durch eine Kombination der zwei anderen Wertpapiere erzielen.

(c) (6 Punkte)

$\lambda = 1$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - 1 \cdot I) = \det(A - I) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s - 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= 1 \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4\,s - 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= -4\,(4\,s - 1) + 3 + (4\,s - 1) + 3 \\ &= -12\,s + 9. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det(A - I) = 0 \Leftrightarrow -12\,s + 9 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{3}{4}.$$

Folglich ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $s = \frac{3}{4}$.

Wir nehmen nun $s = \frac{3}{4}$ an und berechnen die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$. Wir lösen das Gleichungssystem $(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$(A - I, \mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -3\,(II) \\ -(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Folglich gilt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 + x_4 \\ x_3 & = & -\frac{3}{5}\,x_4 \end{array} .$$

Wir wählen $x_4 = 5\,t$ als eine freie Variable und erhalten $x_1 = 0$, $x_2 = 2\,t$ und $x_3 = -3\,t$. Daher sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$ gegeben durch:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

(d) (4 Punkte)

Die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \mathbf{grad} f(0, 0)$$

für ein $\lambda > 0$.

Wegen

$$\mathbf{grad} f(x, y) = e^{a\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y} \begin{pmatrix} 2\,a\,x + 3 \\ 3\,y^2 + 3 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Demnach gilt unabhängig von a, dass $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = 3\,\mathbf{n}$. Also zeigt $\mathbf{n}$ für beliebige Werte $a \in \mathbb{R}$ in die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(e) (6 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A,\mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -2\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -11 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{vertausche } x_3 \text{ und } x_4} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ :(-2) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2\,(III) \\ -2\,(III) \\ \end{array}$$

$$(A^\star, b^\star) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \end{array} .$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_3 \\ x_2 &= -3 - x_3 \\ x_4 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und $x_3 = t$ ist eine freie Variable. Damit erhalten wir die Lösungsmenge:

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☒	☐	☐	☐
Question 2	☐	☐	☒	☐
Question 3	☐	☐	☐	☒
Question 4	☐	☐	☐	☒
Question 5	☒	☐	☐	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☐	☒	☐
Question 8	☐	☐	☐	☒

F1. (a). Wegen $g'(x) > 0$ ist g streng monoton steigend und die Extremalstellen von f stimmen mit denjenigen von h überein, gegeben, dass die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ unverändert bleibt. (b) ist offensichtlich falsch, da P die neue Nebenbedingung im Allgemeinen nicht erfüllt. (c) ist falsch, da g streng monoton wachsend ist und P demnach kein Minimum von h werden kann.

F2. (c). Die Funktion g ist genau dann eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn $g(x) \geq 0$ für $x \in I$ und $\int_I g(x)\,dx = 1$. Folglich gilt: (a) und (b) sind falsch, da $g = \frac{1}{3} f$ auf $[0,1]$ nicht notwendigerweise positiv ist, nachdem wir lediglich wissen, dass $g(x) = \frac{1}{3} f(x) \geq -1$. (d) ist falsch, da $g = \frac{1}{6} f + \frac{1}{2}$ zwar eine Dichtefunktion ist, der Erwartungswert sich jedoch berechnet als $\int_0^1 x\, g(x)\,dx = \frac{1}{6} \int_0^1 x\, f(x)\,dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Demnach ist (c) richtig.

F3. (d). Da $\mathrm{rg}(A) = 3$, hat A genau drei linear unabhängige Spalten/Zeilen. Dies impliziert, dass wir eine reguläre 3×3 Untermatrix von A finden können. Da zwei beliebige Vektoren eines linear unabhängigen System aus 3 Vektoren wiederum linear unabhängig sind, gilt dies auch für eine 2×2 Untermatrix. Die Antworten (a), (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, was man leicht anhand des folgenden Beispiels erkennen kann. Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Rang 3, da (nur) die Spalten 2-4 linear unabhängig sind. Allerdings ist ihre 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär, da eine Reihe der Nullvektor ist. Ausserdem ist die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär und die 2×2 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär.

F4. (d). Die Matrix C ist aufgrund

$$\det(C) = \det(A)\,(\det(B))^2\,(\det(A))^2\,\frac{1}{\det(B)} = 0\,,$$

singulär. Demnach hat das System $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ abhängig von A, B und $\mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

F5. (a). Da die Spalten der Matrix A linear unabhängig sind, ist A regulär, d.h. $\det(A) \neq 0$. Wegen $\det(A^n) = (\det(A))^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt daher, dass auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ regulär ist.

F6. (c). Wegen $\text{rg}(A) = 4 = \text{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 6$ hat das System unendlich viele Lösungen. Ausserdem hat der Lösungsraum aufgrund von $n - \text{rg}(A) = 2$ die Dimension 2.

F7. (c). Da $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist, gilt $\det(A - I) = 0$, d.h. $A - I$ ist singulär. Folglich hat das homogene System $(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen. Die Lösungen dieses Systems, die nicht der Nullvektor sind, sind aber gerade die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Allgemeiner ist für jeden Eigenwert λ der Matrix A die Matrix $A - \lambda\,I$ singulär, da $\det(A - \lambda\,I) = 0$ per Definition von λ gilt. Also hat das homogene System $(A - \lambda\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

F8. (d). Wegen $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ entspricht die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ dem Eigenwertproblem

$$A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t.$$

Dieses Problem ist für $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$ lösbar, wenn λ ein Eigenwert von A ist, d.h. wenn

$$\det(A - \lambda\,I) = 0.$$

Da allerdings

$$\det(A - \lambda\,I) = \left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right| = (1-\lambda)^2 + 2 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, kann die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ nie erfüllt sein.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☐	☐	☒	☐
Question 2	☐	☐	☒	☐
Question 3	☐	☐	☒	☐
Question 4	☐	☒	☐	☐
Question 5	☐	☒	☐	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☒	☐	☐
Question 8	☐	☐	☐	☒

F1. (c). Lediglich die Funktionen in Antwort (c) sind Stammfunktionen des Integranden $f(x) = 2\left[3\,x + (2\,x^2+1)\,e^{x^2}\right]$. Dies lässt sich durch Ableiten der gegebenen Funktionen leicht überprüfen.

F2. (c). $\mathbf{y}$ ist orthogonal zu $A^5\,\mathbf{x}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}\cdot(A^5\,\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{y}\cdot(\lambda^5\,\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \lambda^5\,(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot 1 + 4\cdot t + 3\cdot 2 + t\cdot 4 + 1\cdot 3 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad 8\,t + 12 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

F3. (c). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(I)\\ -(V)\\ -2\,(I)\\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -(V)\\ \\ -(III)\\ -(III) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-4), -(III)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ \\ \\ -(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ (II) \rightarrow (VI) \\ \\ (IV) \rightarrow (V) \\ (V) \rightarrow (II) \end{array}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also gilt $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

F4. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(I) \\ -(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(III) \\ \\ \end{array}$$

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

F5. (b). Zunächst berechnen wir die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det(A-\lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\,\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\,(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\}.$$

Aus diesem Resultat folgt bereits, dass (a) falsch und (b) wahr ist.

Der Vollständigkeit halber bestimmen wir die Eigenvektoren:

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1\, I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_2 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Indem wir $t = s = 1$ setzen, verifizieren wir, dass (c) und (d) falsch sind:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

F6. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}\, y_k + 4\,,$$

d.h. $A = \frac{1}{3}$ und $B = 4$. Folglich gilt:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung gegeben durch:

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{1}{3}\right)^k (y_0 - 6) + 6.$$

Mit $y_0 = 3$ erhalten wir die spezielle Lösung:

$$y_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k (3-6) + 6 = 6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

Also löst die Folge das gegebene Anfangswertproblem für $a = 3$.

F7. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{7}{6}\, y_k + \frac{1}{6}.$$

Folglich gilt $A = \frac{7}{6}$ und $B = \frac{1}{6}$. Wegen $A > 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{m} y_k - m,$$

d.h. $A = \frac{1}{m}$ und $B = -m$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$, oder $A = 1$ und $B = 0$. Weil $B = 0$ wegen $m \neq 0$ unmöglich ist, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$. Es gilt:

$$A \in [0, 1) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow m > 1.$$