Teil I: Offene Aufgaben (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Für welche Werte von a ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^k$$

konvergent?
Ermitteln sie den zugehörigen Grenzwert.

(b) (6 Punkte)

Ein Unternehmer wird auf das Ende des Jahres 2021 in den Ruhestand treten. Um sich nach seinem Rücktritt eine Rente zu sichern, sieht er vor, ab einschliesslich 2001 (bis 2021) zu jedem Jahresende einen konstanten Betrag C auf ein Sparkonto (Zinssatz $i = 2\%$) einzuzahlen. Als Rentner will er ab 2022 15 Jahre lang zu jedem Jahresende CHF $40'000$ abheben.
Berechnen Sie C.

(c) (3 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2e^x - x^2 - 2x - 2}.$$

(d1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

(d3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to W_f \subset \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x)$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f im Punkt $x_0 = \pi$.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x)$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = \pi$. Zeigen Sie, dass für $x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{10^4}.$$

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln(4\ x^2 + y^2 - 16) + \sqrt[3]{25 - x^2 - y^2}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \cos(x)\ \sin(y) + a\ (x + 3)^2.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt die Tangentensteigung an die Niveaulinie im Punkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ den Wert 3 an?

(d1) (3 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = 8\left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5} \qquad (\lambda > 0).$$

Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A sowie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$.

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 8 \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A} \right)^{-0.5}$$

mit $\lambda = 2$.
Berechnen Sie das totale Differential $\mathrm{d}P$ von P in $(K_0, A_0) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$.
Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials einen Näherungswert für $P(0.98, 0.29)$.

(d3) (4 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 8 \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A} \right)^{-0.5}.$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(K_0, A_0) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ gleich -1.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Die Aussage

$$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$$

hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ W\ W\ W$

(b)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ W\ W\ F$

(c)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$F\ F\ F\ W$

(d)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ F\ F\ F$

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{e2^n + n}{n^e + 2n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 1.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert e.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Frage 3 (2 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\ cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) $-\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) 3π.

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und zahlt in 5 Jahren CHF $2'500'000$ aus. Das Projekt hat den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.25\%$.

(b) $i = 4.56\%$

(c) $i = 6.65\%$

(d) Der Nettobarwert ist unabhängig vom jährlichen Zinssatz i.

Frage 5 (4 Punkte)

Der Term

$$\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{2a}\right) \quad (a > 0, b > 0)$$

ist äquivalent zu

(a) 0.

(b) $-\ln(2)$

(c) $2\ln\left(\frac{2\sqrt{2}a}{b}\right)$

(d) $\ln\left(\frac{4a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}, & \text{für } x \neq -1,\; x \neq 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = -1 \\ -2, & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur in $x = -1$ unstetig.

(c) f ist nur in $x = 3$ unstetig.

(d) f ist nur in $x = -1$ und $x = 3$ unstetig.

Frage 7 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$g(t) = x^t \cos(2x).$$

Welche der folgenden Ableitungen beschreibt die erste Ableitung von $g(t)$?

(a) $g'(t) = -2tx^{t-1}\sin(2x)$.

(b) $g'(t) = \ln(x)x^t\cos(2x)$.

(c) $g'(t) = tx^{t-1}\cos(2x) - 2x^t\sin(2x)$.

(d) $g'(t) = \ln(t)x^t\cos(2x)$.

Frage 8 (2 Punkte)

Welche der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, dass eine auf $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion in $(x_0, f(x_0))$ (mit $x_0 \in I$)) ein lokales Maximum hat?

(a) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$.

(b) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 = f'''(x_0)$ und $f^{(4)}(x_0) < 0$.

(c) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

(d) $f''(x_0) \neq 0$ und $f'''(x_0) = 0$.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = t^4.$$

(a) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton fallend in t.

(b) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist konstant in t.

(c) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton wachsend in t.

(d) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist nicht monoton in t.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \; : \; \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \; x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \; x^x.$$

(a) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = \ln(2)$.

(c) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = e$.

(d) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = e^{-1}$.

Frage 3 (3 Punkte)

Gegeben ist das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$:

$$P_4(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$$

Welches ist die zugehörige Funktion?

(a) $f(x) = e^x$.

(b) $f(x) = 2e^x - 1$.

(c) $f(x) = 3e^x - 2$.

(d) $f(x) = 5e^x - 4$.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Niveaulinien $f(x,y) = c$ der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$$

für $c > 1$

(a) sind Parabeln

(b) sind Hyperbeln.

(c) sind Ellipsen.

(d) sind keine Kurven der unter (a) - (c) genannten Art.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^a y^{1-a} + x^{-3} y^4\right)^{0.5}, \quad (x > 0, y > 0, a > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad a.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y), \quad (x > 0, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{3}$.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{4x^{0.2}y^{0.4}} + \sqrt[4]{x^{1.6}y^{0.8}} \quad (x > 0, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.4.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (2 Punkte)

Eine differenzierbare Funktion $f(x,y)$ sei homogen vom Grad $k = 0.7$ und es gelte $f(x,y) > 0$ für alle x, y. Dann gilt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x_0,y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0,y_0) = 0$ in jedem Punkt (x_0,y_0) des Definitionsbereichs.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x_0,y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0,y_0) = 0.7$ in jedem Punkt (x_0,y_0) des Definitionsbereichs.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x_0,y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0,y_0) = 1.4$ in jedem Punkt (x_0,y_0) des Definitionsbereichs.

(d) Es lässt sich keine allgemeine Aussage über $\varepsilon_{f,x}(x_0,y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0,y_0)$ machen, d.h. $\varepsilon_{f,x}(x_0,y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0,y_0)$ ist abhängig von (x_0,y_0).

Lösungen

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Für welche Werte von a ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^k$$

konvergent?
Ermitteln sie den zugehörigen Grenzwert.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Erkenne die Art der Reihe.
2. Erinnere dich, wann diese Art von Reihe konvergent ist.
3. Bestimme a.
4. Bestimme den Grenzwert.

1. Erkenne die Art der Reihe
Wir erkennen, dass Summanden der Form

$$q_a^k = \left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^k$$

vorliegen. Damit haben wir eine geometrische Reihe gegeben.

2. Erinnere dich, wann diese Art von Reihe konvergent ist
Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$ ist. Wir müssen die Ungleichung

$$|q_a| = \left|\frac{2a-1}{a+1}\right| < 1$$

lösen, um a zu bestimmen.

3. Bestimme a
Die oben genannte Bedingung können wir nun durch

$$\left|\frac{2a-1}{a+1}\right| < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2a-1}{a+1}\right)^2 < 1^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(2a-1)^2}{(a+1)^2} < 1 \Leftrightarrow \frac{4a^2-4a+1}{a^2+2a+1} < 1$$
$$\Leftrightarrow 4a^2-4a+1 < a^2+2a+1 \Leftrightarrow 3a^2-6a < 0 \Leftrightarrow 3a(a-2) < 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-2) < 0$$

umformen. Nun ist $a(a-2)$ eine nach oben geöffnete Parabel, die negativ zwischen den Nullstellen ist. Damit gilt $a(a-2) < 0$ für $a \in (0,2)$. Insgesamt haben wir

$$|q_a| < 1 \Leftrightarrow a \in (0,2)$$

gezeigt. Unsere Reihe konvergiert also für $a \in (0,2)$.

4. Bestimme den Grenzwert

Der allgemeine Grenzwert der geometrischen Reihe ist durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

für $|q| < 1$ gegeben. Damit erhalten wir den Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q_a^k = \frac{1}{1-q_a} = \frac{1}{1-\frac{2a-1}{a+1}} = \frac{1}{\frac{a+1}{a+1}-\frac{2a-1}{a+1}} = \frac{1}{\frac{-a+2}{a+1}} = \frac{a+1}{-a+2}$$

für $a \in (0,2)$.

(b) (6 Punkte)

Ein Unternehmer wird auf das Ende des Jahres 2021 in den Ruhestand treten. Um sich nach seinem Rücktritt eine Rente zu sichern, sieht er vor, ab einschliesslich 2001 (bis 2021) zu jedem Jahresende einen konstanten Betrag C auf ein Sparkonto (Zinssatz $i = 2\%$) einzuzahlen. Als Rentner will er ab 2022 15 Jahre lang zu jedem Jahresende CHF $40'000$ abheben.
Berechnen Sie C.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, ob eine vor- oder nachschüssige Rente gegeben ist.
2. Gebe den Endwert nach 21-jähriger Einzahlung an.
3. Gebe den Barwert nach 15-jähriger Auszahlung an.
4. Stelle eine passende Gleichung auf und finde die Lösung.

1. Überlege dir, ob eine vor- oder nachschüssige Rente gegeben ist

Da die Einzahlungen am Ende des Jahres stattfinden, haben wir eine nachschüssige Rente. Damit ist der Endwert nach T Jahren durch

$$A_T = \sum_{k=0}^{T-1} C \cdot (1+i)^k = C\frac{(1+i)^T - 1}{i}$$

gegeben.
Der Barwert nach T Jahren ist durch

$$PV = \sum_{k=1}^{T} \frac{C}{(1+i)^k} = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-T}}{i}$$

gegeben.

2. Gebe den Endwert nach 21-jähriger Einzahlung an

Der Endwert nach 21 Jahren ist durch

$$A_{21} = C \cdot \frac{(1.02)^{21} - 1}{0.02}$$

gegeben. Das C ist die Unbekannte nach welcher wir später umformen.

3. Gebe den Barwert nach 15-jähriger Auszahlung an

Für den Barwert gilt nun

$$PV = \sum_{k=1}^{15} \frac{40000}{(1+0.02)^k}$$

$$PV = 40'000 \cdot \frac{1-(1.02)^{-15}}{0.02} \approx 513'970,55,$$

wodruch wir nun im nächsten Schritt eine Gleichung aufstellen kann.

4. Stelle eine passende Gleichung auf und finde die Lösung

Wir erhalten also

$$A_{21} = C\frac{1.02^{21}-1}{0.02} = 40'000 \cdot \frac{1-1.02^{-15}}{0.02} = PV \approx 513'970,55$$
$$\Leftrightarrow C = \frac{40'000}{1.02^{15}}\frac{1.02^{15}-1}{1.02^{21}} \approx 19'934,25$$

als Lösung.

(c) (3 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2e^x - x^2 - 2x - 2}.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welcher Satz hier angewendet werden kann.
2. Berechne den Grenzwert.

1. Überlege dir, welcher Satz hier angewendet werden kann

Wir erhalten

$$\frac{0}{0},$$

wenn wir 0 in den Zähler und Nenner einsetzen. Dies ist nicht definiert. Aus diesem Grund können wir den Grenzwert nicht direkt ziehen und müssen den Satz von de l'Hôpital anwenden. Die Frage ist nun, wie oft wir de l'Hôpital nutzen müssen. Wir setzten nun $f(x) := x^3$ und $g(x) := 2e^x - x^2 - 2x - 2$. Dann erhalten wir

$$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6$$

und

$$g'(x) = 2e^x - 2x - 2,\ g''(x) = 2e^x - 2,\ g'''(x) = 2e^x.$$

Wir sehen, dass f und g erst ab der dritten Ableitung ungleich null für $x = 0$ sind. Also wenden wir de l'Hôpital dreimal an.

2. Berechne den Grenzwert

Den Grenzwert erhalten wir nun durch dreimaliges Anwenden von de l'Hôpital. Mit

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2e^x - x^2 - 2x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2e^x - 2x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2e^x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2e^x} = \frac{6}{2} = 3$$

ist 3 der gesuchte Grenzwert.

(d1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir den Definitionsbereiche der Wurzelfunktion und des Logarithmus in Erinnerung.
2. Leite den Definitionsbereich D_f her.
3. Nutze eine Eigenschaft von 2^x um den Wertebereich W_f anzugeben.
4. Gebe einen anderen Lösungsweg für den Wertebereich W_f an.

1. Rufe dir den Definitionsbereiche der Wurzelfunktion und des Logarithmus in Erinnerung

Die Wurzelfunktion besitzt den Definitionsbereich $[0, \infty)$. Der Logarithmus hat den Definitionsbereich $(0, \infty)$ und Wertebereich $(-\infty, \infty)$. Darüber hinaus gilt

$$\ln(x) \geq 0$$

für alle $x \in [1, \infty)$.

2. Leite den Definitionsbereich D_f her

Aus unserer Vorüberlegung wissen wir, dass

$$x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$$

erfüllt sein muss. Damit ist der vollständige Definitionsbereich durch

$$D_f = [-1, \infty)$$

gegeben.

3. Nutze eine Eigenschaft von 2^x um den Wertebereich W_f anzugeben

Wir wissen, dass

$$x < y \;\Rightarrow\; 2^x < 2^y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Die Exponentialfunktion zur Basis 2 ist also streng monoton wachsend. Nun ist die Wurzel-und Logaritmusfunktion streng monoton wachsend. Durch

$$f(-1) = 2^{-2+\sqrt{\ln(1)}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

erhalten wir

$$W_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

als Wertebereich. Dieser Lösungsweg nutzt leider in gewisser Weise das Wissen aus Aufgaben 1 d2. Aus diesem Grund werden wir noch einen anderen Weg angeben.

4. Gebe einen anderen Lösungsweg für den Wertebereich W_f an

Wir können den Wertebereich auch durch Äquivalenzumformungen bestimmen. Durch

$$\begin{aligned}1 \le x+2 < \infty &\Leftrightarrow 0 \le \ln(x+2) < \infty \\ &\Leftrightarrow 0 \le \sqrt{\ln(x+2)} < \infty \\ &\Leftrightarrow -2 \le -2 + \sqrt{\ln(x+2)} < \infty \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2^{-2} \le 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}} < \infty\end{aligned}$$

erhalten wir wieder

$$W_f = \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$$

als Wertebereich.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Mache dir klar, was Monotonie bedeutet.
2. Leite die Funktion ab.
3. Schaue, ob $f'(x)$ immer ≥ 0 oder ≤ 0 ist.

1. Mache dir klar was Monotonie bedeutet
Wir erinnern uns, dass eine Funktion monoton wachsend ist, falls

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

gilt. Für fallende Monotonie folgt stattdessen $f(x) \geq f(y)$. Wir nennen eine Funktion monoton, falls diese monoton wachsen oder fallend ist. Wichtig ist, dass obige Definition auf dem ganzen Definitionsbereich gelten muss.

2. Leite die Funktion ab
Zunächst gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x\ln(2)} = \ln(2) e^{x\ln(2)} = \ln(2) 2^x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{\ln(x+2)} = \frac{1}{2\ln(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2}$$

mit Hilfe der Kettenregel. Mit der mehrfachen Anwendung der Kettenregel erhalten wir durch

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{\ln(2) \cdot 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}}{2\sqrt{\ln(x+2)}} \cdot \frac{1}{x+2}$$

die Ableitung.

3. Schaue, ob $f'(x)$ immer ≥ 0 oder ≤ 0 ist
Der Ausdruck

$$\frac{1}{x+2}$$

ist positiv für $x \in D_f$. Die anderen in der Ableitung vorkommenden Terme sind alle positiv. Damit gilt

$$f'(x) > 0$$

für alle $x \in D_f$. Also ist f streng monoton wachsend.

(d3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to W_f \subset \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie der Definitions-und Wertebereich von f^{-1} aussieht.
2. Forme $y = f(x)$ nach x um.

1. Überlege dir, wie der Definitions-und Wertebereich von f^{-1} aussieht

Unser Ziel ist es, die Funktion f umzukehren. Dafür müssen wir zunächst den Bildbereich von f auf den Wertebereich einschränken. Der Bildbereich ist die Menge der von der Funktion erreichten Werte. Wir betrachten also nur noch die „getroffenen“ Elemente. Dies ist notwendig. Die Exponentialfunktion hat beispielsweise nur positve Funktionswerte. Damit kann man auch nur positive Werte umkehren. Damit ist unsere Funktion durch

$$f \ : \ D_f \to W_f, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}$$

gegeben. Wir können nun jedem Element in W_f eindeutig ein Element aus D_f zuordnen. Der Definitionsbereich von f^{-1} ist W_f und der Wertebereich ist D_f.

2. Forme $y = f(x)$ nach x um

Durch

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}} \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = \ln\left(2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}\right) = \ln(2) \cdot (-2 + \sqrt{\ln(x+2)}) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(2)} = -2 + \sqrt{\ln(x+2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(2)} + 2 = \sqrt{\ln(x+2)} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)} + 2\right)^2 = \ln(x+2) \\ &\Leftrightarrow e^{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)}+2\right)^2} = x + 2 \\ &\Leftrightarrow x = e^{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)}+2\right)^2} - 2 \end{aligned}$$

erhalten wir die Umkehrfunktion. Mit

$$f^{-1} \ : \ W_f \to D_f, \quad x \mapsto y = e^{\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}+2\right)^2} - 2$$

sind wir fertig.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x)$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f im Punkt $x_0 = \pi$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege, was du für das dritte Taylorpolynom in $x_0 = \pi$ berechnen musst.
2. Berechne dies und gebe das Taylorpolynom dritter Ordnung an.

1. Überlege, was du für das dritte Taylorpolynom in $x_0 = 0$ berechnen musst.
Die allgemeine Formel für das n-te Taylorpolynom ist durch

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

gegeben. Also müssen wir

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$$

berechnen.

2. Berechne dies und gebe das Taylorpolynom dritter Ordnung an
Durch

$$f'(x) = 2\cos(2x), \ f''(x) = -4\sin(2x), \ f'''(x) = -8\cos(2x)$$

erhalten wir die nötigen Ableitungen. Damit erhalten wir

$$f(\pi) = 0, \ f'(\pi) = 2, \ f''(\pi) = 0, \ f'''(\pi) = -8$$

als Werte. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 2 \cdot (x - \pi) - \frac{8}{6} \cdot (x - \pi)^3 \\ &= 2 \cdot (x - \pi) - \frac{4}{3} \cdot (x - \pi)^3 \end{aligned}$$

als Taylorpolynom dritter Ordnung.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x)$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = \pi$. Zeigen Sie, dass für $x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{10^4}.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Erinnere dich, was der Satz von Taylor über das Restglied des n-ten Taylorpolynoms aussagt.
2. Berechne die vierte Ableitung von f und suche eine passende Abschätzung dafür.
3. Finde eine geschickte Abschätzung für das Restglied.

1. Erinnere dich, was der Satz von Taylor über das Restglied des n-ten Taylorpolynoms aussagt.

Das Restglied des n-ten Taylorpolynoms ist durch

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

für ein ξ zwischen x_0 und x gegeben.

2. Berechne die vierte Ableitung von f und suche eine passende Abschätzung dafür

Die vierte Ableitung von f ist durch

$$f^{(4)}(x) = (-8\cos(2x))' = 16 \cdot \sin(2x)$$

gegeben.

3. Finde eine geschickte Abschätzung für das Restglied

Unser Restglied ist durch

$$R_3(x) = \frac{16\sin(2\xi)}{4!} \cdot (x - \pi)^4 = \frac{16\sin(2\xi)}{24} \cdot (x - \pi)^4 = \frac{2\sin(2\xi)}{3} \cdot (x - \pi)^4$$

für ein ξ zwischen π und x gegeben. Der Betrag $|x - \pi|$ kann als Abstand von x zu π interpretiert werden. Für $x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]$ erhalten wir

$$|x - \pi| < \frac{1}{10}$$

als Hilfsabschätzung. Für das Restglied gilt nun

$$|R_3(x)| = \left| \frac{2\sin(2\xi)}{3} \cdot (x - \pi)^4 \right| = \frac{2|\sin(2\xi)|}{3} \cdot |x - \pi|^4 = \frac{2}{3} \underbrace{|\sin(2\xi)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|x - \pi|^4}_{\leq \left(\frac{1}{10}\right)^4} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10^4} \leq \frac{1}{10^4}$$

für $x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]$.

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(4\ x^2 + y^2 - 16) + \sqrt[3]{25 - x^2 - y^2}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Bedingungen für den Definitionsbereich erfüllt sein müssen.
2. Gebe den Definitionsbereich an.
3. Skizziere den Definitionsbereich.

1. Überlege dir, welche Bedingungen für den Definitionsbereich erfüllt sein müssen

Die erste Bedingung ist durch

$$4\ x^2 + y^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow 4\ x^2 + y^2 > 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} > 1$$

gegeben. Eine Gleichung der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{y^2} = 1$$

beschreibt eine Ellipse um den Ursprung durch die Punkte $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$. Für die zweite Bedingung erhalten wir durch

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 25 = 5^2$$

eine Kreisgleichung. Eine Gleichung der Form

$$x^2 + y^2 = r^2$$

beschreibt einen Kreis um den Ursprung mit Radius r. Beide Bedingungen zusammen ergeben eine Kreisscheibe mit ausgeschnittener Ellipse.

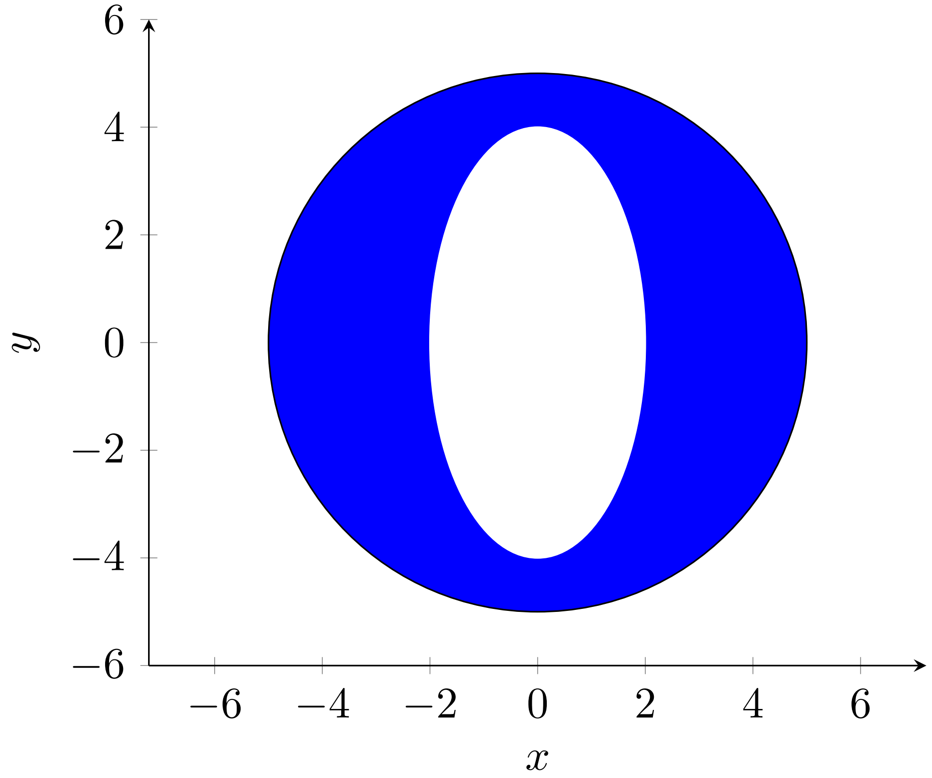
2. Gebe den Definitionsbereich an

Wir können nun den Definitionsbereich von f durch

$$D_f = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} > 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 5^2 \right\}$$

angeben.

3. Skizziere den Definitionsbereich



(c) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \cos(x)\ \sin(y) + a\ (x+3)^2.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt die Tangentensteigung an die Niveaulinie im Punkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ den Wert 3 an?

Lösung:

> **Vorgehensweise:**
>
> 1. Überlege dir, wie du die Tangentensteigung an die Niveaulinie angeben kannst.
> 2. Überlege dir, welcher Satz angewendet werden muss.
> 3. Berechne a.

1. Überlege dir, wie du die Tangentensteigung an die Niveaulinie angeben kannst

Die Tangentensteigung an die Niveaulinie im Punkt (x_0, y_0) ist durch

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

gegeben. Wir müssen also die Gleichung

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,\pi)} = 3$$

lösen.

2. Überlege dir, welcher Satz angewendet werden muss

Über den Satz der impliziten Funktionen erhalten wir

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,\pi)} = -\frac{f_x(0,\pi)}{f_y(0,\pi)} = 3$$

als Ansatz.

3. Berechne a

Zunächst berechnen wir durch

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -\sin(x)\cdot\sin(y) + 2a\cdot(x+3) \\ f_y(x,y) &= \cos(x)\cdot\cos(y) \end{aligned}$$

die partiellen Ableitungen. Eingesetzt in unseren Ansatz ergibt dies

$$-\frac{f_x(0,\pi)}{f_y(0,\pi)} = \frac{\sin(0)\cdot\sin(\pi) - 2a\cdot(0+3)}{\cos(0)\cdot\cos(\pi)} = \frac{-0\cdot 0 - 2a\cdot 3}{1\cdot(-1)} = \frac{-6a}{-1} = \frac{6a}{1} = 6a.$$

das gesuchte a. Jetzt setzen wir diese Termumformung gleich 3 und erhalten mit

$$6a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

das gesuchte a.

(d1) (3 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 8\left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5} \qquad (\lambda > 0).$$

Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A sowie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die Grenzerträge P_K und P_A.
2. Berechne die partiellen Elastizitäten.

1. Berechne die Grenzerträge P_K und P_A

Die Grenzerträge entsprechen jeweils den partiellen Ableitungen. Damit erhalten wir durch die Kettenregel

$$P_K(K,A) = 8 \cdot (-0.5)\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5} \cdot \frac{-\lambda}{K^2} = 4\lambda\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5} \cdot \frac{1}{K^2} = \frac{4\ \lambda}{K^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}$$

$$P_A(K,A) = 8 \cdot (-0.5)\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5} \cdot \frac{-1}{2\ A^2} = 4\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5} \cdot \frac{1}{2\ A^2} = \frac{2}{A^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}$$

die gesuchten Grenzerträge.

2. Berechne die partiellen Elastizitäten

Für die partiellen Elastizitäen gilt

$$\varepsilon_{P,K}(K,A) = \frac{P_K(K,A)}{P(K,A)}K \text{ und } \varepsilon_{P,A}(K,A) = \frac{P_A(K,A)}{P(K,A)}A,$$

wodurch wir mit Einsetzen

$$\varepsilon_{P,K}(K,A) = \frac{\frac{4\ \lambda}{K^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}}{8\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5}}K = \frac{4\ K\ \lambda}{8\ K^2} \cdot \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1} = \frac{\lambda}{2\ K} \cdot \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1}$$

$$\varepsilon_{P,A}(K,A) = \frac{\frac{2}{A^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}}{8\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5}}A = \frac{1}{4\ A}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1}$$

die richtigen Resultate erhalten.

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = 8\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5}$$

mit $\lambda = 2$.
Berechnen Sie das totale Differential dP von P in $(K_0, A_0) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$.
Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials einen Näherungswert für $P(0.98, 0.29)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne das totale Differential.
2. Approximiere mit Hilfe des totalen Differentials $P(0.98, 0.29)$.

1. Berechne das totale Differential
Mit dem Zusammenhang

$$P(0.98, 0.29) \approx P(1, 0.25) + \mathrm{d}P$$

erhalten wir

$$\mathrm{d}P = P_K(1, 0.25)\ \mathrm{d}K + P_A(1, 0.25)\ \mathrm{d}A$$

und

$$\mathrm{d}K = 0.98 - 1 = -0.02 \text{ und } \mathrm{d}A = 0.29 - 0.25 = 0.04.$$

Mit

$$P_K(1, 0.25) = \frac{8}{1}\left(2 + \frac{1}{0.5}\right)^{-1.5} = \frac{8}{\sqrt{(2+2)^3}} = \frac{8}{\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{8}{8} = 1$$

$$P_A(1, 0.25) = \frac{2}{(0.25)^2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{2}{\frac{1}{16}}\cdot\frac{1}{8} = 32\cdot\frac{1}{8} = 4$$

erhalten wir durch Einsetzen in das Differential

$$\mathrm{d}P = -0.02 + 4\cdot 0.04 = -0.02 + 0.16 = 0.14$$

den Wert für dP.

2. Approximiere mit Hilfe des totalen Differentials $P(0.98, 0.29)$
Durch

$$P(1, 0.25) = 8\ \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{0.5}\right)^{-0.5} = \frac{8}{\sqrt{2+2}} = \frac{8}{\sqrt{4}} = \frac{8}{2} = 4$$

erhalten wir

$$P(0.98, 0.29) \approx 4 + 0.14 = 4.14$$

eine geeignete Approximation.

(d3) (4 Punkte)

Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 8\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5}.$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(K_0, A_0) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$ gleich -1.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die technische Substitutionsrate mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen.

1. Bestimme die technische Substitutionsrate mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen

Die technische Substitutionsrate ist durch

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}$$

gegeben. Wir erhalten

$$\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}\right|_{(K_0,A_0)} = -\frac{P_K(K_0,A_0)}{P_A(K_0,A_0)}$$

durch den Satz über implizite Funktionen. Eingesetzt erhalten wir

$$\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}\right|_{(K,A)} = -\frac{\frac{4\ \lambda}{K^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}}{\frac{2}{A^2}\ \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-1.5}} = -\frac{\frac{4\ \lambda}{K^2}}{\frac{2}{A^2}} = -\frac{4\ \lambda\ A^2}{2\ K^2} = -\frac{2\ \lambda\ A^2}{K^2},$$

wodurch für $(1, 0.25)$

$$\left.\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}K}\right|_{(1,0.25)} = -\frac{2\ \lambda\ (0.25)^2}{1} = -2\lambda\frac{1}{16} = \frac{-\lambda}{8}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir durch

$$-\frac{\lambda}{8} = -1 \Leftrightarrow \lambda = 8$$

das gesuchte λ.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Die Aussage

$$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$$

hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ W\ W\ W$

(b)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ W\ W\ F$

(c)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$F\ F\ F\ W$

(d)

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ F\ F\ F$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die Wahrheitstafel auf oder überlege dir eine äquivalente Aussage.

1. Stelle die Wahrheitstafel auf oder überlege dir eine äquivalente Aussage

Durch

A	$W\ W\ F\ F$
B	$W\ F\ W\ F$
$A \wedge B$	$W\ F\ F\ F$
$B \vee A$	$W\ W\ W\ F$
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	$W\ W\ W\ F$

erhalten wir (b) als korrekte Antwort. Hierbei ist $\wedge$ die UND-Verknüpfung. Diese wird nur wahr (W), wenn A und B wahr sind. Für die ODER-Verknüpfung verwenden wir das Symbol $\vee$. Diese wird wahr, wenn entweder A oder B oder beide wahr sind.
Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&(A \wedge B) \vee (B \vee A)\\
\Leftrightarrow&(A \vee (B \vee A)) \wedge (B \vee (B \vee A))\\
\Leftrightarrow&(A \vee B) \wedge (A \vee B)\\
\Leftrightarrow&A \vee B
\end{aligned}$$

durch das Distributivgesetz für Aussagenlogik eine äquivalente Aussage. Wir können aber auch direkt sehen, dass $A \wedge B$ keinen Einfluss auf unsere Aussage hat.
Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{e2^n + n}{n^e + 2n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 1.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert e.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Überlege dir, ob diese Folge konvergent sein kann.

1. Überlege dir, ob diese Folge konvergent sein kann

Wir könnten direkt sagen, dass jede Expontialfolge der Form a^n mit $a > 1$ schneller wächst als jede Potenzfolge. Demzufolge kann diese Folge nur divergent sein. Divergent bedeutet, dass diese Folge keinen Grenzwert besitzt. Durch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e2^n + n}{n^e + 2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^e(\frac{e2^n}{n^e} + \frac{n}{n^e})}{n^e(1 + 2\frac{n}{n^e})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e2^n}{n^e} + \frac{n}{n^e}}{1 + 2\frac{n}{n^e}} = \infty$$

können wir dies noch untermauern.
Somit Antwort (d) korrekt.

Frage 3 (2 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\ cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) $-\sqrt{3}$

(c) $\frac{1}{3}$

(d) 3π.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Grenzwert durch die Regel von de l'Hôpital .

1. Bestimme den Grenzwert durch die Regel von de l'Hôpital

Wegen

$$\sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = \sin(\pi) = 0$$
$$1 - 2\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

können wir die Regel von l'Hôpital anwenden. Wir erhalten durch

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\ \cos(x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{3\ \cos(3x)}{2\ \sin(x)} = \frac{-3}{2\ \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

den Grenzwert.
Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und zahlt in 5 Jahren CHF $2'500'000$ aus. Das Projekt hat den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.25\%$.

(b) $i = 4.56\%$

(c) $i = 6.65\%$

(d) Der Nettobarwert ist unabhängig vom jährlichen Zinssatz i.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Formel des Nettobarwerts in Erinnerung.
2. Untersuche die Auswirkung des Zinssatzes.

1. Rufe dir die Formel des Nettobarwerts in Erinnerung

Allgemein lässt sich der Nettobarwert nach T Jahren durch

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

berechnen.

2. Untersuche die Auswirkung des Zinsatzes

Eingesetzt erhalten wir

$$NPV = -2'000'000 + \frac{2'500'000}{(1+i)^5}$$

und erkennen, dass der Wert größer wird, wenn der Nenner kleiner wird.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)

Der Term

$$\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{2a}\right) \quad (a > 0, b > 0)$$

ist äquivalent zu

(a) 0.

(b) $-\ln(2)$

(c) $2\ln\left(\frac{2\sqrt{2}a}{b}\right)$

(d) $\ln\left(\frac{4a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme den Term mit Hilfe der Logarithmusregeln um.

1. Forme den Term mit Hilfe der Logarithmusregeln um

Durch Anwenden der Logarithmusregeln erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{2a}\right) &= \ln\left(\frac{\frac{4a}{b}}{\frac{b}{2a}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{4a}{b} \cdot \frac{2a}{b}\right) \\
&= \ln\left(\frac{8a^2}{b^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2\sqrt{2}a)^2}{b^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2\sqrt{2}a}{b}\right)^2 \\
&= 2\ \ln\left(\frac{2\sqrt{2}a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Somit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-2x-3}, & \text{für } x \neq -1,\; x \neq 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = -1 \\ -2, & \text{für } x = 3 \end{cases}$$

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur in $x = -1$ unstetig.

(c) f ist nur in $x = 3$ unstetig.

(d) f ist nur in $x = -1$ und $x = 3$ unstetig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet.
2. Untersuche die Stetigkeit in -1.
3. Untersuche die Stetigkeit in 3.

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet

Eine Funktion $f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, falls

$$x \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x) \to f(x_0)$$

gilt. Das heißt: Wenn x gegen x_0 geht, muss $f(x)$ gegen $f(x_0)$ gehen. Wir müsssen also

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

bestimmen um die Stetigkeit in $x_0 = -1$ oder $x_0 = 3$ zu überprüfen. In allen anderen Punkten ist f bereits stetig.

2. Untersuche die Stetigkeit in -1

Wir beobachten zunächst, dass

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} \\ &= 1 \pm 2 \\ \Leftrightarrow x_1 &= -1, \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

mit der *abc*-Formel folgt. Damit erhalten wir

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$$

für $x \neq -1$ und $x \neq 3$. Also folgt durch

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

die Stetigkeit in -1.

3. Untersuche die Stetigkeit in 3

Wegen

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x-3} = \infty$$

ist f in 3 unstetig.

Somit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$g(t) = x^t \cos(2x).$$

Welche der folgenden Ableitungen beschreibt die erste Ableitung von $g(t)$?

(a) $g'(t) = -2tx^{t-1} \sin(2x)$.

(b) $g'(t) = \ln(x)x^t \cos(2x)$.

(c) $g'(t) = tx^{t-1} \cos(2x) - 2x^t \sin(2x)$.

(d) $g'(t) = \ln(t)x^t \cos(2x)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die Ableitung von g.

1. Berechne die Ableitung von g

Wir müssen beachten, dass die Funktion von t und nicht von x abhängt. Wir erhalten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\ln(x^t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{t \ \ln(x)} = \ln(x) \ e^{t \ \ln(x)} = \ln(x) \ x^t$$

mit Hilfe der Kettenregel. Da $\cos(2x)$ ein konstanter Faktor ist, erhalten wir durch

$$g'(t) = \ln(x) \ x^t \cos(2x)$$

die Ableitung nach t.
Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 8 (2 Punkte)

Welche der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, dass eine auf $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion in $(x_0, f(x_0))$ (mit $x_0 \in I$)) ein lokales Maximum hat?

(a) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$.

(b) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 = f'''(x_0)$ und $f^{(4)}(x_0) < 0$.

(c) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

(d) $f''(x_0) \neq 0$ und $f'''(x_0) = 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende den passenden Satz der Vorlesung an.

1. Wende den passenden Satz aus der Vorlesung an

Sei eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit der Bedingung

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

gegeben. Dann gilt:

- Falls n gerade ist, besitzt f in x_0 eine Extremstelle. Für $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist diese ein lokales Maximum. Andernfalls ein lokales Minimum.
- Falls n ungerade ist, besitzt f in x_0 einen Sattelpunkt.

Durch diesen Satz können wir Antwort (a) direkt ausschließen. Aber wir erkennen auch sofort, dass Antwort (b) korrekt ist.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = t^4.$$

(a) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton fallend in t.

(b) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist konstant in t.

(c) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton wachsend in t.

(d) Die Wachstumrate $\rho_f(t)$ von f ist nicht monoton in t.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Wachstumsrate ρ_f.

1. Bestimme die Wachstumsrate ρ_f

Die Wachstumsrate ρ_f von f ist durch

$$\rho_f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

gegeben. Damit erhalten wir mit

$$\rho_f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{4t^3}{t^4} = \frac{4}{t^3}$$

die Wachstumsrate. Diese ist auf $\mathbb{R}_+$ streng monoton fallenend. Also ist Antwort (a) korrekt.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}\, x^x.$$

(a) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = \ln(2)$.

(c) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = e$.

(d) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = e^{-1}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Ableitung von f.
2. Bestimme die Extrempunkte.

1. Bestimme die Ableitung von f

Zunächst bemerken wir, dass

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$$

gilt. Damit gilt auch

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln(x)}\\ &= \left(\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot e^{x\ln(x)}\\ &= (\ln(x)+1)\cdot e^{x\ln(x)}\\ &= (\ln(x)+1)\cdot x^x\end{aligned}$$

durch die Produkt-und Kettenregel. Mit der Produktregel erhalten wir durch

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{x}\,(\ln(x)+1)\cdot x^x - \frac{1}{x^2}\,x^x\\ &= \left((\ln(x)+1) - \frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot x^x\end{aligned}$$

die Ableitung von f.

2. Bestimme die Extrempunkte

Wir überprüfen nun die Nullstellen der Ableitung. Hierfür ist nur

$$\ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = 0$$

interessant. Diese Gleichung ist nicht explizit lösbar. Jedoch können streng monotone Funktionen nur einen Schnittpunkt haben. Wir wollen also wissen, für welches x

$$\ln(x) + 1 = \frac{1}{x}$$

gilt. Durch Überlegen (oder Testen von (a) bis (d)) erhalten wir $x_0 = 1$. Links von 1 ist die Steigung von f negativ und rechts positiv. Also haben wir ein Minimum an $x_0 = 1$.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 3 (3 Punkte)

Gegeben ist das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$:

$$P_4(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$$

Welches ist die zugehörige Funktion?

(a) $f(x) = e^x$.

(b) $f(x) = 2e^x - 1$.

(c) $f(x) = 3e^x - 2$.

(d) $f(x) = 5e^x - 4$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe einen allgemeinen Zusammenhang für das 4. Taylorpolynom an.
2. Überprüfe deine Lösung.
3. Alternativer Lösungsweg.

1. Gebe einen allgemeinen Zusammenhang für das 4. Taylorpolynom an

Im Allgemeinen gilt:

$$f(0) = P_4(0)$$
$$f'(0) = P_4'(0)$$

Durch

$$f(0) = P_4(0) = 0$$
$$f'(0) = P_4'(0) = 3$$

erhalten wir (c) als korrekte Antwort. Für keine andere Möglichkeit gilt $f'(0) = 3$.

2. Überprüfe deine Lösung

Für $f(x) = 3e^x - 2$ gilt

$$f^{(i)}(0) = 3$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Also ist das vierte Taylorpolynom durch

$$P_4(x) = 1 + 3x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 = 1 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$

gegeben.

3. Alternativer Lösungsweg

Das Taylorpolynom der Ordnung 4. von e^x ist durch

$$\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{1}x + 1 = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

gegeben. Somit können wir Antwort (a) ausschließen.
Wir erhalten

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3$$

durch Multiplizieren von 3 das Taylorpolynom von 3 e^x. Wir sehen, dass nur der konstante Term noch nicht passt. Durch Subtraktion von 2 erhalten wir mit

$$\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1$$

das Taylorpolynom von $3e^x - 2$. Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 4 (3 Punkte)

Die Niveaulinien $f(x, y) = c$ der Funktion

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$$

für $c > 1$

(a) sind Parabeln

(b) sind Hyperbeln.

(c) sind Ellipsen.

(d) sind keine Kurven der unter (a) - (c) genannten Art.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle eine Gleichung auf und Forme sie zu einer bekannten Gleichung um.

1. Stelle eine Gleichung auf und Forme sie zu einer bekannten Gleichung um

Wir wollen die Gleichung

$$\sqrt{x^2 - y^2 - 1} = c$$

für $c > 1$ auf ihre geometrische Eigenschaft untersuchen. Wir erhalten durch

$$\sqrt{x^2 - y^2 - 1} = c \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 1 = c^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = c^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{c^2 + 1} - \frac{y^2}{c^2 + 1} = 1$$

eine Hyperbelgleichung.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^a y^{1-a} + x^{-3}y^4\right)^{0.5}, \quad (x>0, y>0, a>0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad a.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wann eine Funktion homogen ist.
2. Zeige allgemein, ob die Funktion homogen oder nicht homogen ist.

1. Überlege dir, wann eine Funktion homogen ist

Eine Funktion $f \; : \; D_f \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

für alle $x \in D_f$ und $\lambda > 0$ gilt.

2. Zeige allgemein, ob die Funktion homogen oder nicht homogen ist

Wir wählen ein beliebiges $\lambda > 0$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Gleichung $0 = 0$, wodurch wir diesen Fall direkt auschließen können. Wir erhalten nun durch

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \left((\lambda x)^a (\lambda y)^{1-a} + (\lambda x)^{-3}(\lambda y)^4\right)^{0.5} = \left(\lambda^a x^a \lambda^{1-a} y^{1-a} + \lambda^{-3}x^{-3}\lambda^4 y^4)\right)^{0.5} \\ &= \left(\lambda^1 x^a y^{1-a} + \lambda^1 x^{-3}y^4)\right)^{0.5} = \lambda^{0.5}\left(x^a y^{1-a} + x^{-3}y^4)\right)^{0.5} = \lambda^{0.5} f(x,y) \end{aligned}$$

die Homogenität vom Grad 0.5.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y), \quad (x > 0, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{3}$.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, ob diese Funktion homogen sein kann.
2. Untermauere deine Überlegung.

1. Überlege dir, ob diese Funktion homogen sein kann

Wir rufen uns die Logarithmusregel

$$\ln(\lambda x) = \ln(\lambda) + \ln(x)$$

für $\lambda, x > 0$. Unsere Funktion f setzt sich aus zwei Logarithmustermen zusammen. Aus der Rechenregel sehen wir, dass die Multiplikation zur Summe wird. Damit kann f nicht homogen sein.

2. Untermauere deine Überlegung

Wir rechnen

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{1}{3}\ln(\lambda x) + \frac{2}{3}\ln(\lambda y) = \frac{1}{3}(\ln(\lambda) + \ln(x)) + \frac{2}{3}(\ln(\lambda) + \ln(y)) \\ &= \ln(\lambda) + \frac{1}{3}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(y) = \ln(\lambda) + f(x,y) \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ nach. Damit ist f ist nicht homogen

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{4x^{0.2}y^{0.4}} + \sqrt[4]{x^{1.6}y^{0.8}} \quad (x > 0, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.4.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Weise nach, ob die Funktion homogen ist oder nicht.

1. Weise nach, ob die Funktion homogen ist oder nicht
Wir betrachten die einzelnen Summanden der Funktion für $\lambda > 0$. Wir erhalten

$$\sqrt{4(\lambda x)^{0.2}(\lambda y)^{0.4}} = \sqrt{4\ \lambda^{0.2}x^{0.2}\lambda^{0.4}y^{0.4}} = \sqrt{4\ \lambda^{0.6}x^{0.2}y^{0.4}} = \lambda^{0.3}\ \sqrt{4\ x^{0.2}y^{0.4}}$$

für den ersten Summand. Jedoch gilt

$$\sqrt[4]{(\lambda x)^{1.6}(\lambda y)^{0.8}} = \sqrt[4]{\lambda^{1.6}x^{1.6}\lambda^{0.8}y^{0.8}} = \sqrt[4]{\lambda^{2.4}x^{1.6}y^{0.8}} = \lambda^{0.6}\ \sqrt[4]{x^{1.6}y^{0.8}}$$

für den zweiten Summanden. Die Potenzen sind unterschiedlich, womit f nicht homogen ist. Also ist Antwort (d) korrekt.

Frage 8 (2 Punkte)

Eine differenzierbare Funktion $f(x, y)$ sei homogen vom Grad $k = 0.7$ und es gelte $f(x, y) > 0$ für alle x, y. Dann gilt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 0$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 0.7$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 1.4$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

(d) Es lässt sich keine allgemeine Aussage über $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0)$ machen, d.h. $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0)$ ist abhängig von (x_0, y_0).

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt.

1. Überlege dir, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt

Wir wissen, dass der Zusammenhang

$$k\ f(x_0, y_0) = x_0 f_x(x_0, y_0) + y_0 f_y(x_0, y_0)$$

für eine homogene Funktion f vom Grad k gilt. Da $f(x_0, x_0) > 0$ ist, erhalten wir durch

$$\begin{aligned} k\ f(x_0, y_0) = x_0 f_x(x_0, y_0) + y_0 f_y(x_0, y_0) \Leftrightarrow k &= x_0 \frac{f_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} + y_0 \frac{f_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} \\ &= \varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

(b) als korrekte Antwort.