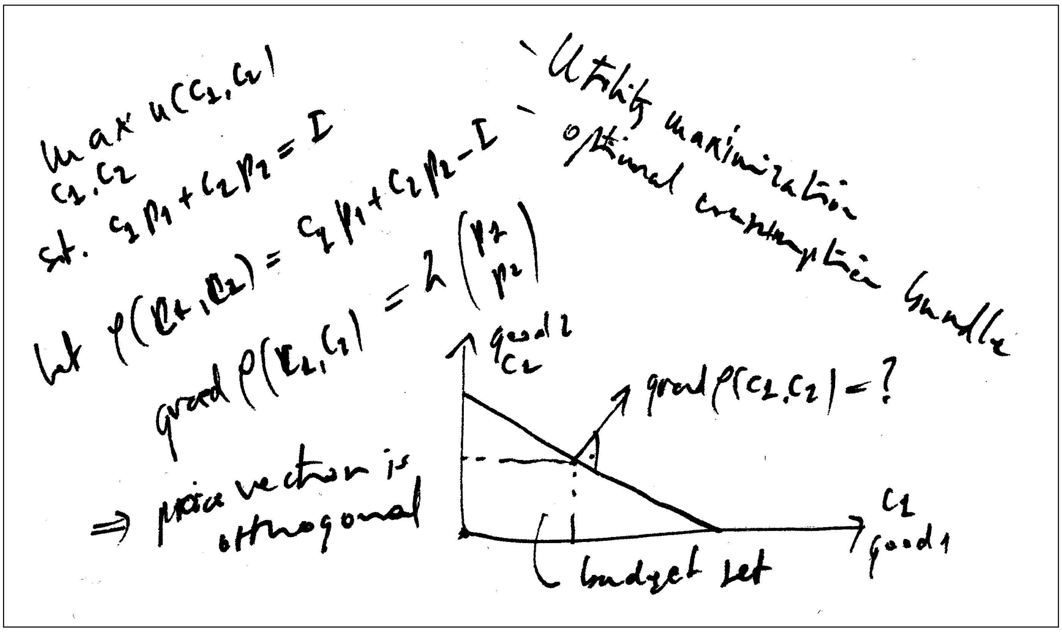
Enrico G. De Giorgi

Mathematatik A

Alte Musterlösungen 2009-2019

Herbstsemester 2020



Lehrstuhl für Mathematik
Universität St.Gallen

Diese Version: September 2020.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses PDF beinhaltet eine Sammlung von Musterlösungen zu alten Prüfungsaufgaben aus dem Zeitraum vom Herbstsemester 2009 bis zum Herbstsemester 2019. Im begleitenden PDF "Alte Prüfungen 2009-2019" sind die zugehörigen Prüfungen zu finden. Beginnend mit dem Herbstsemester 2011 werden zudem auch die Nachholprüfungen veröffentlicht. Des Weiteren stehen seit der Nachholprüfung des Herbstsemesters 2011 vollständige und ausführliche Lösungen für alle Prüfungen zur Verfügung. Diese neueren Lösungen zeigen beispielhaft auf, wie Prüfungsaufgaben generell beantwortet und Argumentationsketten präsentiert werden sollten. Dazu gehört insbesondere die korrekte Verwendung mathematischer Notation. Es wird erwartet, dass die Studenten ihre Lösungen unter Verwendung der mathematischen Notation logisch strukturiert präsentieren. Diese Aspekte der Bearbeitung gehen in die Bewertung der Prüfungsleistung mit ein. Seit dem Herbstsemester 2013 beinhalten die Prüfungen auch Multiple-Choice Fragen.

Winter 2010

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik A: Musterlösung Winter 2010

Prof. Dr. Heinz Müller*

11. Februar 2010

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlšung. An der Prüfung müssen alle relevanten Rechenschritte aufgeführt sein.

Aufgabe 1

1.a)
$$\sum_{h=2}^{3}\sum_{i=h+1}^{5} h\left(1+i^2\right) = \sum_{i=3}^{5} 2\left(1+i^2\right)+\sum_{i=4}^{5} 3\left(1+i^2\right)$$
$$= (2*10+2*17+2*26)+(3*17+3*26)$$
$$= 106+129$$
$$= 235$$

1 b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow |q|<1$

Folglich muss gelten:
$$\begin{array}{rrcl} & \left|\frac{c^2+1}{c^2-9}\right| & < & 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{c^2+1}{c^2-9}\right)^2 & < & 1 \\ \Leftrightarrow & \left(c^2+1\right)^2 & < & \left(c^2-9\right)^2 \\ \Leftrightarrow & c^4+2c^2+1 & < & c^4-18c^2+81 \\ \Leftrightarrow & 20c^2 & < & 80 \\ \Leftrightarrow & c^2 & < & 4 \\ & & -2<c<2 & \end{array}$$

1.c) c.1. $B\left(p\right)=\sum\limits_{t=0}^{\infty} 1'000\left(\frac{1.02}{1+p}\right)^t < \infty \Leftrightarrow p>0.02 \quad (2\%)$

Gemäss Formelsammlung gilt:
$$\begin{aligned} B(p) &= \tfrac{a}{1-q} \qquad , wobei \quad a=1'000 \quad , q=\tfrac{1.02}{1+p} \\ &= \tfrac{1'000}{1-\frac{1.02}{1+p}} \\ B(p) &= 1'000*\tfrac{1+p}{p-0.02} \end{aligned}$$

c.2. $B(p)=18'000$
$$1'000*\tfrac{1+p}{p-0.02}=18'000$$
$$1+p=18p-0.36$$
$$1.36=17p$$
$$p=0.08 \quad (8\%)$$

1.d)
$$\begin{aligned} \ln\left(x^4\right) &= \ln(x)+\ln(8) \\ 4\ln(x) &= \ln(x)+\ln(2^3) \\ 3\ln(x) &= 3\ln(2) \\ \ln(x) &= \ln(2) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

1.e)
$$\begin{aligned} e^{12-2\sqrt{\ln(x)}} &= x^2 \qquad |\ln \\ 12-2\sqrt{\ln(x)} &= 2\ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Setze \sqrt{\ln(x)} &= z \qquad (z>0)\\
12-2z &= 2z^2\\
6-z &= z^2\\
z^2+z-6 &= 0\\
(z+3)(z-2) &= 0
\end{aligned}$$

Wegen $z > 0$ folgt
$$\begin{aligned}
z &= 2\\
\sqrt{\ln(x)} &= 2\\
\ln(x) &= 4\\
x &= e^4
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

2.a) a.1. Definitionsbereich D

$$\begin{aligned}
x\in D \quad &\Leftrightarrow e^{x-1}-1>0\\
&\Leftrightarrow x-1>0\\
&\Leftrightarrow x>1
\end{aligned}$$

Wertebereich W

$$\begin{aligned}
1<x<\infty \quad &\Longrightarrow 0<e^{x-1}-1 \quad <\infty\\
&\Longrightarrow 0<\tfrac{1}{(e^{x-1}-1)^{0.5}} \quad <\infty\\
y\in W \quad &\Leftrightarrow y>0
\end{aligned}$$

a.2. $f'(x) = -0.5\underbrace{\left(e^{x-1}-1\right)^{-1.5}}_{>0} * \underbrace{e^{x-1}}_{>0} < 0$

f(x) ist streng monoton fallend.

a.3. 1. $y = f(x) = (e^{x-1}-1)^{-0.5}$

2. Auflösen nach x

$$\begin{aligned}
e^{x-1}-1 &= \tfrac{1}{y^2} \qquad , y>0\\
e^{x-1} &= 1+\tfrac{1}{y^2}\\
x-1 &= \ln(1+\tfrac{1}{y^2})\\
x &= 1+\ln(1+\tfrac{1}{y^2})
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow x = f^{-1}(y) = 1+\ln(1+\frac{1}{y^2}) \qquad , y>0$

3. Vertauschen x $\Leftrightarrow$y

$y = f^{-1}(x) = 1+\ln(1+\frac{1}{x^2}) \qquad , x>0$

2.b)
$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+1}{2x}-\frac{x^2}{x+1} &= \frac{\left(2x^2+1\right)(x+1)-x^2*2x}{2x(x+1)}\\
&= \frac{2x^3+2x^2+x+1-2x^3}{2x^2+2x}\\
&= \frac{2x^2+x+1}{2x^2+2x}\\
&= \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}} \qquad \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \quad 1
\end{aligned}$$

2.c) c.1.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,x} &= \tfrac{x*f'(x)}{f(x)} \\ f(x) &= \left(x^2+9\right)^{0.5} \\ f'(x) &= x\left(x^2+9\right)^{-0.5} \\ \varepsilon_{f,x} &= \tfrac{x*x*\left(x^2+9\right)^{-0.5}}{(x^2+9)^{0.5}} \quad = \tfrac{x^2}{x^2+9} \quad , x \geq 0 \end{aligned}$$

c.2.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,x} &= 0.5 \\ \tfrac{x^2}{x^2+9} &= 0.5 \\ 2x^2 &= x^2+9 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \qquad , (x \geq 0) \end{aligned}$$

c.3.

$$\begin{aligned} \text{f(x) unelastisch} &\iff |\varepsilon_{f,x}| < 1 \\ \left|\tfrac{x^2}{x^2+9}\right| &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad \tfrac{x^2}{x^2+9} &< 1 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &< x^2+9 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &< 9 \end{aligned}$$

2.d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{x} - \tfrac{2x}{x^2+1} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{x^2} - \tfrac{2\left(x^2+1\right)-2x*2x}{(x^2+1)^2} \\ &= -\tfrac{2}{x^2} - \tfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &= -\tfrac{2\left(x^2+1\right)^2+2x^2-2x^4}{x^2(x^2+1)^2} \\ &= -\tfrac{2x^4+4x^2+2+2x^2-2x^4}{x^2(x^2+1)^2} \\ &= -\tfrac{6x^2+2}{x^2(x^2+1)^2} \\ &< 0 \text{ für alle x} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ f(x) ist konkav.

Aufgabe 3

3.a) $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$

$$
\begin{array}{ll}
x_0 = 0 & \\
f(x) = (e^x + 1)^2 & f(0) = 4 \\
f'(x) = 2(e^x + 1)e^x & f'(0) = 4 \\
f''(x) = 2 * e^x * e^x + 2(e^x + 1)e^x & f''(0) = 6
\end{array}
$$

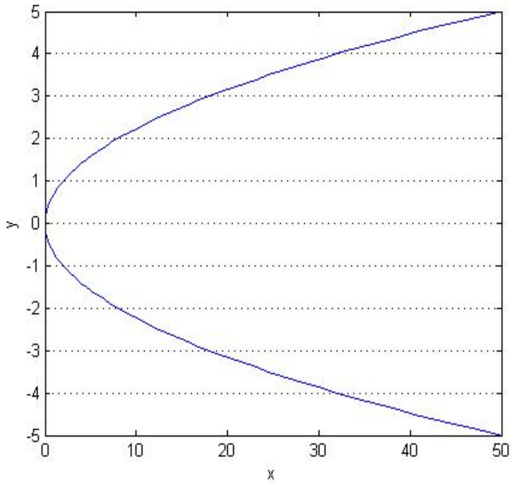
$P_2(x) = 4 + 4x + 3x^2$

$f(0.1) \approx P_2(0.1) = 4.43$

3.b) $f(8, 2) = \ln(1) = 0$

$$
\begin{aligned}
\ln\left(1 - x + 2y^2\right) &= 0 \\
1 - x + 2y^2 &= 1 \\
x &= 2y^2
\end{aligned}
$$

Nach rechts geöffnete Parabel.



3.c) c.1.

$$
\begin{aligned}
f_x &= \left(x^{0.5} + 2y^{0.5}\right) * x^{-0.5} \\
&= 1 + 2x^{-0.5}y^{0.5} \\
f_y &= 2\left(x^{0.5} + 2y^{0.5}\right) * y^{-0.5} \\
&= 4 + 2x^{0.5}y^{-0.5} \\
f_{xx} &= -x^{-1.5}y^{0.5} \\
f_{yy} &= -x^{0.5}y^{-1.5} \\
f_{xy} &= f_{yx} = x^{-0.5}y^{-0.5}
\end{aligned}
$$

c.2.
$$\varepsilon_{f,x} = \frac{x*f_x}{f} = x*\frac{1+2x^{-0.5}y^{0.5}}{(x^{0.5}+2y^{0.5})^2} = x^{0.5}\frac{x^{0.5}+2y^{0.5}}{(x^{0.5}+2y^{0.5})^2}$$

$$\varepsilon_{f,x} = \frac{x^{0.5}}{x^{0.5}+2y^{0.5}}$$

c.3. 1. (x_0, y_0) auf Niveaulinie

$$\left(x_0^{0.5}+2y_0^{0.5}\right)^2 = 16$$
$$x_0^{0.5}+2y_0^{0.5} = 4 \qquad (*)$$

2.
$$\varepsilon_{f,x} = 0.5$$
$$\frac{x_0^{0.5}}{x_0^{0.5}+2y_0^{0.5}} = \frac{1}{2}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad \frac{x_0^{0.5}}{4} = \frac{1}{2}$$
$$x_0^{0.5} = 2$$
$$x_0 = 4$$
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \quad y_0^{0.5} = 1$$
$$y_0 = 1$$

$$(x_0, y_0) = (4, 1)$$

Aufgabe 4

4.a) a.1.
$$P_K = \left(\frac{1}{K}+\frac{3}{A}\right)^{-2}\frac{1}{K^2}$$
$$P_A = 3\left(\frac{1}{K}+\frac{3}{A}\right)^{-2}\frac{1}{A^2}$$
$$(K_0, A_0) = (2, 6)$$
$$P_K(K_0, A_0) = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right)^{-2}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$P_A(K_0, A_0) = 3\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{6}\right)^{-2}\frac{1}{6^2} = \frac{1}{12}$$

a.2. Totales Differential in $(K_0, A_0) = (2, 6)$
$$dP = P_K(K_0, A_0)\,dK + P_A(K_0, A_0)\,dA = \frac{1}{4}dK + \frac{1}{12}dA$$

Näherungswert für $P(1.92, 6.12)$

$dK = -0.08 \quad , dA = 0.12$

$P(K, A) \approx P(K_0, A_0) + dP$

$P(K_0, A_0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\right)^{-1} = 1$

$dP = \frac{1}{4}(-0.08) + \frac{1}{12}(0.12) = -0.01$

$P(K, A) \approx 1 - 0.01 = 0.99$

4.b) 1. $(x_0, y_0) = (1, 1)$ auf Kurve $g(x, y) = 0$

$a - b + 1 = 0 \qquad (*)$

2. Gleiche Tangentensteigung der Kurve in $(x_0, y_0) = (1, 1)$

i)
$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^{0.75}y^{0.25} - 1 \quad = 0 \\ f_x &= 0.75 * x^{-0.25}y^{0.25} \\ f_y &= 0.25 * x^{0.75}y^{-0.75} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{0.75}{0.25} \quad = -3 \qquad (x_0, y_0) = (1, 1) \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} g(x, y) &= ax + y - b \quad = 0 \\ &g_x = a \\ &g_y = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{g_x}{g_y} = -a \end{aligned}$$

iii) Gleiche Tangentensteigung

$-a = -3 \implies a = 3$

$\implies b = 4 \quad$ (wegen $(*)$)

4.c) c.1.
$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= \frac{(kx)^{2.5}}{(ky)^2} = \frac{k^{2.5}x^{2.5}}{k^2y^2} \\ &= k^{0.5}\frac{x^{2.5}}{y^2} \\ &= k^{0.5}f(x, y) \quad , k > 0 \end{aligned}$$

Homogen vom Grade r=0.5

c.2.
$$\begin{aligned} g(kx, ky) &= (kx)^a (ky)^{1+2a} \\ &= k^a x^a k^{1+2a} y^{1+2a} \\ &= k^{1+3a} x^a y^{1+2a} \\ &= k^{1+3a} g(x, y) \end{aligned}$$

Homogen vom Grade r=1+3a

c.3
$$\begin{aligned} h(kx, ky) &= \ln\left[(kx)^2 + (ky)^2\right] - \ln(kx) - \ln(ky) \\ &= \ln\left[k^2\left(x^2 + y^2\right)\right] - (\ln(k) + \ln(x)) - (\ln(k) + \ln(y)) \\ &= 2\ln(k) + \ln\left(x^2 + y^2\right) - 2\ln(k) - \ln(x) - \ln(y) \\ &= \ln\left(x^2 + y^2\right) - \ln(x) - \ln(y) \\ &= h(x, y) \qquad , k > 0 \end{aligned}$$

Homogen vom Grade r=0

c.4
$$\begin{aligned} j(kx,ky) &= \ln\left[(kx)^{0.3} * (ky)^{0.6}\right] - 0.9\left(\ln(kx) + \ln(ky)\right) \\ &= \ln\left[k^{0.9}x^{0.3}y^{0.6}\right] - 0.9\left[\ln(k) + \ln(x) + \ln(k) + \ln(y)\right] \\ &= 0.9\ln(k) + \ln\left(x^{0.3}y^{0.6}\right) - 1.8\ln(k) - \ln(x) - \ln(y) \\ &= -0.9 * \ln(k) + \ln\left(x^{0.3}y^{0.6}\right) - \ln(x) - \ln(y) \\ &= -0.9 * \ln(k) + j(kx,ky) \qquad , k > 0 \end{aligned}$$

Nicht homogen

4.d) Satz von Euler

$$\begin{aligned} & x * f_x(x,y) + y * f_y(x,y) = 0.9 * f(x,y) \\ \Longrightarrow\ & \frac{x * f_x(x,y)}{f(x,y)} + \frac{y * f_y(x,y)}{f(x,y)} = 0.9 \\ \overset{Def.Elastizität}{\Longrightarrow}\ & \varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 0.9 \end{aligned}$$

Winter 2011

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik A: Musterlösung Winter 2011

Prof. Dr. Heinz Müller*

18. Februar 2011

*Dies ist eine eher kurz gehaltene Musterlšung. An der Prüfung müssen alle relevanten Rechenschritte aufgeführt sein.

Aufgabe 1

(a1)

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{e}^n+1)^2}{\mathrm{e}^{2n-1}} &= \frac{\mathrm{e}^{2n}+2\,\mathrm{e}^n+1}{\mathrm{e}^{-1}\cdot\mathrm{e}^{2n}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}}(1+2\,\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}) \\
&= \mathrm{e}\,(1+2\,\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}) \underset{n\to\infty}{\to} \mathrm{e}
\end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned}
\frac{n^3+2n^2}{n^2-1}-\frac{n^2}{n+1} &= \frac{n^3+2n^2}{n^2-1}-\frac{n^2\,(n-1)}{(n+1)(n-1)} \\
&= \frac{n^3+2n^2-(n^3-n^2)}{n^2-1} \\
&= \frac{3n^2}{n^2-1} \\
&= \frac{3}{1-1/n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 3
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{Reihe ist konvergent} &\Leftrightarrow \left|\frac{2a-3}{9-2a}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow |2a-3| < |9-2a| \\
&\Leftrightarrow 4a^2-12a+9 < 81-36a+4a^2 \\
&\Leftrightarrow 24a < 72 \\
&\Leftrightarrow a < 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \text{ where } q=\tfrac{2a-3}{9-2a} \\
&= \frac{1}{1-q} = \frac{9-2a}{9-2a-(2a-3)} = \frac{9-2a}{12-4a}
\end{aligned}$$

(c1)

$$\begin{aligned} B_0(p) &= b + \frac{b}{(1+p)^2} + \frac{b}{(1+p)^4} + ... \\ &= b \cdot \frac{1}{1-q}, \text{ where } \quad q = \frac{1}{(1+p)^2} \\ &= b \cdot \frac{(1+p)^2}{(1+p)^2 - 1} = b \cdot \frac{(1+p)^2}{2p+p^2} \end{aligned}$$

(c2)

$$\begin{aligned} K_0 &= b \cdot \frac{(1+p)^2}{(1+p)^2 - 1} \\ K_0 &= 242'000, \; p = 0.10(10\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 242'000 &= b \cdot \frac{1.10^2}{1.10^2 - 1} \\ &= b \cdot \frac{1.21}{0.21} \\ b &= 200'000 \cdot 0.21 \\ b &= 42'000 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\ln(x^4-16)-\ln(x^2+4) &= \ln 5 \\
\ln\left(\frac{x^4-16}{x^2+4}\right) &= \ln 5 \\
\ln(x^2-4) &= \ln 5 \qquad |\ \exp \\
x^2-4 &= 5 \\
x^2 &= 9 \\
x_1 &= 3, \quad x_2=-3
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-2 &= 0 \\
\text{Set}\quad \mathrm{e}^{x} &= z \quad , z>0 \\
z^2-z-2 &= 0 \\
(z-2)\underbrace{(z+1)}_{>0} &= 0 \\
\Rightarrow z &= 2 \\
\mathrm{e}^{x} &= 2 \\
x &= \ln 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a)

$$\begin{aligned} x_1 = 0: \quad & \lim_{x\to 0^-} && a\,\mathrm{e}^{-x} = a \\ & \lim_{x\to 0^+} && (x^2 - \sqrt{x+1}) = -1 \\ & f(0) && = -1 \\ & \rightarrow && \text{Stetigkeit in } x_1 = 0, \text{ falls } a = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 = 3: \quad & \lim_{x\to 3^-} && (x^2 - \sqrt{x+1}) = 9 - 2 = 7 \\ & \lim_{x\to 3^+} && (x+b) = 3+b \\ & f(3) && = 3+b \\ & \rightarrow && \text{Stetigkeit in } x_2 = 3, \text{ falls } 3+b = 7, \text{ oder } b = 4 \end{aligned}$$

(b1)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{x}-2} - \frac{x}{\sqrt{x}+2} &= \frac{x[\sqrt{x}+2-(\sqrt{x}-2)]}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{4x}{x-4} \\ &= \frac{4}{x-4/x} \quad \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} \quad 4 \end{aligned}$$

(b1)

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}) \underset{t=1/x}{=} \lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}(e^t - t^2) = \lim_{t\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-t} \cdot t^2) = 1 - 0 = 1$$

(c1) Definitionsbereich D

$$\begin{aligned} x \in D \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x > 0 \end{aligned}$$

$$D = \mathbb{R}_+, \text{ resp. } D = (0, +\infty)$$

Wertebereich W

$$x \in D \Leftrightarrow 0 < x < \infty$$

$$\begin{array}{ccccccc} \Rightarrow & -\infty & < & -\sqrt{x} & < & 0 \\ \Rightarrow & -0 & < & \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} & < & 1 \\ \Rightarrow & -0 & < & 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} & < & 1 \\ \Rightarrow & -\infty & < & \ln(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}) & < & 0 \end{array}$$

$$y \in W \Leftrightarrow y < 0, \; W = (-\infty, 0)$$

(c2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} \cdot (-\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}) \cdot (-\frac{1}{2\sqrt{x}}) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad f(x)$ is streng monoton steigend

(c3)

$$\begin{aligned}
y &= \ln(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}) \\
\text{Auflösen nach } x\text{:} & \\
\mathrm{e}^{y} &= 1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \\
\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} &= 1-\mathrm{e}^{y} \\
-\sqrt{x} &= \ln(1-\mathrm{e}^{y}) \\
\sqrt{x} &= -\ln(1-\mathrm{e}^{y}) \\
x &= [\ln(1-\mathrm{e}^{y})]^2 = f^{-1}(y)\ , \quad y<0 \\
\text{Vertauschen } x \leftrightarrow y & \\
y = f^{-1}(x) &= [\ln(1-\mathrm{e}^{x})]^2, \quad x<0
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+a)\cdot\mathrm{e}^{x}, \qquad x\geq 0 \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{x} + (x+a)\cdot\mathrm{e}^{x} \\
f'(x) &= (x+a+1)\cdot\mathrm{e}^{x} \\
f''(x) &= \mathrm{e}^{x} + (x+a+1)\cdot\mathrm{e}^{x} \\
f''(x) &= (x+a+2)\cdot\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccll}
f(x) \text{ ist konvex} & \Leftrightarrow & f''(x) & \geq & 0, \quad x\geq 0 \\
& \Leftrightarrow & (x+a+2)\cdot\mathrm{e}^{x} & \geq & 0, \quad x\geq 0 \\
& \Leftrightarrow & a & \geq & -2
\end{array}$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{f,x} &= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \\
f'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{x-4}}\, \mathrm{e}^{\sqrt{x-4}} \\
\epsilon_{f,x} &= \frac{x}{2\sqrt{x-4}}, \quad x > 4
\end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned}
x = 20 \quad &, \quad \Delta x = -0.4 \\
\epsilon_{f,x} = 2.5 \quad &, \quad \frac{\Delta x}{x} = -2\%
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{f} &\approx \epsilon_{f,x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \\
\frac{\Delta f}{f} &\approx 2.5 \cdot -0.02\% \\
\frac{\Delta f}{f} &\approx -5\%
\end{aligned}$$

(a3)

$$\begin{array}{rccc}
f(x) \text{ ist elastisch} \quad \Leftrightarrow & |\epsilon_{f,x}| & > & 1 \\
\Leftrightarrow & |\frac{x}{2\sqrt{x-4}}| & > & 1 \\
\Leftrightarrow & x^2 & > & 4(x-4) \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 16 & > & 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 + 12 & > & 0 \\
\Leftrightarrow & (x-2)^2 + 12 & > & 0
\end{array}$$

(b1)

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$$

$$\begin{array}{rcll} x_0 & = & 1 & \\ f(x) & = & 4x^{0.5} + \ln(2-x) & , f(1) = 4 + \ln(1) = 4 \\ f'(x) & = & 2x^{-0.5} - (2-x)^{-1} & , f'(1) = 2 - 1 = 1 \\ f''(x) & = & -x^{-1.5} - (2-x)^{-2} & , f''(1) = -1 - 1 = -2 \end{array}$$

$$P_2(x) = 4 + (x-1) - (x-1)^2$$

(b2)

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0.98 \\ P_2(0.98) & = & 4 - 0.02 - (-0.02)^2 \\ & = & 3.9796 \end{array}$$

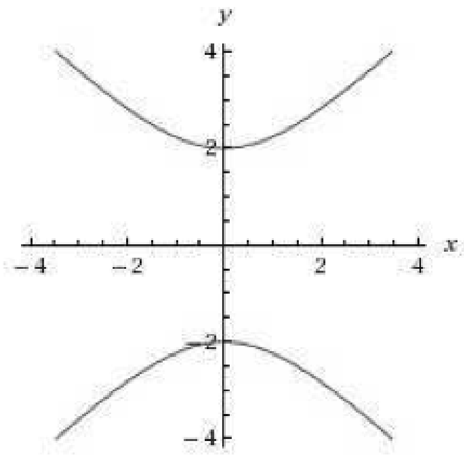
(c1)

$$\begin{array}{rcl} f_x & = & 2x \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ f_{xx} & = & 2 \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} + 4x^2 \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ & = & (2 + 4x^2) \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ f_y & = & -2y \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ f_{yy} & = & -2 \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} + 4y^2 \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ & = & (4y^2 - 2) \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \\ f_{xy} & = & f_{yx} = -4xy \cdot \mathrm{e}^{4+x^2-y^2} \end{array}$$

(c2)

$$\epsilon_{f,x} = \frac{x \cdot f_x}{f} = 2x^2$$

(c3)



Aufgabe 4

(a1)

$$\begin{aligned}
P_K &= 2(2K^{0.5} + A^{0.5}) \cdot (K^{-1.5}) \\
&= 2(2 + K^{-0.5}A^{0.5}) \\
&\overset{(K_0,A_0)=(1,4)}{=} 8 \\
P_A &= 2(2K^{0.5} + A^{0.5}) \cdot 0.5(A^{-0.5}) \\
&= 2K^{0.5}A^{-0.5} + 1 \\
&\overset{(K_0,A_0)=(1,4)}{=} 2
\end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned}
dP &= P_K(K_0, A_0) \cdot dK + P_A(K_0, A_0) \cdot dA \\
&= 8 \cdot dK + 2 \cdot dA \\
dK &= 0.01, \quad dA = -0.02 \\
dP &= 8 \cdot 0.01 + 2 \cdot (-0.02) = 0.04 \\
P(K, A) &\approx \underbrace{P(K_0, A_0)}_{=16} + dP = 16.04
\end{aligned}$$

(a3) Substitutionsrate

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dK} &= -\frac{P_K}{P_A} = -\frac{K^{-0.5}}{0.5A^{-0.5}} \\
&= -2 \\
&\Rightarrow -\frac{K^{-0.5}}{0.5A^{-0.5}} = -2 \\
&\Rightarrow K^{-0.5} = A^{-0.5} \\
&\Rightarrow K = A \qquad (*)
\end{aligned}$$

Isoquante

$$\begin{aligned}
(2K^{0.5} + A^{0.5})^2 &= 36 \\
2K^{0.5} + A^{0.5} &= 6 \quad \text{Einsetzen von } (*) \text{ ergibt} \\
3K^{0.5} &= 6 \\
K^{0.5} &= 2 \quad \Rightarrow K = A = 4 \\
(K^*, A^*) &= (4, 4)
\end{aligned}$$

(b1)

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= 1+\frac{(kx)^{0.5}}{(ky)^{0.5}}, \quad k>0 \\ &= 1+\frac{k^{0.5}x^{0.5}}{k^{0.5}y^{0.5}} \\ &= 1+\frac{x^{0.5}}{y^{0.5}} = f(x,y) = k^0\cdot f(x,y) \end{aligned}$$

$f(x,y)$ ist homogen vom Grade $r=0$.

(b2)

$$\begin{aligned} P(\lambda K,\lambda A) &= (\lambda K)^{0.3}(\lambda A)^{0.7} - 3\lambda K - 7\lambda A \\ &= \lambda^{0.3}K^{0.3}\lambda^{0.7}A^{0.7} - 3\lambda K - 7\lambda A\ , \quad \lambda>0 \\ &= \lambda(K^{0.3}A^{0.7} - 3K - 7A) \\ &= \lambda\cdot P(A,K) \end{aligned}$$

$P(K,A)$ ist linear homogen. Homogen vom Grade $r=1$

(b3)

$$\begin{aligned} g(kx,ky) &= (kx)^{0.2}(ky)^{0.5}\{\ln[(kx)^{0.2}(ky)^{0.5}] - 0.7\ln[kx]\} \\ &= k^{0.2}x^{0.2}k^{0.5}y^{0.5}\{0.2\ln k + 0.2\ln x + 0.5\ln k + 0.5\ln y - 0.7\ln k - \ln x\} \\ &= k^{0.7}x^{0.2}y^{0.5}\{\underbrace{0.2\ln x + 0.5\ln y}_{=\ln(x^{0.2}y^{0.5})} - 0.7\ln k\} \\ &= k^{0.7}g(x,y), \quad k>0 \end{aligned}$$

$g(x,y)$ ist homogen vom Grade $y=0.7$

(c)

$$\begin{aligned} f(kx, ky) &= [(kx)^{2c}(ky)^{1-c} + kx(ky)^c]^c - (kx)^{-c}(ky)^3, \quad k > 0 \\ &= [k^{1+c}x^{2c}y^{1-c} + k^{1+c}xy^c]^c - k^{3-c}x^{-c}y^3 \\ &= k^{(1+c)c}(x^{2c}y^{1-c} + xy^c)^c - k^{3-c}x^{-c}y^3 \end{aligned}$$

$$f \text{ is homogen} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} (1+c)c &= 3-c \\ c^2 + c &= 3-c \\ c^2 + 2c - 3 &= 0 \\ (c+3)(c-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = -3$$

Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik I
Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Heinz Müller*

18. Februar 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: heinz.müller@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a1)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^6 - n^4 - (n^6 + n^4 + n^4 + n^2)}{(n^2+1)(n^2-1)} \\
&= \frac{-3n^4 - n^2}{n^4 - 1} \\
&= \frac{-3 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^4}} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad -3 \\
\lim_{n\to\infty} a_n &= -3
\end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4 \cdot 4^n}{3^n + 4^n} \\
&= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{(\frac{3}{4})^n + 1}
\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k} = -4 \,, \quad \lim_{k\to\infty} b_{2k+1} = 4$$

$$\Rightarrow \quad b_n \text{ divergent}$$

(b)

$$\begin{aligned}
s &= a \cdot \frac{1}{1-q}\ , \quad a = \left(\frac{1}{1+c}\right)^2\ , \quad q = \left(\frac{1}{1+c}\right)^2 \\
s &= \frac{1}{(1+c)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{(1+c)^2}} \\
&= \frac{1}{(1+c)^2-1} = \frac{1}{c(2+c)}
\end{aligned}$$

(c1)

$$\begin{aligned}
B_0(p) &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{a_t}{(1+p)^t} = \sum_{t=1}^{\infty} 100 \cdot \left(\frac{1+g}{1+p}\right)^t \\
&= a \cdot \frac{1}{1-q}\ , \quad a = 100 \cdot \frac{1+g}{1+p}\ , \quad q = \frac{1+g}{1+p} \\
&= 100 \cdot \frac{1+g}{1+p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1+g}{1+p}} \\
&= 100 \cdot \frac{1+g}{p-g}
\end{aligned}$$

(c2)

$$\begin{aligned}
B_0(p) &= 5'150\ , \quad p = 0.05 \\
5'150 &= 100 \cdot \frac{1+g}{0.05-g} \\
51.5(0.05-g) &= 1+g \\
2.575-1 &= 52.5g \\
1.575 &= 52.5g \\
0.03 &= g \quad \Rightarrow \quad \underline{g = 3\%}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \ln(x+2) &= \ln 3 + 0.5 \ln x \\ x+2 &= 3x^{0.5} \qquad , \text{setze } z = x^{0.5} > 0 \\ z^2 - 3z + 2 &= 0 \\ (z-2)(z-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 = 1: &\quad x_1^{0.5} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \\ z_2 = 2: &\quad x_2^{0.5} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 \end{aligned}$$

(e)

$$\ln(x+1) - 2\ln y = 5 \qquad \text{(I)}$$
$$2\ln(x+1) + 3\ln y = -4 \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} - 2\text{(I)} \quad \Rightarrow \quad 7\ln y &= -14 \\ \ln y &= -2 \quad \Rightarrow \quad y = \mathrm{e}^{-2} \\ \text{(I)} \quad \Rightarrow \quad \ln(x+1) &= 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = \mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\underline{x = \mathrm{e} - 1\,, \quad y = \mathrm{e}^{-2}}$$

Aufgabe 2

(a)

$$f(x) \text{ is auf } [0,1] \text{ stetig und streng monoton fallend.}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 1+2-2 = 1 > 0 \\ f(1) &= \mathrm{e}^{-1} + 1 - 2 = \mathrm{e}^{-1} - 1 < 0 \end{aligned}$$

(i) Gemäss Zwischenwertsatz ($f(x)$ stetig, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$) existiert mindestens ein x^*, $0 < x^* < 1$, so dass $f(x^*) = 0$.

(ii) Wegen der strengen Monotonie ist x^* eindeutig.

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{x^2} - \frac{2(x^2-1)}{x^2}\right] = \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}}_{=0} - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{2}{x^2}\right)}_{=2} = -2$$

(c1) Definitionsbereich D

$$\begin{aligned} 1-\ln x &\geq 0 \\ 1 &\geq \ln x \\ \mathrm{e} &\geq x \quad \Rightarrow \quad 0 < x \leq \mathrm{e} \end{aligned}$$

$$\underline{D = (0, \mathrm{e}]}$$

Wertebereich W

$$\begin{array}{rcl} 0 < & x & \leq \mathrm{e} \\ -\infty < & \ln x & \leq 1 \\ +\infty > & \sqrt{1-\ln x} & \geq 0 \\ +\infty > & \underbrace{\mathrm{e}^{\sqrt{1-\ln x}}}_{=y} & \geq 1 \quad \Rightarrow \quad +\infty > y \geq 1 \end{array}$$

$$\underline{W = [1, +\infty)}$$

(c2)

$$f'(x) = \underbrace{\mathrm{e}^{\sqrt{1-\ln x}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1-\ln x}}}_{>0} \cdot \Big(\underbrace{-\frac{1}{x}}_{<0}\Big) < 0 \,, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend}$$

(c3)

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \mathrm{e}^{\sqrt{1-\ln x}} \qquad \text{Auflösen nach } x \\ \ln y &= \sqrt{1-\ln x} \\ (\ln y)^2 &= 1-\ln x \\ \ln x &= 1-(\ln y)^2 \\ x &= f^{-1}(y) = \mathrm{e}^{[1-(\ln y)^2]} \,, \quad y \geq 1 \qquad \text{Vertausche } x \leftrightarrow y \\ y &= f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{[1-(\ln x)^2]} \,, \quad x \geq 1 \end{aligned}$$

(d) Taylorpolynom

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 \\
x_0 &= 1 \\
f(x) &= x\cdot \mathrm{e}^{x^2-1} \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{x^2-1} + 2x^2\,\mathrm{e}^{x^2-1} \\
f''(x) &= 2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} + 4x\,\mathrm{e}^{x^2-1} + 4x^3\,\mathrm{e}^{x^2-1} \\
&= (6x+4x^3)\,\mathrm{e}^{x^2-1}
\end{aligned}$$

$$f(1) = 1\ , \quad f'(1) = 3\ , \quad f''(1) = 10$$

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= 1 + 3(x-1) + 5(x-1)^2 \\
&= 3 - 7x + 5x^2
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
f(t) &= t\cdot \mathrm{e}^{-t^2} \\
\ln f(t) &= \ln t - t^2\ , \quad t > 0 \\
r(t) &= [\ln f(t)]' = \frac{1}{t} - 2t \\
r'(t) &= -\frac{1}{t^2} - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{streng monoton fallend} \\
r''(t) &= \frac{2}{t^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{konvex}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\begin{aligned}\epsilon_{f,p} &= \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)}\\ f'(p) &= -\frac{1}{p^2}\,\mathrm{e}^{-0.1p} - \frac{0.1}{p}\,\mathrm{e}^{0.1p}\\ \epsilon_{f,p} &= -1 - 0.1p\end{aligned}$$

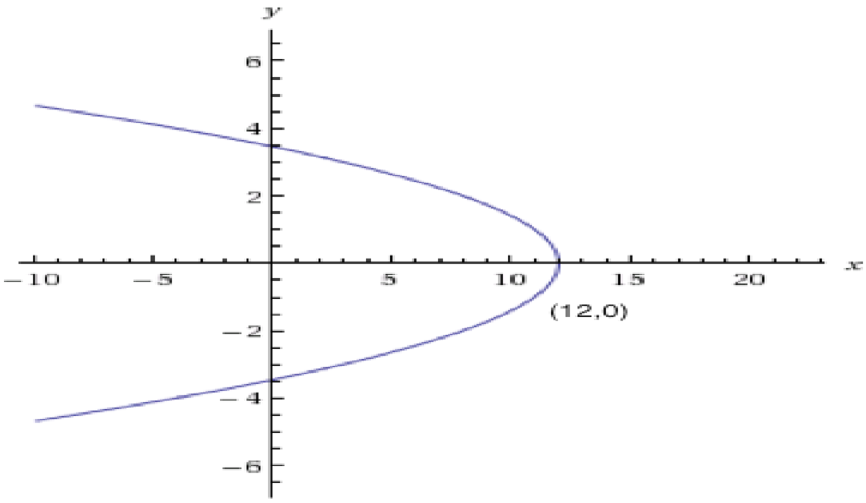
(a2)

$$\begin{aligned} p = 10 \quad &, \quad \Delta p = 0.15\\ \epsilon_{f,p} = -2 \quad &, \quad \frac{\Delta p}{p} = 1.5\%\\ \frac{\Delta f}{f} &\approx \epsilon_{f,p} \cdot \frac{\Delta p}{p}\\ \frac{\Delta f}{f} &\approx -2 \cdot 1.5\%\\ \frac{\Delta f}{f} &\approx -3\%\end{aligned}$$

(b1)

$$\begin{aligned} f(x,y) = (y^2 + x + 4)^{0.5} &= 4 \\ y^2 + x + 4 &= 16 \\ x &= -y^2 + 12 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nach links geöffnete Parabel



(b2)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (y^2 + x + 4)^{0.5} \\ f_x &= 0.5(y^2 + x + 4)^{-0,5} \\ f_y &= y(y^2 + x + 4)^{-0.5} \\ \epsilon_{f,x} &= \frac{x \cdot f_x(x,y)}{f(x,y)} = \frac{0.5x}{y^2 + x + 4} \\ \epsilon_{f,y} &= \frac{y \cdot f_y(x,y)}{f(x,y)} = \frac{y^2}{y^2 + x + 4} \end{aligned}$$

$$\epsilon_{f,x} = \frac{0.5x}{y^2 + x + 4} = \frac{1}{18} \qquad \Rightarrow \qquad 9x = y^2 + x + 4 \qquad \text{(I)}$$

$$\epsilon_{f,y} = \frac{y^2}{y^2 + x + 4} = \frac{4}{9} \qquad \Rightarrow \qquad 9y^2 = 4(y^2 + x + 4) \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned}
\text{(I), (II)} \quad &\Rightarrow \quad y^2 = 4x \quad \text{einetzen in (I)} \\
9x = 5x + 4 \quad &\Rightarrow \quad x = 1\;, \quad y^2 = 4
\end{aligned}$$

$$\underline{x = 1\;, \quad y = 2} \quad \text{wegen } x > 0,\, y > 0$$

(c1)

$$\begin{aligned}
f_x &= (x^2 + y^2)^{0.5} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{0.5}} \\
&= \frac{2x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^{0.5}} \\
f_y &= \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{0.5}}
\end{aligned}$$

(c2)

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= (3, 4) \quad \Rightarrow \quad f_x(x_0, y_0) = \frac{34}{5}\;, \quad f_y(x_0, y_0) = \frac{12}{5} \\
df &= f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \\
&= 6.8dx + 2.4dy \\
dx &= -0.01\;, \quad dy = 0.02 \\
df &= 6.8 \cdot (-0.01) + 2.4 \cdot 0.02 \\
&= -0.068 + 0.048 \\
&= -0.020
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1)

$$\begin{aligned}
P_K &= -180(2K^{-0.5}+A^{-0.5})^{-3}\cdot(-K^{-1.5})\\
&= 180\cdot K^{-1.5}(2K^{-0.5}+A^{-0.5})^{-3}\\
P_A &= -180(2K^{-0.5}+A^{-0.5})^{-3}\cdot(-0.5A^{-1.5})\\
&= 90\cdot A^{-1.5}(2K^{-0.5}+A^{-0.5})^{-3}
\end{aligned}$$

$$(K_0,A_0)=(1,1)\ :\quad \underline{P_K=\frac{20}{3},\quad P_A=\frac{10}{3}}$$

(a2)

$$\frac{dA}{dK}=-\frac{P_K(K_0,A_0)}{P_A(K_0,A_0)}=-\frac{\frac{20}{3}}{\frac{10}{3}}=-2$$

(a3)

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dK}=-\frac{P_K(K,A)}{P_A(K,A)} &= -\frac{180K^{-1.5}}{90A^{-1.5}}=-2\cdot\left(\frac{K}{A}\right)^{-1.5}\\
\frac{dA}{dK} &= -\frac{1}{4}\\
-2\cdot\left(\frac{K}{A}\right)^{-1.5} &= -\frac{1}{4}\\
8 &= \left(\frac{K}{A}\right)^{1.5}\\
4 &= \frac{K}{A}\quad\Rightarrow\quad \underline{K=4A}
\end{aligned}$$

(b1)

$$\begin{aligned} (K_0, A_0) &= (1,4) \quad \text{auf Isoquante} \\ K^b A^c &= 2 \\ \Rightarrow \quad 4^c &= 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{c = 0.5} \end{aligned}$$

(b2)

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dK} &= -\frac{P_K}{P_A} = -\frac{bK^{b-1} \cdot A^c}{cK^b \cdot A^{c-1}} \\ &= -\frac{bA}{cK} \overset{c=0.5}{=} -2b\frac{A}{K} \\ (K_0, A_0) &= (1,4) \\ \frac{dA}{dK} &= -2 \\ -2b\frac{4}{1} &= -2 \\ b &= 0.25 \end{aligned}$$

(c1)

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= [(kx)^2+(ky)^2]^{-1} \\ &= [k^2(x^2+y^2)]^{-1} \\ &= k^{-2}(x^2+y^2)^{-1} \\ &= k^{-2}f(x,y)\ , \quad k>0 \end{aligned}$$

$f(x,y)$ is homogen vom Grade $r=-2$

(c2)

$$\begin{aligned} g(kx,ky) &= \frac{(kx)(ky)}{(kx)^2+(ky)^2}+1 \\ &= \frac{k^2xy}{k^2(x^2+y^2)}+1 \\ &= \frac{xy}{x^2+y^2}+1 \\ &= k^0 g(x,y)\ , \quad k>0 \end{aligned}$$

$g(x,y)$ ist homogen vom Grade $r=0$

(c3)

$$\begin{aligned} P(\lambda K,\lambda A) &= (\lambda K)^{0.3}(\lambda A)^{0.5}-3\lambda K-5\lambda A \\ &= \lambda^{0.8}K^{0.3}A^{0.5}-\lambda(3K+5A)\ , \quad \lambda>0 \end{aligned}$$

$P(K,A)$ ist nicht homogen

(c4)

$$\begin{aligned} h(kx,ky) &= (kx)^{-0.5}\left[1+\ln\left(\frac{kx}{ky}\right)+\ln\left(\frac{ky}{kx}\right)\right] \\ &= k^{-0.5}x^{-0.5}\left[1+\ln\left(\frac{x}{y}\right)+\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] \\ &= k^{-0.5}h(x,y)\ , \quad k>0 \end{aligned}$$

$h(x,y)$ ist homogen vom Grade $y=-0.5$

(d)

$$\begin{aligned} f(kx,ky) &= \frac{(kx)^{1-a}}{(kx)^a+(ky)^a}+\frac{(ky)^{1-a}}{(kx)^a+(ky)^a} \\ &= \frac{k^{1-a}x^{1-a}}{k^a(x^a+y^a)}+\frac{k^{1-a}y^{1-a}}{k^a(x^a+y^a)} \\ &= k^{1-2a}\cdot f(x,y)\ , \quad k>0 \end{aligned}$$

$f(x,y)$ ist homogen vom Grade $r = 1-2a$

Für $x\cdot f_x + y\cdot f_y = 0$ muss r=0 gelten:

$$r = 1-2a = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 0.5}$$

Mathematik I
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

13. Juli 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a1)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{p}{n}\right) = \mathrm{e}^n$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{10}\tfrac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{-0.1}$$

(a2)

$$\begin{aligned}\frac{2n-1}{\sqrt{n}-1}-2\sqrt{n} &= \frac{2n-1-2(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n}-1}\\ =\frac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}-1} &= \frac{2-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\to} 2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}|2x-1| &> |x+1|\\ (2x-1)^2 &> (x+1)^2\\ 4x^2-4x+1 &> x^2+2x+1\\ 3x^2-6x &> 0\\ 3x(x-2) &> 0\\ 1)\ x>0,\ x-2>0 &\Rightarrow x>2\\ 2)\ x<0,\ x-2<0 &\Rightarrow x<0\end{aligned}$$

Lösung: $x<0$ und $x>2$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

(c)

$$\begin{aligned} B_0(p) =& \frac{E_1}{1+p} + \frac{E_2}{(1+p)^2} - A_0 \\ p = 0.10,\ A_0 &= 10'000,\ E_1 = 7'700 \\ B_0(0.10) =& \frac{7'700}{1.1} + \frac{E_2}{1.1^2} - 10'000 \geq 0 \\ & 7'000 + \frac{E_2}{1.21} - 10'000 \geq 0 \\ & \frac{E_2}{1.21} \geq 3'000 \\ & E_2 \geq 3'630 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \ln(x+10) &= \ln(x) + \ln(6) \quad |\exp \\ x+10 &= 6x \\ 10 &= 5x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{x}-2) + \ln(\sqrt{x}-3) &= \ln(12) \\ (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3) &= 12 \\ x - 5\sqrt{x} + 6 &= 12 \\ x - 5\sqrt{x} - 6 &= 0 \\ \text{Setze } z = \sqrt{x} > 0 & \\ z^2 - 5z - 6 &= 0 \\ (z-6)\underbrace{(z+1)}_{>0} &= 0 \\ z &= 6 \\ \sqrt{x} &= 6 \\ x &= 36 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a)

$$K(2) = 9, \lim_{x\to 2^-} K(x) = 9, \quad \lim_{x\to 2^+} K(x) = 2 + c$$

a1) Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} K(x) = \quad & K(2) \quad = \lim_{x\to 2^+} K(x) \\ 9 = \quad & 9 \quad = 2 + c \qquad \Rightarrow c = 7 \end{aligned}$$

a2) Monotonie:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} K(x) \quad &\geq \quad K(2) \\ 2 + c \quad &\geq \quad 9 \qquad \Rightarrow c \geq 7 \end{aligned}$$

b1) Definitionsbereich D:

$$\begin{aligned} \sqrt{\ln(x)} - 1 \quad &> \quad 0 \\ \sqrt{\ln(x)} \quad &> \quad 1 \\ \ln(x) \quad &> \quad 1 \qquad \Rightarrow x > \mathrm{e} \end{aligned}$$

D$= (\mathrm{e}, +\infty)$
Wertebereich W:

$$\begin{aligned} \mathrm{e} < x < +\infty \\ 1 < \ln(x) < +\infty \\ 0 < \sqrt{\ln(x)} - 1 < +\infty \\ +\infty > \underbrace{(\sqrt{\ln(x)} - 1)^{-0.25}}_{y} > 0 \end{aligned}$$

W$= (0, +\infty)$

b2)

$$f'(x) = -0.25 \underbrace{(\sqrt{\ln(x)} - 1)^{-1.25}}_{>0} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} < 0$$

$f(x)$ strikt monoton sinkend.

Alternativ:

$\sqrt{\ln(x)} - 1$ strikt monoton steigend

$\Rightarrow (\sqrt{\ln(x)} - 1)^{-0.25}$ strikt monoton sinkend

b3) (I)

$$y = f(x) = (\sqrt{\ln(x)} - 1)^{-0.25}$$

(II) Löse nach x

$$\begin{aligned} y^{-4} &= \sqrt{\ln(x)} - 1 \\ \sqrt{\ln(x)} &= 1 + y^{-4} \\ \ln(x) &= (1 + y^{-4})^2 \\ x = f^{-1}(y) &= \mathrm{e}^{(1+y^{-4})^2} \end{aligned}$$

(III) Substituiere $x \leftrightarrow y$

$$y = f^{-1}(x) = \mathrm{e}^{(1+x^{-4})^2}$$

(c)

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \\ x_0 &= 2 \\ f(x) &= \ln(x^2 - 3) \\ f'(x) &= \frac{2x}{x^2 - 3} \\ f''(x) &= \frac{2(x^2 - 3) - 4x^2}{(x^2 - 3)^2} = \frac{-2x^2 - 6}{(x^2 - 3)^2} \end{aligned}$$

$$f(2) = 0\,, \quad f'(2) = 4\,, \quad f''(2) = -14$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 4(x - 2) - 7(x - 2)^2 \\ &= -7x^2 + 32x - 36 \\ P_2(1.9) &= 4(-0.1) - 7(-0.1)^2 \\ &= -0.47 \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x \cdot (\mathrm{e}^{ax} - a) \\
f'(x) &= \underbrace{\mathrm{e}^{ax} - a}_{>0 \text{ for } 0 \leq a \leq 1} + \underbrace{ax\,\mathrm{e}^{ax}}_{\geq 0 \text{ for } a \geq 0} > 0, \quad x > 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(x)$ strikt monoton steigend

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= a\,\mathrm{e}^{ax} + ae^{ax} + a^2xe^{ax} \\
&= 2ae^{ax} + a^2xe^{ax} > 0 \text{ falls } a > 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f(x)$ konvex.

Aufgabe 3

(a1)

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{f,x} &= \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \\
f'(x) &= -(x+10)^{-2}, \quad x \geq 0 \\
\epsilon_{f,x} &= \frac{-x \cdot (x+10)^{-2}}{(x+10)^{-1}} = -\frac{x}{x+10}
\end{aligned}
$$

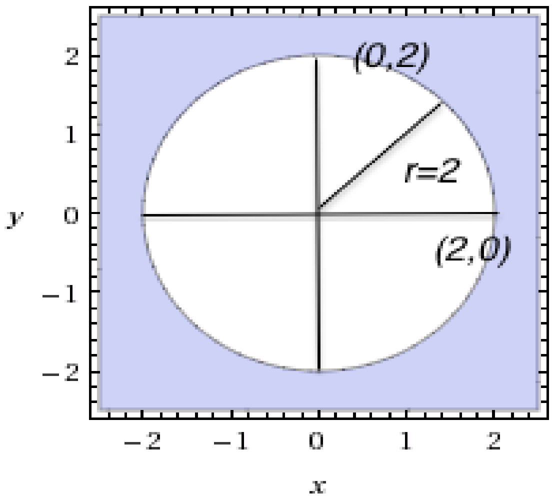
(a2)

$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ unelastisch} &\Leftrightarrow |\epsilon_{f,x}| < 1 \\
&\Leftrightarrow \left| -\frac{x}{x+10} \right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x}{x+10} < 1, \quad x \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x < x+10 \\
&\Leftrightarrow 0 < 10
\end{aligned}
$$

(a3)

$$
\begin{aligned}
x &= 5,\ \Delta x = 0.3 \\
\epsilon_{f,x} &= -\frac{1}{3}, \quad \frac{\Delta x}{x} = 6\% \\
\frac{\Delta f}{f} &\approx \epsilon_{f,x} \cdot \frac{\Delta x}{x} \\
\frac{\Delta f}{f} &\approx -2\%
\end{aligned}
$$

(b) D= $\{(x,y)|x^2+y^2>4\}$
Die Region aller Punkte ausserhalb des Kreise mit Radius $r=2$ und Zentrum $(0,0)$.

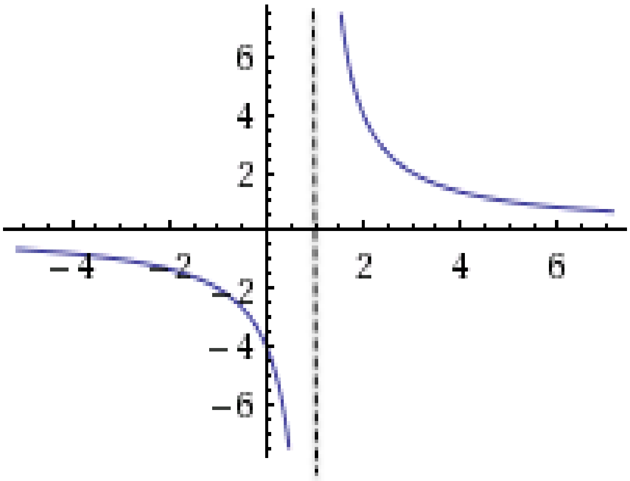


(c1)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{xy-y-4} \\
f_x &= y \cdot e^{xy-y-4} \\
f_y &= (x-1) \cdot e^{xy-y-4} \\
f_{xx} &= y^2 \cdot e^{xy-y-4} \\
f_{xy} = f_{yx} &= [1+y(x-1)] \cdot e^{xy-y-4} \\
f_{yy} &= (x-1)^2 \cdot e^{xy-y-4}
\end{aligned}
$$

(c2) Niveaulinie

$$\begin{aligned} e^{xy-y-4} &= 1 \quad | \ln \\ xy - y - 4 &= 0 \\ y &= \frac{4}{x-1} \end{aligned}$$



(c3)

$$\begin{aligned} df &= f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy, \qquad (x_0, y_0) = (2, 4) \\ f_x(x_0, y_0) &= 4, \ f_y(x_0, y_0) = 1 \\ df &= 4dx + dy \end{aligned}$$

(c4)

$$\begin{aligned} f(x_o + dx, y_0 + dy) &\approx \underbrace{f(x_0, y_0)}_{1} + \underbrace{df}_{4dx+dy} \\ dx &= -0.08, \ dy = 0.07 \\ f(1.92, 4.07) &\approx 1 + 4 \cdot (-0.08) + 1 \cdot 0.07 \\ &\approx 0.75 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1)

$$\begin{aligned} P_K &= -9\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{K^2}\right) \\ &= \frac{9}{K^2}\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-2} \\ P_A &= -9\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{2}{A^2}\right) \\ &= \frac{18}{A^2}\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-2} \end{aligned}$$

$$(K_0, A_0) = (1,1) \ : \quad P_K(K_0,A_0) = 1, \quad P_A(K_0,A_0) = 2$$

(a2)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{P,K} &= \frac{KP_K(K,A)}{P(K,A)} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-1} \\ \varepsilon_{P,A} &= \frac{AP_A(K,A)}{P(K,A)} = \frac{2}{A}\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-1} \\ (K_0,A_0) &= (1,1):\ \varepsilon_{P,K} = \frac{1}{3},\ \varepsilon_{P,A} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(a3) Elastizität

$$\begin{aligned} \varepsilon_{P,A} &= \varepsilon_{P,K} \\ \frac{1}{K} &= \frac{2}{A} \end{aligned}$$

Isoquante

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-1} &= 9 \\ \frac{1}{K}+\frac{2}{A} &= 1 \\ \frac{4}{A} &= 1 \qquad \Rightarrow A = 4,\ K = 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= (1,1) \quad \text{auf der Kurve}\\ g(x_0, y_0) &= 0\\ f(x_0, y_0) &= 4 - a = 0 \qquad \Rightarrow a = 4\end{aligned}$$

Gleiche Steigung in $(x_0, y_0) = (1,1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} &= -\frac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}\\ -\frac{2x_0}{6y_0} &= -\frac{cx_0^{c-1}y_0^{1-c}}{(1-c)x_0^c y_0^{-c}}\\ \frac{1}{3} &= \frac{c}{1-c}\\ 1-c &= 3c\\ 1 &= 4c\\ c &= \frac{1}{4},\ a = 4\end{aligned}$$

(c1)

$$\begin{aligned}f(kx, ky) &= [(kx)^{-2a} + (ky)^{-2a}]^{\frac{1}{a}}\\ &= [k^{-2a}(x^{-2a} + y^{-2a})]^{\frac{1}{a}}\\ &= k^{-2}(x^{-2a} + y^{-2a})^{\frac{1}{a}}\\ &= k^{-2} f(x,y)\ , \quad k > 0\end{aligned}$$

$f(x,y)$ ist homogen vom Grade $r = -2$

(c2)

$$\begin{aligned}g(kx, ky) &= kx\{\ln[(kx)^{0.4}\cdot(ky)^{0.6}] - \ln[(kx)^{0.9}\cdot(ky)^{0.1}]\}\ , \quad k > 0\\ &= kx\{\ln[k\cdot x^{0.4}y^{0.6}] - \ln[k\cdot x^{0.9}y^{0.1}]\}\\ &= kx\{\ln k + \ln(x^{0.4}y^{0.6}) - \ln k - ln(x^{0.9}y^{0.1})\}\\ &= kg(x,y), \qquad k > 0\end{aligned}$$

$g(x,y)$ ist linear homogen, $r = 1$

(d) Weil $f(x, y)$ homogen vom Grade $r = 0$ ist, können wir den Satz von Euler anwenden

$$x_0 \cdot f_x(x_0, y_0) + y_0 \cdot f_y(x_0, y_0) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Tangentialebene ist

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Addition der zwei Gleichungen gibt

$$z = f(x_0, y_0) + x \cdot f_x(x_0, y_0) + y \cdot f_y(x_0, y_0)$$

Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I
Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

29. Januar 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a1) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{(\mathrm{e}^{2n}-1)^2}{\mathrm{e}^{4n-2}} &= \frac{(\mathrm{e}^{2n})^2 - 2\,\mathrm{e}^{2n}+1}{\mathrm{e}^{4n-2}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{4n}-2\,\mathrm{e}^{2n}+1}{\mathrm{e}^{4n-2}} \\
&= \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^{-2n+2} + \mathrm{e}^{-4n+2}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(\mathrm{e}^{2n}-1)^2}{\mathrm{e}^{4n-2}} &= \lim_{n\to\infty}\left[\mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^{-2n+2} + \mathrm{e}^{-4n+2}\right] \\
&= \mathrm{e}^2 - 2\underbrace{\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-2n+2}}_{=0} + \underbrace{\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-4n+2}}_{=0} \\
&= \mathrm{e}^2\,.
\end{aligned}$$

(a2) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^4+3n^3+1}{n^2-1} - \frac{n^3+2n^2}{n-1} \\
&= \frac{n^4+3n^3+1}{(n-1)(n+1)} - \frac{(n+1)(n^3+2n^2)}{(n-1)(n+1)} \\
&= \frac{n^4+3n^3+1-n^4-n^3-2n^3-2n^2}{n^2-1} \\
&= \frac{1-2n^2}{n^2-1} = \frac{\frac{1}{n^2}-2}{1-\frac{1}{n^2}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+3n^3+1}{n^2-1} - \frac{n^3+2n^2}{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}-2}{1-\frac{1}{n^2}} = -2.$$

(b) Dies ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{5-3a}{3a-1}$. Als Konvergenzkriterium haben wir $|q| < 1$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
|q| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \frac{5-3a}{3a-1} \right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (5-3a)^2 < (3a-1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 25 - 30a + 9a^2 < 9a^2 - 6a + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 24 < 24a \\
&\Leftrightarrow \quad a > 1.
\end{aligned}$$

Für $a > 1$ erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5-3a}{3a-1} \right)^k = \frac{1}{1 - \frac{5-3a}{3a-1}} = \frac{3a-1}{3a-1-5+3a} = \frac{3a-1}{6a-6}.$$

(c1) Folgendes gilt:

$$B_0 \quad = \quad -150'000 + \frac{50'000}{1+p} + \frac{102'000}{(1+p)^2}.$$

(c2) Das Projekt ist genau dann vorteilhaft, wenn $B_0 \geq 0$. Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
B_0 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -150'000 + \frac{50'000}{1+p} + \frac{102'000}{(1+p)^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -150 + \frac{50}{1+p} + \frac{102}{(1+p)^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -150(1+p)^2 + 50(1+p) + 102 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -150 - 300p - 150p^2 + 50 + 50p + 102 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -150p^2 - 250p + 2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 75p^2 + 125p - 1 \leq 0.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir:

$$75\,p^2 + 125\,p - 1 = 0 \Leftrightarrow p_{1,2} = \frac{-125 \pm \sqrt{125^2 + 4 \cdot 75}}{2 \cdot 75} \approx \frac{-125 \pm 126.19429}{150},$$

d.h.,

$$p_1 \approx 0.0079619 \text{ und } p_2 < 0.$$

Es folgt
$$B_0 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq p \leq 0.796.$$

(d)
$$\begin{aligned}
&\ln(x^4-25) = \ln(x^2+5) + \ln(4) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \ln(x^4-25) = \ln(4\,(x^2+5)) \\
&\quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 25 = 4x^2 + 20 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 4x^2 - 45 = 0.
\end{aligned}$$

Sei $z = x^2$, dann
$$z^2 - 4z - 45 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 45}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{4 \pm 14}{2},$$
d.h.,
$$z_1 = 9 \text{ und } z_2 = -5.$$
Da $z = x^2$, somit ist $z \geq 0$. Es folgt, dass $z = 9$ und $x = \pm 3$.

(e) Lösung 1:

Es gilt
$$\begin{aligned}
4^x &= \mathrm{e}^{\ln(4^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(4)} = \mathrm{e}^{x\ln(2^2)} = \mathrm{e}^{2x\ln(2)}, \text{ und} \\
2^x &= \mathrm{e}^{\ln(2^x)} = \mathrm{e}^{x\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Es folgt
$$4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x\ln(2)} - \mathrm{e}^{x\ln(2)} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x\ln(2)}\right)^2 - \mathrm{e}^{x\ln(2)} - 2 = 0.$$

Sei $z = \mathrm{e}^{x\ln(2)} > 0$, somit ist $z^2 - z - 2 = 0$ und
$$z_{1,2} = \tfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \tfrac{1 \pm 3}{2}, \text{ also}$$
$$z_1 = 2 \text{ und } z_2 = -1.$$

Da $z > 0$, erhalten wir $z = 2$. Es folgt, dass:

$$e^{x\ln(2)} = z = 2 \Leftrightarrow x\ \ln(2) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

<u>Lösung 2:</u>

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2,$$

und daher

$$4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2^x - 2 = 0.$$

Sei $z = 2^x > 0$, somit ist $z^2 - z - 2 = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 2$ und $z_2 = -1$. Da $z > 0$, erhalten wir $z = 2$. Es folgt, dass:

$$2^x = 2 \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln(2) \Leftrightarrow x\ \ln(2) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1.$$

Aufgabe 2

(a) Eine Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Es gilt:

<u>$x_1 = 0$:</u>

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0 - \sqrt{0+1} = -1, \\ \lim_{x \nearrow 0} f(x) &= \lim_{x \nearrow 0} (a\,\mathrm{e}^x) = a, \\ \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \lim_{x \searrow 0} (2x^2 - \sqrt{x+1}) = -1. \end{aligned}$$

Es folgt, dass f genau dann stetig in $x_1 = 0$ ist, wenn $a = -1$.

<u>$x_2 = 8$</u>

$$\begin{aligned} f(8) &= 2 \cdot 8^2 - \sqrt{8+1} = 125, \\ \lim_{x \nearrow 8} f(x) &= \lim_{x \nearrow 8} (2x^2 - \sqrt{x+1}) = 2 \cdot 64 - \sqrt{9} = 125, \\ \lim_{x \searrow 8} f(x) &= \lim_{x \searrow 8} (25x + 3 - b) = 25 \cdot 8 + 3 - b = 203 - b. \end{aligned}$$

Es folgt, dass f genau dann stetig in $x_2 = 8$ ist, wenn $125 = 203 - b$, d.h., $b = 78$.

(b) Es gilt

$$\frac{2x}{\sqrt{3x}+5} - \frac{2x}{\sqrt{3x}-5} = \frac{2x(\sqrt{3x}-5) - 2x(\sqrt{3x}+5)}{(\sqrt{3x}+5)(\sqrt{3x}-5)} = \frac{-20x}{3x-25}.$$

Es folgt, dass:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{3x}+5} - \frac{2x}{\sqrt{3x}-5} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-20x}{3x-25} \right) = -\frac{20}{3}.$$

(c) Das Taylorpolynom zweiter Ordnung in $x_0 = 1$ ist definiert als

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2} f''(1)\,(x-1)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(1) &= \mathrm{e}^{1^2-1} = \mathrm{e}^0 = 1 \\
f'(x) &= \mathrm{e}^{x^2-1} \cdot (2x) \Rightarrow f'(1) = \mathrm{e}^{1^2-1}(2\cdot 1) = 2 \\
f''(x) &= 2\,\mathrm{e}^{x^2-1} + 2\,x\,\mathrm{e}^{x^2-1}\,2\,x = (2+4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2-1} \Rightarrow f''(1) = (2+4\cdot 1^2)\,\mathrm{e}^{1^2-1} = 6.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$P_2(x) = 1 + 2\,(x-1) + \frac{1}{2}6\,(x-1)^2 = 1 + 2x - 2 + 3x^2 - 6x + 3 = 3\,x^2 - 4\,x + 2$$

und

$$f(0.9) \approx P_2(0.9) = 3\,(0.9)^2 - 4\,(0.9) + 2 = 0.83.$$

(d1) <u>Definitionsbereich D_f:</u>

$$\left.\begin{array}{l}
x \geq 0 \\
1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \\
\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0
\end{array}\right\} \Rightarrow D_f = (0, \infty).$$

<u>Wertebereich W_f:</u>

$$\begin{aligned}
& x \in D_f \\
&\quad \Leftrightarrow\; x > 0 \\
&\quad \Leftrightarrow\; \sqrt{x} > 0 \\
&\quad \Leftrightarrow\; -\sqrt{x} < 0 \\
&\quad \Leftrightarrow\; 0 < e^{-\sqrt{x}} < 1 \\
&\quad \Leftrightarrow\; 0 < 1 - e^{-\sqrt{x}} < 1 \\
&\quad \Leftrightarrow\; 1 < \frac{1}{1-e^{-\sqrt{x}}} < \infty \\
&\quad \Leftrightarrow\; 0 < \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\sqrt{x}}}\right) < \infty \\
&\quad \Leftrightarrow\; f(x) \in (0, \infty).
\end{aligned}$$

Es folgt,

$$W_f = (0, \infty).$$

(d2) Lösung 1:

$$f'(x) \quad = \frac{1}{\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}} \cdot \frac{(-1)}{(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})^2} \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\, \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{(1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})\sqrt{x}} < 0, \text{ für } x > 0.$$

Es folgt, dass f streng monoton fallend ist.

Lösung 2:

$1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ ist streng monoton steigend; $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$ ist streng monoton fallend. Folglich ist $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}\right)$ streng monoton fallend, da $\ln(\cdot)$ streng monoton steigend und $\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$ streng monoton fallend ist.

(d3) Um die Inverse zu finden, lösen wir die Gleichung

$$y = f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}\right)$$

nach x.

$$\begin{aligned}
& \ln\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}\right) = y \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}} = \mathrm{e}^{y} \\
\Leftrightarrow \quad & 1-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \mathrm{e}^{-y} \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = 1-\mathrm{e}^{-y} \\
\Leftrightarrow \quad & -\sqrt{x} = \ln(1-\mathrm{e}^{-y}) \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{x} = -\ln(1-\mathrm{e}^{-y}) \\
\Leftrightarrow \quad & x = (\ln(1-\mathrm{e}^{-y}))^2.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass (durch Substitution von y mit x und umgekehrt):

$$f^{-1} \,:\, (0,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = (\ln(1-\mathrm{e}^{-x}))^2.$$

Aufgabe 3

(a1) Die Elastizität ist definiert als:

$$\epsilon_{f,x} \quad = \quad \frac{x\, f'(x)}{f(x)}.$$

Es gilt:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{1+\sqrt{x-5}}\,\frac{1}{2}(x-5)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{x-5}}}{2\sqrt{x-5}}$$

und daher

$$\epsilon_{f,x} = x\,\frac{\mathrm{e}^{1+\sqrt{x-5}}}{2\sqrt{x-5}}\,\frac{1}{\mathrm{e}^{1+\sqrt{x-5}}} = \frac{x}{2\sqrt{x-5}}.$$

(a2) Es gilt folgende Annäherung:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} \approx \epsilon_{f,x_0}\cdot\frac{\Delta x}{x_0}.$$

Wir berechnen somit:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x}{x_0} &= \frac{6.2-6}{6} = \frac{0.2}{6} = \frac{1}{30}, \text{ und}\\ \epsilon_{f,x_0} &= \frac{6}{2\sqrt{6-5}} = 3.\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} \approx 3\frac{1}{30} = \frac{1}{10}.$$

(a3) $f(x)$ ist genau dann elastisch, wenn $|\epsilon_{f,x}| > 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}|\epsilon_{f,x}| > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad |\epsilon_{f,x}|^2 > 1\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4(x-5)} > 1\\ &\overset{x>5}{\Leftrightarrow} \quad x^2 > 4(x-5)\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 20 > 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x^2-2)^2 + 16 > 0\end{aligned}$$

Diese letzte Ungleichung ist offensichtlich erfüllt für alle $x > 5$.

(b1) Die Wachstumsrate ist definiert als:

$$r(x) \quad = \tfrac{f'(x)}{f(x)}$$

Es gilt

$$f'(x) = 4(1+\ln(3x))^3 \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{4}{x}(1+\ln(3x))^3$$

und daher

$$r(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{4}{x}(1+\ln(3x))^3}{(1+\ln(3x))^4} = \frac{4}{x(1+\ln(3x))}.$$

(b2) Von (b1) erhalten wir

$$r(x) = \frac{4}{x(1+\ln(3x))}.$$

Es folgt, dass:

$$r'(x) = \frac{-4[1+\ln(3x)+x\frac{3}{3x}]}{[x(1+\ln(3x))]^2} = -\frac{4+4\ln(3x)+4}{x^2(1+\ln(3x))^2} = -\frac{8+4\ln(3x)}{x^2(1+\ln(3x))^2}.$$

Somit ist r streng monoton fallend, wenn

$$\begin{aligned} r'(x) < 0 \quad &\Leftrightarrow 8 + 4\ln(3x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(3x) > -2 \\ &\Leftrightarrow x > \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-1} > \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2}$ ist $r'(x) < 0$ für $x > \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-1}$.

(b3) Das Differential ist definiert als

$$df(x) \quad = f'(x)dx.$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{4(1+\ln(3x))^3}{x}$$

und

$$f'(x_0) = \frac{4}{x_0}(1+\ln(3x_0))^3 = 4\frac{3}{\mathrm{e}}\left(1+\ln\left(3\frac{\mathrm{e}}{3}\right)\right)^3 = \frac{96}{\mathrm{e}}.$$

Es folgt, dass:

$$df = \frac{96}{\mathrm{e}}\,dx.$$

Wir erhalten deshalb

$$f\left(\frac{\mathrm{e}}{3}+\frac{1}{10}\right)\approx f\left(\frac{\mathrm{e}}{3}\right)+df=16+\frac{96}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{10}=16+\frac{48}{5\,\mathrm{e}}.$$

(c1) Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2+3}\\
f_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2+3}\\
f_{x,x}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2+3)-2x(2x)}{(x^2+y^2+3)^2}=\frac{2(-x^2+y^2+3)}{(x^2+y^2+3)^2}\\
f_{y,y}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2+3)-2y(2y)}{(x^2+y^2+3)^2}=\frac{2(x^2-y^2+3)}{(x^2+y^2+3)^2}\\
f_{x,y}(x,y) &= f_{y,x}(x,y)=\frac{-2x2y}{(x^2+y^2+3)^2}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2+3)^2}.
\end{aligned}$$

(c2) Von (c1) folgt, dass:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{f,x} &= x\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}=\frac{2x^2}{(x^2+y^2+3)\ln(x^2+y^2+3)},\ \text{und}\\
\epsilon_{f,y} &= y\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}=\frac{2y^2}{(x^2+y^2+3)\ln(x^2+y^2+3)}.
\end{aligned}$$

(c3) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\ln(x^2+y^2+3)=\ln(7)\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2+3=7\\
\Leftrightarrow\ & x^2+y^2=4.
\end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis mit Zentrum $P=(0,0)$ und Radius 2 (siehe Abbildung 1).

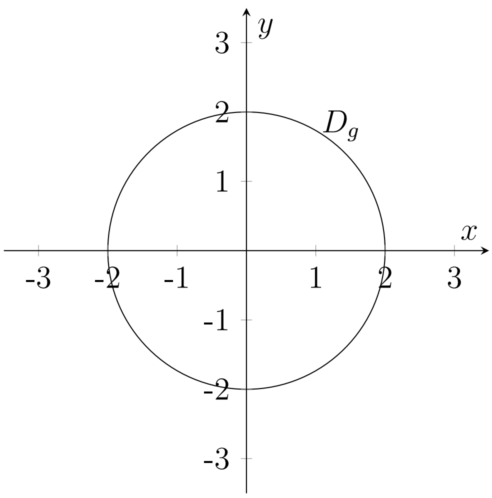


Abbildung 1: Aufgabe 3(c3).

Aufgabe 4

(a1) Die Grenzerträge P_K und P_A sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von P. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_K(K,A) &= 4(2K^{0.8}+4A^{0.2})^3 1.6K^{-0.2} = 6.4K^{-0.2}(2K^{0.8}+4A^{0.2})^3 \\ P_A(K,A) &= 4(2K^{0.8}+4A^{0.2})^3 0.8A^{-0.8} = 3.2A^{-0.8}(2K^{0.8}+4A^{0.2})^3. \end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned} P_K(1,1) &= 6.4\cdot 1^{-0.2}(2\cdot 1^{0.8}+4\cdot 1^{0.2})^3 = 6.4\cdot 6^3 = 1382.4 \\ P_A(1,1) &= 3.2\cdot 1^{-0.8}(2\cdot 1^{0.8}+4\cdot 1^{0.2})^3 = 3.2\cdot 6^3 = 691.2. \end{aligned}$$

(a2) Das totale Differential ist definiert als

$$dP = P_K\,dK + P_A\,dA,$$

d.h.,

$$dP = 1382.4\,dK + 691.2\,dA.$$

Es gilt $\Delta K = -0.02$ und $\Delta A = 0.02$, und

$$\Delta P \approx 1382.4\,(-0.02) + 691.2\,(0.02) = -27.648 + 13.824 = -13.82.$$

Es folgt, dass:

$$P(0.98, 1.02) \approx P(1,1) + \Delta P \approx 1{,}296 - 13.82 = 1{,}282.18.$$

(a3) Sei $A_0 = 1$, dann

$$\begin{aligned}
-2 = \frac{dA}{dK} &= -\frac{P_K(K_0, A_0)}{P_A(K_0, A_0)} \\
&= -\frac{6.4K_0^{-0.2}(2K_0^{0.8} + 4A_0^{0.2})^3}{3.2A_0^{-0.8}(2K_0^{0.8} + 4A_0^{0.2})^3} \\
&= -2\frac{K_0^{-0.2}}{A_0^{-0.8}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$K_0^{-0.2} = A_0^{-0.8} = 1^{-0.8} = 1 \Rightarrow K_0 = 1.$$

Wir erhalten schlussendlich

$$c = P(1,1) = 1,296.$$

(b1) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= 1 + \frac{(\lambda x)^{0.8}}{(\lambda y)^{0.8}} = 1 + \frac{\lambda^{0.8}x^{0.8}}{\lambda^{0.8}y^{0.8}} \\
&= 1 + \frac{x^{0.8}}{y^{0.8}} \\
&= f(x,y),
\end{aligned}$$

d.h., f ist homogen vom Grade 0.

(b2) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
g(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^{0.6}(\lambda y)^{0.5} - 3(\lambda x)^{1.1} + 5\frac{(\lambda y)^2}{(\lambda x)^{0.9}} \\
&= \lambda^{0.6}x^{0.6}\lambda^{0.5}y^{0.5} - 3\lambda^{1.1}x^{1.1} + 5\frac{\lambda^2 y^2}{\lambda^{0.9}x^{0.9}} \\
&= \lambda^{1.1}x^{0.6}y^{0.5} - 3\lambda^{1.1}x^{1.1} + 5\lambda^{1.1}\frac{y^2}{x^{0.9}} \\
&= \lambda^{1.1}\left[x^{0.6}y^{0.5} - 3x^{1.1} + 5\frac{y^2}{x^{0.9}}\right] \\
&= \lambda^{1.1}g(x,y),
\end{aligned}$$

d.h., g ist homogen vom Grade 1.1.

(b3) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
h(\lambda x, \lambda y) &= \frac{2(\lambda x)^2(\lambda y) + 4(\lambda y)^3}{\sqrt{\frac{(\lambda x)^3}{\lambda y} + (\lambda x)(\lambda y)}} \\
&= \frac{2\lambda^2 x^2 \lambda y + 4\lambda^3 y^3}{\sqrt{\frac{\lambda^3 x^3}{\lambda y} + \lambda^2 xy}} \\
&= \lambda^3 \frac{2x^2 y + 4y^3}{\sqrt{\lambda^2(\frac{x^3}{y} + xy)}} \\
&= \frac{\lambda^3}{\lambda} \frac{2x^2 y + 4y^3}{\sqrt{\frac{x^3}{y} + xy}} \\
&= \lambda^2 h(x, y),
\end{aligned}$$

d.h., h ist homogen vom Grade 2.

(c) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
h(\lambda x, \lambda y) &= [f(\lambda x, \lambda y)]^3 [g(\lambda x, \lambda y)]^c + [f(\lambda x, \lambda y)]^4 \\
&= [\lambda^s f(x, y)]^3 [\lambda^r g(x, y)]^c + [\lambda^s f(x, y)]^4 \\
&= \lambda^{3s} [f(x, y)]^3 \lambda^{rc} [g(x, y)]^c + \lambda^{4s} [f(x, y)]^4 \\
&= \lambda^{3s+rc} [f(x, y)]^3 [g(x, y)]^c + \lambda^{4s} [f(x, y)]^4
\end{aligned}$$

h ist genau dann homogen, wenn

$$3\,s + r\,c = 4s \Leftrightarrow r\,c = s \Leftrightarrow c = \frac{s}{r}.$$

In diesem Fall ist h homogen vom Grade $4s$.

Mathematik I
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

12. Juli, 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a1) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n^2-5)^2}{n^4+(3\,n^2+1)^2}\\
&\quad= \frac{n^4-10\,n^2+25}{n^4+9\,n^4+6\,n^2+1}\\
&\quad= \frac{n^4-10\,n^2+25}{10\,n^4+6\,n^2+1}\\
&\quad= \frac{1-\frac{10}{n^2}+\frac{25}{n^4}}{9+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}.
\end{aligned}$$

Daher folgt, dass:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-5)^2}{n^4+(3\,n^2+1)^2}\\
&\quad= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{10}{n^2}+\frac{25}{n^4}}{9+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\\
&\quad= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{10}{n^2}+\frac{25}{n^4}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(9+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)}\\
&\quad= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

(a2) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{n^3+n^2-3\,n+1}{n^2-1}-\frac{n^2-2\,n+4}{n+1}\\
&\quad= \frac{n^3+n^2-3\,n+1}{(n+1)\,(n-1)}-\frac{n^2-2\,n+4}{n+1}\\
&\quad= \frac{n^3+n^2-3\,n+1-(n-1)\,(n^2-2\,n+4)}{n^2-1}\\
&\quad= \frac{n^3+n^2-3\,n+1-n^3+2\,n^2-4\,n+n^2-2\,n+4}{n^2-1}\\
&\quad= \frac{4\,n^2-9\,n+5}{n^2-1}\\
&\quad= \frac{4-\frac{9}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2-3\,n+1}{n^2-1}-\frac{n^2-2\,n+4}{n+1}\right) \\
= & \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{9}{n}+\frac{5}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \\
= & \frac{\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{9}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \\
= & \frac{4}{1} \\
= & 4.
\end{aligned}$$

(b) $\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{5\,b+1}{2\,b-1}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Reihe mit $q=\frac{5\,b+1}{2\,b-1}$. Das Konvergenzkriterium ist $|q|<1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|q|<1 \quad \Leftrightarrow \quad & \left|\frac{5\,b+1}{2\,b-1}\right|<1 \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\frac{5\,b+1}{2\,b-1}\right|^2<1 \\
\Leftrightarrow \quad & (5\,b+1)^2<(2\,b-1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 25\,b^2+10\,b+1<4\,b^2-4\,b+1 \\
\Leftrightarrow \quad & 21\,b^2+14\,b<0 \\
\Leftrightarrow \quad & 7\,b\,(3\,b+2)<0 \\
\Leftrightarrow \quad & b\in\left(-\frac{2}{3},0\right).
\end{aligned}$$

Für $b\in\left(-\frac{2}{3},0\right)$ erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5\,b+1}{2\,b-1}\right)^k=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{5\,b+1}{2\,b-1}}=\frac{1-2\,b}{3\,b+2}.$$

(c1) Sei A_{10} der Betrag nach 10 Jahren. Es gilt:

$$A_{10} \quad = \quad \sum_{k=0}^{9} 2'000\,(1+5\%)^{10-k}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2'000\,(1+5\%)^{10}\sum_{k=0}^{9}\left(\frac{1}{1+5\%}\right)^k \\
&= 2'000\,(1+5\%)^{10}\frac{1-\left(\frac{1}{1+5\%}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+5\%}} \\
&= 2'000\,\frac{(1+5\%)^{11}-(1+5\%)}{1+5\%-1} \\
&= 2'000\,\frac{(1+5\%)^{11}-(1+5\%)}{5\%} \\
&\approx 26'413.60 \text{ (CHF).}
\end{aligned}
$$

(c2) Der Betrag $A_{10} = 26'413.60$ CHF wird gebraucht, um jhrliche Abbuchungen von $2'000$ CHF für $n^\star$ Jahre zu finanzieren. Wir müssen folgenden Betrag haben

$$
\begin{aligned}
A_{10} &= \frac{2'000}{1+5\%}+\frac{2'000}{(1+5\%)^2}+\cdots+\frac{2'000}{(1+5\%)^{n^\star-10}} \\
&= 2'000\sum_{k=0}^{n^\star-10}\frac{1}{(1+5\%)^k} \\
&= 2'000\,\frac{1-\left(\frac{1}{1+5\%}\right)^{n^\star-10+1}}{1-\frac{1}{1+5\%}} \\
&= 2'000\,\frac{1+5\%-\left(\frac{1}{1+5\%}\right)^{n^\star-10}}{5\%}.
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass:

$$
\begin{aligned}
& A_{10} = 2'000\,\frac{1+5\%-\left(\frac{1}{1+5\%}\right)^{n^\star-10}}{5\%} \\
\Leftrightarrow\ & 5\%\,\frac{A_{10}}{2'000} = 1+5\%-(1+5\%)^{10-n^\star} \\
\Leftrightarrow\ & 1+5\%-5\%\,\frac{A_{10}}{2'000} = (1+5\%)^{10-n^\star} \\
\Leftrightarrow\ & 1+5\%-5\%\,\frac{A_{10}}{2'000} = (1+5\%)^{10-n^\star} \\
\Leftrightarrow\ & \ln\left(1+5\%-5\%\,\frac{A_{10}}{2'000}\right) = (10-n^\star)\ln(1+5\%) \\
\Leftrightarrow\ & 10-n^\star = \frac{\ln\left(1+5\%-5\%\,\frac{A_{10}}{2'000}\right)}{\ln(1+5\%)}
\end{aligned}
$$

$$\Leftrightarrow \quad n^{\star} = 10 - \frac{\ln\left(1 + 5\% - 5\% \, \frac{A_{10}}{2'000}\right)}{\ln(1+5\%)}.$$

Mit $A_{10} = 26'413.60$ CHF erhalten wir:

$$n^{\star} = 10 - \frac{\ln\left(1 + 5\% - 5\% \, \frac{26'413.60}{2'000}\right)}{\ln(1+5\%)} \approx 29.32 \text{ (Jahre)}.$$

Folglich wird der Betrag nach 29 Jahren erschöpft sein.

(d) Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{e^{x^4}}{e^{25}} &= e^4 \, 4^{x^2+5} \\
\Leftrightarrow \quad e^{x^4} &= e^4 \, e^{x^2+5} \, e^{25} \\
\Leftrightarrow \quad e^{x^4} &= e^{x^2+34} \\
\Leftrightarrow \quad x^4 &= x^2 + 34 \\
\Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 - 34 &= 0.
\end{aligned}$$

Sei $z = x^2$, dann

$$z^2 - z - 34 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-34)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Sei $z = x^2$, dann $z \geq 0$. Folglich ist $z = \frac{1+\sqrt{137}}{2}$ und

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}} \approx \pm 2.5204.$$

(e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\ln\left(x^{2\ln(x^2)}\right) &= 4 \\
\Leftrightarrow \quad 2\ln(x^2)\ln(x) &= 4 \\
\Leftrightarrow \quad 4\ln(x)\ln(x) &= 4 \\
\Leftrightarrow \quad (\ln(x))^2 &= 1 \\
\Leftrightarrow \quad \ln(x) &= \pm 1
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \{e^{-1}, e\}.$$

Aufgabe 2

(a) Eine Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Es gilt:

$\underline{x_0 = x_1 = 0:}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \nearrow 0} f(x) &= \lim_{x \nearrow 0} ((x-a)^2 + 11) = -a^3 + 11 \\
\lim_{x \searrow 0} f(x) &= \lim_{x \searrow 0} \sqrt{(x+1)^2 + 8} = 3 \\
f(0) &= 3.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f genau dann stetig in $x_0 = x_1 = 0$ ist, wenn $-a^3 + 11 = 3$, d.h., $a = 2$.

$\underline{x_0 = x_2 = 8}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \nearrow 8} f(x) &= \lim_{x \nearrow 8} \sqrt{(x+1)^2 + 8} = \sqrt{737} \\
\lim_{x \searrow 8} f(x) &= \lim_{x \searrow 8} \sqrt{x + b - 2} = \sqrt{6 + b} \\
f(8) &= \sqrt{737}.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f genau dann stetig in $x_0 = x_2 = 8$ ist, wenn $\sqrt{737} = \sqrt{6+b}$, d.h., $b = 731$.

(b) Es gilt:

$$\frac{5\,x}{\sqrt{2\,x}+2} - \frac{5\,x}{\sqrt{2\,x}-2} = \frac{5\,x\,(\sqrt{2\,x}-2) - 5\,x(\sqrt{2\,x}+2)}{(\sqrt{2\,x}+2)(\sqrt{2\,x}-2)} = \frac{-20\,x}{2\,x+4} = \frac{-20}{2+\frac{4}{x}}.$$

Es folgt, dass:

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5\,x}{\sqrt{2\,x}+2} - \frac{5\,x}{\sqrt{2\,x}-2} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-20}{2+\frac{4}{x}} = -10.$$

(c) Das Taylorpolynom dritter Ordnung in x_0 ist definiert als

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\,(x-x_0)^3.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2-3x+2}(2x-3) \\ f''(x) &= e^{x^2-3x+2}(2x-3)^2 + 2\,e^{x^2-3x+2} = e^{x^2-3x+2}(4x^2-12x+11) \\ f'''(x) &= e^{x^2-3x+2}(2x-3)(4x^2-12x+11) + e^{x^2-3x+2}(8x-12) \\ &= e^{x^2-3x+2}(8x^3-36x+66x-45). \end{aligned}$$

Für $x_0 = 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 \\ f'(x_0) &= -1 \\ f''(x_0) &= 3 \\ f'''(x_0) &= -7. \end{aligned}$$

Folglich,

$$P_3(x) = 1 - (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 - \frac{7}{6}(x-1)^3.$$

Im Weiteren,

$$f(1.1) \approx P_3(1.1) = 1 - 0.1 + \frac{3}{2}\,0.1^2 - \frac{7}{6}\,0.1^3 \approx 0.9128.$$

(d1) Wertebereich D_f: Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

(i) $x - 1 > 0$ damit $\ln(x-1)$ definiert ist.
(ii) $\ln(x-1) \geq 0$ damit $\sqrt{\ln(x-1)}$ definiert ist.

(i) impliziert $x > 1$ und (ii) impliziert $x - 1 \geq 1$, d.h., $x \geq 2$. Folglich ist

$$D_f = [2, \infty).$$

Wertebereich W_f

$$\begin{aligned} & x \in D_f \\ \Leftrightarrow\ & 2 \leq x < \infty \\ \Leftrightarrow\ & 1 \leq x - 1 < \infty \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq \ln(x-1) < \infty \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq \sqrt{\ln(x-1)} < \infty \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir,

$$W_f = [0, \infty).$$

(d2) Lösung 1:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(x-1)}} \cdot \frac{1}{x-1} > 0$$

für $x > 2$. Folglich ist f streng monoton steigend auf $(2, \infty)$. Für $x = 2$ erhalten wir $f(2) = 0$ und $f(x) > 0$ für alle $x > 2$. Daher ist f streng monoton steigend auf $D_f = [2, \infty)$.

Lösung 2:

f ist eine Komposition streng monoton steigender Funktionen und daher ebenfalls streng monoton steigend.

(d3) Um die Inverse zu finden, lösen wir die Gleichung

$$y = f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$$

nach x.

$$\begin{aligned} &\sqrt{\ln(x-1)} = y \\ \Leftrightarrow\quad & \ln(x-1) = y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x - 1 = \mathrm{e}^{y^2} \\ \Leftrightarrow\quad & x = \mathrm{e}^{y^2} + 1. \end{aligned}$$

Es folgt, dass (durch Substitution von y mit x und umgekehrt):

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [2, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = e^{x^2} + 1.$$

Aufgabe 3

(a1) Die Elastizität ist definiert als:

$$\epsilon_{f,x} = \frac{x\, f'(x)}{f(x)}.$$

Es gilt:

$$f'(x) = e^{x^2+\sqrt{x+2}} \left(2\,x + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right)$$

und daher

$$\epsilon_{f,x} = x\, \frac{e^{x^2+\sqrt{x+2}} \left(2\,x + \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right)}{e^{x^2+\sqrt{x+2}}} = 2\,x^2 + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}.$$

(a2) Es gelten folgende Annäherungen:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} \approx \epsilon_{f,x_0} \cdot \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Für $x_0 = 6$ und $\Delta x = 0.2$ erhalten wir:

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{0.2}{6} = \frac{1}{30}, \text{ und}$$

$$\epsilon_{f,x_0} = 2 \cdot 6^2 + \frac{6}{2\sqrt{6+2}} = 72 + \frac{3}{\sqrt{8}} \approx 73.06066.$$

Folglich,

$$\frac{\Delta f(x_0)}{f(x_0)} \approx 73.06066\, \frac{1}{30} \approx 2.435.$$

(b1) Die Wachstumsrate ist definiert als:

$$r(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Es gilt

$$f'(x) = \frac{x+5-(x+10)}{(x+5)^2} = \frac{-5}{(x+5)^2}$$

und daher

$$r(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{-5}{(x+5)^2}}{\frac{x+10}{x+5}} = \frac{-5}{(x+5)\,(x+10)} = \frac{-5}{x^2+15\,x+50}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-10,-5\}.$$

(b2) Von (b1) erhalten wir

$$r(x) = \frac{-5}{(x+5)\,(x+10)}.$$

Es folgt, dass:

$$r'(x) = \frac{5\,(2\,x+15)}{(x^2+15\,x+50)^2}.$$

r ist streng monoton steigend falls $r'(x) > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} r'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5\,(2\,x+15) > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{-15}{2}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass r streng monoton steigend im Bereich $\left(-\frac{15}{2}, \infty\right) \setminus \{-5\}$ ist.

(b3) Das Differential ist definiert als

$$df(x) \quad = f'(x_0)\,dx.$$

Es gilt

$$f'(x_0) = \frac{-5}{(x_0+5)^2}$$

und für $x_0 = 1$,

$$f'(1) = \frac{-5}{(1+5)^2} = \frac{-5}{36}.$$

Es folgt, dass:

$$df = \frac{-5}{36}\,dx.$$

Somit erhalten wir

$$f\,(1.05) = f(1+0.5) \approx f(1) + df = \frac{11}{6} + \left(\frac{-5}{36} \cdot 0.05\right) \approx 1.8263.$$

(c1) Es gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2\,x+3) = (2\,x+3)\,e^{x^2+y^2+3\,x-2} \\ f_y(x,y) &= e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2\,y) = 2\,y\,e^{x^2+y^2+3\,x-2} \\ f_{x,x}(x,y) &= e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2\,x+3)^2 + e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2) \\ &= (4\,x^2+6\,x+11)\,e^{x^2+y^2+3\,x-2} \\ f_{y,y}(x,y) &= e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2\,y)^2 + e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2) = (4\,y^2+2)\,e^{x^2+y^2+3\,x-2} \end{aligned}$$

$$f_{x,y}(x,y) = f_{y,x}(x,y) = e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(2\,y)\,(2\,x+3) = e^{x^2+y^2+3\,x-2}\,(4\,x\,y+6\,y).$$

(c2) Von (c1) folgt:

$$\begin{aligned}\epsilon_{f,x} &= x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} = x\,\frac{(2\,x+3)\,e^{x^2+y^2+3\,x-2}}{e^{x^2+y^2+3\,x-2}} = 2\,x^2+3\,x, \text{ und}\\ \epsilon_{f,y} &= y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} = y\,\frac{2\,y\,e^{x^2+y^2+3\,x-2}}{e^{x^2+y^2+3\,x-2}} = 2\,y^2.\end{aligned}$$

(c3) Folgendes gilt:

$$\begin{aligned}&e^{x^2+y^2+3\,x-2} = 1\\ &\Leftrightarrow\ x^2+y^2+3\,x-2=0\\ &\Leftrightarrow\ x^2+2\,\frac{3}{2}\,x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+y^2-2=0\\ &\Leftrightarrow\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=2+\frac{9}{4}\\ &\Leftrightarrow\ \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=2+\frac{17}{4}.\end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis mit Zentrum $P = \left(-\frac{3}{2},0\right)$ und Radius $\frac{\sqrt{17}}{2} \approx 2.06$.

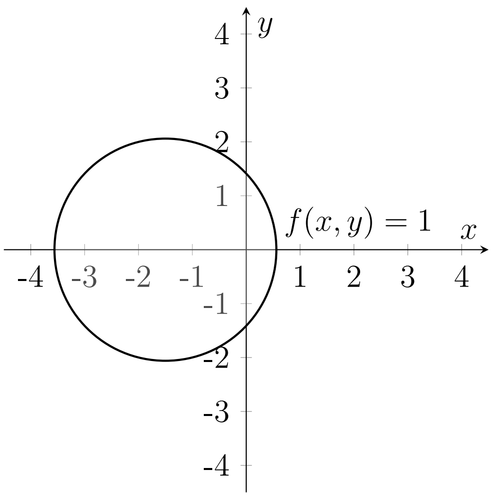


Figure 1: Aufgabe 3(c3).

Aufgabe 4

(a1) Die Grenzerträge P_K und P_A sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung von P. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_K(K,A) &= 2\,(K^{0.5}+3\,A^{0.5})\,0.5\cdot K^{-0.5} = (K^{0.5}+3\,A^{0.5})\,K^{-0.5} \\ P_A(K,A) &= 2\,(K^{0.5}+3\,A^{0.5})\,3\cdot 0.5\cdot A^{-0.5} = 3\,(K^{0.5}+3\,A^{0.5})\,A^{-0.5}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned} P_K(1,1) &= (1+3)\cdot 1^{-0.5} = 4 \\ P_A(1,1) &= 3\,(1+3)\,1^{-0.5} = 12. \end{aligned}$$

(a2) Das totale Differential im Punkt (K_0, A_0) ist definiert als

$$dP = P_K(K_0,A_0)\,dK + P_A(K_0,A_0)\,dA.$$

Für $(K_0,A_0) = (1,1)$ erhalten wir (wir benutzen das Resultat von (a1)):

$$dP = 4\,dK + 12\,dA.$$

Wir erhalten somit ($dK = 0.98 - 1 = -0.02$ und $dA = 1.02 - 1 = 0.02$):

$$P(0.98, 1.02) = P(1,1) + \Delta P \approx (1+3)^2 + 4\,(-0.02) + 12\,(0.02) = 16 - 0.08 + 0.24 = 16.16.$$

(a3) Für den Punkt (K_0, A_0) müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

(i) $P(K_0,A_0) = 1$, und

(ii) $\frac{dA}{dK}\Big|_{(K,A)=(K_0,A_0)} = \frac{-1}{3}$.

(ii) impliziert:

$$\frac{-1}{3} = \frac{dA}{dK}\Big|_{(K,A)=(K_0,A_0)} = -\frac{P_K(K_0,A_0)}{P_A(K_0,A_0)} = -\frac{(K_0^{0.5}+3\,A_0^{0.5})\,K_0^{-0.5}}{3\,(K_0^{0.5}+3\,A_0^{0.5})\,A_0^{-0.5}} = -\frac{1}{3}\,\frac{A_0^{0.5}}{K_0^{0.5}}.$$

Es folgt,

$$\frac{A_0^{0.5}}{K_0^{0.5}} = 1,$$

d.h., $K_0 = A_0$.

Jetzt setzen wir das Resultat in (i) ein:

$$1 = P(K_0,A_0) = (K_0^{0.5}+3\,A_0^{0.5})^2 = (K_0^{0.5}+3\,K_0^{0.5})^2 = (4\,K_0^{0.5})^2 = 16\,K_0.$$

Es folgt,

$$A_0 = K_0 = \frac{1}{16}.$$

(b1) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= 4 + \frac{(\lambda\, x)^{0.5}}{(\lambda\, y)^{0.2}} = 1 + \frac{\lambda^{0.5}\, x^{0.5}}{\lambda^{0.2}\, y^{0.2}} \\
&= 4 + \lambda^{0.3}\, \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}} \\
&= 4 + \lambda^{0.3}\, \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}} + \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}} - \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}} \\
&= f(x, y) + (\lambda^{0.3} - 1)\, \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}}.
\end{aligned}$$

d.h., f ist nicht homogen.

(b2) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
g(\lambda x, \lambda y) &= \ln((\lambda x)^{0.6}\, (\lambda y)^{0.5}) - 5 \ln\left(\frac{(\lambda\, y)^2}{(\lambda\, x)^{0.9}}\right) \\
&= \ln(\lambda^{1.1}\, x^{0.6}\, y^{0.5}) - 5 \ln\left(\lambda^{1.1}\, \frac{y^2}{x^{0.9}}\right) \\
&= \ln(\lambda^{1.1}) + \ln(x^{0.6}\, y^{0.5}) - 5\, \ln(\lambda^{1.1}) - 5\, \ln\left(\frac{y^2}{x^{0.9}}\right) \\
&= 1.1\, \ln(\lambda) + \ln(x^{0.6}\, y^{0.5}) - 5.5\, \ln(\lambda) - 5\, \ln\left(\frac{y^2}{x^{0.9}}\right) \\
&= -4.4\, \ln(\lambda) + g(x, y).
\end{aligned}$$

d.h., f ist nicht homogen.

(b3) Für $\lambda > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
h(\lambda x, \lambda y) &= \frac{2\,(\lambda\, x)^3\,(\lambda\, y) + 4\,(\lambda\, x)\,(\lambda\, y)^3 + (\lambda\, x)^2\,(\lambda\, y)^2}{\sqrt{\frac{(\lambda\, x)^4}{\lambda\, y} + (\lambda\, x)\,(\lambda\, y)^2}} \\
&= \frac{2\,\lambda^3\, x^3\, \lambda\, y + 4\,\lambda\, x\, \lambda^3\, y^3 + \lambda^2\, x^2\, \lambda^2\, y^2}{\sqrt{\frac{\lambda^4\, x^4}{\lambda\, y} + \lambda\, x\, \lambda^2\, y^2}} \\
&= \frac{2\,\lambda^4\, x^3\, y + 4\,\lambda^4\, x\, y^3 + \lambda^4\, x^2\, y^2}{\sqrt{\lambda^3\, \frac{x^4}{y} + \lambda^3\, x\, y^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda^4\,(2\,x^3\,y + 4\,x\,y^3 + x^2\,y^2)}{\sqrt{\lambda^3\,\left(\frac{x^4}{y} + x\,y^2\right)}} \\
&= \frac{\lambda^4}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\,\frac{2\,x^3\,y + 4\,x\,y^3 + x^2\,y^2}{\sqrt{\frac{x^4}{y} + x\,y^2}} \\
&= \lambda^{\frac{5}{2}}\,h(x,y).
\end{aligned}$$

d.h., h ist homogen vom Grade $\frac{5}{2}$.

(c) Da f homogen vom Grade $r+4$ ist, impliziert die Eulersche Gleichung

$$x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) = (r+4)\,f(x,y).$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
& x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) = (r+4)\,f(x,y) \\
\Rightarrow\;\; & x\,f_x(x,y) + y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\,f(x,y) = (r+4)\,f(x,y) \\
\Rightarrow\;\; & x\,f_x(x,y) + \varepsilon_y(x,y)\,f(x,y) = (r+4)\,f(x,y) \\
\Rightarrow\;\; & x\,f_x(x,y) = [(r+4) - \varepsilon_y(x,y)]\;f(x,y) \\
\Rightarrow\;\; & f(x,y) = \frac{x\,f_x(x,y)}{(r+4) - \varepsilon_y(x,y)}.
\end{aligned}$$

Benutzen wir $f_x(x,y) = r\,x^{r-1}\,y^4 + 5\,x^4\,y^{r-1}$ und $\varepsilon_y(x,y) = \frac{4\,x^{r-5} + (r-1)\,y^{r-5}}{x^{r-5} + y^{r-5}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x\,(r\,x^{r-1}\,y^4 + 5\,x^4\,y^{r-1})}{r + 4 - \frac{4\,x^{r-5} + (r-1)\,y^{r-5}}{x^{r-5} + y^{r-5}}} \\
&= \frac{(r\,x^r\,y^4 + 5\,x^5\,y^{r-1})\,(x^{r-5} + y^{r-5})}{(r+4)\,(x^{r-5} + y^{r-5}) - 4\,x^{r-5} - (r-1)\,y^{r-5}} \\
&= \frac{x^5\,y^4\,(r\,x^{r-5} + 5\,y^{r-5})\,(x^{r-5} + y^{r-5})}{r\,x^{r-5} + 5\,y^{r-5}} \\
&= x^5\,y^4\,(x^{r-5} + y^{r-5}) \\
&= x^r\,y^4 + x^5\,y^{r-1}.
\end{aligned}$$

Herbstsemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I
Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

28. Januar 2014

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**3 Punkte**).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2+1}{n-1} - \frac{n^2+3\,n-2}{n+1} \\
&= \frac{(n^2+1)\,(n+1) - (n^2+3\,n-2)\,(n-1)}{(n-1)\,(n+1)} \\
&= \frac{n^3+n^2+n+1-\big(n^3-n^2+3\,n^2-3\,n-2\,n+2\big)}{n^2-1} \\
&= \frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2\,n^2+5\,n-2}{n^2-1} \\
&= \frac{-n^2+6\,n-1}{n^2-1} \\
&= \frac{-n^2+6\,n-1}{n^2-1}\,\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)}_{=1} \\
&= \frac{-1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+1}{n-1} - \frac{n^2+3\,n-2}{n+1}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} -1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{-1}{1} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

(b) (**4 Punkte**).

Beschränktheit von unten:

$$b_n = 3 + \underbrace{\left(\frac{7}{8}\right)^n}_{\geq 0} \geq 3.$$

Beschränktheit von oben:

$$b_n = 3 + \underbrace{\left(\frac{7}{8}\right)^n}_{\leq 1} \leq 4.$$

Da $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von unten und von oben beschränkt ist, ist sie beschränkt.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= 3 + \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} \\
&= 3 + \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{7}{8}\right) \\
&= 3 + \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(1 - \frac{1}{8}\right) \\
&= 3 + \left(\frac{7}{8}\right)^n - \left(\frac{7}{8}\right)^n \frac{1}{8} \\
&= b_n - \underbrace{\left(\frac{7}{8}\right)^n \frac{1}{8}}_{\geq 0} \\
&< b_n.
\end{aligned}$$

Da $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Daraus folgt: Da $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend ist, ist sie auch konvergent.

(c) (**6 Punkte**).

Die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3\,a+1}{a+1}\right)^k, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

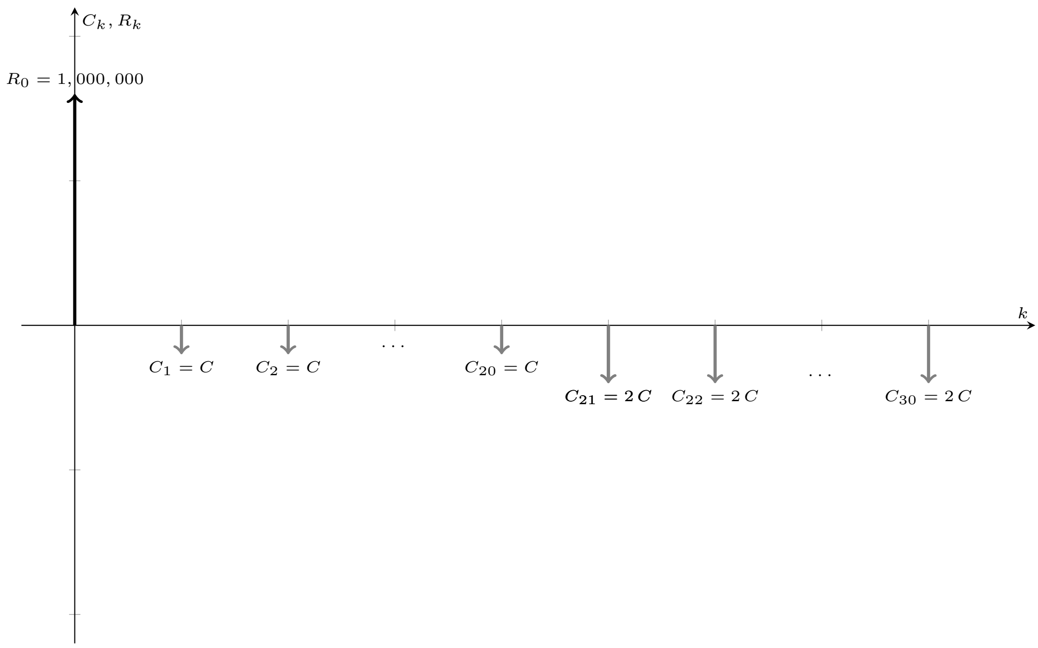
ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{3\,a+1}{a+1}$. Das Kriterium für Konvergenz lautet $|q| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|q| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{3\,a+1}{a+1}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (3\,a+1)^2 < (a+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 9\,a^2 + 6\,a + 1 < a^2 + 2\,a + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 8\,a^2 + 4\,a < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 4\,a\,(2\,a+1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Wenn $a \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3\,a+1}{a+1}\right)^k = \frac{3\,a+1}{a+1}\,\frac{1}{1-q} = \frac{3\,a+1}{a+1}\,\frac{1}{1-\frac{3\,a+1}{a+1}} = -\frac{3\,a+1}{2\,a}.$$

(d) (**9 Punkte**).
Die folgende Abbildung zeigt ein Darlehen zum Zeitpunkt $k=0$ und Rückzahlungen zu den Zeitpunkten $k = 1, \ldots, 30$.



Um C zu bestimmen, setzen wir den Barwert der Zahlungen gleich dem Darlehensbetrag $R_0 = 1,000,000$ Schweizer Franken. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{C}{(1+i)^k} + \sum_{k=21}^{30} \frac{2\,C}{(1+i)^k} = 1,000,000.$$

Daraus folgt:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{C}{(1+i)^k} + \sum_{k=21}^{30} \frac{2\,C}{(1+i)^k} = 1,000,000$$

$$\Rightarrow \quad C \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(1+i)^k} + 2\,C \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+i)^{20+k}} = 1,000,000$$

$$\Rightarrow \quad C \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(1+i)^k} + \frac{2\,C}{(1+i)^{20}} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+i)^k} = 1,000,000$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{1+i} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{2\,C}{(1+i)^{21}} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}} = 1,000,000$$

$$\Rightarrow \quad C \left[\frac{1}{1+i} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{2}{(1+i)^{21}} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}} \right] = 1,000,000$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1,000,000}{\frac{1}{1+i} \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{2}{(1+i)^{21}} \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}}} \overset{i=5\%}{\approx} 54,696.55 \text{ (Schweizer Franken).}$$

Aufgabe 2

(a1) (**3 Punkte**).
Um den Definitionsbereich von $f(x)$ zu bestimmen, müssen die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $x+1 \geq 0$, damit $\sqrt{x+1}$ definiert ist.

(ii) $1-e^{-2\sqrt{x+1}} \neq 0$, damit $\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}$ definiert ist.

(iii) $1-e^{-2\sqrt{x+1}} > 0$, damit $\ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right)$ definiert ist.

Zunächst beobachten wir, dass Bedingung (iii) Bedingung (ii) impliziert. Bedingung (ii) ist genau dann erfüllt, wenn $\sqrt{x+1} > 0$, was wiederum gegeben ist, wenn Bedingung (i) erfüllt ist. Daher sind die Bedingungen (i), (ii) und (iii) genau dann erfüllt, wenn $x > -1$. Daraus folgt:

$$D_f = (-1, \infty).$$

(a2) (**3 Punkte**).
Um die Inverse von f zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right) = y$$

nach x auf. Zunächst beobachten wir, dass

$$\begin{aligned}
x \in D_f \quad &\Rightarrow \quad x > -1 \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{x+1} > 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 < 1-e^{-2\sqrt{x+1}} < 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 < \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}} < \infty \\
&\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right) > 0
\end{aligned}$$

Daher gilt $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}_{++}$, d. h., $y \in \mathbb{R}_{++}$. Für $y \in \mathbb{R}_{++}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right) = y \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}} = e^{y} \\
&\Rightarrow \quad 1-e^{-2\sqrt{x+1}} = e^{-y} \\
&\Rightarrow \quad e^{-2\sqrt{x+1}} = 1-e^{-y} \\
&\Rightarrow \quad -2\sqrt{x+1} = \ln\left(1-e^{-y}\right) \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{x+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-e^{-y}\right) \\
&\Rightarrow \quad x+1 = \frac{1}{4}\left[\ln\left(1-e^{-y}\right)\right]^2 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{1}{4}\left[\ln\left(1-e^{-y}\right)\right]^2 - 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{++} \to (-1, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left[\ln\left(1-e^{-x}\right)\right]^2 - 1.$$

(a3) (**5 Punkte**).
Die Funktion f ist genau dann monoton fallend im Bereich $D_f = (-1, \infty)$, wenn $f'(x) \leq 0$ in D_f. Es gilt:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right) = -\ln\left(1-e^{-2\sqrt{x+1}}\right).$$

Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\left(-e^{-2\sqrt{x+1}}\right)(-2)\,\frac{1}{2}\,(x+1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \underbrace{\frac{-1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}}_{\leq 0}\,\underbrace{e^{-2\sqrt{x+1}}}_{>0}\,\underbrace{(x+1)^{\frac{1}{2}}}_{\geq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daher ist f monoton fallend in D_f.

(b) (**7 Punkte**).
Zunächst berechnen wir das Taylor-Polynom vom Grad 1 von f an der Stelle $x_0 = 0$. Dies lautet

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Es gilt:

$$f(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0.$$

Ausserdem:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

und

$$f'(1) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Daraus folgt:

$$P_1(x) = 0 + 1\,(x - 0) = x.$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=5}^{20} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) &\approx \sum_{k=5}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4}}{1-\frac{1}{2}} \\
&\approx 0.06249905.
\end{aligned}$$

(c) (**6 Punkte**).
Im Punkt $p^\star$ sind Marktnachfrage und Marktangebot im Gleichgewicht. Es gilt:

$$q_s(p) = q_d(p) \Leftrightarrow q_s(p) - q_d(p) = 0.$$

Sei

$$f(p) = q_s(p) - q_d(p) = \ln(1+p^2) - \frac{1}{1+3\,p}.$$

Es gilt:

$$f(0) = \ln(1+0^2) - \frac{1}{1+3\cdot 0} = 0 - 1 < 0$$

und

$$f(100) = \ln(1+100^2) - \frac{1}{1+3\cdot 100} \approx 9.207 > 0.$$

Ausserdem ist f im Definitionsbereich stetig. Daher gilt nach dem Nullstellensatz, dass ein $p^\star \in [0,100]$ mit $f(p^\star) = 0$ existiert; d.h., $p^\star$ ist ein Marktgleichgewicht. Da

$$f'(p) = \frac{2\,p}{1+p^2} + \frac{3}{(1+3\,p)^2} > 0$$

für alle p, ist f streng monoton wachsend auf $[0,100]$ und $p^\star$ ist das *einzige* Marktgleichgewicht.

Aufgabe 3

(a1) (**3 Punkte**).
Elastizität ist definiert als:

$$\epsilon_{f,x} = \frac{x\, f'(x)}{f(x)}.$$

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 4\,x + 2\right)^{-\frac{1}{2}}(2\,x + 4) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4\,x + 2}}.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4\,x + 2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4\,x + 2}} = \frac{x^2 + 2\,x}{x^2 + 4\,x + 2}.$$

(a2) (**6 Punkte**).

$f(x)$ ist genau dann inelastisch in x, wenn $|\varepsilon_f(x)| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_f(x)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{x^2 + 2\,x}{x^2 + 4\,x + 2}\right| < 1 \\
&\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{x^2 + 2\,x}{x^2 + 4\,x + 2} < 1 \\
&\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \quad x^2 + 2\,x < x^2 + 4\,x + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,x + 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > -1.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich erfüllt für alle $x > 0$.

(a3) (**3 Punkte**).

Für die prozentuale Änderung von f in x_0 gilt folgende Approximation:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f}{f(x_0)} \approx \varepsilon_f(x_0)\,\frac{\Delta x}{x_0}.$$

Mit $x_0 = 1$ und $\Delta x = 0.05$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{f(1.05) - f(1)}{f(1)} &= \frac{\Delta f}{f(1)} \approx \varepsilon_f(1)\,\frac{0.05}{1} \\
&= \frac{1^2 + 2 \cdot 1}{1^2 + 4 \cdot 1 + 2} \cdot 0.05 \\
&= \frac{3}{7} \cdot 0.05 \\
&\approx 0.0214.
\end{aligned}$$

(b) (**6 Punkte**).
Für die Parameter α und β müssen die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein:

(i) $P(K_0, A_0) = 144$,

(ii) $\frac{dA}{dK} = -1$.

Aus (i) erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
P(K_0, A_0) = 144 \quad & \Leftrightarrow \quad \left(2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta\right)^2 = 144 \\
& \Leftrightarrow \quad 2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta = 12 \\
& \overset{(K_0,A_0)=(2,1)}{\Leftrightarrow} \quad 2 \cdot 2^\alpha + 4 \cdot 1^\beta = 12 \\
& \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 2^\alpha + 4 = 12 \\
& \Leftrightarrow \quad 2^\alpha = \frac{12-4}{2} = 4 \\
& \Leftrightarrow \quad \alpha = 2.
\end{aligned}
$$

Aus (ii) gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dK} = -1 \quad & \Leftrightarrow \quad -\frac{P_K(K_0, A_0)}{P_A(K_0, A_0)} = -1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{P_K(K_0, A_0)}{P_A(K_0, A_0)} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2\,\left(2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta\right)\,2\,\alpha\,K_0^{\alpha-1}}{2\,\left(2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta\right)\,4\,\beta\,A_0^{\beta-1}} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{2\,\alpha\,K_0^{\alpha-1}}{4\,\beta\,A_0^{\beta-1}} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha\,K_0^{\alpha-1}}{2\,\beta\,A_0^{\beta-1}} = 1 \\
& \overset{(K_0,A_0)=(2,1)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\alpha\,2^{\alpha-1}}{2\,\beta} = 1 \\
& \overset{\alpha=2}{\Leftrightarrow} \quad \frac{4}{2\,\beta} = 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \beta = 2.
\end{aligned}
$$

(c) (**4 Punkte**).
Zunächst berechnen wir das totale Differential von f in $(x_0, y_0) = (1, 1)$, das definiert ist als

$$df = f_x(1,1)\,dx + f_y(1,1)\,dy.$$

Die partiellen Ableitungen von f lauten:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2\,y+2\,x}{1+2\,x\,y+x^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{2\,x}{1+2\,x\,y+x^2}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} f_x(1,1) &= \frac{2\cdot 1+2\cdot 1}{1+2\cdot 1\cdot 1+1^2} = 1 \\ f_y(1,1) &= \frac{2\cdot 1}{1+2\cdot 1\cdot 1+1^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$df = 1\cdot dx + \frac{1}{2}\cdot dy.$$

Schliesslich nutzen wir das totale Differential mit $dx = -0.02$ und $dy = 0.02$, um den Wert $f(0.98, 1.02)$ zu approximieren. Es folgt:

$$f(0.98,1.02) = f(1,1)+df = \ln(4)+\left(-0.02+\frac{1}{2}\cdot 0.02\right) \approx 1.386294-0.01 = 1.376294.$$

(d1) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda x,\lambda y) &= 2+\frac{\ln(\lambda x)}{\ln(\lambda y)} \\ &= 2+\frac{\ln(\lambda)+\ln(x)}{\ln(\lambda)+\ln(y)} \\ &= f(x,y)+\left(\frac{\ln(\lambda)+\ln(x)}{\ln(\lambda)+\ln(y)}-\frac{\ln(x)}{\ln(y)}\right). \end{aligned}$$

Daher ist f nicht homogen.

(d2) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda\, x)\,(\lambda\, y)^{0.45} + \sqrt{(\lambda\, x)^2\,(\lambda\, y)^{0.9} + \frac{(\lambda\, x)^4}{(\lambda\, y)^{1.1}}} \\
&= \lambda\, x\, \lambda^{0.45}\, y^{0.45} + \sqrt{\lambda^2\, x^2\, \lambda^{0.9}\, y^{0.9} + \frac{\lambda^4\, x^4}{\lambda^{1.1}\, y^{1.1}}} \\
&= \lambda^{1.45}\, x\, y^{0.45} + \sqrt{\lambda^{2.9}\left(x^2\, y^{0.9} + \frac{x^4}{y^{1.1}}\right)} \\
&= \lambda^{1.45}\, x\, y^{0.45} + \lambda^{1.45}\sqrt{x^2\, y^{0.9} + \frac{x^4}{y^{1.1}}} \\
&= \lambda^{1.45}\left[x\, y^{0.45} + \sqrt{x^2\, y^{0.9} + \frac{x^4}{y^{1.1}}}\right] \\
&= \lambda^{1.45}\, f(x, y),
\end{aligned}$$

d. h., f ist homogen vom Grad 1.45.

(d3) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \ln(\sqrt{\lambda\, x}\,(\lambda\, y) + (\lambda\, x)^{1.5}) - \frac{3}{2}\,\ln(\lambda\, x) \\
&= \ln(\lambda^{1.5}\,\sqrt{x}\; y + \lambda^{1.5}\, x^{1.5}) - \frac{3}{2}\,(\ln(\lambda) + \ln(x)) \\
&= \ln(\lambda^{1.5}\,(\sqrt{x}\; y + x^{1.5})) - \frac{3}{2}\,(\ln(\lambda) + \ln(x)) \\
&= \ln(\lambda^{1.5}) + \ln(\sqrt{x}\; y + x^{1.5}) - \frac{3}{2}\,\ln(\lambda) - \frac{3}{2}\,\ln(x) \\
&= 1.5\,\ln(\lambda) + \ln(\sqrt{x}\; y + x^{1.5}) - \frac{3}{2}\,\ln(\lambda) - \frac{3}{2}\,\ln(x) \\
&= \ln(\sqrt{x}\; y + x^{1.5}) - \frac{3}{2}\,\ln(x) \\
&= f(x, y),
\end{aligned}$$

d. h., f ist homogen vom Grad 0.

Teil II: Multiple-choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d))
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☐	☐	☐	☒

1. Antwort (d). Eine hinreichende Bedingung dafür, dass A wahr (falsch) ist, ist, dass A und B wahr (falsch) sind. Wir können eine Wahrheitstabelle für die Aussage $(A \wedge B) \Rightarrow A$ erstellen, um zu sehen, dass sie eine Tautologie darstellt:

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \wedge B$	T	F	F	F
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	T	T	T	T

2. Antwort (c). Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^5 = e^5 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e_n.$$

3. Antwort (d). Das anfängliche Investment von 20,000 Schweizer Franken wird nach 20 Jahren zurückbezahlt. Ausserdem lassen die jährlichen Erträge von 1,000 Schweizer Franken auf einen Zinssatz von 5% auf das anfängliche Investment schliessen. Daher ist der Barwert des Projektes null, wenn der Zinssatz 5% beträgt. Wenn der Zinssatz mehr (weniger) als 5% beträgt, wird der Barwert negativ (positiv).

4. Antwort (c). Eine monoton wachsende Funktion f erfüllt die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D_f$ wenn $x_1 > x_2$. Eine monoton wachsende Funktion über ihre erste Ableitung zu charakterisieren ist nur möglich, wenn die erste Ableitung auch definiert ist. Allerdings würde die allgemeine Definition in (c) selbst dann gelten, wenn die Ableitung nicht definiert wäre.

5. Antwort (d). Das Taylor-Polynom vom Grad 4 von f in 0 ist gleich dem Taylor-Polynom vom Grad 3 von f in 0 *plus* den Term $\frac{f^{(4)(0)}}{4!}x^4$. Ausserdem wird im Taylor-Polynom vom Grad 3 von f in 0 die dritte Ableitung von f mit $\frac{x^3}{3!}$ multipliziert. Daraus folgt, dass $\frac{f'''(0)}{3!} = -2$ oder $f'''(0) = -2 \cdot 3! = -12$. Daher gilt:

$$f^{(4)}(0) = \frac{f'''(0)}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

und

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-6}{4!} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}.$$

Es folgt:

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 = x + 3\,x^2 - 2\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4.$$

6. Antwort (c). Es gilt

$$x^2 - 4\,x + y^2 - 6\,y = -9 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 = 2^2.$$

Ausserdem:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - 4\,x + 4 + y^2 - 6\,y + 9 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4\,x + y^2 - 6\,y = -9.$$

Daher ist die Niveaulinie $x^2 - 4\,x + y^2 - 6\,y = -9$ von f ein Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$ und Radius $r = 2$.

7. Antwort (b). Es gilt:

$$f(x) = e^{h(x)}$$

mit $h(x) = x^3 + x$. Die Wachstumsrate von f lautet

$$\rho_f(x) = h'(x) = 3\,x^2 + 1 > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

8. Antwort (d). Die Funktion f ist homogen vom Grad 4. Für $\lambda > 0$ gilt:

$$f(\lambda\,x, \lambda\,y) = (\lambda\,x)\,(\lambda\,y)^2 = \lambda^4\,x\,y^3 = \lambda^4\,f(x, y).$$

Unter Verwendung der Eulerschen Relation erhalten wir:

$$x\,f_x(x, y) + y\,f_y(x, y) = 4\,f(x, y).$$

Wenn wir beide Seiten durch $f(x, y)$ teilen, erhalten wir:

$$\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = 4.$$

Mathematik I
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

14. Juli, 2014

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**3 Punkte**).

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+n-5}{n+3} \\
&= \frac{n^2\,(n+3) - (n^2+n-5)\,(n+1)}{(n+1)\,(n+3)} \\
&= \frac{n^3 + 3\,n^2 - \left(n^3 + n^2 + n^2 + n - 5\,n - 5\right)}{n^2 + 4\,n + 3} \\
&= \frac{n^3 + 3\,n^2 - n^3 - 2\,n^2 + 4\,n + 5}{n^2 + 4\,n + 3} \\
&= \frac{n^2 + 4\,n + 5}{n^2 + 4\,n + 3} \\
&= \frac{n^2 + 4\,n + 5}{n^2 + 4\,n + 3} \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)}_{=1} \\
&= \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+n-5}{n+3}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

(b) (**4 Punkte**).

Beschränktheit von unten:

$$b_n = -5 + \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}}_{\geq 0} \geq -5.$$

Beschränktheit von oben:

$$b_n = -5 + \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}}_{\leq 1} \leq -4.$$

Da die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von unten und von oben beschränkt ist, ist sie beschränkt.

Monotonie:

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= -5 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+3} \\
&= -5 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} \left(\frac{3}{5}\right) \\
&= -5 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} \left(1 - \frac{2}{5}\right) \\
&= -5 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} \frac{2}{5} \\
&= b_n - \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+2} \frac{2}{5}}_{\geq 0} \\
&< b_n.
\end{aligned}$$

Da $b_{n+1} < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Daraus folgt: Da die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton fallend ist, ist sie auch konvergent.

(c) (**6 Punkte**).

Die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{3\,a+1}}\right)^{2\,k}, \quad a \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

ist eine geometrische Reihe mit

$$q = \left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{3\,a+1}}\right)^2 = \frac{a+1}{3\,a+1}.$$

Das Kriterium für Konvergenz lautet $|q| < 1$. Es gilt:

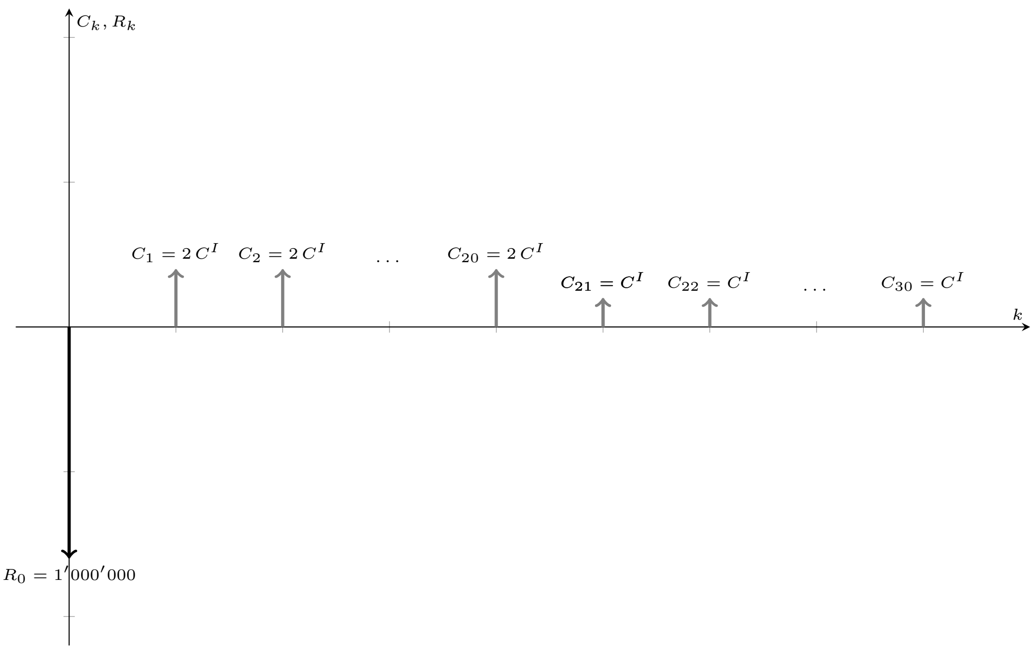
$$\begin{aligned}
|q| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a+1}{3\,a+1}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (a+1)^2 < (3\,a+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 + 2\,a + 1 < 9\,a^2 + 6\,a + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 8\,a^2 + 4\,a > 0\\
&\Leftrightarrow \quad 4\,a\,(2\,a+1) > 0\\
&\Leftrightarrow \quad a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Da $a \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ (siehe Definition der Reihe), ist $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $a \in (0,\infty)$, d.h. $a > 0$. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{3\,a+1}}\right)^{2\,k} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{a+1}{3\,a+1}} = \frac{1}{\frac{2\,a}{3\,a+}} = \frac{3\,a+1}{2\,a}.$$

(d) (**9 Punkte**).
Die folgende Abbildung zeigt ein Darlehen zum Zeitpunkt $k=0$ und Rückzahlungen zu den Zeitpunkten $k = 1, \ldots, 30$.



Um C^I zu bestimmen, setzen wir den Barwert der Zahlungen gleich dem Darlehensbetrag $R_0 = 1'000'000$ Schweizer Franken. Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{2\,C^I}{(1+i)^k} + \sum_{k=21}^{30} \frac{C^I}{(1+i)^k} = 1,000,000.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{20} \frac{2\,C^I}{(1+i)^k} + \sum_{k=21}^{30} \frac{C^I}{(1+i)^k} = 1'000'000\\
&\quad\Rightarrow \quad 2\,C^I \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(1+i)^k} + C^I \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+i)^{20+k}} = 1'000'000
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2\,C^I \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(1+i)^k} + \frac{C^I}{(1+i)^{20}} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(1+i)^k} = 1'000'000$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\,C^I}{1+i} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{C^I}{(1+i)^{21}} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}} = 1'000'000$$

$$\Rightarrow \quad C^I \left[\frac{2}{1+i} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{1}{(1+i)^{21}} \, \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}} \right] = 1'000'000$$

$$\Rightarrow \quad C^I = \frac{1'000'000}{\frac{2}{1+i} \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{20}}{1-\frac{1}{1+i}} + \frac{1}{(1+i)^{21}} \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}}{1-\frac{1}{1+i}}} \overset{i=5\%}{\approx} 35'926.45 \text{ (Schweizer Franken).}$$

Aufgabe 2

(a1) (**3 Punkte**).
Damit $x \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich von $f(x)$ liegt, muss folgende Bedingung gelten:

(i) $x + 1 \geq 0$, damit $\sqrt{x+1}$ definiert ist.

Bedingung (i) ist genau dann erfüllt, wenn $x \geq -1$. Daraus folgt:

$$D_f = [-1, \infty).$$

(a2) (**3 Punkte**).
Um die Inverse von f zu bestimmen, lösen wir die Gleichung

$$f(x) = e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}} = y$$

nach x auf. Zunächst beobachten wir, dass

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < e^{-2\sqrt{x+1}} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}} < e. \end{aligned}$$

Daher gilt: $D_{f^{-1}} = W_f = [1, e)$, d.h. $y \in [1, e)$. Für $y \in [1, e)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x) = e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}} = y \quad &\Rightarrow \quad 1 - e^{-2\sqrt{x+1}} = \ln(y) \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-2\sqrt{x+1}} = 1 - \ln(y) \\ &\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{x+1} = \ln(1 - \ln(y)) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x+1} = -\frac{1}{2}\ln(1 - \ln(y)) \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 = \frac{1}{4}\left(\ln(1 - \ln(y))\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{4}\left(\ln(1 - \ln(y))\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$f^{-1} : [1, e) \to [-1, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{1}{4}\left(\ln(1 - \ln(x))\right)^2 - 1.$$

(a3) (**5 Punkte**).
Die Funktion f ist genau dann monoton steigend im Bereich $D_f = [-1, \infty)$, wenn $f'(x) \geq 0$ in D_f. Unter Verwendung der Kettenregel erhalten wir:

$$f'(x) \quad = \quad e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\left(-e^{-2\sqrt{x+1}}\right)\frac{-2\,\frac{1}{2}}{\sqrt{x+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underbrace{e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}}_{>0} \underbrace{e^{-2\sqrt{x+1}}}_{>0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}_{\geq 0} \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Daher ist f monoton steigend in D_f.

(b) (**7 Punkte**).
Zunächst berechnen wir das Taylor-Polynom vom Grad 2 von f an der Stelle $x_0 = 0$. Dies lautet:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Es gilt:

$$f(0) = \cos(0) = 1.$$

Ausserdem hat man:

$$f'(x) = -\sin(x)$$

und

$$f'(0) = -\sin(0) = 0.$$

Schliesslich gilt:

$$f''(x) = -\cos(x)$$

und

$$f''(0) = -\cos(0) = -1.$$

Daraus folgt:

$$P_2(x) = 1 + 0 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (x - 0)^2 = 1 - x^2.$$

Deshalb gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=10}^{20} \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) &\approx \sum_{k=10}^{20} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}\right] \\
&= \sum_{k=10}^{20} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{k}\right] \\
&= \sum_{k=10}^{20} 1 - \sum_{10}^{20} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \\
&= 11 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \\
&= 11 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{4}} \\
&\approx 10.999998728.
\end{aligned}
$$

(c) (**6 Punkte**).
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = 3\,x^3 + 4\,x^2 - 2\,x + 10$. Wir müssen zeigen, dass die Gleichung

$$f(x) = 0$$

eine Lösung im Intervall $I = [-3, 1]$ besitzt. Es gilt:

$$f(-3) = 3\,(-3)^3 + 4\,(-3)^2 - 2\,(-3) + 10 = -29 < 0$$

und

$$f(1) = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 10 = 15 > 0.$$

Ausserdem ist f stetig in I. Daher existiert nach dem Nullstellensatz ein $x^\star \in I = [-3, 1]$ mit $f(x^\star) = 0$, d.h., $x^\star$ ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$.

Aufgabe 3

(a1) (**3 Punkte**).
Elastizität ist definiert als:

$$\varepsilon_f(x) \quad = \quad \frac{x\,f'(x)}{f(x)}.$$

Es gilt:

$$f'(x) = (2\,x + 4)\,e^{x^2+4\,x+2}.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{(2\,x+4)\,e^{x^2+4\,x+2}}{e^{x^2+4\,x+2}} = 2\,x^2 + 4\,x.$$

(a2) (**6 Punkte**).

f ist genau dann unelastisch in x_0, wenn $|\varepsilon_f(x_0)| < 1$. Es gilt:

$$|\varepsilon_f(x)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|2\,x^2 + 4\,x\right| < 1.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $2\,x^2 + 4\,x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_f(x)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|2\,x^2 + 4\,x\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,x^2 + 4\,x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,x^2 + 4\,x - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,x^2 + 4\,x - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right). \end{aligned}$$

Daher ist f im Fall (i) genau dann unelastisch in x_0, wenn

$$x_0 \in \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -2\right] \cup \left[0, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

(ii) $2\,x^2 + 4\,x < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_f(x)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|2\,x^2 + 4\,x\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2\,x^2 - 4\,x < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,x^2 + 4\,x + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right). \end{aligned}$$

Daher ist f im Fall (ii) genau dann unelastisch in x_0, wenn

$$x_0 \in \left(-2, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right).$$

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass f genau dann unelastisch in x_0 ist, wenn

$$x_0 \in \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

(a3) (**3 Punkte**).

Für die Änderung von f in x_0 gilt folgende Approximation:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{\Delta f}{f(x_0)} \approx \varepsilon_f(x_0) \, \frac{\Delta x}{x_0}.$$

Mit $x_0 = 1$ und $\Delta x = 0.02$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{f(1.02) - f(1)}{f(1)} &= \frac{\Delta f}{f(1)} \approx \varepsilon_f(1) \, \frac{0.02}{1} \\ &= (2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1) \cdot 0.02 \\ &= 6 \cdot 0.02 \\ &= 0.12. \end{aligned}$$

(b) (**6 Punkte**).
Für den Punkt (K_0, A_0) müssen die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein:

(i) $P(K_0, A_0) = 144$,
(ii) $\frac{dA}{dK} = -1$.

Aus (ii) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dK} = -1 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{P_K(K_0, A_0)}{P_A(K_0, A_0)} = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{P_K(K_0, A_0)}{P_A(K_0, A_0)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2\left(2\,K_0^2 + 4\,A_0^2\right)\, 2 \cdot 2\,K_0}{2\left(2\,K_0^2 + 4\,A_0^2\right)\, 4 \cdot 2\,A_0} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4\,K_0}{8\,A_0} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad K_0 = 2\,A_0. \end{aligned}$$

Aus (i) erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(K_0, A_0) = 144 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(2\,K_0^2 + 4\,A_0^2\right)^2 = 144 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,K_0^2 + 4\,A_0^2 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow && K_0^2 + 2\,A_0^2 = 6\\
&\overset{K_0=2\,A_0}{\Leftrightarrow} && 4\,A_0^2 + 2\,A_0^2 = 6\\
&\Leftrightarrow && 6\,A_0^2 = 6\\
&\Leftrightarrow && A_0^2 = 1.
\end{aligned}$$

Da $K > 0$ und $A > 0$, ist $A_0 = 1$ und $K_0 = 2$. Daraus folgt: $(K_0, A_0) = (2, 1)$.

(c) (**4 Punkte**).
Zunächst berechnen wir das totale Differential von f in $(x_0, y_0) = (1, 1)$, das definiert ist als

$$df = f_x(1,1)\,dx + f_y(1,1)\,dy.$$

Die partiellen Ableitungen von f lauten:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{8\,x\,y + 3\,x^2}{2 + 4\,x^2\,y + x^3 + y^4}\\
f_y(x,y) &= \frac{4\,x^2 + 4\,y^3}{2 + 4\,x^2\,y + x^3 + y^4}.
\end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
f_x(1,1) &= \frac{8\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1^2}{2 + 4\cdot 1^2\cdot 1 + 1^3 + 1^4} = \frac{11}{8}\\
f_y(1,1) &= \frac{4\cdot 1^2 + 4\cdot 1^3}{2 + 4\cdot 1^2\cdot 1 + 1^3 + 1^4} = \frac{8}{8} = 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$df = \frac{11}{8}\cdot dx + 1\cdot dy.$$

Schliesslich benützen wir das totale Differential mit $dx = -0.01$ und $dy = 0.01$, um den Wert $f(0.99, 1.01)$ zu approximieren. Es folgt:

$$\begin{aligned}
f(0.99, 1.01) &\approx f(1,1) + df\\
&= \ln(2 + 4\cdot 1^2\cdot 1 + 1^3 + 1^4) + \left(\frac{11}{8}\cdot(-0.01) + 1\cdot 0.01\right)\\
&= \ln(8) + \left(\frac{11}{8}\cdot(-0.01) + 1\cdot 0.01\right)\\
&= \ln(8) - 0.01375 + 0.01\\
&\approx 2.075692.
\end{aligned}$$

(d1) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{(\lambda\,x)^2 + (\lambda\,y)^2 + 3\,(\lambda\,x)\,(\lambda\,y)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\lambda^2\, x^2 + \lambda^2\, y^2 + 3\,\lambda^2\, x\, y} \\
&= \sqrt{\lambda^2\, \left(x^2 + y^2 + 3\, x\, y\right)} \\
&= \lambda\, \sqrt{x^2 + y^2 + 3\, x\, y} \\
&= \lambda\, f(x,y),
\end{aligned}
$$

d.h., f ist homogen vom Grad 1.

(d2) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \ln\left(3\, e^{(\lambda\, x)\,(\lambda\, y)}\right) \\
&= \ln(3) + \ln\left(e^{(\lambda\, x)\,(\lambda\, y)}\right) \\
&= \ln(3) + (\lambda\, x)\,(\lambda\, y) \\
&= \ln(3) + \lambda^2\, x\, y \\
&= \ln(3) + \lambda^2\, \ln\left(e^{x\, y}\right) \\
&= \ln(3) - \lambda^2\, \ln(3) + \lambda^2\, \ln(3) + \lambda^2\, \ln\left(e^{x\, y}\right) \\
&= \ln(3) - \lambda^2\, \ln(3) + \lambda^2\, \left[\ln(3) + \ln\left(e^{x\, y}\right)\right] \\
&= \left(1 - \lambda^2\right)\, \ln(3) + \lambda^2\, \ln\left(3\, e^{x\, y}\right) \\
&= \left(1 - \lambda^2\right)\, \ln(3) + \lambda^2\, f(x,y).
\end{aligned}
$$

Daher ist f nicht homogen.

(d3) (**2 Punkte**).
Für $\lambda > 0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda\, x)^{0.5}\, (\lambda\, y)^2 - 3\, (\lambda\, x)^a\, (\lambda\, y)^a \\
&= \lambda^{2.5}\, x^{0.5}\, y^2 - 3\, \lambda^{2\, a}\, x^a\, y^a \\
&= \lambda^{2.5}\, \left(x^{0.5}\, y^2 - 3\, \lambda^{2\, a - 2.5}\, x^a\, y^a\right).
\end{aligned}
$$

Daher ist f genau dann homogen, wenn

$$
2\, a - 2.5 = 0,
$$

d.h., $a = 1.25$. In diesem Fall beträgt der Homogenitätsgrad 2.5.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d))
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☒	☐	☐	☐
4.	☐	☒	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☒	☐	☐	☐
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (c). Eine hinreichende Bedingung dafür, dass B wahr (falsch) ist, ist, dass A und B wahr (falsch) sind. Wir können eine Wahrheitstabelle für die Aussage $(A \wedge B) \Rightarrow B$ erstellen, um zu sehen, dass sie eine Tautologie darstellt:

A	W	W	W	F
B	W	W	W	F
$A \wedge B$	W	F	F	F
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	W	W	W	W

2. Antwort (c). Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{8}{n}\right)^n = e^8 = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^8 = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{8\,n} = \lim_{n\to\infty} e_n.$$

3. Antwort (a). Das anfängliche Investment von 30'000 Schweizer Franken wird nach 20 Jahren zurückbezahlt. Ausserdem lassen die jährlichen Erträge von 1'500 Schweizer Franken auf einen Zinssatz von 5% auf das anfängliche Investment schliessen. Daher ist der Barwert des Projektes null, wenn der Zinssatz 5% beträgt. Ist der Zinssatz grösser (kleiner) als 5%, wird der Barwert negativ (positiv).

4. Antwort (b). Es gilt: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$. Da g monoton wachsend ist, gilt $g'(f(x)) \geq 0$. Da f monoton fallend ist, gilt ausserdem $f'(x) \leq 0$. Daraus erhalten wir $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \leq 0$, d.h., $g \circ f$ ist monoton fallend.

5. Antwort (d). Das Taylor-Polynom vom Grad 4 von f an der Stelle 0 lautet:

$$P_4 = f(0) + f'(0)\, x + \frac{1}{2}\, f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!}\, f'''(0)\, x^3 + \frac{1}{4!}\, f^{(4)}(0)\, x^4.$$

Es gilt: $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $\frac{1}{2}\, f''(0) = 3$, $\frac{1}{3!}\, f'''(0) = -2$, und $\frac{1}{4!}\, f^{(4)}(0) = 1$. Daher: $g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$, $g'(0) = f'(0) = 1$, $\frac{1}{2}\, g''(0) = \frac{1}{2}\, f''(0) = 3$, $\frac{1}{3!}\, g'''(0) = \frac{1}{3!}\, f'''(0) = -2$, und $\frac{1}{4!}\, g^{(4)}(0) = \frac{1}{4!}\, \frac{1}{2}\, f^{(4)}(0) = \frac{1}{2}$.
Da das Taylorpolynom vom Grad 4 von g an der Stelle 0 folgendermassen lautet:

$$Q_4(x) = g(0) + g'(0)\, x + \frac{1}{2}\, g''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!}\, g'''(0)\, x^3 + \frac{1}{4!}\, g^{(4)}(0)\, x^4,$$

erhalten wir

$$Q_4(x) = -1 + x + 3\, x^2 - 2\, x^3 + \frac{1}{2}\, x^4.$$

6. Antwort (a). Es gilt:

$$4\,x^2 + y^2 - 8\,x - 4\,y - 8 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

Daher ist die Niveaulinie $4\,x^2 + y^2 - 8\,x - 4\,y - 8 = 0$ von f eine Ellipse mit Mittelpunkt $(1,2)$ und den Halbachsen $a = 2$ und $b = 4$.

7. Antwort (b). Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = e^{x^3+x} - 2$ ist stetig und $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = e^2 - 2 > 0$. Daher besitzt die Gleichung $f(x) = e^{x^3+x} - 2 = 0$ nach dem Nullstellensatz mindestens eine Lösung in $[0,1]$. Da f streng monoton wachsend ist in $[0,1]$, existiert genau diese eine Lösung.

8. Antwort (c). Die Funktion f ist homogen vom Grad 3. Für $\lambda > 0$ gilt:

$$f(\lambda\,x, \lambda\,y) = (\lambda\,x)^2\,(\lambda\,y) + (\lambda\,x)\,(\lambda\,y)^2 = \lambda^3\,(x^2\,y + x\,y^2) = \lambda^3\,f(x,y).$$

Unter Verwendung der Eulerschen Relation erhalten wir:

$$x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) = 3\,f(x,y).$$

Teilen wir auf beiden Seiten durch $f(x,y)$, erhalten wir:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 3.$$

Herbstsemester 2014

Dr. Reto Schuppli

Mathematik I

Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2014

Dr. Reto Schuppli[1]

27. Januar 2015

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**5 Punkte**).
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{3\,x-2}{2\,x+10}$. Daher konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn

$$|q| < 1 \text{ oder } q = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{3\,x-2}{2\,x+10}\right| < 1 \text{ oder } \frac{3\,x-2}{2\,x+10} = 1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{3\,x-2}{2\,x+10}\right| < 1 \text{ oder } \frac{3\,x-2}{2\,x+10} = 1\\
\Leftrightarrow\quad & \left|\frac{3\,x-2}{2\,x+10}\right|^2 < 1 \text{ oder } \frac{3\,x-2}{2\,x+10} = 1\\
\Leftrightarrow\quad & (3\,x-2)^2 < (2\,x+10)^2 \text{ oder } 3\,x-2 = 2\,x+10\\
\Leftrightarrow\quad & 9\,x^2 - 12\,x + 4 < 4\,x^2 + 40\,x + 100 \text{ oder } x = 12\\
\Leftrightarrow\quad & 5\,x^2 - 52\,x - 96 < 0 \text{ oder } x = 12\\
\Leftrightarrow\quad & (5\,x+8)\,(x-12) < 0 \text{ oder } x = 12\\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{8}{5} < x \leq 12.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent ist, wenn $x \in \left(-\frac{8}{5}, 12\right]$.

(b) (**5 Punkte**).
Der Barwert einer nachschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen $C^I = 10'000$ für 20 Jahre und einem Zinssatz von $i = 2\%$ beträgt:

$$\begin{aligned}
PV_1 &= \sum_{k=1}^{20} \frac{C^I}{(1+i)^k}\\
&= \sum_{k=1}^{20} \frac{10'000}{1.02^k}\\
&= \frac{10'000}{1.02}\,\frac{1-1.02^{-20}}{1-1.02^{-1}}\\
(\ &\approx 163'514.35 \text{ (CHF)}).
\end{aligned}$$

Der Barwert einer vorschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen C^D für 15 Jahre und einem Zinssatz von $i = 2\%$ beträgt:

$$\begin{aligned} PV_2 &= \sum_{k=0}^{14} \frac{C^D}{(1+i)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{14} \frac{C^D}{1.02^k} \\ &= C^D\, \frac{1-1.02^{-15}}{1-1.02^{-1}}. \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} PV_1 = PV_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{10'000}{1.02}\, \frac{1-1.02^{-20}}{1-1.02^{-1}} = C^D\, \frac{1-1.02^{-15}}{1-1.02^{-1}} \\ &\Leftrightarrow \quad C^D = \frac{\frac{10'000}{1.02}\,\frac{1-1.02^{-20}}{1-1.02^{-1}}}{\frac{1-1.02^{-15}}{1-1.02^{-1}}} = \frac{10'000}{1.02}\, \frac{1-1.02^{-20}}{1-1.02^{-15}} \approx 12'476.05 \text{ (CHF)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass sich durch die neue vorschüssige Rente über 15 Jahre hinweg jährliche Bezüge von 12'476.05 (CHF) ergeben.

(c) (**5 Punkte**).
Da

$$\lim_{x\to 0}\left(x\,\cos(x) - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\,e^x + x^2\right),$$

wenden wir die Regel von L'Hôpital an und erhalten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos(x) - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}}{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - x\,e^x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\,\sin(x) - \frac{1}{x+1} - x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - e^x - x\,e^x + 2\,x}.$$

Da

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(x) - x\,\sin(x) - \frac{1}{x+1} - x\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - e^x - x\,e^x + 2\,x\right),$$

wenden wir wieder die Regel von L'Hôpital an und erhalten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\,\sin(x) - \frac{1}{x+1} - x}{\frac{e^x+e^{-x}}{2} - e^x - x\,e^x + 2\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\,\sin(x) - x\,\cos(x) + \frac{1}{(x+1)^2} - 1}{\frac{e^x-e^{-x}}{2} - 2\,e^x - x\,e^x + 2}.$$

Da

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\,\sin(x) - x\,\cos(x) + \frac{1}{(x+1)^2} - 1\right) = 0 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2\,e^x - x\,e^x + 2\right),$$

wenden wir die Regel von L'Hôpital noch ein weiteres Mal an und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{-2\,\sin(x) - x\,\cos(x) + \frac{1}{(x+1)^2} - 1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2\,e^x - x\,e^x + 2} \\
=\;& \lim_{x\to 0} \frac{-3\,\cos(x) + x\,\sin(x) - \frac{2}{(x+1)^3}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 3\,e^x - x\,e^x} \\
=\;& \frac{\lim_{x\to 0}\left(-3\,\cos(x) + x\,\sin(x) - \frac{2}{(x+1)^3}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - 3\,e^x - x\,e^x\right)} \\
=\;& \frac{-5}{-2} \\
=\;& \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos(x) - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\,e^x + x^2} = \frac{5}{2}.$$

(d1) (**4 Punkte**).
Um $f(x)$ zu bestimmen, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\ln(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Daraus folgt:

$$D_f = [2, \infty).$$

Ausserdem:

$$\begin{aligned}
x \in D_f \;&\Leftrightarrow\; 2 \leq x < \infty \\
&\Leftrightarrow\; 0 \leq \ln(x-1) < \infty \\
&\Leftrightarrow\; 0 \leq \sqrt{\ln(x-1)} < \infty \\
&\Leftrightarrow\; 1 \leq \sqrt{\ln(x-1)} + 1 < \infty \\
&\Leftrightarrow\; e = e^1 \leq e^{\sqrt{\ln(x-1)}+1} < \infty \\
&\Leftrightarrow\; e \leq f(x) < \infty.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$W_f = [e, \infty).$$

(d2) (**3 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, ist f streng monoton wachsend auf $[2, \infty)$, wenn $f'(x) > 0$ für $x \in (2, \infty)$. Es gilt:

$$f'(x) = \underbrace{e^{\sqrt{\ln(x-1)}+1}}_{>0} \; \underbrace{\frac{1}{2\,\sqrt{\ln(x-1)}}}_{>0 \text{ für } x>2} \; \underbrace{\frac{1}{x-1}}_{>0 \text{ für } x>2} > 0.$$

Daraus folgt, dass f streng monoton wachsend auf D_f ist.

(d3) Für $y \in W_f = [e, \infty)$ gilt:

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = e^{\sqrt{\ln(x-1)}+1} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \sqrt{\ln(x-1)} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(y) - 1 = \sqrt{\ln(x-1)} \\
&\Leftrightarrow \quad (\ln(y) - 1)^2 = \ln(x-1) \\
&\Leftrightarrow \quad e^{(\ln(y)-1)^2} = x - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad e^{(\ln(y)-1)^2} + 1 = x.
\end{aligned}$$

Da $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$, erhalten wir:

$$f^{-1} : [e, \infty) \to [2, \infty) \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = e^{(\ln(x)-1)^2} + 1.$$

Aufgabe 2

(a1) (**6 Punkte**).
Das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von f an der Stelle x_0 lautet:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{3}\,(1+x)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{3} \\
f''(x) &= -\frac{2}{9}\,(1+x)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9}\,\frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}.$$

Approximation von $\sqrt[3]{1'003}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1,003} &= \sqrt[3]{1'000\,(1+0.003)} \\
&= \sqrt[3]{10^3\,(1+0.003)} \\
&= 10\,\sqrt[3]{1+0.003} \\
&= 10\,f(0.003) \\
&\approx 10\,P_2(0.003) \\
&= 10\,\left(1 + \frac{0.003}{3} - \frac{0.003^2}{9}\right) \\
&= 10\,(1 + 0.001 - 0.000001) \\
&= 10.00999.
\end{aligned}$$

(a2) (**3 Punkte**).
Gemäss dem Satz von Taylor gilt:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\,x^3$$

mit $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}\,(1+x)^{-\frac{8}{3}}.$$

Daher erhalten wir:

$$R_2(x) = \frac{\frac{10}{27}\,(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}}{3!}\,x^3 = \frac{5}{81}\,(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}\,x^3.$$

Daraus folgt:

$$|R_2(x)| = \frac{5}{81} \underbrace{(1+\xi)^{-\frac{8}{3}}}_{\leq 1} x^3 \leq \frac{5}{81} x^3.$$

(b) (**4 Punkte**).
Damit $f(x,y)$ definiert ist, müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

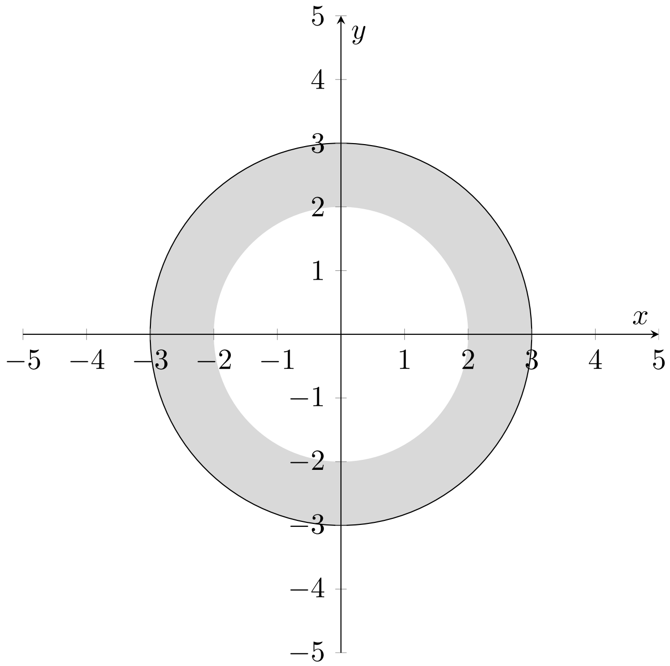
(i) $x^2 + y^2 - 4 > 0$ und

(ii) $9 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Daraus folgt:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**6 Punkte**).
Es sei $\varphi(x,y) = 2\,x^2 + x\,y + y^2 - 8$. Dann entspricht die Gleichung $2\,x^2 + x\,y + y^2 - 8 = 0$ der Niveaulinie $\varphi(x,y) = 0$ von φ. Wir müssen die Punkte (x_0, y_0) mit den folgenden Eigenschaften bestimmen:

(i) $\varphi(x_0, y_0) = 0$, d.h., (x_0, y_0) liegt auf der Niveaulinie $\varphi(x,y) = 0$ von φ,

(ii) $\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0$, d.h., die Steigung der Tangente an $\varphi(x,y) = 0$ in (x_0, y_0) ist 0.

Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}.$$

Daher erhalten wir:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)} = 0 \overset{(\star)}{\Leftrightarrow} \varphi_x(x_0,y_0) = 0.$$

($\star$) Um den Satz von der impliziten Funktion anwenden zu können, muss die Bedingung $\varphi_y(x_0,y_0) \neq 0$ erfüllt sein. Diese Bedingung muss geprüft werden, nachdem der Punkt (x_0,y_0) ermittelt worden ist.

Es gilt:

$$\varphi_x(x,y) = 4\,x + y.$$

Daher:

$$\varphi_x(x_0,y_0) = 0 \Leftrightarrow 4\,x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -4\,x_0.$$

Wir setzten dieses Resultat in Bedingung (i) ein und erhalten:

$$0 = 2\,x_0^2 + x_0\,y_0 + y_0^2 - 8 = 2\,x_0^2 + x_0\,(-4\,x_0) + (-4\,x_0)^2 - 8 = 14\,x_0^2 - 8.$$

Daraus folgt:

$$x_0 = \pm\,\frac{2}{\sqrt{7}} = \pm\,\frac{2}{7}\,\sqrt{7}.$$

Setzen wir dieses Resultat nun in $y_0 = -4\,x_0$ ein, erhalten wir folgende Punkte unter Berücksichtigung der Bedingungen (i) und (ii):

$$P_1 = \left(\frac{2}{7}\,\sqrt{7}, -\frac{8}{7}\,\sqrt{7}\right)$$

und

$$P_2 = \left(-\frac{2}{7}\,\sqrt{7}, \frac{8}{7}\,\sqrt{7}\right).$$

Nun lässt sich leicht überprüfen, dass $\varphi_y\left(\pm\frac{2}{7}\,\sqrt{7}, \mp\frac{8}{7}\,\sqrt{7}\right) \neq 0$.

(d1) (**3 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_K(K,A) &= 4\,\left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^3\,\frac{1}{4}\,K^{-0.75}\,a \\
&= \left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^3\,K^{-0.75}\,a \\
&= \left(a + \left(\frac{A}{K}\right)^{0.25}\right)^3\,a
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
P_A(K,A) &= 4\,\left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^3\,\frac{1}{4}\,A^{-0.75} \\
&= \left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^3\,A^{-0.75} \\
&= \left(a\,\left(\frac{K}{A}\right)^{0.25} + 1\right)^3.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{P,K}(K,A) &= K\,\frac{P_K(K,A)}{P(K,A)}\\
&= K\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.25}\right)^3\;K^{-0.75}\,a}{(a\,K^{0.25}+A^{0.25})^4}\\
&= \frac{a\,K^{0.25}}{a\,K^{0.25}+A^{0.25}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{P,A}(K,A) &= A\,\frac{P_A(K,A)}{P(K,A)}\\
&= A\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.25}\right)^3\;A^{-0.75}}{(a\,K^{0.25}+A^{0.25})^4}\\
&= \frac{A^{0.25}}{a\,K^{0.25}+A^{0.25}}.
\end{aligned}$$

(d2) (**3 Punkte**).
Die technische Substitutionsrate ist gegeben durch

$$\frac{dA}{dK}.$$

Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(K,A)} &= -\frac{P_K(K,A)}{P_A(K,A)}\\
&= -\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.25}\right)^3\;K^{-0.75}\,a}{(a\,K^{0.25}+A^{0.25})^3\;A^{-0.75}}\\
&= -\left(\frac{A}{K}\right)^{0.75}\,a.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,16)} = -16^{0.75}\,a = -8\,a.$$

Deshalb:

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,16)} = -4 \Leftrightarrow -8\,a = -4 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d))
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☐	☐	☒

1. Antwort (d). Die Wahrheitstabelle für die vier Aussagen sieht wie folgt aus:

	A	T	T	F	F
	B	T	F	T	F
(a)	$A \wedge B \Rightarrow A$	W	W	W	W
(b)	$A \vee \neg A$	W	W	W	W
(c)	$A \Rightarrow A \vee B$	W	W	W	W
(d)	$A \vee B \Rightarrow B$	W	F	W	W

Daraus folgt, dass nur die Aussage (d) keine Tautologie darstellt.

2. Antwort (c). Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,e^n + n}{e^n + 2\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{n}{e^n}}{1 + 2\,\frac{n}{e^n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

3. Antwort (b). Es gibt Folgen, die konvergent, aber nicht monoton sind. Ein Beispiel ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

4. Antwort (c). Den tiefsten Nettobarwert erhält man mit dem höchsten Zinssatz. Es gilt:

$$\begin{aligned} NPV(i) &= -1'000'000 + \frac{1'600'000}{(1+i)^{15}} \\ &= 1'000'000\,\frac{1.6 - (1+i)^{15}}{(1+i)^{15}} \\ &\approx \begin{cases} 188'823.55 & \text{falls } i = 2\% \\ 430.95 & \text{falls } i = 3.18\% \\ -495'619.25 & \text{falls } i = 8\% \end{cases} \end{aligned}$$

5. Antwort (b). Es gilt:

$$\ln\left(\frac{2\,x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{4x}\right) = \ln\left(\frac{2\,x}{y}\,\frac{y}{4\,x}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Daher ist (b) richtig und (a) und (d) sind eindeutig falsch. Ausserdem ist (c) falsch, da

$$2\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{4}\,\ln\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{7}{4}\,\ln\left(\frac{x}{y}\right).$$

6. Antwort (d). Für $x \neq -2$ und $x \neq 1$ gilt:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Daher existiert $\lim_{x \to -2} f(x)$ nicht und

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} = f(1).$$

Daraus folgt, dass f in $x = -2$ und $x = 1$ unstetig ist.

8. Antwort (d). Eine hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt x_0 ist, dass eine ungerade ganze Zahl $n \geq 3$ existiert, sodass

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dies ist gegeben in Antwort (d) mit $n = 5$. Die Eigenschaften in (a), (b) und (c) sind hingegen nicht ausreichend für eine Wendestelle.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☒	☐	☐
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☐	☒	☐	☐
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☒	☐	☐	☐

1. Antwort (b). Es gilt:

$$\rho_f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\ln(2)\, 2^t}{2^t} = \ln(2).$$

2. Antwort (c). Es gilt:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\,\ln(x)}.$$

Daraus folgt:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\,\ln(x)} \left(\frac{1}{x}\,\frac{1}{x} - \ln(x)\,\frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\,\frac{1}{x^2}\,(1 - \ln(x)).$$

Deshalb:

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = e.$$

Da $f'(x_0)$ eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle x_0 ist, ist $x_0 = e$ die einzig mögliche Extremalstelle von f.

3. Antwort (b). Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

$$f(0) = P_4(0) = 3$$

und

$$f'(0) = P_4'(0) = 2.$$

Da in Antwort (d) $f(0) = 6$ ist, ist (d) falsch. Ausserdem haben wir $f'(0) = 1$ in (a) und $f'(0) = 3$ in (c). Daher sind (a) und (c) ebenfalls falsch. Schliesslich haben wir $f(0) = 3$ und $f'(0) = 2$ in (b). Daher ist (b) die korrekte Antwort.

4. Antwort (b). Für $(x, y) \in D_f$ müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$4 - 2\,x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\,x^2 + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \leq 1.$$

Da $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ eine Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen $\sqrt{2}$ und 2 ist, ist Antwort (b) korrekt.

5. Antwort (a). Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \sqrt[3]{(\lambda\, x)^{1.8}\, (\lambda\, y)^{0.6}} + \sqrt{(\lambda\, x)^{1.2}\, (\lambda\, y)^{0.4}} \\
&= \left(\lambda^{1.8}\, x^{1.8}\, \lambda^{0.6}\, y^{0.6}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\lambda^{1.2}\, x^{1.2}\, \lambda^{0.4}\, y^{0.4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\lambda^{2.4}\, x^{1.8}\, y^{0.6}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\lambda^{1.6}\, x^{1.2}\, y^{0.4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda^{0.8}\, \left(x^{1.8}\, y^{0.6}\right)^{\frac{1}{3}} + \lambda^{0.8}\, \left(x^{1.2}\, y^{0.4}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda^{0.8}\, \left[\left(x^{1.8}\, y^{0.6}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(x^{1.2}\, y^{0.4}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \lambda^{0.8}\, \left(\sqrt[3]{x^{1.8}\, y^{0.6}} + \sqrt{x^{1.2}\, y^{0.4}}\right) \\
&= \lambda^{0.8}\, f(x, y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad $k = 0.8$ ist.

6. Antwort (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \ln\left(\frac{\lambda\, x}{\lambda\, y}\right) + \lambda\, x + \lambda\, y \\
&= \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \lambda\, (x + y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f nicht homogen ist.

7. Antwort (b). Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \left((\lambda\, x)^2 + 18\, (\lambda\, x)\, (\lambda\, y) - 9\, (\lambda\, y)^2\right)^{0.5} \\
&= \left(\lambda^2\, x^2 + 18\, \lambda\, x\, \lambda\, y - 9\, \lambda^2\, y^2\right)^{0.5} \\
&= \left(\lambda^2\, x^2 + 18\, \lambda^2\, x\, y - 9\, \lambda^2\, y^2\right)^{0.5} \\
&= \lambda\, \left(x^2 + 18\, x\, y - 9\, y^2\right)^{0.5} \\
&= \lambda^1\, f(x, y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 1 ist, d.h. linear homogen.

8. Antwort (a). Die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion $P(K, A) = 2\, K^{0.8}\, A^{0.4}$ ist homogen vom Grad $1.2 > 1$. Daher hat sie zunehmende Skalenerträge.

Mathematik A
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

15. Juli, 2015

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**6 Punkte**).

Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2\,a-1}{a+1}\right)^k$, dann ist $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine geometrische Reihe mit $a_1 = 1$ und $q = \frac{2\,a-1}{a+1}$. Daher konvergiert $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn

$$|q| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2\,a-1}{a+1}\right| < 1.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2\,a-1}{a+1}\right| < 1\\
\Leftrightarrow\quad &\left|\frac{2\,a-1}{a+1}\right|^2 < 1\\
\Leftrightarrow\quad &(2\,a-1)^2 < (a+1)^2\\
\Leftrightarrow\quad &4\,a^2 - 4\,a + 1 < a^2 + 2\,a + 1\\
\Leftrightarrow\quad &3\,a^2 - 6\,a < 0\\
\Leftrightarrow\quad &3\,a\,(a-2) < 0\\
\Leftrightarrow\quad &0 < a < 2.
\end{aligned}$$

Für $0 < a < 2$ folgt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\,a-1}{a+1}\right)^k = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{2\,a-1}{a+1}} = \frac{a+1}{2-a}.$$

(b) (**6 Punkte**).

Der Endwert nach 21 Jahren (am 31.12.2021) einer nachschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen C und einem Zinssatz von $i = 2\%$ beträgt:

$$A_{21} = \sum_{k=0}^{20} C\,(1+0.02)^k = C\,\frac{1.02^{21}-1}{0.02}.$$

Der Barwert einer nachschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen von $40'000$ CHF für 15 Jahre und einem Zinssatz von $i = 2\%$ beträgt:

$$\begin{aligned}
PV &= \sum_{k=1}^{15} \frac{40'000}{(1+0.02)^k}\\
&= 40'000 \cdot \frac{1-1.02^{-15}}{0.02}\\
&\approx 513'970,55.
\end{aligned}$$

Da $A_{21} = PV$, folgt:

$$\begin{aligned} A_{21} = C\,\frac{1.02^{21}-1}{0.02} &= 40'000 \cdot \frac{1-1.02^{-15}}{0.02} = PV \\ \Leftrightarrow \quad C = \frac{40'000}{1.02^{15}}\,\frac{1.02^{15}-1}{1.02^{21}-1} &\approx 19'934,25. \end{aligned}$$

(c) (**3 Punkte**).

Da

$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0 = \lim_{x\to 0} \left(2\,e^x - x^2 - 2\,x - 2\right),$$

verwenden wir die Regel von L'Hôpital und erhalten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2\,e^x - x^2 - 2\,x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,x^2}{2\,e^x - 2\,x - 2}.$$

Da

$$\lim_{x\to 0} 3\,x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} \left(2\,e^x - 2\,x - 2\right),$$

verwenden wir erneut die Regel von L'Hôpital und erhalten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\,x^2}{2\,e^x - 2\,x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6\,x}{2\,e^x - 2}.$$

Da

$$\lim_{x\to 0} 6\,x = 0 = \lim_{x\to 0} \left(2\,e^x - 2\right),$$

verwenden wir die Regel von L'Hôpital ein drittes Mal und erhalten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\,x}{2\,e^x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2\,e^x} = 3.$$

Schließlich folgt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2\,e^x - x^2 - 2\,x - 2} = 3.$$

(d1) (**4 Punkte**).

Für die Wohldefiniertheit von $f(x)$ muss die folgende Bedingung gelten:

$$\ln(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x + 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Daher ist

$$D_f = [-1, \infty).$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad 1 \leq x + 2 < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \ln(x+2) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \sqrt{\ln(x+2)} < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad -2 \le -2 + \sqrt{\ln(x+2)} < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} = 2^{-2} \le 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}} < \infty
\end{aligned}$$

Daher ist

$$R_f = \left[\tfrac{1}{4}, \infty\right).$$

(d2) (**3 Punkte**).

Da die Funktionen $y = \ln(x)$, $y = \sqrt{x}$, $y = 2^x$ alle streng monoton wachsend sind, gilt:

$$\begin{aligned}
x_1 < x_2 \quad &\Rightarrow \quad x_1 + 2 < x_2 + 2 \\
&\Rightarrow \quad \ln(x_1 + 2) < \ln(x_2 + 2) \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{\ln(x_1 + 2)} < \sqrt{\ln(x_2 + 2)} \\
&\Rightarrow \quad -2 + \sqrt{\ln(x_1 + 2)} < -2 + \sqrt{\ln(x_2 + 2)} \\
&\Rightarrow \quad 2^{-2+\sqrt{\ln(x_1+2)}} < 2^{-2+\sqrt{\ln(x_2+2)}} \\
&\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).
\end{aligned}$$

Daher ist auch f streng monoton wachsend.

Ein alternativer Beweis verwendet die erste Ableitung von f. Es gilt für $x > -1$:

$$f'(x) = \underbrace{\ln(2)}_{>0} \, \underbrace{2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}}_{>0} \, \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\ln(x+2)}}}_{>0} \, \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{>0} > 0.$$

Daher ist $f'(x) > 0$ für $x > -1$ und damit f streng monoton wachsend in D_f.

(d3) (**3 Punkte**).

Für $y \in R_f = \left[\tfrac{1}{4}, \infty\right)$ gilt:

$$\begin{aligned}
y = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(y) = \left(-2 + \sqrt{\ln(x+2)}\right) \ln(2) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(y)}{\ln(2)} = -2 + \sqrt{\ln(x+2)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(y)}{\ln(2)} + 2 = \sqrt{\ln(x+2)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)} + 2\right)^2 = \ln(x+2) \\
&\Leftrightarrow \quad e^{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)}+2\right)^2} = x + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad x = e^{\left(\frac{\ln(y)}{\ln(2)}+2\right)^2} - 2.
\end{aligned}$$

Da $D_{f^{-1}} = R_f$ und $R_{f^{-1}} = D_f$ erhalten wir:

$$f^{-1} \,:\, \left[\tfrac{1}{4}, \infty\right) \to [2, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = e^{\left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}+2\right)^2} - 2.$$

Aufgabe 2

(a1) (**4 Punkte**).

Das Taylor-Polynom dritter Ordnung von f an der Stelle x_0 lautet:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(2\,x) \Rightarrow f(x_0) = f(\pi) = 0 \\
f'(x) &= 2\,\cos(2\,x) \Rightarrow f'(x_0) = f'(\pi) = 2 \\
f''(x) &= -4\,\sin(2\,x) \Rightarrow f''(x_0) = f''(\pi) = 0 \\
f'''(x) &= -8\,\cos(2\,x) \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(\pi) = -8.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_3(x) = 0 + 2\,(x - \pi) + \frac{0}{2!}\,(x - \pi)^2 - \frac{8}{3!}\,(x - \pi)^3 = 2\,(x - \pi) - \frac{4}{3}\,(x - \pi)^3.$$

(a2) (**3 Punkte**).

Gemäss dem Satz von Taylor gilt:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x - \pi)^4$$

für ein ξ zwischen π und x.
Es gilt

$$f^{(4)}(x) = 16\,\sin(2\,x)$$

und daher

$$R_3(x) = \frac{16\,\sin(2\,\xi)}{4!}\,(x - \pi)^4 = \frac{2}{3}\,\sin(2\,\xi)\,(x - \pi)^4.$$

Schließlich erhalten wir:

$$|R_3(x)| = \frac{2}{3}\,\underbrace{|\sin(2\,\xi)|}_{\leq 1}\,\underbrace{|x - \pi|^4}_{\leq 10^{-4} \text{ für } x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]} < 10^{-4}.$$

(b) (**4 Punkte**).

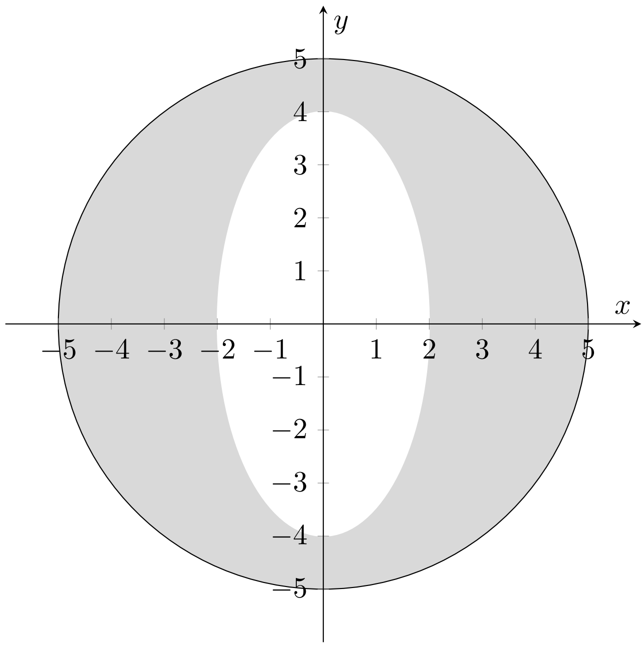
Für die Wohldefiniertheit von $f(x,y)$ müssen die folgenden zwei Bedingungen gelten:

(i) $4\,x^2 + y^2 - 16 > 0$ und
(ii) $25 - x^2 - y^2 \geq 0$.

Es folgt:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} > 1 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**4 Punkte**).

Sei $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y) + a\,(x+3)^2$. Wir müssen nun a so wählen, dass

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = 3,$$

d.h., die Steigung der Tangente an die Niveaulinie $f(x,y) = f(0,\pi)$ im Punkt $(0,\pi)$ ist 3.

Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = -\frac{f_x(0,\pi)}{f_y(0,\pi)}.$$

Da

$$f_x(x,y) = -\sin(x)\,\sin(y) + 2\,a\,(x+3)$$

und

$$f_y(x,y) = \cos(x)\,\cos(y)$$

ist

$$f_x(0,\pi) = 6\,a$$

und

$$f_y(0,\pi) = -1.$$

Nun folgt, dass

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = -\left(\frac{6\,a}{-1}\right) = 6\,a$$

und wir erhalten

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,\pi)} = 3 \;\Leftrightarrow\; 6\,a = 3 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{2}.$$

(d1) (**3 Punkte**).

Es gilt:

$$\begin{aligned} P_K(K,A) &= -4\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5}\left(-\frac{\lambda}{K^2}\right) \\ &= \frac{4\,\lambda}{K^2}\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_A(K,A) &= -4\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5}\left(-\frac{1}{2\,A^2}\right) \\ &= \frac{2}{A^2}\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{P,K}(K,A) &= K\,\frac{P_K(K,A)}{P(K,A)} \\ &= K\,\frac{\frac{4\,\lambda}{K^2}\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5}}{8\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-0.5}} \\ &= \frac{\lambda}{2\,K}\,\frac{1}{\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_{P,A}(K,A) &= A\,\frac{P_A(K,A)}{P(K,A)} \\ &= A\,\frac{\frac{2}{A^2}\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-1.5}}{8\left(\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}\right)^{-0.5}} \\ &= \frac{1}{4\,A}\,\frac{1}{\frac{\lambda}{K}+\frac{1}{2\,A}}. \end{aligned}$$

(d2) (**3 Punkte**).

Es gilt:

$$P(0.98, 0.29) \approx P(1, 0.25) + dP$$

wobei

$$dP = P_K(1, 0.25)\,dK + P_A(1, 0.25)\,dA$$

und $dK = -0.02$ und $dA = 0.04$.

Da

$$P_K(1, 0.25) = \frac{4 \cdot 2}{1^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{2 \cdot 0.25} \right)^{-1.5} = 8 \cdot 4^{-1.5} = 1$$

und

$$P_A(1, 0.25) = \frac{2}{0.25^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{1}{2 \cdot 0.25} \right)^{-1.5} = 32 \cdot 4^{-1.5} = 4$$

gilt:

$$P(0.98, 0.29) \approx P(1, 0.25) + 1 \cdot (-0.02) + 4 \cdot 0.04 = 4 + 0.14 = 4.14.$$

Beachte, dass $P(0.98, 0.29) \approx 4.1229696220\ldots$.

(d3) (**4 Punkte**).

Die technische Substitutionrate ist gegeben durch

$$\frac{dA}{dK}.$$

Gemäss dem Satz über implizite Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA}{dK}\right|_{(K,A)} &= -\frac{P_K(K,A)}{P_A(K,A)} \\ &= -\frac{\frac{4\lambda}{K^2} \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A} \right)^{-1.5}}{\frac{2}{A^2} \left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A} \right)^{-1.5}} \\ &= -\frac{4\lambda A^2}{2K^2} \\ &= -2\lambda \left(\frac{A}{K} \right)^2. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,0.25)} = -2\lambda\, 0.25^2 = -\frac{\lambda}{8}$$

und daher

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,0.25)} = -1 \Leftrightarrow \lambda = 8.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d))
1.	☐	☒	☐	☐
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☒	☐
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☒	☒	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Antwort (b). Die Wahrheitstafel der Aussage $(A \wedge B) \vee (B \vee A)$ lautet:

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$A \wedge B$	W	F	F	F
$B \vee A$	W	W	W	F
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	W	W	W	F

2. Antwort (d). Die Folge divergiert:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{e\,2^n + n}{n^e + 2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e\,\frac{2^n}{n^e} + \frac{n}{n^e}}{1 + 2\,\frac{n}{n^e}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e \overbrace{\frac{2^n}{n^e}}^{\to\infty \text{ für } n\to\infty} + \overbrace{\frac{1}{n^{e-1}}}^{\to 0 \text{ für } n\to\infty}}{1 + 2 \underbrace{\frac{1}{n^{e-1}}}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

3. Antwort (b). Wir verwenden die Regel von L'Hôpital und erhalten:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3\,x)}{1 - 2\,\cos(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{3\,\cos(3\,x)}{2\,\sin(x)} \\
&= \frac{3\,\cos(\pi)}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{-3}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

4. Antwort (a). Den höchsten Nettobarwert erhält man mit dem niedrigsten Zinssatz. Es gilt:

$$NPV(i) = -2'000'000 + \frac{2'500'000}{(1+i)^5}$$

$$\approx \begin{cases} 236'780.80 & \text{if } i = 2.25\% \\ 378.30 & \text{if } i = 4.56\% \\ -188'093.80 & \text{if } i = 6.65\% \end{cases}$$

5. Antwort (c). Es gilt:

$$\ln\left(\frac{4\,a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{2\,a}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4\,a}{b}}{\frac{b}{2\,a}}\right) = \ln\left(\frac{8\,a^2}{b^2}\right) = \ln\left(\left[\frac{2\sqrt{2}\,a}{b}\right]^2\right) = 2\,\ln\left(\frac{2\sqrt{2}\,a}{b}\right).$$

6. Antwort (c). Für $x \neq -1$ und $x \neq 3$ gilt:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2\,x - 3} = \frac{(x+1)\,(x-1)}{(x+1)\,(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Daher existiert der Grenzwert $\lim_{x \to 3} f(x)$ nicht und

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = f(-1).$$

Damit ist f nur bei $x = 3$ unstetig.

7. Antwort (b). Es gilt:

$$g(t) = x^t\,\cos(2\,x) = e^{\ln(x^t)}\,\cos(2\,x) = e^{t\,\ln(x)}\,\cos(2\,x).$$

Es folgt (Differentiation nach der Variablen t):

$$g'(t) = \ln(x)\,e^{t\,\ln(x)}\,\cos(2\,x) = \ln(x)\,x^t\,\cos(2\,x).$$

8. Antwort (b). Es gilt der folgende Satz:
Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Interval $(a,b) \subset D_f$ n-mal differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a,b)$. x_0 ist eine lokale Extremalstelle von f, falls eine gerade natürliche Zahl $n \geq 2$ existiert mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Im Weiteren ist x_0 ein lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$ und ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.

Antwort (b) entspricht der hinreichenden Bedingung für ein lokales Maximum mit $n = 4$.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☒	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☒	☐	☐
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☒	☐	☐

1. Antwort (a). Es gilt:

$$\rho_f(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{4\,t^3}{t^4} = \frac{4}{t}.$$

Dies ist eine streng monoton fallende Funktion für $t \in \mathbb{R}_{++}$.

2. Antwort (a). Es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x}\,x^x = \frac{1}{x}\,e^{x\,\ln(x)}.$$

Damit folgt:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\,x^x + \frac{1}{x}\,e^{x\,\ln(x)}\left(\ln(x) + \frac{1}{x}\,x\right) = \frac{1}{x}\,x^x\left(1 + \ln(x) - \frac{1}{x}\right).$$

Es gilt:

$$f'(1) = 0, \quad f'(\ln(2)) \neq 0, \quad f'(e) \neq 0, \quad f'(e^{-1}) \neq 0.$$

Da $f'(x_0) = 0$ eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle im Punkt x_0 ist, ist $x_0 = 1$ die einzig mögliche Extremalstelle von f. Man überprüft leicht, dass $x_0 = 1$ ein lokales Minimum von f ist.

3. Antwort (c). Da

$$f(0) = P_4(0) = 1$$

und

$$f'(0) = P_4'(0) = 3,$$

ist Antwort (c) die einzig mögliche Antwort. Wir überprüfen: für f definiert als $f(x) = 3\,e^x - 2$ (Antwort (c)) gilt:

$$f(0) = 1$$

und

$$f^{(i)}(0) = 3$$

für $i = 1, 2, 3, 4$. Damit folgt:

$$P_4(x) = 1 + 3\,x + \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{6}\,x^3 + \frac{3}{4!}\,x^4 = \frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{3}{2}\,x + 3\,x + 1.$$

4. Antwort (b). Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) = c \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - y^2 - 1} = c \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 - 1 = c^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = c^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{c^2+1} - \frac{y^2}{c^2+1} = 1. \end{aligned}$$

Dies ist die Gleichung einer Hyperbel.

5. Antwort (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \left((\lambda\,x)^a\,(\lambda\,y)^{1-a} + (\lambda\,x)^{-3}\,(\lambda\,y)^4\right)^{0.5} \\ &= \left(\lambda^a\,x^a\,\lambda^{1-a}\,y^{1-a} + \lambda^{-3}\,x^{-3}\,\lambda^4\,y^4\right)^{0.5} \\ &= \left(\lambda\,x^a\,y^{1-a} + \lambda\,x^{-3}\,y^4\right)^{0.5} \\ &= \left(\lambda\,\left(x^a\,y^{1-a} + x^{-3}\,y^4\right)\right)^{0.5} \\ &= \lambda^{0.5}\,\left(\left(x^a\,y^{1-a} + x^{-3}\,y^4\right)\right)^{0.5} \\ &= \lambda^{0.5}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Damit ist f homogen vom Grad $k = 0.5$.

6. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \frac{1}{3}\,\ln(\lambda\,x) + \frac{2}{3}\,\ln(\lambda\,y) \\ &= \frac{1}{3}\,\ln(\lambda) + \frac{1}{3}\,\ln(x) + \frac{2}{3}\,\ln(\lambda) + \frac{2}{3}\,\ln(y) \\ &= \ln(\lambda) + \frac{1}{3}\,\ln(x) + \frac{2}{3}\,\ln(y) \\ &= \ln(\lambda) + f(x,y). \end{aligned}$$

Damit ist f nicht homogen.

7. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \sqrt{4\,(\lambda\,x)^{0.2}\,(\lambda\,y)^{0.4}} + \sqrt[4]{(\lambda\,x)^{1.6}\,(\lambda\,y)^{0.8}} \\ &= \sqrt{4\,\lambda^{0.2}\,x^{0.2}\,\lambda^{0.4}\,y^{0.4}} + \sqrt[4]{\lambda^{1.6}\,x^{1.6}\,\lambda^{0.8}\,y^{0.8}} \\ &= \sqrt{\lambda^{0.6}\,4\,x^{0.2}\,y^{0.4}} + \sqrt[4]{\lambda^{2.4}\,x^{1.6}\,y^{0.8}} \\ &= \lambda^{0.3}\,\sqrt{4\,x^{0.2}\,y^{0.4}} + \lambda^{0.6}\,\sqrt[4]{x^{1.6}\,y^{0.8}}. \end{aligned}$$

Damit ist f nicht homogen.

8. Antwort (b). Gemäss der Eulerschen Relation gilt:

$$k\,f(x_0, y_0) = x_0\,f_x(x_0, y_0) + y_0\,f_y(x_0, y_0).$$

Da $f(x_0, y_0) > 0$ können wir obige Gleichung durch $f(x_0, y_0)$ dividieren und erhalten:

$$k = x_0 \, \frac{f_x(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)} + y_0 \, \frac{f_y(x_0, y_0)}{f(x_0, y_0)}.$$

Dies ist äquivalent zu:

$$0.7 = k = \varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0).$$

Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A

Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi[1]

2. Februar 2016

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**5 Punkte**).
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat die Form

$$a_n = n\,c(x),$$

mit

$$c(x) = \ln(|5\,x+2|) - \ln(|3\,x-10|).$$

Daher konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $c(x)=0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
c(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(|5\,x+2|) - \ln(|3\,x-10|) = 0\\
&\Leftrightarrow \quad \ln(|5\,x+2|) = \ln(|3\,x-10|)\\
&\Leftrightarrow \quad |5\,x+2| = |3\,x-10|\\
&\Leftrightarrow \quad |5\,x+2|^2 = |3\,x-10|^2\\
&\Leftrightarrow \quad 25\,x^2+20\,x+4 = 9\,x^2-60\,x+100\\
&\Leftrightarrow \quad 16\,x^2+80\,x-96=0\\
&\Leftrightarrow \quad 16\,\left(x^2+5\,x-6\right)=0\\
&\Leftrightarrow \quad 16\,(x+6)\,(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x\in\{-6,1\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $x\in\{-6,1\}$.

Alternative Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= n\,[\ln(|5\,x+2|) - \ln(|3\,x-10|)]\\
&= n\,\ln\left(\frac{|5\,x+2|}{|3\,x-10|}\right)\\
&= n\,\ln\left(\left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right|\right)\\
&= \ln\left(\left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right|^n\right)\\
&= \ln(b_n)\,,
\end{aligned}$$

mit $b_n = \left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right|^n$.

Da der ln stetig ist, konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$. Jedoch ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge und konvergiert mit $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$ genau dann, wenn $b_n = 1$ für alle n. Daraus folgt, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

genau dann konvergiert, wenn

$$\left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right|^n = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right| = 1 \Leftrightarrow x \in \{-6, 1\}.$$

(b) (**7 Punkte**).
Regelmässige Zahlungen am Jahresende über 20 Jahre hinweg stellen eine nachschüssige 20-jährige Rente dar. Daher beträgt der Gesamtwert der Zahlungen *nach 20 Jahren*:

$$\begin{aligned} A_{20}^{pay} &= C\,\frac{(1+i)^n-1}{i} \\ &= 50'000\,\frac{(1+0.02)^{20}-1}{0.02} \\ &\approx 1'214'868. \end{aligned}$$

Das Darlehen hat nach 20 Jahren einen Wert von:

$$A_{20}^{mort} = P\,(1+i)^{20} = 2'000'000\,(1+0.02)^{20} \approx 2'971'985.$$

Demnach beträgt die Summe, die nach 20 Jahren zurückzuzahlen ist:

$$\tilde{P} = A_{20}^{mort} - A_{20}^{pay} = 2'971'985 - 1'214'868 = 1'757'027.$$

Dieser Betrag muss einer 40-jährigen nachschüssigen Rente mit Zahlungen $\tilde{C}$ und Zinssatz $\tilde{i} = 1\%$ entsprechen. Es gilt:

$$\tilde{P} = \tilde{C}\,\frac{1-(1+\tilde{i})^{-40}}{\tilde{i}} \Leftrightarrow \tilde{C} = \frac{\tilde{i}\,\tilde{P}}{1-(1+\tilde{i})^{-40}}.$$

Daraus folgt:

$$\tilde{C} = \frac{0.01 \cdot 1'757'027}{1-(1+0.01)^{-40}} \approx 53'511,30.$$

Daher betragen die jährlichen Zahlungen nach der Neuverhandlung $53'511,30$ CHF.

(c) (**5 Punkte**).
Es gilt:

$$\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2\,x+4} = \left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2\,(x+2)} = \left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2\,x+4} &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2 \\ &= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^2 \\ &= e^2. \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von $f(x) = x^2$ können wir im zweiten Schritt die Funktion mit dem Grenzprozess vertauschen. Im letzten Schritt benützen wir, dass:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

(d1) (**5 Punkte**).

$$\begin{aligned}
x \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(-x^2+2\,x+4) \geq 0 & \text{(wegen der } \sqrt{\cdot}\text{)} \\ -x^2+2\,x+4 > 0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)\text{)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x^2+2\,x+4 \geq 1 \\ -x^2+2\,x+4 > 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+2\,x+4 \geq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -x^2+2\,x+3 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-2\,x-3 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-3)\,(x+1) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in [-1,3].
\end{aligned}$$

Daher erhalten wir:

$$D_f = [-1,3].$$

(d2) (**4 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, können wir die erste Ableitung von f nutzen, um die Monotonieeigenschaften von f zu untersuchen. Wir wenden die Kettenregel an und erhalten:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\,\sqrt{\ln(-x^2+2\,x+4)}}}_{>0 \text{ auf } (-1,3)}\ \underbrace{\frac{1}{-x^2+2\,x+4}}_{>0 \text{ auf } (-1,3)}\ \underbrace{(-2\,x+2)}_{>0\Leftrightarrow x<1}.$$

Daraus folgt:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$$

und

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,3).$$

Daher ist f monoton steigend auf $[-1,1]$ und monoton fallend auf $[1,3]$. Man beachte, dass f nicht im gesamten Definitionsbereich monoton ist!

Alternative Lösung:

Man kann argumentieren, dass $\sqrt{\cdot}$ und $\ln(\cdot)$ streng monoton wachsende Funktionen sind. Jedoch ist die quadratische Funktion $f(x) = -x^2 + 2\,x + 4$ streng monoton wachsend für $x < 1$ und streng monoton fallend für $x > 1$. Daher bestimmt die quadratische Funktion vollständig die Monotonieeigenschaften von f.

Aufgabe 2

(a1) (**6 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in t_0 ist definiert als:

$$P_3(t) = f(t_0) + f'(t_0)\,(t-t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}\,(t-t_0)^2 + \frac{f'''(t_0)}{3!}\,(t-t_0)^3.$$

Mit $t_0 = 0$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} f(t_0) & = & f(0) = w_0 \\ f'(t) & = & -i\,w_0\,e^{-i\,t} \Rightarrow f'(t_0) = f'(0) = -i\,w_0 \\ f''(t) & = & i^2\,w_0\,e^{-i\,t} \Rightarrow f''(t_0) = f''(0) = i^2\,w_0 \\ f'''(t) & = & -i^3\,w_0\,e^{-i\,t} \Rightarrow f'''(t_0) = f'''(0) = i^3\,w_0. \end{array}$$

Daraus folgt:

$$P_3(t) = w_0 - i\,w_0\,t + \frac{1}{2}\,i^2\,w_0\,t^2 - \frac{1}{6}\,i^3\,w_0\,t^3 = w_0\,\left(1 - i\,t + \frac{1}{2}\,i^2\,t^2 - \frac{1}{6}\,i^3\,t^3\right).$$

Ausserdem erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} f(1) - f(0) & \approx & P_3(1) - P_3(0) \\ & = & P_3(1) - f(0) \\ & = & w_0\,\left(1 - i\,t + \frac{1}{2}\,i^2\,t^2 - \frac{1}{6}\,i^3\,t^3\right) - w_0 \\ & = & w_0\,\left(-i\,t + \frac{1}{2}\,i^2\,t^2 - \frac{1}{6}\,i^3\,t^3\right) \\ & = & 1,000,000\,\left(-0.05 + \frac{1}{2}\,0.05^2 - \frac{1}{6}\,0.05^3\right) \\ & \approx & -48,770.85 \end{array}$$

(a2) (**3 Punkte**).
Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_3(t) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,t^4$$

mit $\xi \in [0, t]$.
Es gilt:

$$f^{(4)}(t) = w_0\,i^4\,e^{-i\,t} \le w_0\,i^4$$

für alle $t \ge 0$. Daraus folgt:

$$|R_3(x)| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\,t^4 \le \frac{w_0\,i^4}{24}\,t^4.$$

(b) (**3 Punkte**).
Es gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}$$

und

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}.$$

Unter Verwendung von:

$$f_x(x,y) = 2\,a\,x\,e^{a\,x^2+b\,y+3}$$

und

$$f_y(x,y) = b\,e^{a\,x^2+b\,y+3}$$

erhalten wir:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = x\,\frac{2\,a\,x\,e^{a\,x^2+b\,y+3}}{e^{a\,x^2+b\,y+3}} = 2\,a\,x^2$$

und

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = y\,\frac{b\,e^{a\,x^2+b\,y+3}}{e^{a\,x^2+b\,y+3}} = b\,y.$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} \varepsilon_{f,x}(1,1) = 1 \\ \varepsilon_{f,y}(1,1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

(c) (**8 Punkte**).
Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion ist die *Steigung* der Tangente an eine Kurve $\varphi(x,y) = 0$ im Punkt (x_0, y_0) gegeben durch:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}.$$

Für C_1 gilt $\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y) = 15\,x^2 + 5\,x\,y + 15\,y - 27$ und

$$\left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\varphi_{1,x}(x_0,y_0)}{\varphi_{1,y}(x_0,y_0)} = -\frac{30\,x_0 + 5\,y_0}{5\,x_0 + 15}.$$

Für C_2 gilt $\varphi(x,y) = \varphi_2(x,y) = 2\,x^2 + 5\,y$ und

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\varphi_{2,x}(x_0,y_0)}{\varphi_{2,y}(x_0,y_0)} = -\frac{4\,x_0}{5}.$$

Weil die Tangenten an C_1 und C_2 im Punkt (x_0, y_0) parallel sein müssen, gilt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy_1}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{30\,x_0 + 5\,y_0}{5\,x_0 + 15} = -\frac{4\,x_0}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad 150\,x_0 + 25\,y_0 = 20\,x_0^2 + 60\,x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad 25\,y_0 = 20\,x_0^2 - 90\,x_0 \\ &\Leftrightarrow \quad 5\,y_0 = 4\,x_0^2 - 18\,x_0 \quad (\mathrm{I}). \end{aligned}$$

Da (x_0, y_0) sowohl auf C_1 als auch auf C_2 liegt, gilt ausserdem:

$$15\,x_0^2 + 5\,x_0\,y_0 + 5\,y_0 - 27 = 0 \quad \text{(II)}$$

und

$$2\,x_0^2 + 5\,y_0 = 0 \Leftrightarrow 5\,y_0 = -2\,x_0^2 \quad \text{(III)}$$

Aus (I) und (III) erhalten wir:

$$-2\,x_0^2 = 4\,x_0^2 - 18\,x_0 \Leftrightarrow 6\,x_0^2 - 18\,x_0 = 0 \Leftrightarrow 6\,x_0\,(x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \{0, 3\}.$$

Setzt man x_0 in (I) oder (III) ein, erhält man zwei Kandidaten:

$$P_1 = (0, 0)$$

und

$$P_2 = (3, -3.6).$$

Allerdings erfüllt nur P_2 Gleichung (II), d.h., liegt auf C_1. Daher ist $P_2 = (3, -3.6)$ der einzige Punkt mit den geforderten Eigenschaften.

(d1) (**2 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned} P_K(K, A) &= 2\,\left(a\,K^{0.5} + A^{0.5}\right) \cdot 0.5\,a\,K^{-0.5} \\ &= a\,\frac{a\,K^{0.5} + A^{0.5}}{K^{0.5}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_A(K, A) &= 2\,\left(a\,K^{0.5} + A^{0.5}\right) \cdot 0.5\,A^{-0.5} \\ &= \frac{a\,K^{0.5} + A^{0.5}}{A^{0.5}}. \end{aligned}$$

(d2) (**2 Punkte**).
Die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 4)$ ist gegeben durch

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,4)}.$$

Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,4)} &= -\frac{P_K(1,4)}{P_A(1,4)} \\ &= -\left.\frac{a\,\frac{a\,K^{0.5}+A^{0.5}}{K^{0.5}}}{\frac{a\,K^{0.5}+A^{0.5}}{A^{0.5}}}\right|_{(K,A)=(1,4)} \\ &= -a\,\left.\frac{A^{0.5}}{K^{0.5}}\right|_{(K,A)=(1,4)} \\ &= -2\,a \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{dA}{dK}\bigg|_{(1,4)} = 1 \Leftrightarrow -2\,a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☒	☐	☐	☐

1. (a). Aussage $C(x)$ ist äquivalent zu $A(x) \Rightarrow B(x)$.

2. (c). Dies kann an folgenden Beispielen gezeigt werden:

(i) Falls $a_n = n$ und $b_n = n + 1$, gilt $c_n = a_n - b_n = 1$. Daher ist $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und die Antworten (b) und (d) sind falsch.

(ii) Falls $a_n = 2\,n$ und $b_n = n$, gilt $c_n = a_n - b_n = n$. Daher ist $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und Antwort (a) ist falsch.

Die Konvergenz von $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hängt von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

3. (b). Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da

$$|b_n| = |a_n|,$$

ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch beschränkt. Daher ist (b) korrekt und (d) falsch. Ausserdem: Falls $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $a \neq 0$ und monoton, ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und nicht monoton. Daher sind die Antworten (a) und (c) falsch.

4. (d). Den niedrigsten Nettobarwert erhält man mit dem höchsten Zinssatz. Es gilt:

$$\begin{aligned} NPV(i) &= -2'000'000 + \frac{1'000'000}{(1+i)^{10}} + \frac{1'500'000}{(1+i)^{20}} \\ &\approx \begin{cases} -264'661.9 & \text{für } i = 2.35\% \\ -526'477.9 & \text{für } i = 3.45\% \\ -760'867.6 & \text{für } i = 4.65\% \\ -829'025.6 & \text{für } i = 5.05\% \end{cases} \end{aligned}$$

5. (b). Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& \ln(x^3) - \ln(x - \frac{4}{5}\,x^2) = \ln(5) \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\left(\frac{x^3}{x - \frac{4}{5}\,x^2}\right) = \ln(5) \text{ und } x > 0 \text{ und } x - \frac{4}{5}\,x^2 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \ln\left(\frac{x^2}{1 - \frac{4}{5}\,x}\right) = \ln(5) \text{ und } x > 0 \text{ und } x\left(1 - \frac{4}{5}\,x\right) > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{x^2}{1 - \frac{4}{5}\,x} = 5 \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 = 5 - 4\,x \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 4\,x - 5 = 0 \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & (x+5)\,(x-1) = 0 \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x \in \{-5, 1\} \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
\Leftrightarrow\quad & x = 1.
\end{aligned}
$$

6. (b). f ist stetig für $x \neq -2$ und $x \neq -1$, da der Nenner von $\frac{x^2-2\,x-3}{x^2+3\,x+2}$ für alle x ausser -2 und -1 ungleich null ist. Ausserdem gilt für $x \neq -2$ und $x \neq -1$:

$$\frac{x^2 - 2\,x - 3}{x^2 + 3\,x + 2} = \frac{(x+1)\,(x-3)}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}$$

Daraus folgt:

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = \lim_{x \searrow -1} f(x) = -4 = f(-1).$$

Dementsprechend ist f in $x = -1$ stetig.

Allerdings existieren $\lim_{x \nearrow -2} f(x)$ und $\lim_{x \searrow -2} f(x)$ nicht. Daher ist f unstetig in $x = -2$.

7. (d). Man überprüfe die zweiten Ableitungen: f ist genau dann konkav in einem Intervall $I \subseteq D_f$, wenn $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in I$. Es gilt:

(a) $f_1''(x) = 4\,e^{2\,x+1} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f_2''(x) = \frac{-2\,x^2+2}{(x^2+1)^2} > 0$ für alle $x \in (-1, 1)$.

(c) $f_3''(x) = 6\,x > 0$ für alle $x > 0$.

Daher gilt für keine der gegebenen Funktionen $f'' \leq 0$ in D_f.

8. (a). Da f streng monoton wachsend ist, ist ein lokales Maximum von g auch ein lokales Maximum von h.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☒	☐	☐	☐
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☐	☐	☒	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☒	☐	☐	☐

1. (a), da $\varepsilon_f(t) = t\,\rho_f(t)$.

2. (a). Die quadratische Funktion $g(x) = 6 + 5\,x - x^2$ hat ein globales Maximum in $x_0 = \frac{5}{2} \in D_f$. Da $\ln(\cdot)$ streng monoton wachsend ist, hat auch $f(x) = \ln(g(x))$ ein globales Maximum in $x_0 = \frac{5}{2}$.

3. (c). Es gilt:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\,f'''(x_0)\,(x - x_0)^3.$$

Es gilt:

$$f(x_0) = f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,(1+x)^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{3},$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}\,(1+x)^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{2}{9},$$

und

$$f'''(x) = \frac{10}{27}\,(1+x)^{-\frac{8}{3}} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{10}{27}.$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{5}{81}\,x^3.$$

4. (c). Es gilt:

$$(x, y) \in D_f \Leftrightarrow 4 - 3\,x^2 - 2\,y^2 > 0 \Leftrightarrow 3\,x^2 + 2\,y^2 < 2^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} < 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen $\sqrt{\frac{4}{3}}$ und $\sqrt{2}$.

5. (c). Für eine homogene Funktion vom Grad k gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = k.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = k - \varepsilon_{f,x}(x, y) = 1.2 - (3\,x + 1) = -3\,x + 0.2.$$

6. (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x,\lambda\,y) &= \sqrt[5]{(\lambda\,x)^{2.4}\,(\lambda\,y)^{0.6}} + \sqrt{(\lambda\,x)^{0.8}\,(\lambda\,y)^{0.4}} + \sqrt[3]{(\lambda\,x)\,(\lambda\,y)^{0.8}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^3\,x^{2.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{1.2}\,x^{0.8}\,y^{0.4}} + \sqrt[3]{\lambda^{1.8}\,x\,y^{0.8}} \\
&= \lambda^{0.6}\,\sqrt[5]{x^{2.4}\,y^{0.6}} + \lambda^{0.6}\,\sqrt{x^{0.8}\,y^{0.4}} + \lambda^{0.6}\,\sqrt[3]{x\,y^{0.8}} \\
&= \lambda^{0.6}\,\left[\sqrt[5]{x^{2.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}\,y^{0.4}} + \sqrt[3]{x\,y^{0.8}}\right] \\
&= \lambda^{0.6}\,f(x,y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 0.6 ist.

7. (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x,\lambda\,y) &= 4\,(\lambda\,x)^2\,\sqrt{\lambda\,y} + 5\,(\lambda\,y)^2\,\sqrt{5\,(\lambda\,x)} + (\lambda\,x)\,(\lambda\,y)^a \\
&= 4\,\lambda^{2.5}\,x^2\,\sqrt{y} + 5\,\lambda^{2.5}\,y^2\,\sqrt{5\,x} + \lambda^{1+a}\,x\,y^a \\
&= \lambda^{2.5}\,\left[4\,x^2\,\sqrt{y} + 5\,y^2\,\sqrt{5\,x} + \lambda^{1+a-2.5}\,x\,y^a\right].
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f genau dann homogen ist, wenn $1 + a - 2.5 = 0$, d.h., $a = 1.5$.

8. (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
h(\lambda\,x,\lambda\,y) &= f(g(\lambda\,x,\lambda\,y),g(\lambda\,x,\lambda\,y)) \\
&= f(\lambda^2\,g(x,y),\lambda^2\,g(x,y)) \\
&= (\lambda^2)^3\,f(g(x,y),g(x,y)) \\
&= \lambda^6\,h(x,y).
\end{aligned}$$

Daher ist h homogen vom Grad 6.

Mathematik A
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

18. Juli 2015

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**5 Punkte**).

Die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3\left(\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right)^k, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{10}{3}\right\}$$

ist eine geometrische Reihe mit $q(x) = \frac{5\,x+2}{3\,x-10}$. Das Konvergenzkriterium ist $|q(x)| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|q(x)| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{5\,x+2}{3\,x-10}\right|^2 < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (5\,x+2)^2 < (3\,x-10)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 25\,x^2 + 20\,x + 4 < 9\,x^2 - 60\,x + 100 \\
&\Leftrightarrow \quad 16\,x^2 + 80\,x - 96 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 5\,x - 6 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+6)\,(x-1) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x \in (-6, 1).
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $x \in (-6,1)$.

(b) (**7 Punkte**).
Die konstanten Zahlungen am Ende jeden Jahres über einen Zeitraum von T Jahren stellen eine T-jährige nachschüssige Rente dar. Der Barwert aller Zahlungen ist demnach gegeben durch

$$PV = C\,\frac{1-(1+i)^{-T}}{i} = 50'000\,\frac{1-1,01^{T}}{0,01} = 5'000'000\,(1-1,01^{-T})$$

und muss den anfänglichen Schulden in Höhe von $P = 2'500'000$ entsprechen. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
PV = P \quad &\Leftrightarrow \quad 5'000'000\,(1-1,01^{-T}) = 2'500'000 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\,(1-1,01)^{-T} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2 - 2\cdot 1,01^{-T} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 1,01^{-T} = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 1,01^{T} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad T\,\ln(1,01) = \ln(2) \\
&\Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln(2)}{\ln(1,01)} \approx 69,66.
\end{aligned}$$

Die Rückzahlung des Darlehens benötigt also etwa 70 Jahre.

(c) (**5 Punkte**).

Es gilt:

$$\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3\,x+6} = \left(\frac{x+2+1}{x+2}\right)^{3\,(x+2)} = \left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{3\,(x+2)} = \left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^3.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3\,x+6} &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^3\\ &= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^3\\ &= e^3.\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir verwendet, dass wir die Funktion $f(x) = x^3$ aufgrund ihrer Stetigkeit mit dem Grenzprozess vertauschen dürfen. Im letzten Schritt haben wir den Grenzprozess für die Eulersche Zahl e benutzt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

(d1) (**5 Punkte**).

$$\begin{aligned} x\in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x^2+4\,x+4)\geq 0 & \text{(wegen der } \sqrt{\cdot}\text{)}\\ x^2+4\,x+4>0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)\text{)}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2+4\,x+4\geq 1\\ x^2+4\,x+4>0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4\,x+4\geq 1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+4\,x+3\geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)\,(x+1)\geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad x\in\mathbb{R}\setminus(-3,-1).\end{aligned}$$

Es folgt,

$$D_f = \mathbb{R}\setminus(-3,-1).$$

(d2) (**4 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, können wir die erste Ableitung von f benutzen, um die Monotonieeigenschaften von f zu untersuchen. Mit der Kettenregel

erhalten wir:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+4\,x+4)}}}_{>0 \text{ auf } D_f \setminus \{-3,-1\}} \underbrace{\frac{1}{x^2+4\,x+4}}_{>0 \text{ auf } D_f} \underbrace{(2\,x+4)}_{>0 \Leftrightarrow x>-2}.$$

Damit folgt:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1,\infty)$$

und

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-3).$$

Demnach ist f monoton wachsend auf $[-1,\infty)$ und monoton fallend auf $(-\infty,-3]$. Beachte, dass $f(x)$ für $x \in (-3,-1)$ nicht definiert ist. Auf ihrem kompletten Definitionsgebiet ist die Funktion f **nicht** monoton!

Alternative Lösung:

Die Funktionen $\sqrt{\cdot}$ und $\ln(\cdot)$ sind streng monoton wachsend. Die quadratische Funktion $x^2+4\,x+4$ ist dagegen streng monoton fallend für $x \leq -2$ und streng monoton wachsend für $x \geq -2$. Demnach bestimmt diese quadratische Funktion vollständig das Monotonieverhalten der Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet.

Exercise 2

(a1) (**6 Punkte**).
Das Taylor-Polynom dritter Ordnung von f an der Stelle x_0 ist gegeben durch:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ berechnen wir:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) = 1 \\ f'(x) &= -(1+x)^{-2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = -1 \\ f''(x) &= 2\,(1+x)^{-3} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = 2 \\ f'''(x) &= -6\,(1+x)^{-4} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = -6. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2} \cdot 2\,x^2 + \frac{1}{6} \cdot (-6)\,x^3 = 1 - x + x^2 - x^3.$$

Es folgt:

$$f(0,1) \approx P_3(0,1) = 1 - 0,1 + 0,1^2 - 0,1^3 = 1 - 0,1 + 0,01 - 0,001 = 0,909.$$

(a2) (**3 Punkte**).
Gemäss dem Satz von Taylor gilt:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4\,,$$

wobei $\xi \in [0, x]$.
Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = 24\,(1+x)^{-5} \leq 24$$

für alle $x \geq 0$. Folglich erhalten wir:

$$|R_3(x)| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\,x^4 \leq \frac{24}{24}\,x^4 = x^4.$$

(b) (**3 Punkte**).
Es gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}$$

und

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}.$$

Mit

$$f_x(x,y) = 6\,a\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}$$

und

$$f_y(x,y) = 3\,b\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}$$

erhalten wir:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = x\,\frac{6\,a\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}}{3\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}} = 2\,a\,x$$

und

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = y\,\frac{3\,b\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}}{3\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}} = b\,y.$$

Demnach gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(c,c) = \varepsilon_{f,x}(c,c),\ \text{für alle } c>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,a\,c = b\,c,\ \text{für alle } c>0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{b}{2}.$$

(c) (**8 Punkte**).
Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion ist die *Steigung* der Tangente an die Kurve $\varphi(x,y) = 0$ im Punkt (x_0,y_0) gegeben durch:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}.$$

Hier gilt

$$\varphi(x,y) = x^2 + 5\,x\,y + 12\,y - a$$

und

$$\varphi_x(x,y) = 2\,x + 5\,y, \quad \varphi_y(x,y) = 5\,x + 12.$$

Angenommen der Punkt $P = (c,c)$ liegt auf C, ist die Steigung der Tangente an C in P demnach gleich -1 genau dann, wenn

$$-\frac{2\,c+5\,c}{5\,c+12} = -1 \;\Leftrightarrow\; 7\,c = 5\,c+12 \;\Leftrightarrow\; 2\,c = 12 \;\Leftrightarrow\; c = 6.$$

Schliesslich liegt der Punkt $P = (6,6)$ auf der Kurve C genau dann, wenn

$$6^2 + 5\cdot 6\cdot 6 + 12\cdot 6 - a = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 6^2 + 5\cdot 6\cdot 6 + 12\cdot 6 = 288.$$

(d1) (**2 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned} P_K(K,A) &= 4\,\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3 \cdot 0.25\,a\,K^{-0.75} \\ &= a\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3}{K^{0.75}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P_A(K,A) &= 4\,\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3 \cdot 0.75\,A^{-0.25} \\ &= 3\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3}{A^{0.25}}. \end{aligned}$$

(d2) (**2 Punkte**).
Die technische Substitutionsrate im Punkt $(1,16)$ ist gegeben durch

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,16)}.$$

Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA}{dK}\right|_{(K,A)=(1,16)} &= -\left.\frac{P_K(K,A)}{P_A(K,A)}\right|_{(K,A)=(1,16)} \\ &= -\left.\frac{a\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3}{K^{0.75}}}{3\,\frac{\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^3}{A^{0.25}}}\right|_{(K,A)=(1,16)} \\ &= -a\,\left.\frac{A^{0.25}}{3\,K^{0.75}}\right|_{(K,A)=(1,16)} \\ &= -\frac{2}{3}\,a\,. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\left.\frac{dA}{dK}\right|_{(1,16)} = -\frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; -\frac{2}{3}\,a = -\frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; a = 2.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Antwort (a). Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn entweder A und B beide wahr sind, oder wenn A falsch ist. Offensichtlich sind hier für ein gegebenes x entweder $A(x)$ und $B(x)$ beide wahr, oder $A(x)$ ist falsch. Demnach ist die Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$ immer wahr.

2. Antwort (c). Dies kann man sich an den folgenden Beispielen verdeutlichen:

(i) Sei $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n}$. Es folgt $c_n = a_n - (-1)^n\, b_n = 1 + (1 - (-1)^n)\,\frac{1}{n}$ und folglich ist $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Demnach sind die Antworten (b) und (d) falsch.

(ii) Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = 1+\frac{1}{n}$. Es folgt $c_n = a_n-(-1)^n\, b_n = (1-(-1)^n)\,\frac{1}{n}-(-1)^n$ und folglich ist $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. Demnach ist auch Antwort (a) falsch.

Die Konvergenz von $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hängt von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

3. Antwort (d). Betrachte die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_1 = \frac{1}{3}$ und $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_1 = \ln(a_1) = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3)$ und $b_n = \ln(a_n) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist allerdings weder beschränkt noch monoton. Folglich sind die Antworten (a), (b) und (c) falsch.

4. Antwort (a). Den höchsten Nettobarwert erhält man mit dem niedrigsten Zinssatz. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
NPV(i) &= -2'000'000 + \frac{1'000'000}{(1+i)^{10}} + \frac{1'500'000}{(1+i)^{20}} + \frac{1'000'000}{(1+i)^{40}} \\
&\approx \begin{cases} 130'237,1 & \text{für } i = 2,35\% \\ -268'976,1 & \text{für } i = 3,45\% \\ -598'525,7 & \text{für } i = 4,65\% \\ -689'659,3 & \text{für } i = 5,05\% \end{cases}
\end{aligned}
$$

5. Antwort (b). Es gilt:

$$
\begin{aligned}
&\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}\,x\right) + \ln(x) = \ln(5) \text{ und } x > 0 \text{ und } 1 - \frac{4}{5}\,x > 0 \\
\Leftrightarrow\;\; &\ln\left(x^3\right) + \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{4}{5}\,x\right) + \ln(5) \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(x^4\right) = \ln(5-4\,x) \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad x^4 = 5 - 4\,x \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad x^4 + 4\,x - 5 = 0 \text{ und } x > 0 \text{ und } x < \frac{5}{4}.
\end{aligned}$$

Da $x^4 + 4\,x - 5$ für $x > 0$ streng monoton wachsend ist und $1^4 + 4 \cdot 1 - 5 = 0$, ist $x = 1$ die eindeutige Lösung der Gleichung.

6. Antwort (b). Offensichtlich ist f für $x \neq 0$ stetig. Ausserdem erhalten wir durch die Anwendung der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Demnach ist f stetig in $x = 0$ genau dann, wenn $f(0) = a = 1$.

7. Antwort (a). Wir benutzen die zweiten Ableitungen. Tatsächlich ist f auf einem Intervall $I \subseteq D_f$ konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt. Wir berechnen:

(a) $f_1''(x) = \frac{4}{(2\,x+1)^2} > 0$ für alle $x \in D_{f_1} = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(b) $f_2''(x) = \frac{-2}{x^2+2\,x+1} < 0$ für alle $x \in D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(c) $f_3''(x) = 6\,x < 0$ für alle $x < 0$.

Demnach ist nur die Funktion f_1 auf ihrem gesamten Definitionsgebiet konvex.

8. Antwort (b). Es gilt:

$$f'(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{x_0^2+3\,x_0+2}\,(2\,x_0+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_0 = -\frac{3}{2}.$$

Ausserdem gilt:

$$f''(x_0) = e^{x_0^2+3\,x_0+2}\,(2\,x_0+3)^2 + 2\,e^{x_0^2+3\,x_0+2} = e^{x_0^2+3\,x_0+2}\,\left[2 + (2\,x_0+3)^2\right] > 0.$$

Folglich ist $x_0 = -\frac{3}{2}$ lokales Minimum von f.

Exercise 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (a). Es gilt $\varepsilon_f(x) = x\,\rho_f(x)$.

2. Antwort (b). Die quadratische Funktion $g(x) = 6 + c\,x - x^2$ hat ein globales Maximum in $x_0 = \frac{c}{2} \in D_f$. Da $\ln(\cdot)$ streng monoton wachsend ist, hat auch $f(x) = \ln(g(x))$ ein globales Maximum in $x_0 = \frac{c}{2}$. Folglich hat f ein globales Maximum in $x_0 = 1$ genau dann, wenn $c = 2$.

3. Antwort (c). Es gilt:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\,f'''(x_0)\,(x - x_0)^3.$$

Wir berechnen:

$$f(x_0) = f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{4}\,(1 + x)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{4},$$

$$f''(x) = -\frac{3}{16}\,(1 + x)^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{3}{16},$$

und

$$f'''(x) = \frac{21}{64}\,(1 + x)^{-\frac{11}{4}} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{21}{64}.$$

Es folgt:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{32}\,x^2 + \frac{7}{128}\,x^3.$$

4. Antwort (c). Es gilt:

$$\begin{aligned}(x, y) \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad -9\,x^2 - y^2 + 4\,y + 5 > 0 \text{ und } 4\,x^2 + 2\,y - 4 \geq 0\\ &\Leftrightarrow \quad 9\,x^2 + (y - 2)^2 < 9 \text{ und } y \geq -2\,x^2 + 2\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{(y - 2)^2}{3^2} < 1 \text{ und } y \geq -2\,x^2 + 2\,.\end{aligned}$$

Die Ungleichung $x^2 + \frac{(y-2)^2}{3^2} < 1$ beschreibt die Fläche (ohne den Rand) innerhalb einer Ellipse mit Zentrum $(0, 2)$ und Halbachsen 1 und 3. Die Ungleichung $y \geq -2\,x^2 + 2$ beschreibt die Fläche über einer nach oben geöffneten Parabel mit Scheitelpunkt $(0, 2)$. Folglich wird das Definitionsgebiet von f in (c) dargestellt.

5. Antwort (a). Da für eine homogene Funktion vom Grad k gemäss Euler gilt, dass

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = k\,,$$

erhalten wir:

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = k - \varepsilon_{f,x}(x,y) = 2 - (5\,x+1) = -5\,x+1.$$

6. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \sqrt[5]{(\lambda\,x)^{3.4}\,(\lambda\,y)^{0.6}} + \sqrt{(\lambda\,x)^{0.8}\,(\lambda\,y)^{0.8}} + \sqrt[3]{(\lambda\,x)^{1.6}\,(\lambda\,y)^{0.7}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^4\,x^{3.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{1.6}\,x^{0.8}\,y^{0.8}} + \sqrt[3]{\lambda^{2.3}\,x^{1.6}\,y^{0.7}} \\
&= \lambda^{0.8}\,\sqrt[5]{x^{3.4}\,y^{0.6}} + \lambda^{0.8}\,\sqrt{x^{0.8}\,y^{0.8}} + \lambda^{\frac{2.3}{3}}\,\sqrt[3]{x^{1.6}\,y^{0.7}} \\
&= \lambda^{0.8}\,\left[\sqrt[5]{x^{3.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}\,y^{0.8}} + \lambda^{\frac{2.3}{3}-0.8}\,\sqrt[3]{x^{1.6}\,y^{0.7}}\right].
\end{aligned}$$

Folglich ist f nicht homogen.

7. Antwort (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{3.1}\,\sqrt{\lambda\,y} + 6\,(\lambda\,y)^{3.5}\,\sqrt{5\,(\lambda\,x)^{0.2}} + (\lambda\,x)^a\,(\lambda\,y)^{2\,a} \\
&= \lambda^{3.6}\,x^{3.1}\,\sqrt{y} + 6\,\lambda^{3.6}\,y^{3.5}\,\sqrt{5\,x^{0.2}} + \lambda^{a+2\,a}\,x^a\,y^{2\,a} \\
&= \lambda^{3.6}\,\left[x^{3.1}\,\sqrt{y} + 6\,y^{3.5}\,\sqrt{5\,x^{0.2}} + \lambda^{3\,a-3.6}\,x^a\,y^{2\,a}\right].
\end{aligned}$$

Demnach ist f homogen genau dann, wenn $\lambda^{3\,a-3.6} = 1$, d.h., $3\,a - 3.6 = 0$. Es folgt $a = 1.2$.

8. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
h(\lambda\,x, \lambda\,y) &= f((g(\lambda\,x, \lambda\,y))^2, (g(\lambda\,x, \lambda\,y))^2) \\
&= f((\lambda^2\,g(x,y))^2, (\lambda^2\,g(x,y))^2) \\
&= f(\lambda^4\,(g(x,y))^2, \lambda^4\,(g(x,y))^2) \\
&= (\lambda^4)^3\,f((g(x,y))^2, (g(x,y))^2) \\
&= \lambda^{12}\,h(x,y).
\end{aligned}$$

Also ist h homogen vom Grad 12. Aus der Eulerschen Relation folgt:

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12.$$

Herbstsemester 2016

Dr. Reto Schuppli

Mathematik A
Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2016

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi[1]

31. Januar 2016

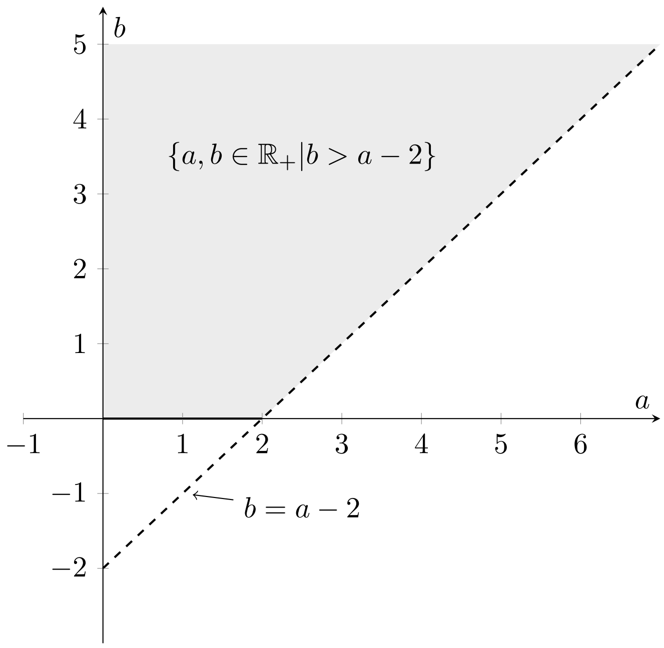
[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**6 Punkte**).
Die Reihe $\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-a}{1+b}\right)^t$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1-a}{1+b}$. Daher konvergiert sie genau dann, wenn $|q| < 1$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
|q| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1-a}{1+b}\right| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1-a}{1+b} < 1 \\
&\overset{1+b>0}{\Leftrightarrow} \quad -1-b < 1-a < 1+b \\
&\overset{a,b\in\mathbb{R}_+}{\Leftrightarrow} \quad b > a-2.
\end{aligned}$$



Für $b > a-2$ und $a, b \in \mathbb{R}_+$ folgt:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-a}{1+b}\right)^t = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1-a}{1+b}} = \frac{1+b}{a+b}.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die regelmässigen, konstanten Zahlungen über $n = 10$ Jahre hinweg stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Daher erfüllen die ursprünglichen Einzahlungen C^I_{alt}:

$$\begin{aligned} A_n &= C^I_{alt}\,\frac{(1+i)^n-1}{i} \\ \Leftrightarrow\quad 100'000 &= C^I_{alt}\,\frac{(1+0,02)^{10}-1}{0,02} \\ \Leftrightarrow\quad C^I_{alt} &= \frac{2'000}{1,02^{10}-1} \approx 9'132,65 \text{ (CHF)}. \end{aligned}$$

Die bereits angesparte Summe nach 5 Jahren beträgt:

$$\begin{aligned} A_5 &= C^I_{alt}\,\frac{(1+i)^5-1}{i} \\ &= \frac{100'000\cdot i}{(1+i)^{10}-1}\,\frac{(1+i)^5-1}{i} \\ &= 100'000\,\frac{(1+i)^5-1}{(1+i)^{10}-1} \\ &\approx 47'526,70 \text{ (CHF)}. \end{aligned}$$

Die neuen Raten C^I_{neu} müssen folgende Bedingung erfüllen, welche besagt, dass der Wert des bereits gezahlten Betrags A_5 nach weiteren 5 Jahren zusammen mit dem Betrag, welcher in den zweiten 5 Jahren gezahlt wird, $120'000$ CHF entsprechen muss:

$$\begin{aligned} 120'000 &= A_5\,1.02^5 + C^I_{neu}\,\frac{1,02^5-1}{0.02} \\ \Leftrightarrow\quad C^I_{neu} &= \frac{120,000 - A_5\,1,02^5}{1.02^5-1} \approx 12'975,80 \text{ (CHF)}. \end{aligned}$$

Daher betragen die neuen jährlichen Zahlungen nach 5 Jahren $12'975,80$ CHF.

(c) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\,\ln(1+x)} \\ &\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \\ &\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1+x-x}{(1+x)^2}} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d1) (**4 Punkte**).

$$x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 - x > 0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)\text{)} \\ 1 + x > 0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)\text{)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 < x < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in (-1, 1).$$

Daher erhalten wir:

$$D_f = (-1, 1).$$

Da f auf D_f stetig ist mit $\lim_{x \searrow -1} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = -\infty$ gilt, dass $R_f = \mathbb{R}$.

(d2) (**3 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, können wir die erste Ableitung von f nutzen, um die Monotonieeigenschaften von f zu untersuchen. Wir wenden die Kettenregel an und erhalten:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{\underbrace{(1+x)(1-x)}_{>0 \text{ für } x \in D_f}} < 0.$$

Daher gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in D_f$ und folglich ist f monoton fallend im gesamten Definitionsbereich.

(d3) (**3 Punkte**).

Für $y \in R_f$ gilt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\,\ln(1-x) - \frac{1}{2}\,\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ \Leftrightarrow &\quad 2\,y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ \Leftrightarrow &\quad e^{2\,y} = \frac{1-x}{1+x} \\ \Leftrightarrow &\quad e^{2\,y}\,(1+x) = 1 - x \\ \Leftrightarrow &\quad e^{2\,y} + x\,e^{2\,y} + x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad x\,(1 + e^{2\,y}) = 1 - e^{2\,y} \\ \Leftrightarrow &\quad x = \frac{1 - e^{2\,y}}{1 + e^{2\,y}}. \end{aligned}$$

Wegen $D_{f^{-1}} = R_f$ und $R_{f^{-1}} = D_f$ folgt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{1 - e^{2\,x}}{1 + e^{2\,x}}.$$

Aufgabe 2

(a1) (**4 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = \ln(1) = 0\\
f'(x) &= \frac{1}{2+x} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{2}\\
f''(x) &= -\frac{1}{(2+x)^2} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{1}{4}\\
f'''(x) &= \frac{2}{(2+x)^3} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^3.$$

Ausserdem erhalten wir:

$$\ln(1.5) = f(1) \approx P_3(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{5}{12}.$$

(a2) (**4 Punkte**).
Zunächst berechnen wir mit der Definition des Restgliedes:

$$R_3(1) = f(1) - P_3(1) = \ln(1.5) - \frac{5}{12} \approx -0,011.$$

Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$$

mit $\xi \in [0, x]$.
Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(2+x)^4}.$$

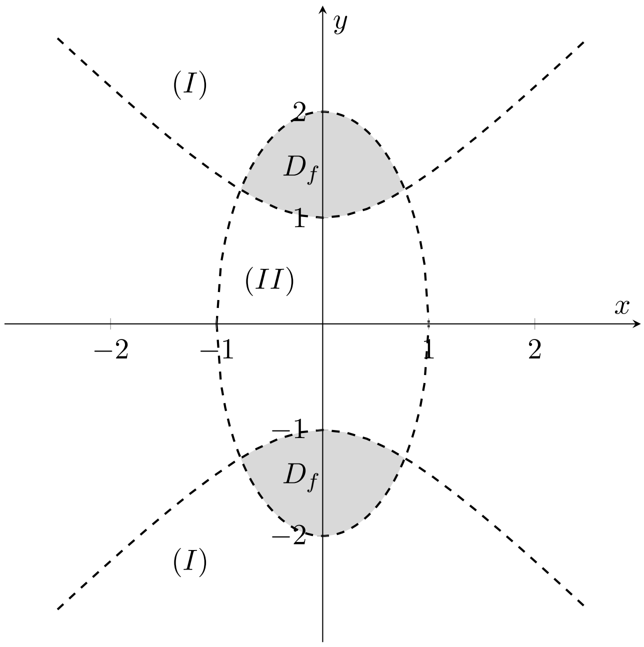
Daraus folgt für $x \in [0, 2]$:

$$|R_3(x)| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\,x^4 = \frac{6}{4!\,(2+\xi)^4}\,x^4 = \frac{1}{4}\quad \underbrace{\frac{1}{(2+\xi)^4}}_{\leq \frac{1}{2^4} \text{ für } \xi \geq 0} \quad \underbrace{x^4}_{\leq 2^4 \text{ für } x \in [0,2]} \quad \leq \frac{1}{4}.$$

(b) (**3 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - x^2 - 1 > 0 \\ 4 - 4\,x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 > x^2 + 1 \ (I) \\ x^2 + \frac{y^2}{4} < 1 \ (II) \end{cases}.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 2$ geschnitten mit der Fläche oberhalb bzw. unterhalb der nach oben und unten geöffneten Hyperbel (I) mit Scheitel $(0,1)$ und $(0,-1)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 1$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**6 Punkte**).
Der Punkt $P = (-1,1)$ erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

(i) $P = (-1,1)$ liegt auf der Niveaulinie $f(x,y) = 0$, d.h., $f(-1,1) = a+b-3 = 0$. Daher gilt $a + b = 3$;

(ii) $P = (-1,1)$ liegt auf der Kurve $\varphi(x,y) = 0$, d.h., $\varphi(-1,1) = -c + 1 + 3 = 0$. Daher gilt $c = 4$;

(iii) Die Kurven $f(x,y) = 0$ und $\varphi(x,y) = 0$ berühren sich im $P = (-1,1)$ (gleiche Steigungen). Gemäss dem Satz von der impliziten Funktion gilt:

$$\begin{aligned}
& -\frac{f_x(-1,1)}{f_y(-1,1)} = -\frac{\varphi_x(-1,1)}{\varphi_y(-1,1)} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{2\,a\,x - b\,y}{-b\,x}\Big|_{(x,y)=(-1,1)} = -\frac{c\,y}{c\,x + 2\,y}\Big|_{(x,y)=(-1,1)} \\
\overset{c=4}{\Leftrightarrow} \quad & -\frac{-2\,a - b}{b} = -\frac{4}{-2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\,a + b = 2\,b \\
\Leftrightarrow \quad & b = 2\,a.
\end{aligned}$$

Aus (i) und (iii) folgt, dass $3\,a = 3$, d.h., $a = 1$ und $b = 2$.

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad 2 ist, folgt mit der Eulerschen Relation :

$$x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y) = 2\, f(x,y).$$

Aus

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{x}{f(x,y)}\, f_x(x,y)$$

folgt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y)\, f(x,y) + y\, f_y(x,y) = 2\, f(x,y),$$

d.h.,

$$f(x,y) = \frac{y\, f_y(x,y)}{2 - \varepsilon_{f,x}(x,y)}.$$

Wir setzen die Terme für $f_y(x,y)$ und $\varepsilon_{f,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x\,y\,(\ln(y) - \ln(x) - 1)}{2 - \frac{\ln(y)-\ln(x)-1}{\ln(y/x)}} \\
&= \frac{x\,y\,(\ln(y) - \ln(x) + 1)\,(\ln(y) - \ln(x))}{2\,\ln(y) - 2\,\ln(x) - \ln(y) + \ln(x) + 1} \\
&= \frac{x\,y\,(\ln(y) - \ln(x) + 1)\,(\ln(y) - \ln(x))}{\ln(y) - \ln(x) + 1} \\
&= x\,y\,(\ln(y) - \ln(x)).
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$f(x,y) = x\,y\,(\ln(y) - \ln(x)) = x\,y\,\ln(y/x).$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☒	☐	☐
2.	☒	☐	☐	☐
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☐	☐	☒

1. Antwort (b). Die Aussage $B \Rightarrow A \vee B$ ist eine Tautologie, da $A \vee B$ immer wahr ist, wenn B wahr ist.

2. Antwort (a). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\,n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{=0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{=e} \\
&= 0\,e \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Antwort (b). Es gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\,\cos(x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{2\,\sin(x)} = \frac{\cos(0)}{2\,\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. Antwort (d). Der Barwert von Projekt I ist $-100'000 + \frac{120'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-80'000 + \frac{100'000}{(1+i)^2}$. Daher wäre Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-100'000 + \frac{120'000}{(1+i)^2} > -80'000 + \frac{100'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow \frac{20'000}{(1+i)^2} > 20'000.$$

Die letzte Ungleichung wird für kein $i > 0$ erfüllt.

5. Antwort (a). Es gilt:

$$\begin{aligned} &3\ \log_a(x) = 2\ \log_a(8) \\ &\Leftrightarrow \quad \log_a(x^3) = \log_a(8^2) \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 = 8^2 = 2^6 \\ &\overset{x\in\mathbb{R}_{++}}{\Leftrightarrow} \quad x = 2^2 = 4. \end{aligned}$$

6. Antwort (a). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq \frac{\pi}{2}$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{a\ \cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-a\ \sin(x)}{1} = -a.$$

Demnach ist f stetig in $x = \frac{\pi}{2}$ genau dann, wenn $a = -2$.

7. Antwort (d). Da f monoton fallend zwischen den beiden lokalen Extrema ist, muss die Ableitung f' dort negativ sein. Der einzige Graph mit dieser Eigenschaft ist (d). In Antwort (b) und (c) passen die Nullstellen der Ableitung nicht zu den Extrema der Funktion.

8. Antwort (d). Wegen $\rho_f(t) = \frac{\varepsilon_f(t)}{t}$ gilt, $\rho_f(t) = \frac{t\ \ln(t)+e^{3\,t}}{t} = \ln(t) + \frac{e^{3\,t}}{t}$. Demnach ist keine der Antworten (a)-(c) korrekt.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☒	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☒	☐	☐

1. Antwort (d). Wegen

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\frac{2\,x\,e^x + x^2\,e^x}{x^2\,e^x} = \frac{(2+x)\,x^2\,e^x}{x^2\,e^x} = 2 + x,$$

ist $\varepsilon_f(x) > 1$ für alle $x \in \mathbb{R}_{++}$. Daher ist f elastisch für alle $x > 0$.

2. Antwort (d).Es gilt:

$$f'(x) = e^{x^2} + x\,e^{x^2}\,(2\,x) + 1 = e^{x^2}\,(1 + 2\,x^2) + 1 > 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher ist f streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ und hat keine lokalen Extremstellen auf $\mathbb{R}_{++}$.

3. Antwort (c). Es gilt:

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\,f'''(x_0)\,(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}\,f^{(4)}(x_0)\,(x-x_0)^4.$$

Demnach muss gelten, dass

$$a = \frac{f''(0)}{2!}.$$

Wir berechnen:

$$f'(x) = e^{x^2} + (x+1)\,e^{x^2}\,(2\,x) = (2\,x^2 + 2\,x + 1)\,e^{x^2}$$

und

$$f''(x) = (4\,x + 2)\,e^{x^2} + (2\,x^2 + 2\,x + 1)\,e^{x^2}\,(2\,x) = (4\,x^3 + 4\,x^2 + 6\,x + 2)\,e^{x^2}.$$

Daher ist $f''(0) = 2$ und

$$a = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1.$$

4. Antwort (b). Es gilt:

$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 3 - x^2 + 2\,x - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\,x + y^2 < 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 4.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 2.

5. Antwort (d). Hinreichend ist nach dem Satz von der impliziten Funktion, Theorem 11.3, dass $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Antwort (b) würde $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$ erlauben, solange $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ und widerspricht daher dem Theorem 11.3.

6. Antwort (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= 8\left(\frac{2}{\lambda\,x} + \frac{1}{2\,\lambda\,y}\right)^{-0.5} \\ &= 8\left(\frac{1}{\lambda}\left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2\,y}\right]\right)^{-0.5} \\ &= \lambda^{0.5}\,8\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2\,y}\right)^{-0.5} \\ &= \lambda^{0.5}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 0.5 ist.

7. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= e^{\lambda\,x}\left(\frac{3\,\lambda\,x}{\lambda\,y} + 1\right)\sqrt{(\lambda\,x)^2 + 5\,(\lambda\,y)^2} \\ &= e^{\lambda\,x}\left(\frac{3\,x}{y} + 1\right)\sqrt{x^2 + 5\,y^2}\,\lambda \\ &= \lambda\,e^{(\lambda-1)\,x}\,e^{x}\left(\frac{3\,x}{y} + 1\right)\sqrt{x^2 + 5\,y^2} \\ &= \lambda\,e^{(\lambda-1)\,x}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Daher ist f nicht homogen.

8. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a+1}\,(\lambda\,y)^{a-3} + \ln\left(\frac{2\,\lambda\,x}{\lambda\,y}\right) \\ &= \lambda^{2\,a-2}\,x^{a+1}\,y^{a-3} + \ln\left(\frac{2\,x}{y}\right). \end{aligned}$$

Daher ist f homogen genau dann, wenn $\lambda^{2\,a-2} = 1$, d.h., $2\,a - 2 = 0$. Daher gilt $a = 1$.

Mathematik A
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

13. Juli 2017

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

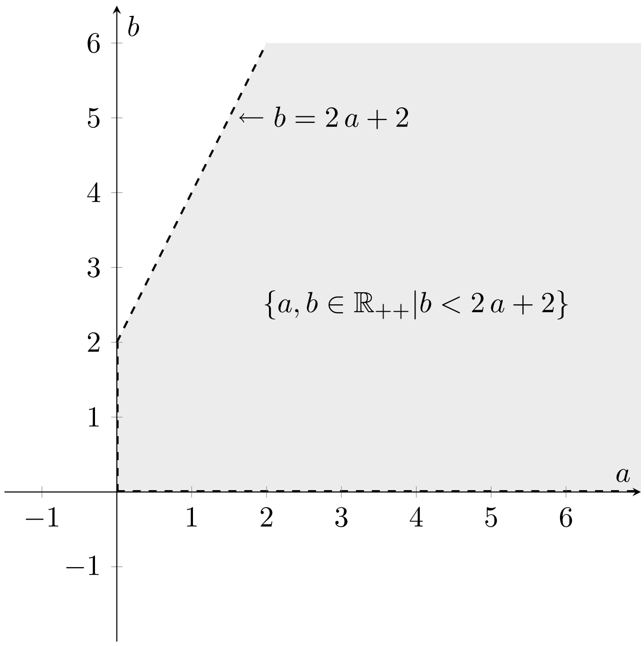
Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**6 Punkte**).

Die Reihe $\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-b}{1+2\,a}\right)^t$ ist eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1-b}{1+2\,a}$. Daher konvergiert sie genau dann, wenn $|q| < 1$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
|q| < 1 \quad & \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1-b}{1+2\,a}\right| < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad -1 < \frac{1-b}{1+2\,a} < 1 \\
& \overset{1+2\,a>0}{\Leftrightarrow} \quad -1-2\,a < \underbrace{1-b < 1+2\,a}_{\text{wahr für alle } a,b\in\mathbb{R}_{++}} \\
& \overset{a,b\in\mathbb{R}_{++}}{\Leftrightarrow} \quad 0 < b < 2\,a+2.
\end{aligned}
$$



Für $b < 2\,a+2$ und $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ folgt:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-b}{1+2\,a}\right)^t = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1-b}{2\,a+1}} = \frac{2\,a+1}{2\,a+b}.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die regelmässigen, konstanten Zahlungen über $C^I = 30'000$ CHF stellen eine nachschüssige 16-jährige Rente dar. Der Wert dieser Rente ist demnach nach 16 Jahren:

$$\begin{aligned} A_{16}^I &= C^I \, \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= 30'000 \, \frac{1,05^{16} - 1}{0,05} \\ &\approx 709'724,75 \text{ (CHF)}, \end{aligned}$$

und ihr Barwert entspricht:

$$P_{10}^I = \frac{A_{16}^I}{(1+0,05)^{16}} = \frac{30'000}{0,05} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{16}} \approx 325'133,10 \text{ (CHF)}.$$

Die konstanten Zahlungen B am Anfang jeden Jahres über 10 Jahre entsprechen dagegen einer 10-jährigen vorschüssigen Rente mit Barwert:

$$P_{10}^D = \frac{B}{0,05} \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05^{10}}.$$

Aus der Gleichung $P_{16}^I = P_{10}^D$ folgt:

$$\frac{30'000}{0,05} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{16}} = \frac{B}{0,05} \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05^{10}}.$$

Damit gilt:

$$B = \frac{30'000}{1,05^7} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{10} - 1} \approx 40'101,15 \text{ (CHF)}.$$

(c) (**4 Punkte**).

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2\,t}}{\sqrt{t+4} - \sqrt{3\,t}} \\ &\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \quad \lim_{t \to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+2}} - \frac{1}{\sqrt{2\,t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+4}} - \frac{3}{2\sqrt{3\,t}}} \\ &= \quad \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{2\sqrt{6}}} \\ &= \quad \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{2}{2\sqrt{6}}} \\ &= \quad \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

(d1) (**4 Punkte**).

$$x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{4-x} > 0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)) \\ 4-x \geq 0 & \text{(wegen der } \sqrt{(\cdot)}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4-x > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x < 4.$$

Daher erhalten wir:

$$D_f = (-\infty, 4).$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} -\infty < x < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{4-x} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad -\infty < \ln(\sqrt{4-x}) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad -\infty < 1 - \ln(\sqrt{4-x}) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < e^{1-\ln(\sqrt{4-x})} < \infty \end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$W_f = \mathbb{R}_{++}.$$

(d2) (**3 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, können wir die erste Ableitung von f nutzen, um die Monotonieeigenschaften von f zu untersuchen. Wir wenden die Kettenregel an und erhalten:

$$f'(x) = \underbrace{e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}}_{>0} \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)}_{<0} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}_{>0} \underbrace{(-1)}_{<0} > 0.$$

Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$ und folglich ist f streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich.

(d3) (**3 Punkte**).
Für $y \in W_f$ gilt:

$$\begin{aligned} y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})} = e^1 \cdot e^{-\ln(\sqrt{4-x})} &= \frac{e}{\sqrt{4-x}} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{e}{y} &= \sqrt{4-x} \\ \Leftrightarrow \quad 4-x &= \frac{e^2}{y^2} \\ \Leftrightarrow \quad x &= 4 - \frac{e^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Wegen $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$ folgt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\infty, 4), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = 4 - \frac{e^2}{x^2}.$$

Aufgabe 2

(a1) (**4 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = (1+0)^{\frac{1}{4}} = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= -\frac{3}{16}\,(1+x)^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{3}{16} \\
f'''(x) &= \frac{21}{64}\,(1+x)^{-\frac{11}{4}} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{21}{64}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{32}\,x^2 + \frac{7}{128}\,x^3.$$

Ausserdem erhalten wir:

$$\sqrt[4]{1.5} = f(0,5) \approx P_3(0.5) = \frac{1135}{1024} \approx 1,108398.$$

(a2) (**4 Punkte**).
Zunächst berechnen wir mit der Definition des Restgliedes:

$$R_3(0,5) = f(0,5) - P_3(0,5) = \sqrt[4]{0,5} - \frac{1135}{1024} \approx 0,0017$$

Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$$

für ein $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{231}{256}\,(1+x)^{-\frac{15}{4}}.$$

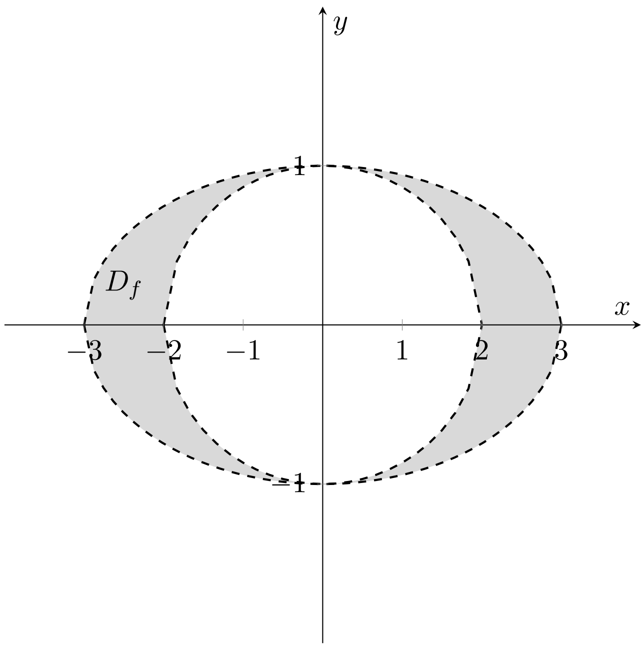
Daraus folgt für $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|R_3(x)| &= \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\, x^4 \\
&= \frac{1}{4!}\,\frac{231}{256}\,(1+\xi)^{\frac{-15}{4}}\, x^4 \\
&= \frac{77}{2048}\quad \underbrace{(1+\xi)^{\frac{-15}{4}}}_{\leq 1 \text{ für } \xi \in [0,1]} \underbrace{x^4}_{\leq 1 \text{ für } x \in [0,1]} \\
&\leq \frac{77}{2048} \\
&\approx 0{,}037 < 0{,}04.
\end{aligned}$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 4\,y^2 - 4 > 0 \\ 9 - x^2 - 9\,y^2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} > 1 \; (I) \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} < 1 \; (II) \end{array} \right. .$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 3$ und $b = 1$ geschnitten mit der Fläche ausserhalb einer Ellipse (I) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**6 Punkte**).
Die Ebene Γ erfüllt die Koordinatengleichung

$$\Gamma\,:\, z = 10\,x - 2\,y - 14.$$

Wir definieren die Funktion g durch $g(x,y) = 10\,x - 2\,y - 14$, sodass gilt

$$\Gamma\,:\, z = g(x,y).$$

Die folgenden drei Bedingungen müssen erfüllt sein:

(i) $P = (2,-1,z_0)$ liegt in der Ebene Γ, d.h. $z_0 = g(-2,1) = 8$.

(ii) $P = (2,-1,z_0)$ gehört zum Graphen von f, d.h.

$$z_0 = f(2,-1) = 2^3 + a\cdot 2\cdot(-1) + b\cdot(-1)^2 + c \Leftrightarrow 8 = 8 - 2\,a + b + c \Leftrightarrow c = 2\,a - b.$$

(iii) Die partiellen Ableitungen der Funktionen f und g haben im Punkt $(x_0,y_0) = (2,-1)$ denselben Wert. Es gilt:

$$f_x(x,y) = 3\,x^2 + a\,y$$

und

$$g_x(x,y) = 10.$$

Folglich erhalten wir:

$$f_x(2,-1) = g_x(2,-1) \Leftrightarrow 12 - a = 10 \Leftrightarrow a = 2.$$

Genauso gilt:

$$f_y(x,y) = a\,x + 2\,b\,y$$

und

$$g_y(x,y) = -2.$$

Wir berechnen:

$$f_y(2,-1) = g_y(2,-1) \Leftrightarrow 2\,a - 2\,b = -2 \Leftrightarrow 2\,b = 2\,a + 2 \overset{a=2}{\Leftrightarrow} b = 3.$$

Aus (ii) folgt schliesslich $c = 1$.

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad 2 ist, folgt mit der Eulerschen Relation:

$$x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) = 2\,f(x,y).$$

Aus

$$f_x(x,y) = \frac{2}{x^3}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,x$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{2}{y^3}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,y$$

folgt:

$$\begin{aligned}
2\,f(x,y) &= x\,f_x(x,y) + y\,f_y(x,y) \\
&= x\,\left[\frac{2}{x^3}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,x\right] + y\,\left[\frac{2}{y^3}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,y\right] \\
&= \frac{2}{x^2}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + \frac{2}{y^2}\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,x^2 + 2\,y^2 \\
&= 2\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-2} + 2\,x^2 + 2\,y^2 \\
&= 2\,\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-1} + 2\,x^2 + 2\,y^2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten demnach:

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)^{-1} + x^2 + y^2.$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (c). Die Implikation $B \Rightarrow A \wedge B$ ist falsch genau dann, wenn B wahr und A falsch ist.

2. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)^{3\,n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)^{n}\right]^3 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-0,5)}{n}\right)^{n}\right]^3 \\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-0,5)}{n}\right)^{n}\right]^3 \\
&= \left(e^{-0,5}\right)^3 \\
&= e^{-1,5} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^3}}.
\end{aligned}$$

3. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi\,x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2\,(x-1)}{-\pi\,\sin(\pi\,x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2}{-\pi^2\,\cos(\pi\,x)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

4. Die Antwort ist (c). Der Barwert von Projekt I ist $-180'000+\frac{220'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-200'000+\frac{240'000}{(1+i)^2}$. Daher ist Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-180'000+\frac{220'000}{(1+i)^2} > -200'000+\frac{240'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 20'000 > \frac{20'000}{(1+i)^2}.$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $i>0$ erfüllt.

5. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\begin{aligned} 2\ \log_a(x) &= 3\ \log_a(4) \\ \Leftrightarrow&\quad \log_a(x^2) = \log_a(4^3) \\ \Leftrightarrow&\quad x^2 = 4^3 = 2^6 \\ \overset{x\in\mathbb{R}_{++}}{\Leftrightarrow}&\quad x = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

6. Die Antwort ist (b). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq \frac{\pi}{4}$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{a\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Demnach ist f stetig in $x = \frac{\pi}{4}$ genau dann, wenn

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}.$$

7. Die Antwort ist (a). f' is negativ genau dann, wenn f monoton fallend ist. Der einzige Graph mit dieser Eigenschaft ist (a).

8. Die Antwort ist b). Wegen $\varepsilon_f(t) = t\,\rho_f(t)$ gilt:

$$\varepsilon_f(t) = t\ (t\ \ln(t) + e^{4\,t}) = t^2\ \ln(t) + t\,e^{4\,t}.$$

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Die Antwort ist (c). Wegen

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\frac{2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = \frac{(2-x)\,x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = 2 - x,$$

ist $\varepsilon_f(x) > 1$ (elastisch) für alle $x < 1$ und $\varepsilon_f(x) < 1$ (unelastisch) für alle $x > 1$.

2. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$f'(x) = e\,x^{e-1} + (x+1)\,e^x$$

und

$$f''(x) = e\,(e-1)\,x^{e-2} + (x+2)\,e^x.$$

Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{++}$ gilt, hat f keinen Wendepunkt.

3. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\,f'''(x_0)\,(x-x_0)^3 + \frac{1}{4!}\,f^{(4)}(x_0)\,(x-x_0)^4.$$

Demnach muss die Bedingung

$$a = \frac{f''(0)}{2!}$$

erfüllt sein. Es gilt:

$$f'(x) = 2\,x\,e^x + (x^2+1)\,e^x = (x^2+2\,x+1)\,e^x$$

und

$$f''(x) = (2\,x+2)\,e^x + (x^2+2\,x+1)\,e^x = (x^2+4\,x+3)\,e^x.$$

Folglich ist $f''(0) = 3$ und

$$a = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{3}{2}.$$

4. Die Antwort ist (a). Es gilt:

$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 9 - 4\,x^2 - 4\,y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\frac{3}{2}$.

5. Die Antwort ist (b). Hinreichend ist nach dem Satz von der impliziten Funktion, Theorem 11.3, dass $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Diese Bedingung wird lediglich in Antwort (b) aufgeführt.

6. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= 8\left(\frac{5}{(\lambda\, x)^2} + \frac{1}{5\,\lambda\, x\,\lambda\, y}\right)^{-0{,}5} \\ &= 8\left(\frac{5}{\lambda^2\, x^2} + \frac{1}{5\,\lambda^2\, x\, y}\right)^{-0{,}5} \\ &= 8\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{-0{,}5}\left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5\, x\, y}\right)^{-0{,}5} \\ &= \lambda\, 8\left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5\, x\, y}\right)^{-0{,}5} \\ &= \lambda\, f(x, y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 1 bzw. linear homogen ist.

7. Die Antwort ist (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= e\left(1 + \frac{4\,\lambda\, y}{\lambda\, x}\right)\sqrt{7\,(\lambda\, x)^2 + (\lambda\, x)\,(\lambda\, y)} \\ &= e\left(1 + \frac{4\, y}{x}\right)\sqrt{\lambda^2\,(7\, x^2 + x\, y)} \\ &= e\left(1 + \frac{4\, y}{x}\right)\lambda\sqrt{7\, x^2 + x\, y} \\ &= \lambda\, e\left(1 + \frac{4\, y}{x}\right)\sqrt{7\, x^2 + x\, y} \\ &= \lambda\, f(x, y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 1 bzw. linear homogen ist.

8. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= (\lambda\, x)^{a-1}\,(\lambda\, y)^{a+6} + \sqrt{(\lambda\, x)^2 + (\lambda\, y)^2} \\ &= \lambda^{2\,a+5}\, x^{a-1}\, y^{a+6} + \lambda\sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Daher ist f homogen genau dann, wenn $\lambda^{2\,a+5} = \lambda$, d.h., $2\,a + 5 = 1$. Es folgt $a = -2$.

Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A
Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

30. Januar 2018

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**4 Punkte**).

Zunächst nutzen wir die Eigenschaft $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a\,b)$ (für $a, b > 0$), um die Logarithmusterme zu vereinfachen, und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2}+4\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x-2}-4\right)\,\left(\sqrt{x-2}+4\right)\right) \\ &= \ln(x-2-16) \\ &= \ln(x-18). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist folglich genau dann definiert, wenn $x-18 > 0$, d.h., $x > 18$. Wir überprüfen, dass für $x > 18$ die beiden Summanden in der ersten Zeile definiert sind und damit die Vereinfachung von Zeile 1 zu Zeile 2 zulässig ist. Es folgt:

$$D_f = (18, \infty).$$

Ausserdem gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 18 \Leftrightarrow f(x) = \ln(x-18) \in \mathbb{R}$$

und folglich

$$R_f = \mathbb{R}.$$

Ohne die vorangehende Termvereinfachung erhält man die Bedingung an das Definitionsgebiet von f wie folgt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2}-4 > 0 \\ \sqrt{x-2}+4 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-4 > 0 \Leftrightarrow x-2 > 16 \Leftrightarrow x > 18.$$

(a2) (**3 Punkte**).

Wir verwenden das folgende Resultat: Ist f zweimal differenzierbar mit $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng konkav auf (a, b).

In unserem Fall gilt $f(x) = \ln(x-18)$, d.h., $f'(x) = \frac{1}{x-18}$ und $f''(x) = \frac{-1}{(x-18)^2}$. Demnach gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (18, \infty)$ und folglich ist die Funktion f streng konkav auf ihrem kompletten Definitionsgebiet.

(a3) (**3 Punkte**).

Für $y \in R_f = \mathbb{R}$ gilt:

$$y = \ln(x - 18) \Leftrightarrow e^y = x - 18 \Leftrightarrow e^y + 18 = x.$$

Mit $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}$ und $R_{f^{-1}} = D_f = (18, \infty)$ folgt:

$$f^{-1} \,:\, \mathbb{R} \to (18, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = e^x + 18.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die konstanten Zahlungen über $10'000$ CHF am Ende jeden Jahres für die *ersten* 5 Jahre stellen eine nachschüssige 5-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 5 Jahren beträgt

$$A_5 = 10'000\,\frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \approx 50'502.50 \text{ (CHF)}.$$

Die konstanten Zahlungen C^I CHF am Ende jeden Jahres für die *nächsten* 10 Jahre stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 10 Jahren (d.h. am Ende des 15. Jahres) beträgt

$$A_{10} = C^I \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}.$$

Der Barwert zum Zeitpunkt 0 von A_5 und A_{10} muss $1'000'000$ CHF entsprechen, d.h.,

$$\begin{aligned}
&1'000'000 = \frac{A_5}{(1 + 0.5\%)^5} + \frac{A_{10}}{(1 + 0.5\%)^5\,(1 + 2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 = A_5 + \frac{A_{10}}{(1 + 2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 = 10'000 \cdot \frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} + \frac{C^I}{(1 + 2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{C^I}{(1 + 2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} = 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I = \frac{1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%}}{\frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}}\,(1 + 2.0\%)^{10} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I \approx 108'515.40 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

(c) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}} &\overset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y\to\infty} 2\,y^2\,e^{-y} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{2\,y^2}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4\,y}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4}{e^y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) (**6 Punkte**).
Sei a_n die Anzahl der in der n-ten Stunde gerannten Kilometer. Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 20, \\
a_n &= a_{n-1}\,(1-a), \quad n = 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

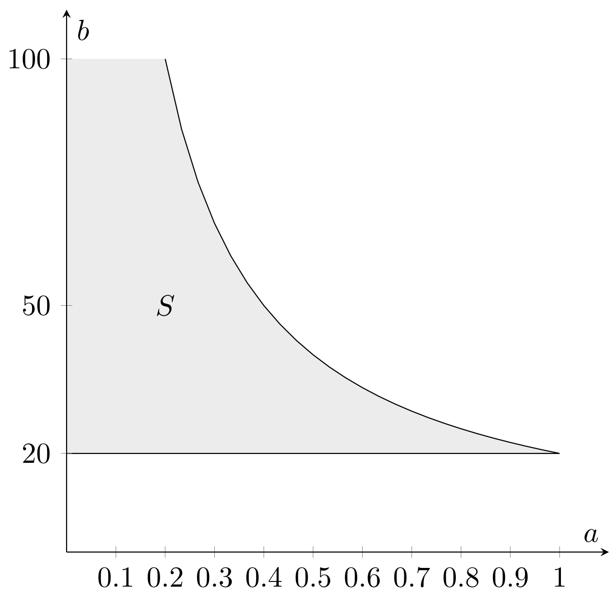
d.h., $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 20$ und $q = (1-a)$.

Die Bedingung dafür, dass die Läuferin einen b Kilometer langen Wettkampf beendet, gegeben, dass sie beliebig lange laufen kann, ist folglich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq b \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{1-(1-a)} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{a} \geq b.$$

Demnach erhalten wir folgende Lösungsmenge:

$$S = \left\{ (a,b) \in (0,1] \times [20,\infty) \;:\; b \leq \frac{20}{a} \right\}.$$



Aufgabe 2

(a1) (**5 Punkte**).
Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = \ln(1+0) = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{1}{1^2} = -1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_2(x) = x - \frac{1}{2}\,x^2.$$

Damit erhalten wir:

$$a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \approx P_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\,\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

(a2) (**4 Punkte**).
Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\,x^3$$

mit $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Daraus folgt für $x \in [0,1]$,

$$|R_2(x)| = \frac{\left|f^{(3)}(\xi)\right|}{3!}\,|x|^3 = \frac{2}{3!}\underbrace{\frac{1}{(1+\xi)^3}}_{\leq 1}\,x^3 \leq \frac{1}{3}\,x^3.$$

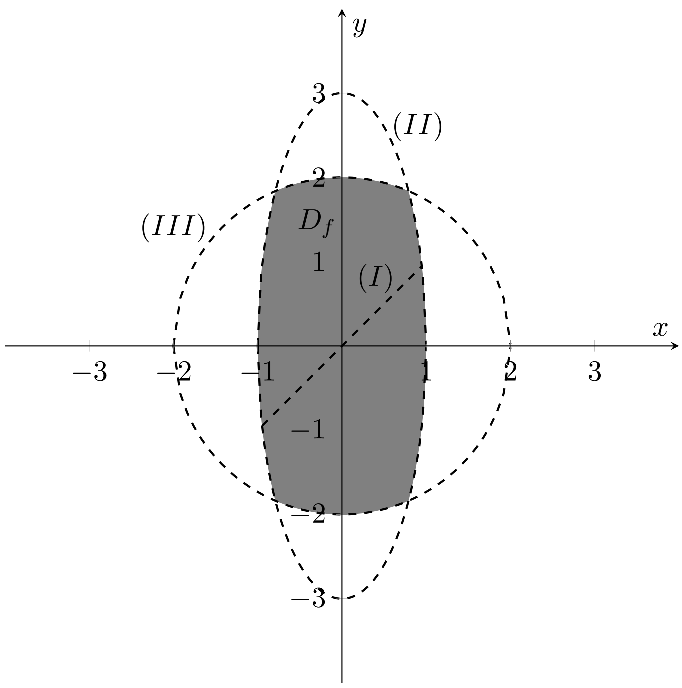
Demnach gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y \neq 0 \\ 9-9\,x^2-y^2 > 0 \\ 4-x^2-y^2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \neq y\ (I) \\ x^2+\frac{y^2}{3^2} < 1\ (II) \\ x^2+y^2 < 2^2\ (III) \end{array}\right. .$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a=1$ und $b=3$, geschnitten mit der Fläche innerhalb eines Kreises (III) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r=2$. Weiterhin müssen die Punkte auf der Geraden $y=x$ ausgeschlossen werden (I). Die Gerade $y=x$ schneidet die Ellipse für $x^2+\frac{x^2}{9}=1$, d.h., $x^2=\frac{9}{10}$ oder $x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**5 Punkte**).
Die Parameter α, p_1, p_2 müssen so gewählt werden, dass die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liegt auf der Budgetgeraden, d.h., $p_1 + 2\,p_2 = 10$. Es folgt $p_1 = 10 - 2\,p_2$.

(ii) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liefert den Nutzen $\sqrt{2}$, d.h., $u(c_1^\star, c_2^\star) = 1^\alpha\, 2^{1-\alpha} = \sqrt{2}$. Demnach gilt $\alpha = 0.5$.

(iii) Die Kurven

$$f(c_1, c_2) = u(c_1, c_2) - \sqrt{2} = c_1^{0.5}\, c_2^{0.5} - \sqrt{2} = 0$$

und

$$\varphi(c_1, c_2) = p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - 10 = 0$$

berühren sich in $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$, d.h. (Implizites Funktionen Theorem),

$$\begin{aligned}
-\frac{f_{c_1}(1,2)}{f_{c_2}(1,2)} &= -\frac{\varphi_{c_1}(1,2)}{\varphi_{c_2}(1,2)} \\
\overset{\alpha=0.5}{\Leftrightarrow} \quad & -\frac{0.5\, c_1^{-0.5}\, c_2^{0.5}}{0.5\, c_1^{0.5}\, c_2^{-0.5}}\bigg|_{(c_1,c_1)=(1,2)} = -\frac{p_1}{p_2} \\
\overset{p_1=10-2\,p_2}{\Leftrightarrow} \quad & 2 = \frac{10 - 2\,p_2}{p_2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\,p_2 = 10 - 2\,p_2 \\
\Leftrightarrow \quad & p_2 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten $p_1 = 10 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$, $p_2 = \frac{5}{2}$ und $\alpha = 0.5$.

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad r und g homogen vom Grad $r-2$ ist, folgt

$$h(\lambda\, x, \lambda\, y) = \frac{f(\lambda\, x, \lambda\, y)}{g(\lambda\, x, \lambda\, y)} = \frac{\lambda^r\, f(x,y)}{\lambda^{r-2}\, g(x,y)} = \lambda^2\, \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda^2\, h(x,y),$$

d.h., h ist homogen vom Grad 2. Demnach gilt mit der Eulerschen Relation:

$$x\, h_x(x,y) + y\, h_y(x,y) = 2\, h(x,y).$$

Mit

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x}{h(x,y)}\, h_x(x,y)$$

erhalten wir

$$\varepsilon_{h,x}(x,y)\, h(x,y) + y\, h_y(x,y) = 2\, h(x,y),$$

d.h.,

$$h(x,y) = \frac{y\, h_y(x,y)}{2 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}.$$

Wir setzen die Ausdrücke für $h_y(x,y)$ und $\varepsilon_{h,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{y\,\left(x - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}\right)}{2 - \frac{x\,y - \frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}}} \\
&= \frac{x\,y - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{2\,x\,y - 2\,x^{0.5}\,y^{1.5} - x\,y + \frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}\,\left(x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}\right) \\
&= \frac{x\,y - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}\,\left(x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}\right) \\
&= x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}.$$

Die beiden folgenden Lösungsvorschläge sind unvollständig und wurden mit 1 Punkt bewertet:

1. Wegen $\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x}{h(x,y)}\,h_x(x,y)$ muss gelten, dass $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$.

   Grund: Der Bruch $\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x\,y - \frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}}$ kann gekürzt sein. Zu zeigen, dass tatsächlich $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.
2. Integration von $h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}$ nach y liefert $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$.

   Grund: Die Integration von $h_y(x,y)$ nach y liefert das unbestimmte Integral $H(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5} + C(x)$, wobei $C(x)$ ein unbestimmter Ausdruck ist, welcher von x abhängt. Zu zeigen, dass tatsächlich $C(x) = 0$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 3

1. Antwort (c).Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg A \Rightarrow B$	W	W	W	F
$A \vee (\neg A \Rightarrow B)$	**W**	**W**	**W**	**F**
$A \vee B$	**W**	**W**	**W**	**F**
$A \wedge B$	W	F	F	F

Folglich ist $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ äquivalent zu $A \vee B$.

2. Antwort (d). Es gilt:

- (a) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $(0, \infty)$. Die Folge $\{b_b\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ist jedoch divergent.
- (b) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^2$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ ist monoton und konvergent.
- (c) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \sin(2\,\pi\,x)$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)$ ist jedoch nicht monoton.

3. Antwort (b). Ist die Funktion f differenzierbar in $x_0 \in D_f$, dann ist sie auch stetig in $x_0 \in D_f$. Demnach ist (b) richtig und (d) falsch. Das folgende Beispiel zeigt, dass (a) und (c) im Allgemeinen falsch sind: $f(x) = |x|$ mit Definitionsgebiet $D_f = \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$. Die Betragsfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

4. Antwort (a). Der Barwert von Projekt I ist $-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2}$. Daher wäre Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2} > -100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow \frac{50'000}{(1+i)} > \frac{50'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{1+i}.$$

Die letzte Ungleichung ist für jedes $i > 0$ erfüllt.

Alternativ kann man auch ohne die tatsächliche Berechnung der Barwerte wie folgt argumentieren: Projekt 1 ist besser, da es dieselbe Anfangsinvestition wie Projekt 2 benötigt und nach zwei Jahren $60'000$ CHF generiert, $50'000$ CHF jedoch schon während des ersten Jahres. Demnach ist der Gesamtbetrag, den das Projekt 1 innerhalb der zwei Jahre generiert, strikt grösser als 110′000 CHF, gegeben, dass der Zinssatz echt positiv ist.

5. Antwort (b). Gilt $n^I = n^D$ und ist der Zinssatz strikt positiv, dann sind die Zinserträge bei Zahlungen am Anfang des Jahres echt grösser als die Zinserträge bei Zahlungen am Ende des Jahres. Der Grund ist einfach der, dass bei Zahlungen am Anfang des Jahres für ein zusätzliches Jahr Zinserträge generiert werden, im Vergleich zu Zahlungen am Ende des Jahres. Der Kunde muss bei Zahlungen zu Beginn des Jahres weniger bezahlen, da er von den höheren Zinserträgen profitiert. Laufen die Zahlungen am Ende des Jahres länger (d.h., $n^I > n^D$), dann gilt im Allgemeinen nicht, dass die jährlichen Zahlungen C^I kleiner sind als die jährlichen Zahlungen C^D. Um beispielsweise einen Kredit in Höhe von 1′000′000 CHF bei einem Zinssatz von $i = 5\%$ über 20 Jahre zurückzuzahlen, müssen die konstanten Zahlungen am Anfang des Jahres $C^D = 76'421.50$ CHF betragen. Um denselben Betrag über 21 Jahre mittels konstanter Zahlungen am Ende des Jahres zu tilgen, müssen diese $C^I = 77'996.10$ CHF betragen. Folglich gilt $C^I > C^D$, obwohl $n^I > n^D$.

6. Antwort (d). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq \pi$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{a\,(x-\pi)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{a} = -\frac{1}{a}.$$

Demnach ist f stetig in $x = \pi$ genau dann, wenn $-\frac{1}{a} = a$, d.h., $a^2 = -1$. Diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

7. Antwort (c). Das Restglied $R_4(x)$ in $x_0 = 1$ ist gleich Null für alle x, da f bereits eine Polynomfunktion vom Grad 4 ist. Aus diesem Grund stimmen f und P_4 überein. Wir können auch den Satz von Taylor bemühen: es gibt ein ξ so, dass

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,(x-1)^5.$$

Da für alle möglichen Werte von ξ gilt, dass $f^{(5)}(\xi) = 0$, erhalten wir $R_4(x) = 0$.

8. Antwort (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_g(x) &= x\,\frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= x\,\frac{f'(a\,x)\,a}{f(a\,x)} \\
&= (a\,x)\,\frac{f'(a\,x)}{f(a\,x)} \\
&= \varepsilon_f(a\,x) \\
&= a\,x\,\ln(a\,x) + e^{3\,a\,x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

1. Antwort (d). Zunächst gilt

$$f(x,y) = (x+y)^2 e^{x+y}$$

und

$$f_x(x,y) = \left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} = f_y(x,y).$$

Folglich:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{f,x}(x,y) < \varepsilon_{f,y}(x,y) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} < y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} \\
&\quad\overset{f(x,y)>0}{\Leftrightarrow} \quad x\,f_x(x,y) < y\,f_y(x,y) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad x\,\left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} < y\,\left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} \\
&\quad\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \quad x < y.
\end{aligned}$$

Folglich ist Antwort (d) richtig.

2. Antwort (b). Da f differenzierbar ist, gilt für einen stationären Punkt, dass $f'(x) = 0$. Wir berechnen:

$$f'(x) = 2\,x\,e^{x^2} + x^2\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,x\,e^{x^2}\,(1+x^2).$$

Folglich gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h., $x = 0$ ist ein stationärer Punkt von f und (d) ist falsch. Die zweite Ableitung ist gegeben durch

$$f''(x) = (2 + 6\,x^2)\,e^{x^2} + (2\,x + 2\,x^3)\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,e^{x^2}\,(1 + 5\,x^2 + 2\,x^4).$$

Demnach gilt

$$f''(0) = 2 > 0,$$

und $x = 0$ ist ein Minimum.

3. Antwort (b). Wegen

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4,$$

folgt

$$P_3(x) < P_4(x) \Leftrightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 > 0 \Leftrightarrow f^{(4)}(0) > 0.$$

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

Also ist $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ und es folgt, dass $P_3(x) < P_4(x)$.

4. Antwort (a). Für die Funktion f gilt:

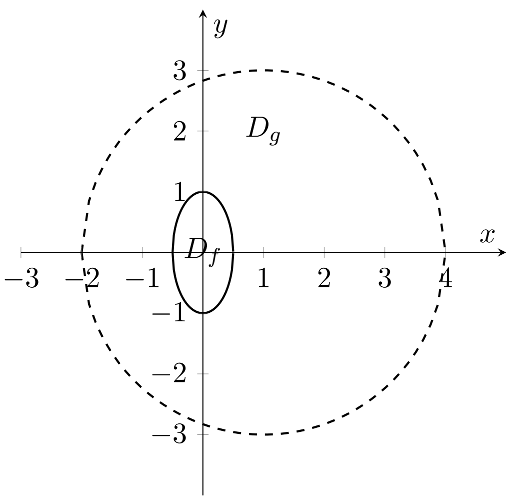
$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 1 - 4\,x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1} \leq 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$.

Für die Funktion g gilt:

$$(x,y) \in D_g \Leftrightarrow 2\,x - x^2 - y^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\,x + 1 + y^2 < 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < 3^2.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 3.



5. Antwort (d). Der Satz von Taylor besagt, dass

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4.$$

Wegen $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ gilt, dass $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$ für alle ξ und

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\,|x|^4 \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{|x|^4}{16}.$$

Bemerkung: Logisches Schlussfolgern zeigt, dass nur (d) wahr sein kann. Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass nur eine Antwort richtig ist. Wäre (a) wahr, dann gälte dies auch für (b), (c) und (d). Ähnlich folgt, dass wenn (b) wahr wäre, auch (c) und (d) wahr wären. Nicht zuletzt folgt aus der Wahrheit von (c) die von (d). Demnach kann nur (d) die richtige Antwort sein.

6. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= 8\left(\frac{1}{\lambda\,x}+\frac{1}{5\,\lambda\,y}\right)^{-0.5}+\sqrt{3\,\lambda\,x}+\sqrt{\lambda\,y} \\ &= 8\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5\,y}\right)\right]^{-0.5}+\lambda^{0.5}\sqrt{3\,x}+\lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= 8\,\lambda^{0.5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5}+\lambda^{0.5}\sqrt{3\,x}+\lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= \lambda^{0.5}\left[8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5}+\sqrt{3\,x}+\sqrt{y}\right] \\ &= \lambda^{0.5}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 0.5 ist.

7. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \left(\frac{(\lambda\,x)^2}{\lambda\,y}+1\right)+\sqrt{(\lambda\,x)^2+5\,(\lambda\,y)^2} \\ &= \left(\frac{\lambda^2\,x^2}{\lambda\,y}+1\right)+\sqrt{\lambda^2\,x^2+5\,\lambda^2\,y^2} \\ &= \left(\lambda\,\frac{x^2}{y}+1\right)+\lambda\sqrt{x^2+5\,y^2} \\ &= \lambda\left(\frac{x^2}{y}+1+\sqrt{x^2+5\,y^2}\right)-\lambda+1 \\ &= \lambda\,f(x,y)-\lambda+1 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$g(\lambda\,x,\lambda\,y) = f(a\,\lambda\,x, a\,\lambda\,y) = f(\lambda\,a\,x, \lambda\,a\,y) = \lambda\,f(a\,x, a\,y) - \lambda + 1 = \lambda\,g(x,y) - \lambda + 1.$$

Daher ist g nicht homogen.

8. Antwort (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a+1}\sqrt{(\lambda\,y)^{4\,a+4}}+(\lambda\,x\,\lambda\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{\frac{4\,a+4}{2}}\sqrt{y^{4\,a+4}}+\lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{2\,a+2}\sqrt{y^{4\,a+4}}+\lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{3\,a+3}\left[x^{a+1}\sqrt{y^{4\,a+4}}+(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Also ist f homogen vom Grad $3\,a+3$ und aus der Eulerschen Relation folgt:

$$\varepsilon_{f,x}+\varepsilon_{f,y} = 3\,a+3.$$

Demnach gilt:

$$\varepsilon_{f,x}+\varepsilon_{f,y} = 3 \Leftrightarrow a = 0.$$

Mathematik A
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

12. Juli 2018

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**4 Punkte**).
Damit die Funktion f definiert ist, müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

(i) $x + 5 \geq 0$ wegen der $\sqrt{\cdot}$ Funktion;

(ii) $2 - e^{-3\sqrt{x+5}} \neq 0$ um Division durch Null zu vermeiden;

(iii) $\frac{1}{2-e^{-3\sqrt{x+5}}} > 0$ wegen der $\ln(\cdot)$ Funktion.

Die Bedingung (ii) folgt aus Bedingung (iii). Ausserdem gilt Bedingung (iii) schon, wenn Bedingung (i) erfüllt ist, da $2 - e^{-3\sqrt{x+5}} \geq 1$ für $x + 5 \geq 0$. Demnach reicht es, Bedingung (i) zu lösen, d.h. $x \geq -5$. Es folgt:

$$D_f = [-5, \infty).$$

Für den Wertebereich R_f von f erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq -5 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leq 2 - e^{-3\sqrt{x+5}} < 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$R_f = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right), 0\right] = \left(-\ln(2), 0\right].$$

(a2) (**3 Punkte**).
Wir verwenden das folgende Resultat: Ist f differenzierbar mit $f'(x) > 0$ (< 0) für alle $x \in (a, b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend) auf $[a, b]$.

Hier gilt:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right) = -\ln\left(2 - e^{-3\sqrt{x+5}}\right).$$

Folglich ist

$$f'(x) = \frac{-1}{2 - e^{-3\sqrt{x-5}}} \left(-e^{-3\sqrt{x+5}}\right) \left(\frac{-3}{2\sqrt{x+5}}\right).$$

Da alle drei Faktoren im Definitionsbereich von f strikt negativ sind, ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-5, \infty)$ und demnach die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich $D_f = [-5, \infty)$ streng monoton fallend.

(a3) (**3 Punkte**).
Für $y \in R_f = (-\ln(2), 0]$ gilt:

$$\begin{aligned} y = -\ln\left(2 - e^{-3\sqrt{x+5}}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-y} = 2 - e^{-3\sqrt{x+5}} \\ &\Leftrightarrow \quad 2 - e^{-y} = e^{-3\sqrt{x+5}} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln\left(2 - e^{-y}\right) = -3\sqrt{x+5} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}\ln\left(2 - e^{-y}\right) = \sqrt{x+5} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-y}\right)\right)^2 = x+5 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-y}\right)\right)^2 - 5 = x. \end{aligned}$$

Mit $D_{f^{-1}} = R_f = (-\ln(2), 0]$ und $R_{f^{-1}} = D_f = [-5, \infty)$ folgt:

$$f^{-1} : (-\ln(2), 0] \to [-5, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-x}\right)\right)^2 - 5.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die geliehene Summe von $P = 1'000'000$ CHF hat in 25 Jahren einen Endwert von:

$$A = P\,(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}$$

mit $i_1 = 1\%$ und $i_2 = 2\%$. Die konstanten Zahlungen $C_1^I = 25'000$ CHF am Ende jeden Jahres für 10 Jahre stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 10 Jahren beträgt

$$A_{1,10} = C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10} - 1}{i_1}.$$

Der Betrag $A_{1,10}$ entspricht nach weiteren 15 Jahren Verzinsung bei einem Zinssatz von i_2:

$$A_{1,10}\,(1+i_2)^{15} = C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10} - 1}{i_1}\,(1+i_2)^{15}.$$

Nicht zuletzt stellen die konstanten Zahlungen von C_2^I am Ende jeden Jahres für die *nächsten* 15 Jahre eine nachschüssige 15-jährige Rente dar, deren Endwert nach Ende der 25-jährigen Laufzeit

$$A_{2,15} = C_2^I\,\frac{(1+i_2)^{15} - 1}{i_2}$$

beträgt. Da der Wert der Schulden 25 Jahre nach Aufnahme des Kredites $200'000$ CHF betragen soll, müssen die folgenden Bedingungen für die Unbekannte C_2^I gelten:

$$
\begin{aligned}
200'000 = \quad & \underbrace{P\,(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}}_{\text{Wert des ursprünglichen Kredits in 25 Jahren}} \quad - \quad \underbrace{C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10}-1}{i_1}\,(1+i_2)^{15}}_{\text{Wert der Zahlungen über die ersten 10 Jahre in 25 Jahren}} \\
& - \quad \underbrace{C_2^I \cdot \frac{(1+i_2)^{15}-1}{i_2}}_{\text{Wert der Zahlungen über die nächsten 15 Jahre in 25 Jahren}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I\,\frac{1}{(1+i_1)^{10}}\,\frac{1-(1+i_2)^{-15}}{i_2} = P - \frac{200'000}{(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}} - C_1^I\,\frac{1-(1+i_1)^{-10}}{i_1} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I = \left[P - \frac{200'000}{(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}} - C_1^I\,\frac{1-(1+i_1)^{-10}}{i_1}\right]\frac{(1+i_1)^{10}\,i_2}{1-(1+i_2)^{-15}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I = \left[1'000'000 - \frac{200'000}{(1+1\%)^{10}\,(1+2\%)^{15}} - 25'000\,\frac{1-(1+1\%)^{-10}}{1\%}\right]\frac{(1+1\%)^{10}\cdot 2\%}{1-(1+2\%)^{-15}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I \approx 54'047.00 \quad \text{(CHF)}.
\end{aligned}
$$

(c) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x^2-x} \quad & \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \quad \lim_{x\to 0}\frac{3^x\,\ln(3)-2^x\,\ln(2)}{2\,x-1} \\
& = \quad -(\ln(3)-\ln(2)) \\
& = \quad \ln(2)-\ln(3) \\
& = \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

(d) (**6 Punkte**).
Sei a_n die Menge an Daten, die an Tag n produziert wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.5 \cdot 10^{18}, \\ a_n &= a_{n-1}\,(1+5\%), \quad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

d.h., $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $a_0 = 2.5 \cdot 10^{18}$ und $q = 1.05$.

Gefragt ist nach der Anzahl an Jahren, die benötigt werden, um eine Gesamtmenge von $45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}$ Bytes zu generieren. Zunächst berechnen wir die Länge des Zeitraums in Tagen. Sei N die Anzahl an benötigter Tagen, um eine Gesamtproduktion von $45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}$ Bytes zu erreichen. Die Bedingung an N lautet:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}.$$

Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge ist, gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = 2.5 \cdot 10^{18}\, \frac{1-1.05^{N+1}}{1-1.05}.$$

Demnach erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18} \Leftrightarrow 10^{18}\, \frac{1-1.05^{N+1}}{1-1.05} = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18} \Leftrightarrow 1 + 0.05 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{2.5} = 1.05^{N+1}.$$

Es folgt:

$$N = \frac{\ln\left(1 + 0.05 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{2.5}\right)}{\ln(1.05)} - 1 \approx 138.44 \quad (Tage).$$

Die entspricht ungefähr 0.38 Jahren.

Aufgabe 2

(a1) (**5 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = \sin(0) = 0 \\
f'(x) &= \cos(x) \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \cos(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin(x) \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\sin(0) = 0 \\
f'''(x) &= -\cos(x) \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = -\cos(0) = -1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3.$$

Damit erhalten wir:

$$a_k = \sin\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \approx P_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^k.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^k\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{64}\right)^k \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\,\frac{1}{1-\frac{1}{64}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{378} \\
&= \frac{125}{378} \\
&\approx 0.33.
\end{aligned}$$

(a2) (**4 Punkte**).
Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$$

mit $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = \sin(x).$$

Daraus folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$|R_3(x)| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\,|x|^4 = \frac{1}{24}\,\underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1}\,|x|^4 \leq \frac{1}{24}\,|x|^4.$$

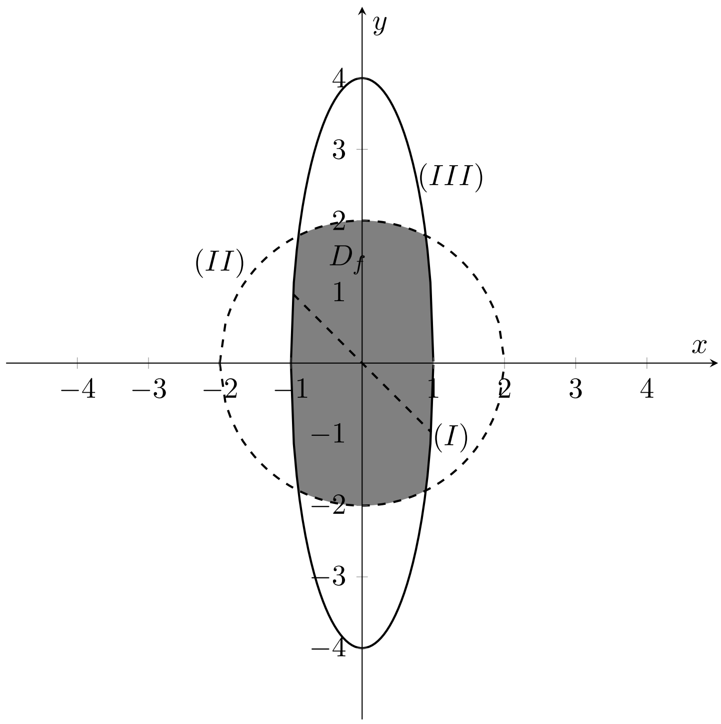
Demnach gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{24}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]^4 = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{256}\right)^k = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{256}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{256}} = \frac{1}{6120}.$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \neq 0 \\ 4-x^2-y^2>0 \\ 16-16\,x^2-y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -y \ (I) \\ x^2+y^2<2^2 \ (II) \\ \frac{(x-0)^2}{1^2}+\frac{(y-0)^2}{4^2} \leq 1 \ (III) \end{cases}.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (III) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a=1$ und $b=4$, geschnitten mit der Fläche innerhalb eines Kreises (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r=2$. Weiterhin müssen die Punkte auf der Geraden $y=-x$ (I) ausgeschlossen werden. Die Gerade $y=-x$ schneidet die Ellipse für $x^2+\frac{x^2}{16}=1$, d.h., $x^2=\frac{16}{17}$ oder $x=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**5 Punkte**).
Die Parameter α, β müssen so gewählt werden, dass die folgenden zwei Bedingungen gelten:

(i) Der Punkt $(K_0, A_0) = (2,1)$ liegt auf der Isoquante $P(K,A) = 144$, d.h., $P(2,1) = 144$. Demnach gilt:

$$(2 \cdot 2^{\alpha} + 4)^2 = 144 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\alpha} + 4 = 12 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

(ii) Die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK}$ im Punkt $(K_0, A_0) = (2,1)$ entspricht -1. Es folgt:

$$-1 = \frac{dA}{dK}\bigg|_{(K_0,A_0)=(2,1)} = -\frac{P_K(K_0,A_0)}{P_A(K_0,A_0)} = -\frac{2\,(2\,K_0^{\alpha} + 4\,A_0^{\beta})\,\alpha\,2\,K_0^{\alpha-1}}{2\,(2\,K_0^{\alpha} + 4\,A_0^{\beta})\,4\,\beta\,A_0^{\beta-1}} \overset{\alpha=2,(K_0,A_0)=(2,1)}{=} -\frac{2}{\beta}.$$

Wir erhalten:

$$\beta = 2.$$

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad $r+2$ und g homogen vom Grad $3-r$ ist, folgt

$$h(\lambda\,x, \lambda\,y) = f(\lambda\,x, \lambda\,y)\,g(\lambda\,x, \lambda\,y) = \lambda^{r+2}\,f(x,y)\,\lambda^{3-r}\,g(x,y) = \lambda^5\,f(x,y)\,g(x,y) = \lambda^5\,h(x,y),$$

d.h., h ist homogen vom Grad 5. Demnach gilt mit der Eulerschen Relation:

$$x\,h_x(x,y) + y\,h_y(x,y) = 5\,h(x,y).$$

Mit

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = x\,\frac{h_x(x,y)}{h(x,y)}$$

erhalten wir

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) + y\,\frac{h_y(x,y)}{h(x,y)} = 5,$$

d.h.,

$$h(x,y) = \frac{y\,h_y(x,y)}{5 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}.$$

Wir setzen die Ausdrücke für $h_y(x,y)$ und $\varepsilon_{h,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{y\left(-\frac{x^6}{y^2} + 3\,x^2\,y^2\right)}{5 - \frac{6\,x^6 + 2\,x^2\,y^4}{x^6 + x^2\,y^4}} \\ &= \frac{\left(-\frac{x^6}{y} + 3\,x^2\,y^3\right)\,(x^6 + x^2\,y^4)}{5\,x^6 + 5\,x^2\,y^4 - 6\,x^6 - 2\,x^2\,y^4} \\ &= \frac{(-x^6 + 3\,x^2\,y^4)\,(x^6 + x^2\,y^4)}{y\,(-x^6 + 3\,x^2\,y^4)} \\ &= \frac{x^6 + x^2\,y^4}{y}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$h(x,y) = \frac{x^6}{y} + x^2\,y^3.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☒	☐	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (d). Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \vee B$	T	T	T	F
$A \wedge B$	T	F	F	F
$(A \vee B) \Rightarrow B$	T	F	T	T
$(A \vee B) \Leftrightarrow A$	T	T	F	T
$(A \wedge B) \Leftrightarrow A$	T	F	T	T
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	**T**	**T**	**T**	**T**

Folglich ist $(A \wedge B) \Rightarrow A$ die einzige Tautologie.

2. Antwort (d). Es gilt:

- (a) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f is differenzierbar auf $(0,\infty)$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ divergent.
- (b) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^2$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ monoton und konvergent.
- (c) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \sin(2\,\pi\,x)$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ nicht monoton.

3. Antwort (c). (a) ist offensichtlich falsch, (b) ist die Definition einer monoton fallenden Funktion auf $[0,10]$, während (c) der Definition einer monoton wachsenden Funktion auf $[0,10]$ entspricht. (d) ist wiederum falsch, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $f(x) = x^2$ für $x \in (0,10]$ und $f(0) = 100$. Die Funktion f ist differenzierbar auf $(0,10)$ mit $f'(x) = 2\,x > 0$ auf $(0,10)$. Jedoch ist f nicht monoton steigend, da $f(0) > f(x)$ für alle $x \in (0,10)$.

4. Antwort (a). Projekt I sollte für jeden strikt positiven Zinssatz bevorzugt werden, da ein Gewinn von $20'000$ CHF erwartet wird (entspricht demselben Betrag wie für Projekt II), wovon ein Teil jedoch bereits früher resultiert (d.h. bereits in 6 Monaten). Formal ist der Barwert von Projekt I $-100'000 + \frac{40'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$ bzw. von Projekt II $-110'000 + \frac{130'000}{(1+i)^2}$, wobei i den halbjährlichen

Zinssatz darstellt. Folglich sollte Projekt I gegenüber Projekt II bevorzugt werden, wenn

$$\begin{aligned}
& -100'000 + \frac{40'000}{(1+i)} + \frac{80'000}{(1+i)^2} > -110'000 + \frac{130'000}{(1+i)^2} \\
\Leftrightarrow \quad & 10'000 + \frac{40'000}{(1+i)} - \frac{50'000}{(1+i)^2} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 10'000\,(1+i)^2 + 40'000\,(1+i) - 50'000 > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (1+i)^2 + 4\,(1+i) - 5 > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 + 2\,i + i^2 + 4 + 4\,i - 5 > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & i^2 + 2\,i > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & i < -2 \text{ or } i > 0
\end{aligned}$$

Projekt I wird deshalb für alle strikt positiven Zinssätze dem Projekt II vorgezogen.

5. Antwort (d). Die einzige generelle Aussage für einen strikt positiven Zinssatz ist $C^D < C^I$, wenn $n^D \geq n^I$. Dies folgt daraus, weil Auszahlungen bei strikt positivem Zinssatz zu Beginn des Jahres einen höheren Zins abwerfen als Auszahlungen später im Jahr. Deshalb sind (a), (b) und (c) falsch.

6. Antwort (a). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq 0$. Überdies gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) \quad & = \quad \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{a\,x^2} \\
& \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sin(x)\,\cos(x)}{2\,a\,x} \\
& \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\,(\cos^2(x) - \sin^2(x))}{2\,a} \\
& = \quad \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f stetig bei $x = 0$ ist genau dann, wenn $\frac{1}{a} = a$, d.h., $a^2 = 1$. Diese Gleichung hat Lösungsmenge $\{-1, 1\}$.

7. Antwort (a). Das Restglied $R_4(x)$ bei $x_0 = 0$ entspricht

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5$$

für ein ξ. Wegen $f^{(5)}(\xi) = 2 \cdot 5!$ für alle ξ, folgt:

$$R_4(x) = 2\,x^5.$$

Deshalb ist $R_4(x) > 0$ für $x > 0$ und $R_4(x) = 0$ für $x = 0$.

8. Antwort (c). Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\rho_f(x).$$

Damit folgt:

$$\rho_f(x) = \frac{\varepsilon_f(x)}{x} = \ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}.$$

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (c). Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\frac{2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = 2 - x.$$

Also ist f elastisch (unelastisch) bei x_0 genau dann, wenn $|\varepsilon_f(x)| > 1$ (< 1). Es gilt:

$$|\varepsilon_f(x)| < 1 \Leftrightarrow |2 - x| < 1 \Leftrightarrow (2-x)^2 < 1 \Leftrightarrow (x-3)\,(x-1) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,3).$$

Deshalb ist (c) richtig.

2. Antwort (b). Weil die Wurzelfunktion differenzierbar und streng monoton wachsend ist, betrachten wir die Funktion $g(x) = x^2\,e^{x^2} + 1$ anstelle der Funktion f. Weil g ebenfalls differenzierbar ist, erfüllt ein stationärer Punkt von g die Gleichung $g'(x) = 0$. Es gilt zudem:

$$g'(x) = 2\,x\,e^{x^2} + 2\,x^3\,e^{x^2} = 2\,(x + x^3)\,e^{x^2}.$$

Folglich ist $g'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h. $x = 0$ ist der einzige stationäre Punkt von g. Überdies gilt:

$$g''(x) = 2\,(1 + 3\,x^2)\,e^{x^2} + (2\,x + 2\,x^3)\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,e^{x^2}\,(1 + 5\,x^2 + 2\,x^4).$$

Daraus folgt:

$$g''(0) = 2 > 0,$$

womit $x = 0$ ein lokales Minimum von g ist (und deshalb auch von f).

3. Antwort (d). Weil

$$P_5(x) = P_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5,$$

müssen wir nur $f^{(5)}$ bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{-120}{(1+x)^6}.
\end{aligned}$$

Deshalb ist $f^{(5)}(0) = -120$ und

$$P_5(x) = P_4(x) - x^5.$$

Abhängig von $x > 0$, $x < 0$ oder $x = 0$ gilt $P_4(x) > P_5(x)$, $P_4(x) < P_5(x)$ oder $P_4(x) = P_5(x)$.

4. Antwort (d). Für die Funktion f gilt

$$(x, y) \in D_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 5^2.$$

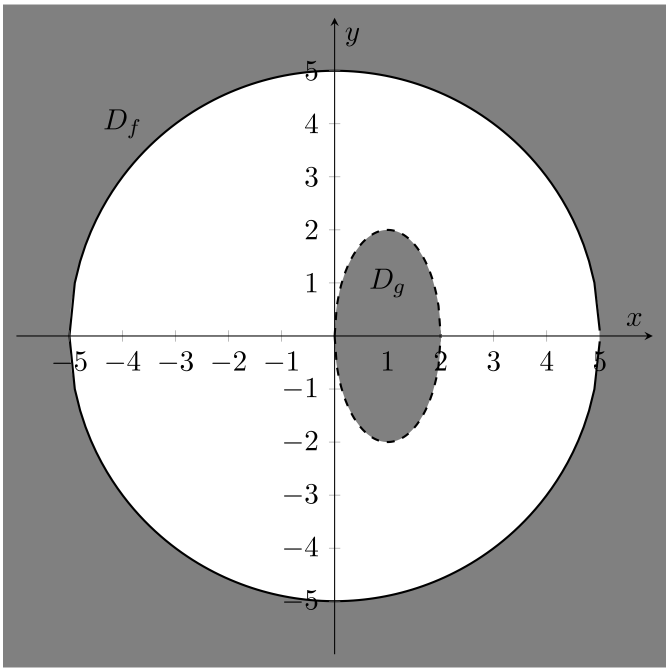
Dies entspricht der Fläche ausserhalb des Kreises mit Zentrum $(0, 0)$ und Radius 5 inklusive dessen Rand.

Für die Funktion g gilt

$$(x, y) \in D_g \Leftrightarrow 8\,x - 4\,x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} < 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb der Ellipse mit Zentrum $(1, 0)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 2$.

Daraus folgt, dass sich die Definitionsbereiche von f und g nicht schneiden.



5. Antwort (b). Das Theorem von Taylor impliziert

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5.$$

Daraus folgt:

$$R_{f,4}(x) = 3\,x^5 \quad \text{und} \quad R_{g,4}(x) = -2\,x^5.$$

Deshalb gilt

$$R_{f,4}(x) > R_{g,4}(x)$$

für $x > 0$.

6. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x,\lambda\,y) &= 8\left(\frac{1}{(\lambda\,x)^3}+\frac{1}{5\,(\lambda\,y)^3}\right)^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{3\,\lambda\,x}+\sqrt[6]{(\lambda\,y)^2}\\
&= 8\left[\frac{1}{\lambda^3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{5\,y^3}\right)\right]^{-\frac{1}{6}}+\lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{3\,x}+\lambda^{\frac{2}{6}}\,\sqrt[6]{y^2}\\
&= 8\,\lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}}+\lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{3\,x}+\lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[6]{y^2}\\
&= \lambda^{\frac{1}{3}}\left\{8\,\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{3\,x}+\sqrt[6]{y^2}\right\}\\
&= \lambda^{\frac{1}{3}}\left\{8\,\lambda^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{3\,x}+\sqrt[6]{y^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f nicht homogen ist.

7. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(\lambda\,x,\lambda\,y) &= f(\lambda\,a\,x,\lambda\,a^2\,y)\\
&= \frac{(\lambda\,a\,x)^3}{\lambda\,a^2\,y}+1+\sqrt{(\lambda\,a\,x)^4+2\,(\lambda\,a^2\,y)^4}\\
&= \lambda^2\,\frac{(a\,x)^3}{a^2\,y}+1+\lambda^2\,\sqrt{(a\,x)^4+2\,(a^2\,y)^4}\\
&= \lambda^2\left[\frac{(a\,x)^3}{a^2\,y}+1+\sqrt{(a\,x)^4+2\,(a^2\,y)^4}\right]+(1-\lambda^2)\\
&= \lambda^2\,g(x,y)+(1-\lambda^2).
\end{aligned}$$

Deshalb ist g nicht homogen.

8. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x,\lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a-1}\,(\lambda\,y)^{a+6}+\sqrt{(\lambda\,x)^2+(\lambda\,y)^2}\\
&= \lambda^{a-1+a+6}\,x^{a-1}\,y^{a+6}+\lambda\,\sqrt{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Deshalb ist f homogen genau dann, wenn

$$a-1+a+6=1 \Leftrightarrow a=-2.$$

Herbstsemester 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A
Musterlösungen Prüfung Herbstsemester 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

29. Januar 2019

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil 1: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**6 Punkte**).
Im Marktgleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ stimmt die nachgefragte und die angebotene Menge $q^\star$ für einen Preis $p^\star$ überein; formal:

$$q^\star = q_s(p^\star) = q_d(p^\star) \Leftrightarrow q^\star = 4\,e^{p^\star-1} = 70 - 15\,p^\star - 1.5\,(p^\star)^2.$$

Es folgt, dass $(p^\star, q^\star)$ genau dann ein Marktgleichgewicht sein kann, wenn:

$$4\,e^{p^\star-1} - 70 + 15\,p^\star + 1.5\,(p^\star)^2 = 0$$

und $q^\star = 4\,e^{p^\star-1} = 70 - 15\,p^\star - 1.5\,(p^\star)^2$.

Sei $f(p) = 4\,e^{p-1} - 70 + 15\,p + 1.5\,p^2$, dann gibt es ein eindeutiges Gleichgewicht $(p^\star, q^\star)$ mit $p^\star \in [2,3]$ genau dann, wenn die Funktion f eine eindeutige Nullstelle im Intervall $[2,3]$ hat, d.h. wenn ein eindeutiges $p^\star \in [2,3]$ mit $f(p^\star) = 0$ existiert.

Existenz von $p^\star$: Da f auf dem Abschnitt $[2,3]$ stetig ist und $f(2) = 4\,e - 34 \approx -23.127 < 0$, $f(3) = 4\,e^2 - 11.5 \approx 18.056 > 0$, existiert gemäss Bolzano's Nullstellensatz mindestens eine Lösung $p^\star \in [2,3]$ mit $f(p^\star) = 0$.

Eindeutigkeit von $p^\star$: Da

$$f'(p) = 4\,e^{p-1} + 3\,p + 15 \geq f'(2) = 4\,e + 21 \approx 31.873 > 0,$$

für alle $p \in [2,3]$ gilt, ist f streng monoton wachsend auf $(2,3)$. Folglich ist $p^\star$ mit $f(p^\star) = 0$ die einzige Nullstelle von f auf $[2,3]$ und $(p^\star, q^\star)$ damit das eindeutige Marktgleichgewicht mit $p^\star \in [2,3]$.

(a2) (**6 Punkte**).
Um die Gleichgewichtsgleichung $f(p) = 0$ auf dem Intervall $[2,3]$ zu lösen, approximieren wir f mit seinem Taylorpolynom 2. Ordnung P_2 in $p_0 = 1$. Wir erhalten:

$$P_2(p) = f(1) + f'(1)\,(p-1) + \frac{1}{2}\,f''(1)\,(p-1)^2$$

wobei

$$f(1) = 4 + 1.5 + 5 - 70 = -49.5,$$

$$f'(p) = 4\,e^{p-1} + 3\,p + 15 \Rightarrow f'(1) = 4 + 3 + 15 = 22,$$

und

$$f''(p) = 4\,e^{p-1} + 3 \Rightarrow f''(1) = 4 + 3 = 7.$$

Daraus folgt:

$$P_2(p) = -49.5 + 22\,(p-1) + \frac{7}{2}\,(p-1)^2 = \frac{7}{2}\,p^2 + 15\,p - 68.$$

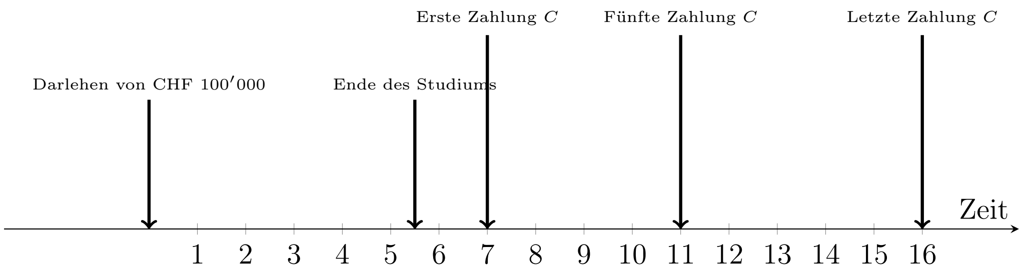
Darum gilt,

$$P_2(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}\,p^2 + 15\,p - 68 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\,\frac{7}{2}\,(-68)}}{2\,\frac{7}{2}} \Leftrightarrow p = \frac{-15 \pm \sqrt{1177}}{7}.$$

Da $p_1 = \frac{-15+\sqrt{1177}}{7} \approx 2.7582 \in [2,3]$ und $p_2 = \frac{-15-\sqrt{1177}}{7} \approx -7.0439 \notin [2,3]$, entspricht der eindeutige Gleichgewichtspreis innerhalb von $[2,3]$ ungefähr $p^\star = 2.7582$.

(b) (**10 Punkte**).

(b1)



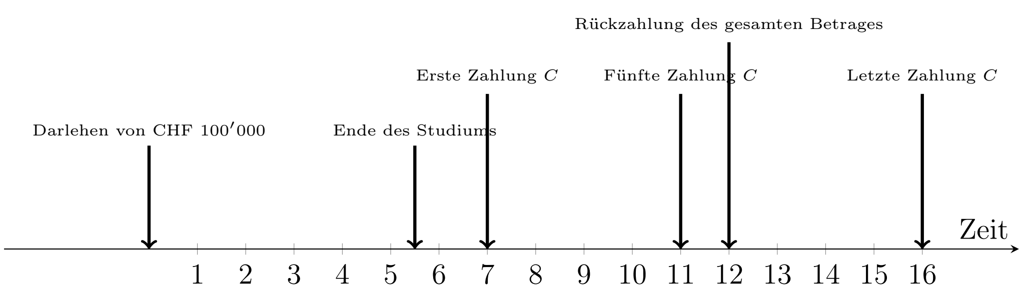
(b2) Die Höhe der Schulden A_6 nach $n_1 = 6$ Jahren ist gleich:

$$A_6 = A_0\,(1+i)^{n_1} = 100'000\,(1+0.08)^6 \approx 158'687.45 \text{ (CHF)}.$$

(b3) Die zehn jährlichen Zahlungen C am Ende des Jahres, beginnend im Jahr 6, entsprechen einer nachschüssige Rente mit $P = A_6$ (Anfangswert), $n_2 = 10$ und $i = 8\%$. Also folgt:

$$\begin{aligned} C &= \frac{i}{(1+i)^{n_2} - 1}\,(1+i)^{n_2}\,P \\ &= \frac{i\,P}{1-(1+i)^{-n_2}} \\ &= \frac{i\,A_6}{1-(1+i)^{-n_2}} \\ &= \frac{0.08 \cdot 158'687.45}{1-(1+0.08)^{-10}} \\ &\approx 23'649.10 \text{ (CHF)}. \end{aligned}$$

(b4)



(b5) Die offene Schuld zu Beginn des 12. Jahres ist gleich $A_{12} = A_0\,(1{+}i)^{12} = 100'000\,(1{+}0.08)^{12}$, also der Schuld im Jahr 12, wenn keine jährlichen Zahlungen geflossen wären, *minus* dem Wert $C\,\sum_{k=1}^{5}(1+0.08)^k$, also dem summierten Wert der Zahlungen am *Ende* der Jahre 6, 7, 8, 9, und 10 im Jahr 12 (Die erste Zahlung wird also 5 Jahre aufgezinst, die zweite 4 Jahre, ..., und die letzte 1 Jahr). Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\text{Offene Schuld} &= A_0\,(1+i)^{12} - C\sum_{k=1}^{5}(1+0.08)^k \\ &= 100'000\,(1+0.08)^{12} - 23'649.10 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^5 - 1}{0.08} \\ &\approx 101'977.95(\text{CHF}).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass Nina ihre offenen Schulden durch die Erbschaft nicht bezahlen kann. Sie muss zusätzlich $1'977.95$ CHF aufbringen, um die Schuld zu begleichen.

(c) (**5 Punkte**).

Für $t = 0, 1, 2, \ldots$ sei $G(t)$ die Prozentzahl identischer Elemente in der Finnischen und Ungarischen Sprache t Jahre *nach* deren Trennung.

Da $G(0) = 100\%$ und $\frac{G(t+2000)}{G(t)} = \frac{1}{2}$ für alle t (d.h., der Prozentsatz identischer Elemente halbiert sich alle 2000 Jahre) gilt, erhalten wir:

$$G(t) = 100\%\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}}.$$

Um t zu berechnen, nutzen wir die Schätzung von $G(t)$, die zwischen 21% und 27% liegt:

$$\begin{aligned}& 21\% \le 100\%\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2000}} \le 27\% \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\ln(0.27)}{\ln(0.5)}2000 \le t \le \frac{\ln(0.21)}{\ln(0.5)}2000 \\ \Leftrightarrow\ & 3778 \le t \le 4503.\end{aligned}$$

Gemäss dem benutzten Modell haben sich die Finnische und Ungarische Sprache vor von $4'500$ bis $3'800$ Jahren getrennt.

(d) (**9 Punkte**).

(d1) Da die Barwerte von Konsum und Einkommen identisch sein müssen, gilt:

$$c_1 + \frac{c_2}{(1+0.08)} = 3'000 + \frac{7'000}{(1+0.08)}.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit 1.08 und stellen nach c_2 um:

$$c_2 = 7'000 - 1.08\,(c_1 - 3'000) = 10'240 - 1.08\,c_1.$$

(d2) Wir ersetzen c_1 mit $c_2 = 10'240 - 1.08\, c_1$ in der Nutzenfunktion u und erhalten:

$$u = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(c_2) = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(10'240 - 1.08\, c_1) = v(c_1).$$

(d3) Um den Nutzen u zu maximieren, muss der Student v aus (d2) maximieren. Wir lösen also die Optimalitätsbedingung erster Ordnung $v'(c_1) = 0$. Es folgt:

$$v'(c_1) = \frac{1}{c_1} - \frac{1.08}{1.2}\frac{1}{10'240 - 1.08\, c_1} = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{1.2}{1.0.8}(10'240 - 1.08\, c_1) \Leftrightarrow 2.2\, c_1 = \frac{1.2 \cdot 10'240}{1.08}.$$

Demnach gilt, dass $c_1^\star = \frac{1.2 \cdot 10'240}{2.2 \cdot 1.08} \approx 5'171.70\,(\text{CHF})$ ein stationärer Punkt von v ist. Um zu prüfen, ob c_1 auch ein Maximum von v ist, berechnen wir die 2. Ableitung v'':

$$v'' = -\frac{1}{c_1^2} - \frac{1.08^2}{1.2}\frac{1}{(10'240 - 1.08\, c_1)^2} < 0.$$

v ist demzufolge streng konkav und $c_1^\star$ ein globales Maximum von v. Mit der Gleichung für c_2 oben ergibt sich $c_2^\star = 10'240 - 1.08\, c_1^\star \approx 4'654.55\,(\text{CHF})$. Der Student muss sich also $2'171.70$ CHF leihen, um seinen Konsum zur Zeit $t = 1$ zu finanzieren, und folgend zur Zeit $t = 2$ $2'345.45$ CHF Schulden tilgen.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

1. Die Antwort ist (c). Es sei $A =$ "Albert kommt" und $B =$ "Beatrice kommt". Damit entspricht die Aussage "Wenn Albert kommt, dann kommt auch Beatrice" dem logischen Ausdruck $A \Rightarrow B$ und gemäss der Aufgabe ist die Aussage wahr.

Wir haben also: (a): $B \Rightarrow A$; (b): $\neg A \Rightarrow \neg B$; (c): $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

	A	T	T	F	F
	B	T	F	T	F
	$\neg A$	F	F	T	T
	$\neg B$	F	T	F	T
	$A \Rightarrow B$	T	F	T	T
(a)	$B \Rightarrow A$	T	T	F	T
(b)	$\neg A \Rightarrow \neg B$	T	T	F	T
(c)	$\neg B \Rightarrow \neg A$	T	F	T	T

(c) ist also genau dann wahr, wenn auch die Originalaussage wahr ist. Tatsächlich gilt, wenn Beatrice nicht kommt, kommt Albert auch nicht. Denn sollte Albert kommen, würde die wahre Aussage $A \Rightarrow B$ implizieren, dass auch Beatrice kommt, ein Widerspruch!

2. Die Antwort ist (a). Wenn $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist, dann ist auch $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, da

$$a_n \leq a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; 2\,a_n - 1 \leq 2\,a_{n+1} - 1 \;\Leftrightarrow\; b_n \leq b_{n+1}$$

und

$$|a_n| \leq C \;\text{ für alle } n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; |b_n| = |2\,a_n - 1| \leq |2\,a_n| + |-1| \leq 2\,C + 1 \;\text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da jede monoton wachsende und beschränkte Folge konvergiert, muss auch $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

3. Die Antwort ist (c). Der effektive Zins i_{eff} erfüllt folgende Gleichung:

$$1'000'000\left(1 + \frac{2\%}{12}\right)^{12} = 1'000'000\,(1 + i_{\text{eff}}).$$

In der Tat entspricht i_{eff} dem Zins, mit dem bei jährlicher Verzinsung der gleiche Betrag erreicht wird wie bei monatlicher Verzinsung zur jährlichen Rate von 2%.

Es folgt, dass:

$$i_{\text{eff}} = \left(1 + \frac{2\%}{12}\right)^{12} - 1 \approx 2.018\%.$$

4. Die Antwort ist (c). Es gilt:

$$y = -\frac{3}{x^5} + 2 \Leftrightarrow \frac{3}{x^5} = 2 - y \Leftrightarrow x^5 = \frac{3}{2-y} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{3}{2-y}}.$$

Demnach ist $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{\frac{3}{2-x}}$ definiert für $x \neq 2$, das heisst, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Alternativ könnte man auch das Resultat $D_{f^{-1}} = R_f$ verwenden. Da f alle Werte ausser 2 annimmt, gilt $R_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

5. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$n^{\log_m(k)} = \left(e^{\ln(n)}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(m)}} = \left(e^{\ln(k)}\right)^{\frac{\ln(n)}{\ln(m)}} = k^{\log_m(n)}.$$

6. Die Antwort ist (b). Da $\sin(x) = 0$ für $x \in \{-\pi, 0, \pi\}$, folgt $\{-\pi, 0, \pi\} \notin D_f$, weswegen f an diesen Punkten (dabei handelt es sich um Pole) unstetig ist. Im Gegenzug ist f stetig bei $x_0 \in D_f \cap (-2\,\pi, 2\,\pi)$.

7. Die Antwort ist (d). Wir haben $f'(x) = \frac{1}{3} + 3\,\frac{e}{x^4}$. Da $3\,\frac{e}{x^4} > 0$ für alle $x \in D_f$ gilt, ist $f'(x) > \frac{1}{3}$ für alle $x \in D_f$. Ausserdem nimmt f' jeden Wert y in $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ an, da gilt $f'(x) = y \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{e}{3}\,\left(y - \frac{1}{3}\right)}$.

8. Die Antwort ist (b). Sei f eine gerade Funktion. Es folgt, dass $f(x) = f(-x)$. Demnach gilt $f'(x) = -f'(-x)$, d.h. f' ist eine ungerade Funktion und (b) muss falsch sein. (a) ist wahr, weil f differenzierbar und folglich stetig ist. (c) ist wie eben gezeigt wahr. Letztlich ist auch (d) wahr; ist f differenzierbar mit $f' > 0$, so ist f streng monoton wachsend.

9. Die Antwort ist (d).

Es gilt:

(a) $d(a\,f + b\,g)(x) = (a\,f'(x) + b\,g'(x))\,dx = a\,f'(x)\,dx + b\,g'(x)\,dx = a\,df(x) + b\,dg(x)$.

(b) $d(f\,g)(x) = (f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x))\,dx = g(x)\,f'(x)\,dx + f(x)\,g'(x)\,dx = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x)$.

(c) $d(f \circ g)(x) = (f'(g(x))\,g'(x))\,dx = f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f'(g(x))\,dg(x)$.

(d) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}\right)\,dx = \frac{f'(x)\,dx}{g(x)} - \frac{f(x)}{g^2(x)}\,g'(x)\,dx = \frac{df(x)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g^2(x)}\,dg(x)$.

10. Die Antwort ist (a). Die quadratische Funktion $g(x) = x^2 - 2\,x - 24 = (x+4)\,(x-6)$ ist negativ für $x \in (-4, 6)$ und hat ein globales Minimum bei $x_0 = -\frac{-2}{2} = 1$. Da $f(x) = |g(x)|$, folgt $f(x) = g(x)$ für $x \notin (-4, 6)$ und $f(x) = -g(x)$ für $x \in (-4, 6)$. Das bedeutet, dass $x_0 \in (-4, 6)$ ein lokales Maximum von f ist (jedoch kein globales, da $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ jeweils gegen unendlich divergiert).

11. Die Antwort ist (c). Gemäss der Definition des Taylorpolynoms P gilt, dass $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ für $k = 0, 1, 2, 3$, wobei $P^{(0)}(0) = P(0)$ und $f^{(0)}(0) = f(0)$. Es gilt:

$$P(0) = 0, P'(0) = 2, P''(0) = 10, P'''(0) = -6.$$

Deswegen kann nur (c) wahr sein.

12. Die Antwort ist (c). Die Eulersche Relation impliziert:

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = k,$$

wobei k dem Grad der Homogenität von f entspricht. Es folgt:

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) = k - \varepsilon_{f,y}(x, y) = 1.8 - (x + y - 1.2) = -x - y + 3.$$

Aufgabe 3

1. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)} = 2.$$

Demnach ist (d) wahr.

2. Die Antwort ist (b). Mit $x^3-27=(x-3)\,(x^2+3\,x+9)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{27}{x^3-27}\right) &= \lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3\,x+9)-27}{(x-3)\,(x^2+3\,x+9)} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x^2+3\,x-18}{(x-3)\,(x^2+3\,x+9)} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\,(x+6)}{(x-3)\,(x^2+3\,x+9)} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x+6}{x^2+3\,x+9} \\
&= \frac{9}{27}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3. Die Antwort ist (b). Eine natürliche Zahl $n\in\mathbb{N}$ mit s Stellen im Dezimalsystem kann als $n=x\,10^{s-1}$ dargestellt werden, wobei $x\in[1,10)$. Zum Beispiel hat die Zahl 123 3 Dezimalstellen und es gilt $123=1.23\cdot 10^2$. Daraus folgt:

$$\log_{10}(n)=\log_{10}(x)+(s-1)\Leftrightarrow s=\log_{10}(n)+1-\log_{10}(x).$$

Mit $s\in\mathbb{N}$ und $\log_{10}(x)\in[0,1)$ folgt, dass s die *grösste* ganze Zahl kleiner oder gleich $\log_{10}(n)+1$ ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\log_{10}(p)+1 &\overset{(*)}{\approx} \log_{10}(p+1)+1 \\
&= \log_{10}\left(2^{77'232'917}\right)+1 \\
&= 77'232'910\,\frac{\ln(2)}{\ln(10)}+1 \\
&\approx 23'249'424.7+1 \\
&= 23'249'425.7.
\end{aligned}$$

Nachdem die grösste ganze Zahl kleiner oder gleich $23'249'425.7$ die Zahl $23'249'425$ ist, muss p $23'249'425$ Dezimalstellen haben.
$(*)$ Weil p extrem gross ist, ist die Differenz von $\log_{10}(p)$ und $\log_{10}(p+1)$ vernachlässigbar. Tatsächlich ist der ganzzahlige Teil von $\log_{10}(p)$ und $\log_{10}(p+1)$ derselbe, da $p+1$ ein Vielfaches von 2 ist.

4. Die Antwort ist (d). Für die Funktion f gilt:

$$\begin{aligned}
(x,y)\in D_f &\Leftrightarrow 4\,x^2+4\,y^2-36\geq 0 \text{ und } x^2-y-2>0 \\
&\Leftrightarrow x^2+y^2\geq 9=3^2 \text{ und } y<x^2-2.
\end{aligned}$$

Die Ungleichung $x^2 + y^2 \geq 9 = 3^2$ beschreibt die Fläche ausserhalb eines Kreises mit Zentrum $(0, 0)$ und Radius 3. Die Ungleichung $y < x^2 - 2$ beschreibt die Fläche unterhalb der Parabel $y = x^2 - 2$ (ohne die Parabel selbst).

5. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$(x, y) \in D_f \Leftrightarrow 0 < \sqrt{e} - x^2 - y^2 \leq \sqrt{e} \Leftrightarrow -\infty < \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x, y) \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

6. Die Antwort ist (c). In jeder Umgebung U von $(1, 1)$, welche klein genug ist, gilt $y + 1 > 0$ und $x - 2 < 0$, also $|y + 1| = y + 1$ und $|x - 2| = 2 - x$ auf U. Es folgt:

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{y+1}{2-x}\right) = \ln(y + 1) - \ln(2 - x)$$

für alle $(x, y) \in U$. Wir benutzen den Satz von der impliziten Funktion:

$$m = -\frac{f_x(1, 1)}{f_y(1, 1)} = -\frac{\frac{1}{2-x}}{\frac{1}{y+1}}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = -2.$$

7. Die Antwort ist (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \ln\left((\lambda\, x)^2 \sqrt{\lambda\, y} + \sqrt[4]{(\lambda\, x)^3\, (\lambda\, y)^7}\right) - \frac{5}{2} \ln(\lambda\, x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{5}{2}}\, x^2 \sqrt{y} + \lambda^{\frac{10}{4}} \sqrt[4]{x^3\, y^7}\right) - \frac{5}{2} \ln(x) - \frac{5}{2} \ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{5}{2}} \left(x^2 \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3\, y^7}\right)\right) - \frac{5}{2} \ln(x) - \frac{5}{2} \ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{5}{2}}\right) + \ln\left(x^2 \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3\, y^7}\right) - \frac{5}{2} \ln(x) - \frac{5}{2} \ln(\lambda) \\
&= \frac{5}{2} \ln(\lambda) + \ln\left(x^2 \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3\, y^7}\right) - \frac{5}{2} \ln(x) - \frac{5}{2} \ln(\lambda) \\
&= \ln\left(x^2 \sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3\, y^7}\right) - \frac{5}{2} \ln(x) \\
&= f(x, y) \\
&= \lambda^0\, f(x, y).
\end{aligned}$$

f ist also homogen vom Grad 0.

8. Die Antwort ist (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= 7\, (\lambda\, x) \sqrt{(\lambda\, y)^a} + 3\, (\lambda\, y)^2 \sqrt[4]{(\lambda\, x)^a\, (\lambda\, y)^b} - (\lambda\, x)^2\, (\lambda\, y)^{0.2} \\
&= \lambda^{1+\frac{1}{2}\, a}\, 7\, x \sqrt{y^a} + \lambda^{2+\frac{1}{4}\, a+\frac{1}{4}\, b} \cdot 3\, y^2 \sqrt[4]{x^a\, y^b} - \lambda^{2.2}\, x^2\, y^{0.2}.
\end{aligned}$$

f ist also nur dann homogen, wenn

$$1 + \frac{1}{2}\, a = 2.2 = 2 + \frac{1}{4}\, a + \frac{1}{4}\, b \Leftrightarrow a = 2.4 \text{ und } b = -1.6.$$

Mathematik A
Musterlösung Herbstsemester 2018
Nachholtermin

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

11 Juli 2019

[1]Chair of Mathematics, University of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**6 Punkte**).

Gesucht ist der Zeitpunkt $t^\star \in [1,2]$, zu welchem die Zahl beider Bakterienarten sich gleicht, d. h. $b_1(t) = b_2(t)$. Wir verwenden die Hilfsfunktion

$$f(t) = b_1(t) - b_2(t) = 10^6\, e^{0.5\,t} - 10^6\, \frac{t}{2} = 10^6 \left(e^{0.5\,t} - \frac{t}{2} \right)$$

Damit folgt

$$b_1(t) = b_2(t) \Leftrightarrow f(t) = 0.$$

Wir suchen also die Nullstelle von f auf $[1,2]$. Die Funktion f hat die folgenden Eigenschaften:

(i) f ist stetig auf $[1,2]$ da sie die Summe zweier stetiger Funktionen ist.

(ii) $f(1) = 10^6\,\sqrt{e} - 2 \cdot 10^6 < 0$ und $f(2) = 10^6\, e - 10^6 > 0$

Mithilfe dem Theorem von Balzano-Weierstrass folgt, dass f mindestens eine Nullstelle auf $[1.2]$ besitzt. Zudem gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2} 10^6 e^{0.5t} + 10^6 \frac{2}{t^2} > 0$$

für alle $t \in [1,2]$, damit ist f streng monoton steigend auf $[1,2]$ und es folgt, dass f genau eine Nullstelle auf dem Interval hat.

(a2) (**6 Punkte**).

Wir verwenden nochmals die Hilfsfunktion f definiert als

$$f(t) = 10^6 e^{0.5t} - 10^6 \frac{2}{t} = 10^6 \left(e^{0.5t} - \frac{t}{2} \right)$$

Da wir die Nullstellen von f suchen, reicht es aus, die Taylor-Approximation von folgender Funktion zu bestimmen.

$$g(t) = 10^{-6}\, f(t) = e^{0.5t} - \frac{t}{2}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{0.5t} - \frac{2}{t} \Rightarrow g(1) \approx -0.351 \\ g'(t) &= \frac{1}{2} e^{0.5t} + \frac{2}{t^2} \Rightarrow g'(1) \approx 2.824 \\ g''(t) &= \frac{1}{4} e^{0.5t} - \frac{4}{t^3} \Rightarrow g''(1) \approx -3.588 \end{aligned}$$

Damit ist das Taylor-Polynom zweiter Ordnung von g im Punkt $t_0 = 1$ gegeben als

$$\begin{aligned} P_2(t) &\approx -0.351 + 2.824\,(t-1) - \frac{3.588}{2}\,(t-1)^2 \\ &\approx -1.794\,t^2 + 6.412\,t - 4.969. \end{aligned}$$

Die resultierende Funktion P_2 ist ein Polynom zweiter Ordnung. Wir können die Mitternachtsformel verwenden (siehe Formelsammlung), um deren Nullstellen zu bestimmen:

$$t_{1/2} \approx \frac{-6.412 \pm \sqrt{6.412^2 - 4 \cdot 1.794 \cdot 4.969}}{2 \cdot (-1.794)} = \frac{-6.412 \pm \sqrt{5.4562}}{-3.588} \approx 2.438 \text{ und } 1.136.$$

Da uns Lösungen auf $[1, 2]$ interessieren, ist der gesuchte Punkt

$$t^\star \approx 1.136.$$

Bemerkung: Die genaue Lösung liegt bei $t^* = 1.134286$

(b) (**10 Punkte**).

(b1) Jährliche Zahlungen (mithilfe der vorschüssigen Rentenformel):

$$C = \frac{i\,P}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{0.08 \cdot 50,000}{1 - 1.08^{-8}} \approx 8,700.75.$$

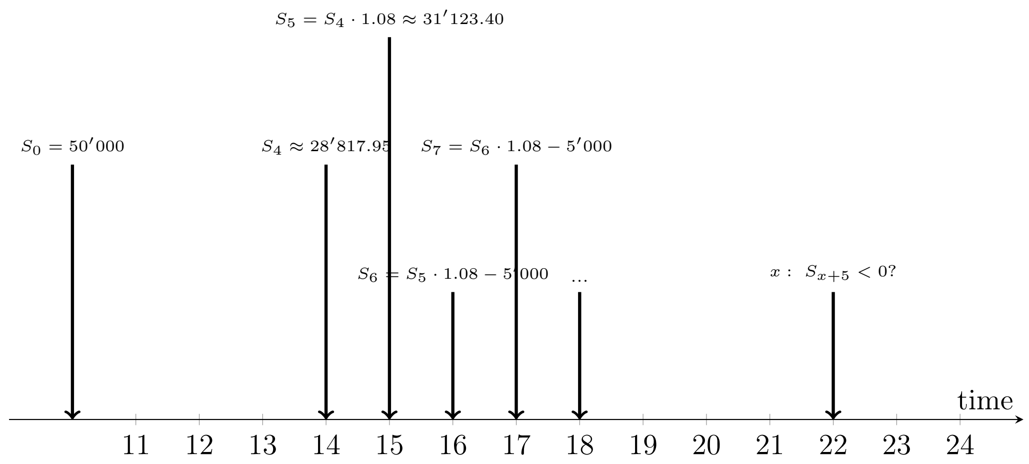
(b2) Sei S_n der verbleibende Schuldenstand am Ende des Jahres n (nach 2010). Damit gilt:

$$S_n = \underbrace{P\,(1+i)^n}_{\text{Schulden ohne Rückzahlung}} - \underbrace{C\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}_{\text{Wert der Rückzahlungen nach Jahr } n}$$

. Für $n = 4$ haben wir

$$S_4 = 50,000 \cdot 1.08^4 - C\frac{1.08^4 - 1}{0.08} \approx 28,817.95.$$

(b3) (skizziert)



(b4) Sei T die Anzahl Jahre, nach welchen die ausstehenden Schulden zurückgezahlt werden (nach dem Jahr 2015). In dem Jahr $2015 + T$ ist der Wert der Schulden gleich dem Wert der Rückzahlungen. Wir haben

$$\begin{aligned}
S_5 \cdot 1.08^T &= 5,000\,\frac{1.08^T-1}{0.08}\\
(S_5\cdot 0.08 + 5,000)\cdot 1.08^T &= 5'000\\
1.08^T &= \frac{5,000}{5,000 - S_5\cdot 0.08} \approx 1.99193
\end{aligned}$$

Es folgt $T \approx 8.95$, d.h. die Schulden sind nach etwa 9 Jahren, bzw. Ende Jahr 2023 zurückgezahlt.

(c) (**5 Punkte**).

(c1) Sei $C(t)$ die prozentuale Veränderung von ${}^{14}_{6}C$-Atomen nach t Jahren. Es gilt

$$C(t) \quad = \quad 3\times 10^{-8}\% \times 0.5^{\frac{t}{5730}},$$

In der Tat gilt damit, dass $C(0) = 3\times 10^{-8}\%$ die anfängliche Zahl der Atome darstellt und die Halbwertzeitbedingung $C(t+5730) = \frac{1}{2}\,C_t$ erfüllt ist. Es gilt

$$\frac{C(t+5730)}{C(t)} = \frac{1}{2} = \frac{C(t+1+5730)}{C(t+1)} \Leftrightarrow \frac{C(t+1)}{C(t)} = 0.5^{\frac{t}{5730}}$$

für alle t, d.h. $(C(t))_{t\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $q = 0.5^{\frac{t}{5730}}$.

(c2) Das folgende gilt:

$$\begin{aligned}
&C(t) \geq 2.747\times 10^{-8}\%\\
&\Leftrightarrow \quad 3\times 10^{-8}\% \times 0.5^{\frac{t}{5730}} \geq 2.747\times 10^{-8}\%\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{t}{5730}\ln(0.5) \geq \ln\left(\frac{2.747}{3}\right)\\
&\Leftrightarrow \quad t \leq 728.315
\end{aligned}$$

d.h. das Leinentuch ist run 730 Jahre alt (von 1260).

(d) (**9 Punkte**).

Sei

$$P(X) = \text{gesamter Gewinn von } x \text{ verkauften Tickets}$$

für $0 \leq X \leq 80$.

Aus den gegebenen Informationen entnehmen wir

$$P(X) = \begin{cases} 0.1\,(X\cdot 800), & X \leq 60\\ 0.1\,X\,(800 - 10\,(X-60)), & 60 < X \leq 80 \end{cases}$$

oder, vereinfacht

$$P(X) = \begin{cases} 80\,X, & X \leq 60\\ 140\,X - X^2, & 60 < X \leq 80 \end{cases}$$

Wenn weniger als 60 Tickets verkauft werden, ist die Profitfunktion linear wachsend in X und damit wäre das Maximum bei $X = 60$ erreicht. Zu prüfen bleibt, ob für eine verkaufte Anzahl Tickets zwischen 60 und 80 die Provision $P(60) = 640$ übersteigt. Da

$$P'(X) = 140 - 2X \quad \text{for } X \in (60, 80)$$

und $P'(X) = 0$ für $X^\star = 70$ und $P''(70) = -2 < 0$, $X^\star = 70$ ist ein lokales Maximum für P auf $[60, 80]$. Da die Funktion quadratisch ist, ist $X^\star = 70$ auch ein globales Maximum von P (auf $[60, 80]$). Die Provision von $X^\star = 70$ ist grösser als die von $P(60) = 640$, denn wir haben

$$P(70) = 4900 > P(60)$$

Es folgt, dass der Gewinn mit 70 verkauften Tickets maximiert wird.

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 2

1. Die richtige Antwort ist (b). Die folgende Wahrheitstabelle zeigt die Aussage $A \vee B \Rightarrow A$:

A	B	$A \vee B \Rightarrow A$
T	T	T
T	F	T
F	T	$\underline{F}$
F	F	T

Da die Aussage nicht wahr ist für alle Kombinationen von A und B, sie ist keine Tautologie.

2. Die richtige Antwort ist (a). Die Folgenglieder einer konvergenten Summe konvergieren selbst gegen 0 (Theorem 7.1 im Buch).

3. Die richtige Antwort ist (c). Es gilt

$$\bar{i} = \sqrt{(1.04)^2(1.05)^{10}(1.06)^4} - 1 \approx 5.123\%.$$

Das arithmetische Mittel der jährlichen Zinsen (Antwort b) ist in diesem Fall falsch (Fisher Theorem).

4. Die richtige Antwort ist (d). Es gilt

$$f(-\sqrt{5}) = e^{\sqrt{(-\sqrt{5})^2-1}} - 1 = e^{\sqrt{4}-1} = e.$$

Daher

$$f^{-1}(e) = -\sqrt{5}.$$

Remark: (b) und (c) sind nicht möglich, da sie keine Elemente des Definitionsbereichs von f sind.

5. Die richtige Antwort ist (d). Es ist eine Anwendung der Identitäten $\ln(x^a) = a\ln(x)$ und $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$:

$$\log_a(x^a) = \frac{\ln(x^a)}{\ln(a)} = a\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = a\log_a(x).$$

Remark: Dass (a), (b), und (c) nicht stimmen können kann mit Gegenbeispielen gezeigt werden ($a = 10$ and $x = 100$ und für Antwort (c) mit $a = 2$ and $x_1 = 2$, $x_2 = 4$).

6. Die richtige Antwort ist (b). $f(x)$ ist nur definiert für $x > 1$ aufgrund des natürlichen Logarithmus und die Bedingung, dass der Term unter der Wurzel nicht-negativ sein darf. Da f eine Verknüpfung stetiger Funktionen überall ausser in $x = 2$ ist, folgt die Behauptung.

7. Die richtige Antwort ist (a). Der kleinste Wert, der angenommen werden kann, ist $-1/2$ für $x = 1$ (Ausschluss von (b) und (d)). Da f stetig ist auf dem Definitionsbereich und streng monoton steigend für $x \geq 1$, müessen wir die zwei Limits

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{1}{2}\\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

betrachten. f ist teilweise linear, daher gibt es keine lokalen Extremstellen. Es folgt, dass f Werte in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ annimmt.

8. Die richtige Antwort ist (b). f ist ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$, und

$$\frac{d}{dx} f(-x) = \frac{d}{dx}(-f(x))$$

d.h. wir haben $-f'(-x) = -f'(x)$ oder $f'(-x) = f'(x)$, was so viel bedeutet wie dass f' gerade ist.

9. Die richtige Antwort ist (c). Es gilt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) &= \frac{xg(x)}{f(x)} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\\ &= x\frac{f'(x)}{f(x)} - x\frac{g'(x)}{g(x)}\\ &= \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)\end{aligned}$$

10. Die richtige Antwort ist (a). Es gibt eine Umgebung von $x_0 = 5$, geschrieben $U(x_0)$, für die $g(x) \geq g(x_0)$ für alle $x \in U(5)$ gilt. Da f streng monoton fallend ist, gilt $f(g(x)) \leq f(g(5))$ für alle $x \in U(5)$. deshalb ist $x_0 = 5$ ein lokales Maximum von h.

11. Die richtige Antwort ist (d). Anstatt alle Taylor-Polynome zu bestimmen, wählen wir das Ausschlussverfahren:
(a): $f(x) = e^{3x} + 2$ und $f'(x) = 3e^x$. Deshalb ist $P_4(0) = 3 = f(0)$ und $P_4'(0) = 3 \neq 3 = f'(0)$.
(b): $f(x) = 4e^{3x} - x$. Deshalb ist $P_4(0) = 3 \neq 4 = f(0)$.
(c): $f(x) = 3e^{3x} + 2$. Deshalb ist $P_4(0) = 5 \neq 4 = f(0)$.
Übrig bleibt Antwort (d).

12. Die richtige Antwort ist (b). f ist homogen 2.ten Grades, deshalb gilt $\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{g,x}(x, y) = 2$

Aufgabe 3

1. Die richtige Antwort ist (b). Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right) \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)+x} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)+1+1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Die richtige Antwort ist (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+2^x}{\sqrt{9\cdot 25^x+8^x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{5^x+2^x}{3\cdot 5^x\sqrt{1+\frac{1}{9}(\frac{8}{25})^x}} \\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1+(\frac{2}{5})^x}{\sqrt{1+\frac{1}{9}(\frac{8}{25})^x}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3. Die richtige Antwort ist (d). Die Gleichung ist definiert für $x<1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\log_3(-x+25)+\log_3(-x+25)=5 \\
&\Leftrightarrow\ (-x+25)(3-3x)=3^5 \\
&\Leftrightarrow\ 3x^2-78x-163=0 \\
&\Leftrightarrow\ 3(x-28)(x+2)=0
\end{aligned}$$

Daher ist die einzige Lösungsmöglichkeit $x=-2$

4. Die richtige Antwort ist (d). In der Tat:

$$(x,y)\in D_f \Leftrightarrow x^2-2x+y^2\geq 0\ \wedge\ 36-4x^2-9y^2>0$$

Die erste Bedingung ist äquivalent zu $(x-1)^2+y^2\geq 1$, d.h. geometrisch gesprochen das Äussere eines Kreises mit Radius 1 und Zentrum $(1,0)$. Die zweite Bedingung ist äquivalent zu $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1$, also das Innere einer Ellipse mit Zentrum $(0,0)$, x-Radius von 3, und y-Radius von 2.

5. Die richtige Antwort ist (b). Es gilt

$$\begin{aligned}
(x,y)\in D_f &\Leftrightarrow\ 0\leq x^2+y^2<\frac{\Pi}{2} \\
&\Leftrightarrow\ 0<\frac{\Pi}{2}-x^2-y^2\leq\frac{\Pi}{2} \\
&\Leftrightarrow\ \sin(0)<\sin(\frac{\Pi}{2}-x^2-y^2)\leq 1 \\
&\Leftrightarrow\ 0<f(x,y)\leq 1
\end{aligned}$$

6. Die richtige Antwort ist (b). Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\sin(y) + 2\cos(x) \\ f_y(x,y) &= 2ay + (x^2-1)\cos(y) \end{aligned}$$

Damit folgt $f_x(0,0) = 2$ und $f_y(0,0) = -1$.

$$m = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

7. Die richtige Antwort ist (c). Es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \sqrt[3]{\lambda x} \cdot \sqrt[6]{\lambda y} \ln\left(\frac{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}\right) + \sqrt[6]{\lambda x}\,\sqrt[3]{\lambda y} \\ &= \lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{x}\lambda^{\frac{1}{6}}\,\sqrt[6]{y}\ln\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) + \lambda^{\frac{1}{6}}\,\sqrt[6]{x}\lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{y} \\ &= \lambda^{\frac{1}{2}} f(x,y) \end{aligned}$$

Es folgt dass f homogen zum Grad $1/2$ ist.

8. Die richtige Antwort ist (a). Es gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \frac{(\lambda x)^{1.5}(\lambda y)^b}{\sqrt[4]{(\lambda x)^a + (\lambda y)^a}} - \sqrt{\lambda x}(\cdot \lambda y) + \left((\lambda x)(\lambda y)^2\right)^{2b} \\ &= \lambda^{1.5+b-\frac{a}{4}}\,\frac{x^{1.5}y^b}{\sqrt[4]{x^a+y^a}} - \lambda^{1.5}\sqrt{x}y + \lambda^{6b}\left(xy^2\right)^{2b} \end{aligned}$$

Damit ist f genau dann homogen wenn $\frac{2}{3} + b - \frac{1}{4}a = \frac{3}{2}$ und $\frac{2}{3} + b - \frac{1}{4}a = 6b$. Die zweite Bedingung impliziert $b = \frac{1}{4}$. Eingesetzt in Bedingung 1 ergibt sich $a = 1$.

Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematatik A

Musterlösungen Prüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

28. Januar 2020

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil 1: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**2 Punkte**).
Die Funktion Q beschreibt, wie die Nachfrage $d = D(p)$ des institutionellen Anlegers den Marktpreis $p = P(d)$ der Aktie beeinflusst. Mathematisch gesprochen ist die Funktion Q die Verknüpfung der Funktionen P und D, d.h., $Q = P \circ D$. Es gilt:

$$Q(p) = (P \circ D)(p) = P(D(p)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(4 - 2\,e^{p-1}\right) = \frac{1}{4} + 2 - e^{p-1} = \frac{9}{4} - e^{p-1}.$$

(a2) (**6 Punkte**).
In dieser Aufgabe möchten wir denjenigen Preis $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ der Aktie herausfinden, der durch den Kauf von $D(p^\star)$ Aktien durch den institutionellen Investor unverändert bleibt. Mathematisch ausgedrückt muss $p^\star$ die sogenannte Fixpunktgleichung $p^\star = Q(p^\star)$ erfüllen. Um die Existenz und Eindeutigkeit von $p^\star$ zeigen zu können, definieren wir $f(p) = Q(p) - p = \frac{9}{4} - e^{p-1} - p$ und wenden Bolzano's Nullstellensatz auf $f(p) = 0$ an. In der Tat gilt:

$$p = Q(p) \Leftrightarrow f(p) = 0.$$

Wir erhalten:

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow Q(p) - p = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - e^{p-1} - p = 0.$$

Da f stetig ist, hat die Gleichung $f(p) = 0$ nach dem Nullstellensatz mindestens eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, gegeben, dass das Vorzeichen f zwischen 0 und $\frac{3}{2}$ wechselt. Es gilt:

$$f(0) = \frac{9}{4} - e^{0-1} - 0 = \frac{9}{4} - e^{-1} \approx 1.882121 > 0,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - e^{\frac{3}{2}-1} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - e^{\frac{1}{2}} \approx -0.8987213 < 0.$$

Daher hat die Gleichung $f(p) = 0$ eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Weiterhin ist die Lösung eindeutig, wenn die Funktion f streng monoton ist. Es gilt:

$$f'(p) = -e^{p-1} - 1 < 0 \qquad \text{für alle Preise } p.$$

Die Funktion f ist also streng monoton fallend auf dem Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ und besitzt daher eine eindeutige Nullstelle auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Zusammengefasst gilt: Die Gleichung $f(p) = 0$ hat eine eindeutige Lösung auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, d.h., $p = Q(p)$ hat eine eindeutige Lösung auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Diese Lösung ist der gesuchte, eindeutige Fixpunkt $p^\star$ der Funktion Q auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

(a3) (**6 Punkte**).
In dieser Aufgabe müssen wir ein Taylorpolynom 2. Ordnung bestimmen, um die Lösung der Fixpunktgleichung $p = Q(p)$ zu approximieren.
Es existieren zwei Lösungmöglichkeiten: (i) wir approximieren die Funktion Q mit ihrem Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{Q,2}$ im Punkt $p_0 = 1$ und lösen die Gleichung $p = P_{Q,2}(p)$; oder (ii) wir approximieren die Funktion f, definiert als $f(p) = Q(p) - p = \frac{9}{4} - e^{p-1} - p$, mit ihrem

Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{f,2}$ im Punkt $p_0 = 1$ und lösen die Gleichung $P_{f,2}(p) = 0$.

(i) Das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{Q,2}$ von Q in $p_0 = 1$ ist:

$$P_{Q,2}(p) = Q(p_0) + Q'(p_0)\,(p - p_0) + \frac{1}{2}\,Q''(p_0)\,(p - p_0)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(p_0) = Q(1) &= \frac{9}{4} - e^{1-1} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}, \\ Q'(p) &= -e^{p-1} \Rightarrow Q'(1) = -e^{1-1} = -1, \\ Q''(p) &= -e^{p-1} \Rightarrow Q''(1) = -e^{1-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_{Q,2}(p) = \frac{5}{4} - 1 \cdot (p-1) - \frac{1}{2} \cdot (p-1)^2 = \frac{5}{4} - p + 1 - \frac{1}{2}\,p^2 + p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{7}{4}.$$

Wir erhalten:

$$p = P_{Q,2}(p) \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{7}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow -2\,p^2 - 4\,p + 7 = 0 \Leftrightarrow p = -1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Da $-1 - \sqrt{\frac{9}{2}} \notin \left[0, \frac{3}{2}\right]$, bleibt lediglich $-1 + \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 1.12132$ und es gilt:

$$p^\star \approx 1.12132.$$

(ii) Das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{f,2}$ von f bei $p_0 = 1$ ist:

$$P_{f,2}(p) = f(p_0) + f'(p_0)\,(p - p_0) + \frac{1}{2}\,f''(p_0)\,(p - p_0)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(p_0) = f(1) &= \frac{9}{4} - e^{1-1} - 1 = \frac{9}{4} - 1 - 1 = \frac{1}{4}, \\ f'(p) &= -e^{p-1} - 1 \Rightarrow f'(1) = -e^{1-1} - 1 = -2, \\ f''(p) &= -e^{p-1} \Rightarrow f''(1) = -e^{1-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_{f,2}(p) = \frac{1}{4} - 2 \cdot (p-1) - \frac{1}{2} \cdot (p-1)^2 = \frac{1}{4} - 2\,p + 2 - \frac{1}{2}\,p^2 + p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4}.$$

Wir erhalten:

$$P_{f,2}(p) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow -2\,p^2 - 4\,p + 7 = 0 \Leftrightarrow p = -1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Da $-1 - \sqrt{\frac{9}{2}} \notin \left[0, \frac{3}{2}\right]$, bleibt lediglich $-1 + \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 1.12132$ und es gilt:

$$p^\star \approx 1.12132.$$

(b) (**6 Punkte**).

In dieser Aufgabe arbeiten wir mit der Beschreibung der Rechenleistung eines Computers, die benötigt wird, um eine bestimme Aufgabe in diskreten Zeitperioden zu bewältigen. Ursprünglich, d.h. bevor der Computer aufgestockt wird, benötigt die Berechnung der Aufgabe die komplette Rechenleistung der ersten 15 Perioden. Demnach ist die benötigte Rechenleistung gegeben durch

$$s_{15} = a_1 + \cdots + a_{15} = \sum_{n=1}^{15} a_n,$$

d.h., die 15. Partialsumme der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wird charakterisiert durch $a_1 = 10$ und $a_{n+1} = (1+2\%)\,a_n$, und ist folglich eine geometrische Folge mit $a_1 = 10$ und $q = 1 + 2\% = 1.02$. Damit gilt:

$$s_{15} = \sum_{n=1}^{15} a_1\, q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^{15}}{1-q} = 10\,\frac{1-1.02^{15}}{1-1.02} \approx 172.9342.$$

Nachdem der Computer verbessert wurde, lässt sich die Entwicklung der Rechenleistung mittels der Folge $\tilde{a}_1 = 15$ und $\tilde{a}_{n+1} = (1+3\%)\,\tilde{a}_n$ beschreiben. Auch $\{\tilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge, wobei $\tilde{a}_1 = 15$ und $\tilde{q} = 1 + 3\% = 1.03$ gilt.
Demnach erfüllt die Anzahl n der Perioden, die zur Berechnung der Aufgabe auf dem aufgestockten Computer benötigt werden, folgende Gleichung:

$$\tilde{s}_n \stackrel{!}{=} s_{15} \;\Leftrightarrow\; \tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \stackrel{!}{=} s_{15}\,.$$

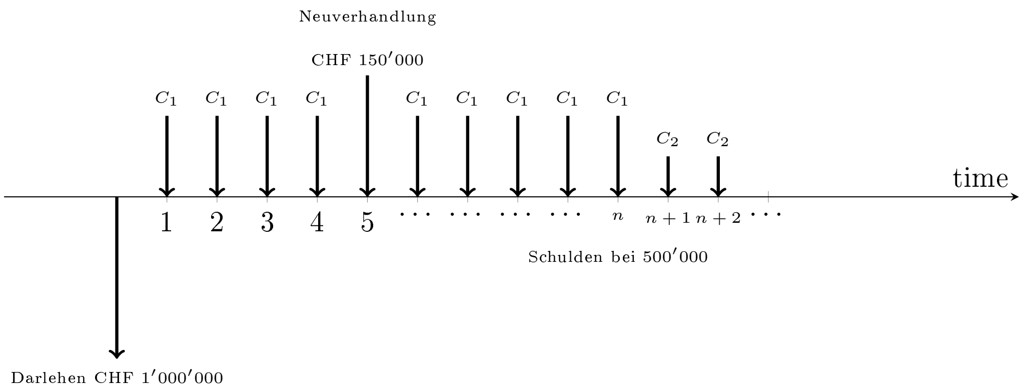
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_1\, \tilde{q}^{k-1} \quad &= \quad \tilde{a}_1 \frac{1-\tilde{q}^n}{1-\tilde{q}} = s_{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 15\,\frac{1-1.03^n}{1-1.03} = s_{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 1.03^n = s_{15}\,\frac{1-1.03}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 1.03^n = 1 - s_{15}\,\frac{1-1.03}{15} = 1 - 10\,\frac{1-1.02^{15}}{1-1.02}\,\frac{1-1.03}{15} = 1.02^{15} \\
&\Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(1.02^{15}\right)}{\ln(1.03)} = 15\,\frac{\ln(1.02)}{\ln(1.03)} \approx 10.0491.
\end{aligned}$$

Der verbesserte Computer braucht also etwas mehr als 10 Perioden, um die Berechnung der Aufgabe abzuschliessen. Da der Start der Berechnung durch das Aufstocken um 3 Perioden aufgeschoben werden muss, spart das Rechenzentrum allerdings nur etwa $15-10-3 = 2$ Perioden, wenn es für die Berechnung den verbesserten anstelle des alten Computers verwendet.

(c) (**10 Punkte**).

(c1)



(c2) Der ursprüngliche Plan besteht darin, C_1 über 10 Jahre am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, um so die Schulden von 1′000′000 CHF auf 750′000 CHF zu reduzieren. Bei einem Zinssatz von 1% wäre der im Jahr 10 zur Schuldenreduktion nötige Betrag gegeben durch

$$1'000'000\,(1+1\%)^{10} - 750'000 \approx 354'622.10.$$

Dieser Betrag muss nun dem Wert einer nachschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen C_1 nach 10 Jahren entsprechen. Folglich gilt:

$$354'622.10 = \underbrace{C_1\,\frac{(1+1\%)^{10}-1}{1\%}}_{\text{Endwert der nachschüssen Rente im Jahr 10}} \quad \Leftrightarrow C_1 = \frac{354'622.10}{\frac{(1+1\%)^{10}-1}{1\%}} \approx 33'895.50 \text{ (CHF)}.$$

(c3) Der Schuldenstand nach 5 Jahren entspricht der über 5 Jahre verzinsten Kreditsumme abzüglich der über 5 Jahre getätigten Rückzahlungen, d.h. abzüglich dem (End-) Wert von 5 Zahlungen C_1 am Ende jeden Jahres, sowie abzüglich der zusätzlichen $150'000 - C_1$ CHF im Jahr 5. Es gilt:

Schuldenstand am Ende des 5. Jahres

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{1'000'000\,(1+1\%)^5}_{\text{Wert der Kreditsumme, verzinst über 5 Jahre}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach 5 Jahren}} - \underbrace{(150'000 - C_1)}_{\text{zusätzl. Zahlung am Ende des 5. Jahres}} \\
&\approx 1'051'010 - 33'895.50\,\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%} - 150'000 + 33'895.50 \\
&\approx 1'051'010 - 172'901.10 - 150'000 + 33'895.50 \\
&= 762'004.40 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

(c4) Nach 5 Jahren wird der Zinssatz von 1% auf 0.5% reduziert. Trotzdem werden weiterhin Zahlungen C_1 am Ende jeden Jahre geleistet bis der Schuldenstand in n Jahren 500′000 CHF erreicht. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{500'000}_{\text{angepeilter Schuldenstand nach } n \text{ Jahren}} &= \underbrace{762'004.4\,(1+0.5\%)^n}_{\text{Wert der Schulden, verzinst über } n \text{ Jahren}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+0.5\%)^n-1}{0.5\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach } n \text{ Jahren}} \\
&= \left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right)(1+0.5\%)^n + \frac{C_1}{0.5\%}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(1+0.5\%)^n = \frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}}\right)}{\ln(1+0.5\%)} \approx 8.54.$$

Das angestrebte Schuldenniveau wird also 9 Jahre nach der Neuverhandlung der Konditionen erreicht.

Um genau zu sein, nach 9 Jahren ist der Schuldenstand kleiner als 500′000 CHF. Es gilt:

$$\underbrace{762'004.4\,(1+0.5\%)^9}_{\text{Wert der Schulden, verzinst über 9 Jahren}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+0.5\%)^9 - 1}{0.5\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach 9 Jahren}} = 485'756.10 \text{ (CHF)}.$$

Beide Antworten, sowohl 8.54 Jahre als auch 9 Jahre, werden akzeptiert. In Teilaufgabe (c5) wird von einem Schuldenstand von 500′000 CHF ausgegangen.

(c5) Nachdem die angestrebten 500′000 CHF erreicht wurden, werden am Ende jeden Jahres C_2 CHF gezahlt, um das Schuldenniveau konstant bei 500′000 CHF zu halten. Das bedeutet nichts anderes, als dass der Betrag C_2 der jährlichen Zinszahlung für die Schulden entspricht, also

$$C_2 = 0.5\% \cdot 500'000 = 2'500 \text{ (CHF)}.$$

(d) (**10 Punkte**).

(d1) Der Gewinn entspricht den Erträgen abzüglich der Kosten. Im Falle eines Verkaufspreises von $p > 20$, ergeben sich die Erträge als

$$q_d(p) \cdot p \quad \text{(Nachfrage bzw. abgesetzte Menge mal Stückpreis)}$$

und die Kosten als

$$q_d(p) \cdot 20 \quad \text{(Nachfrage bzw. produzierte Menge mal Stückkosten)},$$

da die Produktionskosten pro Tablet 20 (USD) betragen. Damit folgt:

$$\text{Gewinn} = G(p) = \text{Erträge}-\text{Kosten} = q_d(p)\cdot p - q_d(p)\cdot 20 = q_d(p)\,(p-20) = \frac{(15'840 - 30\,p)\,(p-20)}{p+50}.$$

(d2) Die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit vom Verkaufspreis ist gegeben durch:

$$\varepsilon_G(p) = p\,\frac{G'(p)}{G(p)}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
G'(p) &= \frac{(-30\,(p-20) + (15'840 - 30\,p))\ (p+50) - (15'840 - 30\,p)\,(p-20)}{(p+50)^2} \\
&= \frac{-30\,(p-20)\,(p+50) + (15'840 - 30\,p)\,(p+50-p+20)}{(p+50)^2} \\
&= \frac{-30\,(p-20)\,(p+50) + 70\,(15'840 - 30\,p)}{(p+50)^2}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_G(p) &= p\,\frac{-30\,(p-20)\,(p+50)+70\,(15'840-30\,p)}{(p+50)^2}\,\frac{p+50}{(15'840-30\,p)\,(p-20)}\\ &= \frac{p}{p-528}+\frac{70\,p}{(p+50)\,(p-20)}.\end{aligned}$$

Alternativ können wir die Änderungsrate von $G(p)$ mittels der logarithmischen Ableitung bestimmen und anschliessend das Ergebnis mit p multiplizieren, um die Elastizität $\varepsilon_G(p)$ zu erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{G'(p)}{G(p)} = [\ln(G(p))]' &= \left[\ln\left(\frac{(15,840-30\,p)\,(p-20)}{p+50}\right)\right]'\\ &= [\ln(15,840-30\,p)+\ln(p-20)-\ln(p+50)]'\\ &= \frac{-30}{15,840-30\,p}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}\\ &= \frac{1}{p-528}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\varepsilon_G(p) = p\,\frac{G'(p)}{G(p)} = \frac{p}{p-528}+\frac{p}{p-20}-\frac{p}{p+50}.$$

(d3) Die relative Änderung des Gewinns bei einer Preissteigerung von 100 (USD) auf 105 (USD) ist gegeben durch:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)}.$$

Es gilt:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)} \approx \varepsilon_G(100)\,\frac{105-100}{100} = \varepsilon_G(100)\cdot 5\%.$$

Wir erhalten:

$$\varepsilon_G(100) = \frac{100}{100-528}+\frac{70\cdot 100}{(100+50)\,(100-20)} \approx 0.35$$

und folglich:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)} \approx 0.35\cdot 5\% = 1.75\%.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐
9.	☐	☐	☐	☒
10.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (d). Die folgende Wahrheitstabelle zeigt, dass nur die Aussage in (d) genau dann wahr ist, wenn A und B verschieden sind:

	A	W	W	F	F
	B	W	F	W	F
	$A \vee B$	W	W	W	F
	$A \wedge B$	W	F	F	F
	$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
	$\neg(A \wedge B)$	F	W	W	W
(a)	$A \vee B$	W	W	W	F
(b)	$A \wedge B$	W	F	F	F
(c)	$\neg(A \Rightarrow B)$	F	W	F	F
(d)	$(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$	F	W	W	F

2. Die Antwort ist (c). Von Interesse sind die beiden mittleren Fällen, bei welchen genau eines der beiden Ereignisse wahr ist. Wenn Hans nicht zur Party geht, ist A falsch. Deshalb ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, unabhängig, ob B wahr oder falsch ist. Weiterhin ist $A \wedge B$ falsch, $A \vee B$ kann wahr oder falsch sein (abhängig von B), und auch $A \Leftrightarrow B$ kann wahr oder falsch sein (abhängig von B).

3. Die Antwort ist (d). (a) und (c) sind im Allgemeinen falsch, wie das Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ zeigt. In diesem Fall ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton und konvergent. Jedoch ist dann die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n} = n$, weder beschränkt noch konvergent. Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und wechselt ausserdem das Vorzeichen, so ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton. Beispielsweise ist die Folge $a_n = \frac{1}{n} - 0.9$ beschränkt, monoton und konvergent, während $b_n = \frac{1}{a_n}$ beschränkt und konvergent aber nicht monoton ist.

4. Die Antwort ist (c). $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind beides geometrische Folgen mit Parameter q und $\frac{q}{2}$. Deshalb folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{b_1}{1-\frac{q}{2}}.$$

Die Bedingung ist erfüllt, wenn $a_1 = 2\,b_1$ und $1 - q = 2 - q$.

Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{1-q} = \frac{b_1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{2\,b_1}{2-q}.$$

Falls $b_1 = 2\,a_1$, dann gilt:

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{4\,a_1}{2-q} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0, q \in (-1,1) \\ a_1 \neq 0, q = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

5. Die Antwort ist (a). Marc zahlt seine Schulden vor Lucie zurück. Genauer gesagt kann Mark seine Schulden in einem endlichen Zeitrahmen zurückzahlen, weil seine jährliche Rückzahlungen höher sind als die jährlichen Zinszahlungen:

$$1'000'000 \cdot 1\% = 10'000 < 10'500.$$

Dagegen wird Lucie ihre Schulden nie zurückzahlen können, weil ihre jährlichen Rückzahlungen nicht einmal den jährlichen Zins abdecken:

$$800'000 \cdot 1.2\% = 9'600 > 9'500.$$

6. Die Antwort ist (b). Weil h nur definiert ist, wenn g definiert ist, folgt $D_h \subseteq D_g$.

7. Die Antwort ist (a). Die Elastizität ist gegeben als:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\rho_f(x)$$

wobei $\rho_f(x)$ die Wachstumsrate ist. Deshalb folgt:

$$\rho_f(x) = \frac{\varepsilon_f(x)}{x}.$$

Weil $\varepsilon_f(x) = 2$, folgt

$$\rho_f(x) = \frac{2}{x}.$$

Weil zudem $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$, folgt, dass ρ_f streng monoton wachsen ist.

8. Die Antwort ist (c). Die Elastizität ist gegeben als:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Also folgt mit $x_0 \neq 0$, $f(x) > 0$ für alle x, und $\varepsilon_f(x_0) = 0$, dass

$$f'(x_0) = 0.$$

Deshalb ist x_0 ein stationärer Punkt. Weil f streng konkav ist, ist x_0 ein lokales Maximum (und sogar ein globales Maximum, aber jedes globale Maximum ist immer auch ein lokales Maximum).

9. Die Antwort ist (d). Der Restterm ist im Allgemeinen weder fallend noch steigend in der Ordnung des Taylorpolynoms. Beide Fälle sind möglich.

10. Die Antwort ist (b). Weil f homogen von Grad 2 ist, folgt aus der Euler'schen Relation:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2.$$

Deshalb gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = 2 - \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2 - (e^{x+y} + 1) = 1 - e^{x+y}.$$

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☐	☐	☒	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☐	☐	☒	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (a). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) &= \lim_{x\to 1+}\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\ln(x)} \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1+}\frac{1-x}{x\ln(x)+(x-1)} \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{-1}{\ln(x)+x\frac{1}{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1+}\frac{-1}{\ln(x)+2} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In $(\star)$ haben wir die Regel von L'Hôpital angewandt.

2. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+}(x\ln(x))}.$$

Weil

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln(x)) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$$

gilt

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim_{x\to 0+}(x\ln(x))} = e^0 = 1.$$

In $(\star)$ haben wir die Regel von L'Hôpital angewendet.

3. Die Antwort ist (c). Sei a_n die Papierdicke nach dem n-ten Mal Falten. Dann gelten

$$a_0 = 0.5 \text{ (Millimeter)} = 0.5\,10^{-6} \text{ (Kilometer)}$$

und

$$a_n = 2\,a_{n-1}.$$

Deshalb ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $a_0 = 0.5\cdot 10^{-6}$ und $q = 2$. Daraus folgen

$$a_n = a_0\,q^n$$

und

$$a_n \geq 400,000 = 4 \cdot 10^5 \Leftrightarrow 0.5\, 10^{-6}\, 2^n \geq 4 \cdot 10^5.$$

Es folgt also, dass:

$$2^n \geq \frac{4 \cdot 10^5}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{11} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(8 \cdot 10^{11})}{\ln(2)} \approx 39.54.$$

Deshalb muss das Papier mindestens 40-mal gefaltet werden.

4. Die Antwort ist (d). Für den internen Zinssatz r muss der Nettobarwert des Projekts null sein. Es gilt also:

$$-10'000 + \frac{5'000}{1+r} + \frac{10'000}{(1+r)^2} = 0.$$

Durch Multiplizieren der Gleichung mit $\frac{(1+r)^2}{5'000}$ kommen wir auf

$$-2\,(1+r)^2 + (1+r) + 2 = 0 \Leftrightarrow 1+r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+16}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4}.$$

Deshalb ist $1+r \approx 1.3$, d.h. $r \approx 30\%$.

5. Die Antwort ist (c). Es gilt:

$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 > 0 \text{ und } 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Die erste Bedingung entspricht $x^2 + y^2 > 1^2$, d.h. alle Punkte (x,y) ausserhalb des Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1. Die zweite Bedingung entspricht $x^2 + y^2 < 2^2$, d.h. alle Punkte (x,y) innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2.

6. Die Antwort ist (b). Der Satz von der impliziten Funktion besagt, dass die Steigung der Tangente an der Niveaulinie von f bei $(x_0,y_0) = (1,1)$ gegeben ist durch:

$$-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{10\,\alpha\, x_0^{\alpha-1}\, y^{1-\alpha}}{10\,(1-\alpha)\, x_0^{\alpha}\, y_0^{-\alpha}} \overset{(x_0,y_0)=(1,1)}{=} -\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Daraus folgt:

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha} = -0.5 \Leftrightarrow \alpha = 0.5\,(1-\alpha) \Leftrightarrow 1.5\,\alpha = 0.5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

7. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \ln\left((\lambda x)^3 \sqrt[3]{(\lambda y)^4} + \sqrt[6]{(\lambda x)^{11}\,(\lambda y)^{15}}\right) - \frac{13}{3} \ln(\lambda x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\, x^3 \sqrt[3]{y^4} + \lambda^{\frac{13}{3}} \sqrt[6]{x^{11}\, y^{15}}\right) - \frac{13}{3} \ln(x) - \frac{13}{3} \ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\right) + \ln\left(x^3 \sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\, y^{15}}\right) - \frac{13}{3} \ln(x) - \frac{13}{3} \ln(\lambda) \\
&= \frac{13}{3} \ln(\lambda) + \ln\left(x^3 \sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\, y^{15}}\right) - \frac{13}{3} \ln(x) - \frac{13}{3} \ln(\lambda) \\
&= \ln\left(x^3 \sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\, y^{15}}\right) - \frac{13}{3} \ln(x) \\
&= f(x,y) \\
&= \lambda^0\, f(x,y).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f homogen von Grad 0 ist.

8. Die Antwort ist (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} h(\lambda\,x,\lambda\,y) &= f(g(\lambda\,x,\lambda\,y)) \\ &= f(\lambda^\kappa\,g(x,y)) \\ &= (\lambda^\kappa\,g(x,y))^\alpha \\ &= \lambda^{\alpha\,\kappa}\,g(x,y)^\alpha \\ &= \lambda^{\alpha\,\kappa}\,f(g(x,y)) \\ &= \lambda^{\alpha\,\kappa}\,h(x,y). \end{aligned}$$

Deshalb ist f homogen vom Grad $\alpha\,\kappa$ und:

(a) $\alpha\,\kappa = 0.5 = 0.5 \cdot 1$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$,

(b) $\alpha\,\kappa = 2 = 0.5 \cdot 4$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$,

(c) $\alpha\,\kappa = 3.5 = 0.5 \cdot 7$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$,

(d) $\alpha\,\kappa = 5.5 = 0.5 \cdot 11$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.

Mathematik A
Musterlösungen Prüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

9 July 2020

[1]Chair of Mathematics, University of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil 1: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (6 Punkte)

Da Partikel i zur Zeit t an der Stelle $x_i(t)$ ist, für $i = 1, 2$, werden sich die beiden Partikel dann und nur dann zur Zeit $t^\star \in [0, 5]$ treffen, wenn sie dann am selben Ort sind, d.h. zur Zeit $t^\star$ gilt $x_1(t^\star) = x_2(t^\star)$. Diese Gleichung ist äquivalent zu:

$$f(t^\star) = x_1(t^\star) - x_2(t^\star) = 4^{t^\star-1} - (70 - 15\,t^\star - m\,(t^\star)^2) = 4^{t^\star-1} - 70 + 15\,t^\star + m\,(t^\star)^2 = 0,$$

d.h., die zwei Partikel treffen sich zum Zeitpunkt $t^\star$ dann und nur dann wenn $t^\star$ eine Nullstelle von f ist.

Da f stetig ist, $f(0) = 4^{-1} - 70 = -69.75 < 0$ und $f(5) = 4^{5-1} - 70 + 15 \cdot 5 + m \cdot 5^2 = 261 + 25\,m \geq 223.5 > 0$ für alle $m \in [-1.5, 1.5]$, existiert gemäss Bolzanos Theorem ein $t^\star \in [0, 5]$ so dass $f(t^\star) = 0$ für alle $m \in [-1.5, 1.5]$. Daraus folgt, dass ein Zeitpunkt $t^\star \in [0, 5]$ existiert, an dem sich die beiden Partikel treffen.

Zudem gilt:

$$f'(t) = \ln(4) \cdot 4^{t-1} + 15 + 2\,m\,t \overset{m\in[-1.5,1.5],t\in[0,5]}{\geq} \ln(4) \cdot 4^{t-1} + 15 + 2 \cdot (-1.5) \cdot 5 \geq \frac{\ln(4)}{4} > 0.$$

Dies zeigt, dass f auf dem Intervall $[0, 5]$ strikt steigend ist. Deshalb hat f eine eindeutige Nullstelle $t^\star$ in $[0, 5]$. Dies zeigt, dass es einen eindeutigen Zeitpunkt $t^\star \in [0, 5]$ gibt, an dem sich die beiden Partikel treffen.

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass Bedingungen wie "Partikel sollten sich treffen" in mathematische Gleichungen oder Ungleichungen übersetzt werden können.
- *Technisch*: Nutzung der Stetigkeit einer Funktion und Bolzanos Theorem um zu zeigen, dass Nullstellen existieren (also Punkte, an welchen die Funktion den Wert 0 annimmt). Zusätzlich kann strikte Monotonität genutzt werden um zu zeigen, dass die existierende Nullstelle eindeutig ist.

(a2) (6 Punkte)

In dieser Aufgabe müssen wir eine Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung verwenden, um die Lösung der Gleichung $f(t) = 0$ von 1(a1) zu approximieren, wobei $f(t) = 4^{t-1} - 70 + 15\,t + 1.5\,t^2$ (unter der Annahme $m = 1.5$). Zuerst berechnen wir das Taylor Polynom zweiter Ordnung P_2 von f zur Zeit $t_0 = 1$. Danach lösen wir die (quadratische) Gleichung $P_2(t) = 0$ und nehmen jede Nullstelle in $[0, 5]$ als eine Approximation von $t^\star$ so dass $f(t^\star) = 0$.

Das Taylor Polynom zweiter Ordnung P_2 von f zur Zeit $t_0 = 1$ entspricht:

$$P_2(t) = f(1) + f'(1)\,(t-1) + \frac{1}{2}\,f''(1)\,(t-1)^2.$$

Wir haben:

$$f(1) = 4^{1-1} - 70 + 15 \cdot 1 + 1.5 \cdot 1^2 = -52.5,$$

$$f'(t) = \ln(4)\,4^{t-1} + 15 + 3\,t \Rightarrow f'(1) = \ln(4) + 18,$$
$$f''(t) = (\ln(4))^2\,4^{t-1} + 3\,t \Rightarrow f''(1) = (\ln(4))^2 + 3.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
P_2(t) &= -52.5 + (\ln(4) + 18)\,(t-1) + \frac{1}{2}\,\big((\ln(4))^2 - 3\big)\,(t-1)^2 \\
&= -52.5 + (\ln(4) + 18)\,(t-1) + \frac{1}{2}\,\big((\ln(4))^2 - 3\big)\,(t^2 - 2\,t + 1) \\
&= \frac{1}{2}\,\big((\ln(4))^2 - 3\big)\,t^2 + \big(\ln(4) - (\ln(4))^2 + 21\big)\,t + \frac{1}{2}\,\big((\ln(4))^2 - 2\,\ln(4) - 144\big) \\
&\approx -0.539094\,t^2 + 20.46448\,t - 72.42539.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&P_2(t) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t^\star_{1,2} = \frac{-20.46448 \pm \sqrt{(20.46448)^2 - 4\cdot(-0.539094)\cdot(-72.42539)}}{2\cdot(-0.539094)} \\
\Leftrightarrow\quad & t^\star_{1,2} \in \{3.950117, 34.01076\}.
\end{aligned}$$

Nur $t^\star = 3.950117$ liegt in $[0,5]$, daher ist dies die approximative Nullstelle von f in $[0,5]$. Die exakte Nullstelle von f in $[0,5]$ ist 4.370094 (gerundet).

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass die Gleichung $f(t) = 0$ mit der Gleichung $P_2(t) = 0$ apprxoimiert werden sollte, wobei P_2 das Tylor Polynom zweiter Ordnung von f an der Stelle 1 ist.
- *Technisch*: Berechnung von P_2 und Lösung der quadratischen Gleichung $P_2(t) = 0$.

(b) (6 Punkte)

(b1) Die Aufgabe beschreibt die Entwicklung der Anzahl der Nutzer eines Online-Portals über die Zeit. Wir definieren a_k als die Anzahl *neuer* Nutzer k Monate nachdem das Online-Portal im Januar 2010 startete. Gemäss der Beschreibung im Text haben wir:

$$a_0 = 100 \text{ (Nutzer im Januar 2010)}$$

und

$$a_{k+1} = 1.01\, a_k \text{ (Entwicklung bis Ende 2015)}$$

für $k = 0, 1, \ldots, 58$. Wir limitieren den Index von $\{a_k\}$ auf 59, da der Dezember 2015 59 Monate nach dem Januar January 2010 liegt.

Demnach ist $\{a_k\}_{k=0,1,\ldots,59}$ eine geometrische Folge mit $a_0 = 100$ und $q = \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1.01$. Es folgt für die gesamte Anzahl Nutzer Ende 2014:

$$s_{59} = \sum_{k=0}^{59} a_k = a_0\, \frac{1 - q^{59}}{1 - q} = 100\, \frac{1 - 1.01^{59}}{1 - 1.01} \approx 7,987.$$

Wir definieren jetzt b_k als die Anzahl *neuer* Nutzer k Monate nach Juli 2015. Gemäss dem Text in der Aufgabe folgt:

$$b_0 = 500 \text{ (neue Nutzer im Juli 2015)}$$

und

$$b_{k+1} = 1.02\, b_k \text{ (Entwicklung nach Juli 2015)}$$

für $k = 0, 1, \ldots$

Demnach ist $\{b_k\}_{k=0,1,\ldots}$ eine geometrische Folge mit $b_0 = 500$ und $\tilde{q} = \frac{b_{k+1}}{b_k} = 1.02$. Es folgt für die gesamte Anzahl Nutzer Ende Juni 2020:

$$\tilde{s}_{50} = 30\% \cdot 7,987 + \sum_{k=0}^{59} b_k = b_0\, \frac{1 - \tilde{q}^{59}}{1 - \tilde{q}} = 30\% \cdot 7,987 + 500\, \frac{1 - 1.02^{59}}{1 - 1.02} \approx 2,396 + 55,417 \approx 57,813.$$

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass die zeitlichen Entwicklungen der *neuen* Nutzer geometrische Folgen sind und dass die totalen Anzahlen der Nutzer den partiellen Summen entsprechen.
- *Technisch*: Anwendung der Formeln für geometrische Folgen und deren partiellen Summen.

(b2) Die Aufgabe fragt nach der Anzahl Perioden K nach Juli 2015, so dass

$$\tilde{s}_K = s_{60} = 7,987.$$

Wir haben:

$$\tilde{s}_K = 30\% \cdot 7,987 + \sum_{k=0}^{K} b_k = b_0\, \frac{1 - \tilde{q}^K}{1 - \tilde{q}} = 30\% \cdot 7,987 + 500\, \frac{1 - 1.02^K}{1 - 1.02} = 7,987.$$

Es folgt:

$$1 - 1.02^K = (1 - 1.02)\frac{7,987 - 30\% \cdot 7,987}{500} \Leftrightarrow 1.02^K = 1 - (1 - 1.02)\,\frac{70\% \cdot 7,987}{500}.$$

Wir wenden nun die logarithmische Funktion an und erhalten:

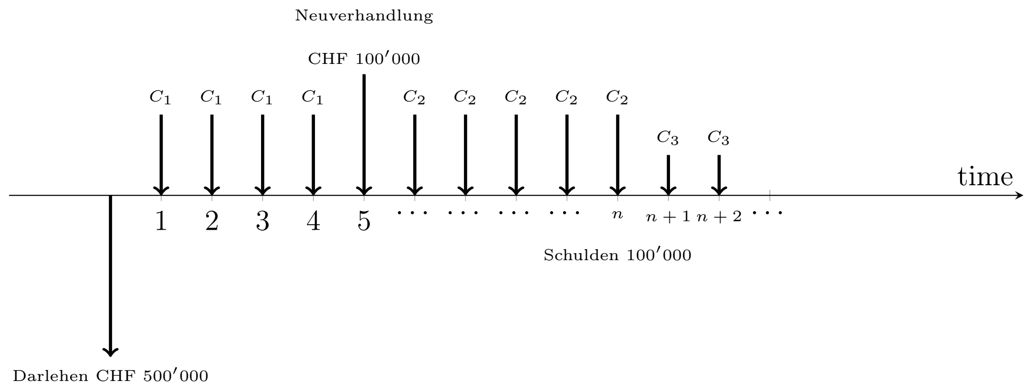
$$K = \frac{\ln\left(1 - (1 - 1.02)\,\frac{70\% \cdot 7,987}{500}\right)}{\ln(1.02)} \approx 10.2.$$

Es folgt, dass die Anzahl der Nutzer von Ende 2014 im Mai des Jahres 2016 wieder erreicht wird.

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass die zeitlichen Entwicklungen der *neuen* Nutzer geometrische Folgen sind und dass die totalen Anzahlen der Nutzer den partiellen Summen entsprechen. Diese Aufgabe generalisiert 1(b1), da die Anzahl der Monate hier unbekannt ist. Die Formeln haben die Anzahl Perioden als Unbekannte, welche es zu berechnen gilt.
- *Technisch*: Anwendung der Formeln für geometrische Folgen und deren partiellen Summen.

(c) (10 Punkte)
(c1)



(c2)
Der ursprüngliche Plan sieht vor, am Ende jedes Jahres $C_1 = 10'000$ CHF zu zahlen. Dies entspricht einer nachschüssigen Rente mit konstanten Zahlungen $C_1 = 10'000$ CHF. Die Schulden nach 5 Jahren entsprechen dem aufgezinsten Wert der Schulden nach 5 Jahren minus dem finalen Wert der nachschüssigen Rente mit konstanten Zahlungen C_1 nach 5 Jahren und minus der zusätzlichen Zahlung am Ende des fünften Jahres von $100'000 - C_1 = 90'000$ CHF. Demnach betragen die ausstehenden Schulden nach 5 Jahren:

$$\begin{aligned} & \underbrace{500'000\,(1+1\%)^5}_{\text{Wert der Kreditsumme, verzinst über 5 Jahre}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach 5 Jahren}} - \underbrace{90'000}_{\text{zusätzl. Zahlung am Ende des 5. Jahres}} \\ \approx\ & 512'625.6266 - 50'502.50626 - 90'000 \\ =\ & 372'123.1203 \text{ (CHF).} \end{aligned}$$

(c3)
Die Bedingung ist, dass die ausstehenden Schulden am Ende des $n-ten$ Jahres $100'000$ CHF betragen. Wir messen die Zeit ausgehend vom Ende des fünften Jahres, daher repräsentiert $n^\star$ die Anzahl Jahre nach dem fünften Jahrt, d.h., $n = n^\star + 5$. Wir haben:

$$\begin{aligned} \underbrace{100'000}_{\text{angepeilter Schuldenstand nach } n^\star \text{ Jahren}} &= \underbrace{372'123.1203\,(1+1\%)^{n^\star}}_{\text{Wert der Schulden, verzinst über } n^\star \text{ years}} - \underbrace{C_2\,\frac{(1+1\%)^{n^\star}-1}{1\%}}_{\text{Wert der jährlichen Zahlungen } C_2 \text{ nach } n^\star \text{ Jahren}} \\ &= \left(372'123.1203 - \frac{C_2}{1\%}\right)(1+1\%)^{n^\star} + \frac{C_2}{1\%} \\ &= \left(372'123.1203 - \frac{25'000}{1\%}\right)(1+1\%)^{n^\star} + \frac{25'000}{1\%}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$(1+1\%)^{n^\star} = \frac{100'000 - \frac{25'000}{1\%}}{372'123.1203 - \frac{25'000}{1\%}} \Leftrightarrow n^\star = \frac{\ln\left(\frac{100'000 - \frac{25'000}{1\%}}{372'123.1203 - \frac{25'000}{1\%}}\right)}{\ln(1+1\%)} \approx 12.09447.$$

Das heisst, der angestrebte Schuldenstand wird 13 Jahre nach der Neuverhandlung der Schulden erreicht.

Um genau zu sein, nach 13 Jahren ist der Schuldenstand kleiner als $100'000$ CHF. Dies liegt daran, dass am Ende des dreizehnten Jahres eine weitere Zahlung geleistet wird, welche in der obenstehenden Berechnung vernachlässigt wird. Wir werden für die nächste Aufgabe jedoch davon ausgehen, dass die ausstehenden Schulden $100'000$ entsprechen.

(c3)

Nachdem die angestrebten $100'000$ CHF erreicht wurden, werden am Ende jeden Jahres C_3 CHF gezahlt, um das Schuldenniveau konstant bei $100'000$ CHF zu halten. Das bedeutet nichts anderes, als dass der Betrag C_3 der jährlichen Zinszahlung für die Schulden entspricht, also

$$C_3 = 1\% \cdot 100'000 = 1'000 \text{ (CHF)}.$$

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, welches finanzielle Produkt (eine Rente oder mehrere Renten) den Zahlungsstrom beschreibt.
- *Technisch*: Ausarbeitung der entsprechenden Bedinungen, oder der totalen Beträge welche einsowie ausgezahlt werden und Anwendung der Formeln für Renten.

(d) (10 Punkte)
(d1)
Der Gewinn entspricht dem Umsatz abzüglich der Kosten. Der Verkaufspreis beträgt 100 CHF pro Stück und ist unabhängig von der Qualität des Mixers. Falls die Qualität $s \in [0,1]$ ist, dann betragen die Produktionskosten pro Stück $f(s)$. Der Anteil $1-s$ an verkauften Mixern hat innerhalb von 2 Jahren einen Defekt und die Firma hat zusätzliche Kosten von $f(s)$ um diese defekten Mixer zu ersetzen. Der Gewinn kann als Funktion von s dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
&Gewinn = P(s) \\
&= \underbrace{100'000 \cdot 100}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{100'000\, f(s)}_{\text{Produktionskosten}} - \underbrace{(1-s) \cdot 100'000 \cdot f(s)}_{\text{Kosten um defekte Mixer zu ersetzen}} \\
&= 100'000\,(100 - f(s) - (1-s)\, f(s)) \\
&= 100'000\,(100 - (2-s)\, f(s)) \\
&= 10'000'000 - 100'000\,(2-s)\, f(s) \\
&= 10'000'000 - 100'000\,(2-s)\left(50 + \frac{1}{1-0.9\,s}\right).
\end{aligned}$$

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass Gewinn Umsatz minus Kosten entspricht sowie Berücksichtigung aller Umsatz- und Kostenkomponenten(in diesem Fall: Umsatz aus Verkauf und Kosten aus Produktion sowie durch Ersetzen defekter Mixer).

- *Technisch*: Aufstellung der mathematischen Ausdrücke für Umsatz und Kosten.

(d2)
Wir maximieren die Funktion P von 1(d1) um die optimale Qualität zu bestimmen, welche den Gewinn der Firma maximiert. Bedingung erster Ordnung:

$$P'(s) = 0$$

Wir lösen:

$$\begin{aligned}
&P'(s) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& 100'000\left(50 + \frac{1}{1-0.9\,s}\right) - 100'000\,(2-s)\,\frac{0.9}{(1-0.9\,s)^2} = 0 \\
\Leftrightarrow\;& \left(50 + \frac{1}{1-0.9\,s}\right)(1-0.9\,s)^2 - 0.9 \cdot (2-s) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& 50\,(1-0.9\,s)^2 + (1-0.9\,s) - 0.9 \cdot (2-s) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& 50\,(1-1.8\,s+0.81\,s^2) + (1-0.9\,s) - 0.9 \cdot (2-s) = 0 \\
\Leftrightarrow\;& 40.5\,s^2 - 90\,s + 48.2 = 0 \\
\Leftrightarrow\;& s \in \left\{\frac{90 \pm \sqrt{90^2 - 4 \cdot 40.5 \cdot 48.2}}{2 \cdot 40.5}\right\}.
\end{aligned}$$

Da $s_1 = \frac{90+\sqrt{90^2-4\cdot 40.5\cdot 48.2}}{2\cdot 40.5} \approx 1.32193 \notin [0,1]$, muss diese Lösung verworfen werden. Im Gegensatz haben wir $s_2 = \frac{90-\sqrt{90^2-4\cdot 40.5\cdot 48.2}}{2\cdot 40.5} = 0.9002926 \in [0,1]$, womit diese Lösung ein potentieller Kandidat für ein Maximum von P ist. Wir müssen noch überprüfen, ob s_2 wirklich ein Maximum von P ist. Da

$$P''(s) = -\frac{144,000}{(1-0.9\,s)^3} < 0$$

für alle $s \in [0,1]$, wissen wir, dass P strikt konkav ist in $[0,1]$. Daraus folgt, dass s_2 ein globales Maximum von P in $[0,1]$ ist.

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass die Maximierung von Gewinnen mathematisch (in diesem Fall) der Maximierung einer Funktion mit einer reelen Variable entspricht.
- *Technisch*: Da die Gewinnfunktion differenzierbar ist, können die Bedingungen erster und zweiter Ordnung angewendet werden um ein Maximum der Funktion zu identifizieren.

(d3)

Wenn die aktuelle Qualität $s_0 = 90\%$ ist und diese um 5% erhöht wird, dann entspricht die relative Veränderung der Produktionskosten:

$$\frac{f(95\%) - f(90\%)}{f(90\%)}$$

Zudem:

$$\frac{f(95\%) - f(90\%)}{f(90\%)} \approx \epsilon_f(90\%)\,\frac{95\% - 90\%}{90\%} = \epsilon_f(90\%)\cdot\frac{5}{90} = \epsilon_f(90\%)\cdot\frac{1}{18}.$$

Wir haben:

$$\epsilon_f(s) = s\,\frac{f'(s)}{f(s)} = s\,\frac{\frac{0.9}{(1-0.9\,s)^2}}{50+\frac{1}{1-0.9\,s}} = \frac{0.9\,s}{50\,(1-0.9\,s)^2 + (1-0.9\,s)}.$$

Es folgt,

$$\epsilon_f(90\%) \approx 0.406015$$

und

$$\frac{f(95\%) - f(90\%)}{P(90\%)} \approx \epsilon_f(90\%)\cdot\frac{1}{18} \approx \frac{0.406015}{18} \approx 2.25\%.$$

Was wird benötigt, um diese Aufgabe zu lösen?

- *Konzeptuell*: Verständnis, dass die relative Änderung einer Funktion mithilfe der Elastizität approximiert werden kann indem die Elastizität mit der relativen Veränderung der unabhängigen Variable multipliziert wird.
- *Technisch*: Erarbeitung und Anwendung der mathematischen Formel für die Elastizität.

Part II: Multiple-choice questions

Exercise 2

1. Antwort (a). Aussage $C(x)$ entspricht klarerweise der Implikation $A(x) \Rightarrow B(x)$.

2. Antwort (b). Die folgende Tabelle gibt die Wahrheitswerte aller Aussagen in der Aufgabe an:

	A	T	T	F	F
	B	T	F	T	F
(a)	$A \wedge B$	T	F	F	F
(b)	$B \Rightarrow A$	T	T	F	T
(c)	$A \Rightarrow B$	T	F	T	T
(d)	$A \Leftrightarrow B$	T	F	F	T
(e)	$B \vee A$	T	T	T	F

Die einzige Aussage, die immer wahr ist, wenn B falsch ist (unabhängig ob A wahr oder falsch ist), ist $B \Rightarrow A$.

3. Antwort (d). (a) und (c) sind im Allgemeinen falsch, was beispielsweise anhand der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gesehen werden kann. In diesem Fall ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton und konvergent. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n^2} = n^2$ weder beschränkt noch konvergent. (b) ist ebenfalls falsch, was mittels der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gesehen werden kann, die definiert ist als $a_1 = -1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ und $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ für $n = 3, 4, \ldots$. Diese Folge ist beschränkt, monoton und konvergent (zum Wert 1). Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = \frac{1}{(a_n)^2}$ nicht monoton, weil $b_1 = 1$, $b_2 = 4$ und $b_3 \leq \frac{9}{4}$ für alle $n \geq 3$.

4. Antwort (c). $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind beides geometrische Folgen mit Quotient p beziehungsweise $\frac{p}{2}$. Dann gilt:

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-p}$$

und

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{b_1}{1-\frac{p}{2}} = \frac{a_1}{1-\frac{p}{2}}.$$

Aus der ersten Bedingung folgt, dass $a_1 = 1 - p$, während dann die zweite Bedingung impliziert, dass

$$\frac{1}{2} = \frac{1-p}{1-\frac{p}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{p}{4} = 1 - p \Leftrightarrow \frac{3}{4}p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = \frac{2}{3}.$$

Es folgt:

$$a_1 = 1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

5. Antwort (a). Die jährlichen Rückzahlungen von Hans und Marie sind sofortige Annuitäten. Der Barwert von Hans' Rückzahlungen für 40 Jahre ist:

$$P_{Hans} = 31,000\,\frac{1-(1+1\%)^{-40}}{1\%} = 1,017,875 > 1,000,000.$$

Der Barwert von Maries Rückzahlungen für 40 Jahre ist:

$$P_{Marie} = 31,000\,\frac{1-(1+2.5\%)^{-40}}{2.5\%} = 778,186 < 800,000.$$

Nur Hans bezahlt seine Schulden in den 40 Jahren ab, und dies vor Marie, die es in den 40 Jahren nicht schafft.

6. Antwort (b). Die Funktion f kann nur unstetig an $x = -1$ und $x = -2$ sein. Aufgrund

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \frac{x-3}{x+2},$$

folgt jedoch, dass

$$\lim_{x \searrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \searrow -1} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-1-3}{-1+2} = -4$$

und

$$\lim_{x \nearrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \nearrow -1} \frac{x-3}{x+2} = \frac{-1-3}{-1+2} = -4.$$

Deshalb ist f an $x = -1$ stetig.

Im Gegenteil sehen wir, dass

$$\lim_{x \searrow -2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \searrow -2} \frac{x-3}{x+2} = \infty$$

und

$$\lim_{x \nearrow -2} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \nearrow -2} \frac{x-3}{x+2} = -\infty.$$

Deshalb ist f an $x = -2$ unstetig.

7. Antwort (d). Die Elastizität entspricht:

$$\varepsilon_f(t) = t \, \frac{f'(t)}{f(t)} = t \, \rho_f(t)$$

wobei $\rho_f(t)$ der Änderungsrate entspricht. Es gilt:

$$\varepsilon_f(t) = t \, \ln(t).$$

Weil

$$\varepsilon_f'(t) = \ln(t) + 1$$

negativ ist für $t \in (0, e^{-1})$, gleich null für $t = e^{-1}$, und positiv für $t \in (e^{-1}, \infty)$, folgt, dass ε_f' nicht monoton auf $\mathbb{R}_{++}$ sein kann.

8. Antwort (c). Weil

$$\left| \frac{\Delta f}{f(x_0)} \right| \approx |\varepsilon_f(x_0)| \left| \frac{\Delta x}{x_0} \right|,$$

bestimmen wir den Wert $\varepsilon_f(x_0)$. Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x \, \frac{f'(x)}{f(x)} = x \, \frac{e^{3x^2+x}\,(6x+1)}{e^{3x^2+x}} = 6x^2 + x.$$

Deshalb,

$$\varepsilon_f(1) = 7$$

und

$$\varepsilon_f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Deshalb sind (a) und (b) falsch. (d) ist ebenfalls falsch, weil f unelastisch ist für Werte von x nahe bei null. (c) is korrekt, weil an $x_0 = \frac{1}{2}$ gilt:

$$\left|\frac{\Delta f}{f(x_0)}\right| \approx 2 \left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$$

wenn x lokal um x_0 geändert wird.

9. Antwort (d). Der Restterm ist im Allgemeinen weder wachsend noch fallend in der Ordnung des Taylorpolynoms und deshalb sind (a) und (b) falsch. (c) ist falsch, weil der Restterm im Allgemeinen nicht gegen 0 konvergiert, wenn die Ordnung divergiert. (d) ist korrekt, weil der Restterm gegen 0 konvergiert, wenn x gegen x_0 konvergiert. Dies folgt von folgendem Ausdruck für den Restterm:

$$R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}(x - x_0)^k.$$

10. Antwort (a). Weil f homogen vierten Grades ist, gilt aufgrund Eulers Relation:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 4.$$

Deshalb folgt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = 4 - \varepsilon_{f,y}(x,y) = 4 - (e^{x+y} + 5) = -1 - e^{x+y}.$$

Exercise 3

1. Antwort (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2\,\sin(x)-\sin(2\,x)}{x-\sin(x)} &\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\,\cos(x)-2\,\cos(2\,x)}{1-\cos(x)}\\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\,\sin(x)+4\,\sin(2\,x)}{\sin(x)}\\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2\,\cos(x)+8\,\cos(2\,x)}{\cos(x)}\\
&= \frac{-2+8}{1}\\
&= 6.
\end{aligned}$$

In $(\star)$ wenden wir L'Hôpitals Regel an.

2. Antwort (e). Folgendes gilt:

$$\lim_{x\to 0+}(1-\cos(x))^{2\,x} = \lim_{x\to 0+} e^{\ln\left((1-\cos(x))^{2\,x}\right)} = \lim_{x\to 0+} e^{2\,x\,\ln(1-\cos(x))} = e^{\lim_{x\to 0+}(2\,x\,\ln(1-\cos(x)))}.$$

Weil:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0+}(2\,x\,\ln(1-\cos(x)))\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1-\cos(x))}{\frac{1}{2\,x}}\\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}}{-\frac{1}{2\,x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{-2\,x^2\,\sin(x)}{1-\cos(x)}\\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-4\,x\,\sin(x)-2\,x^2\,\cos(x)}{\sin(x)}\\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{-4\,\sin(x)-4\,x\,\cos(x)-4\,x\,\cos(x)+2\,x^2\,\sin(x)}{-\cos(x)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

dann

$$\lim_{x\to 0+}(1-\cos(x))^{2\,x} = e^{\lim_{x\to 0+}(2\,x\,\ln(1-\cos(x)))} = e^0 = 1.$$

In $(\star)$ wenden wir L'Hôpitals Regel an.

3. Antwort (c). Die jährlichen Zahlungen am Ende jeden Jahres ist eine sofortige Annuität, dessen Wert nach n Jahren gleich

$$A_n = 10,000\,\frac{(1+0.5\%)^n-1}{0.5\%}$$

ist. Zudem hat der Anfangsbetrag 150,000 CHF den Wert:

$$150,000\,(1+0.5\%)^n$$

nach n Jahren.

Es gilt:

$$300,000 = 150,000\,(1{+}0.5\%)^n{+}10,000\,\frac{(1+0.5\%)^n-1}{0.5\%} = \left(150,000+\frac{10,000}{0.5\%}\right)(1{+}0.5\%)^n{-}\frac{10,000}{0.5\%}$$

Daraus folgt:

$$(1+0.5\%)^n = \frac{300,000+\frac{10,000}{0.5\%}}{150,000+\frac{10,000}{0.5\%}} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{300,000+\frac{10,000}{0.5\%}}{150,000+\frac{10,000}{0.5\%}}\right)}{\ln(1+0.5\%)} \approx 13.52195.$$

Damit ist Antwort (c) richtig.

4. Antwort (c). Der interne Zinssatz r des Projekts muss einen Nettobarwert von null haben. Es gilt:

$$-15,000+\frac{5,000}{1+r}+\frac{25,000}{(1+r)^2} = 0.$$

Multiplizieren dieser Gleichung mit $\frac{(1+r)^2}{5,000}$ ergibt:

$$-3\,(1+r)^2+(1+r)+5 = 0 \Leftrightarrow 1+r = \frac{-1\pm\sqrt{1^2+60}}{-6} = \frac{-1\pm\sqrt{61}}{-6}.$$

Deshalb gilt entweder $1+r \approx -1.135042$ oder $1+r \approx 1.468375$. Die erste Lösung muss verworfen werden, weshalb $r \approx 47\%$ folgt.

5. Antwort (b). Weil P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f an $x_0 = 0$ ist, folgt:

$$f(0) = P_4(0) = 3,$$

$$f'(0) = P_4'(0) = 2,$$
$$f''(0) = P_4''(0) = 2,$$
$$f'''(0) = P_4'''(0) = 2,$$

und

$$f^{(4)}(0) = P_4^{(4)}(0) = 2.$$

Die einzige Funktion, für welche diese Eigenschaften gelten, ist die Funktion f in (c).

6. Antwort (d). Aus dem impliziten Funktionentheorem folgt, dass die Steigung der Tangente an der Niveaulinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ folgendem entspricht:

$$-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{\frac{y_0}{x_0\,y_0+\alpha}}{\frac{x_0}{x_0\,y_0+\alpha}} = -\frac{y_0}{x_0} = -1.$$

Es folgt, dass die Steigung der Niveaulinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ gleich dem Wert -1 ist, für alle $\alpha \in (0,1)$.

7. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} g(\lambda\, x, \lambda\, y) &= \frac{(\lambda\, x)^3}{\lambda\, y} + 1 + \sqrt{(\lambda\, x)^2 + 5\,(\lambda\, y)^3} \\ &= \lambda^2\, \frac{x^3}{y} + 1 + \lambda\, \sqrt{x^2 + 5\,\lambda\, y^3}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass g inhomogen ist.

8. Antwort (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} h(\lambda\, x, \lambda\, y) &= f(\lambda\, x, \lambda\, y))\, g(\lambda\, x, \lambda\, y)) \\ &= \lambda^\kappa\, f(x,y)\, \lambda^\kappa\, g(x,y) \\ &= (\lambda^\kappa)^2\, f(x,y)\, g(x,y) \\ &= \lambda^{2\,\kappa}\, h(x,y). \end{aligned}$$

Deshalb ist h ist homogen von Grad $2\,\kappa$.