Teil I: Offene Aufgaben (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u \ : \ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = c_1^{0.6} c_2^{0.4}$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$. Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.
Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.

Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

(b) (9 Punkte)

Sei $f \ : \ \mathbb{R} \times (-5, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) \ = \ x^2 + 3xy + 16 \ln(y + 5).$$

Sei $g \ : \ R_f \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion einer reellen Variablen mit $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$, wobei R_f der Wertebereich von f ist. Schließlich sei die Komposition h gegeben als

$$h \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) = g(f(x, y)),$$

D_f ist dabei das Definitionsgebiet von f.

Untersuchen Sie die Funktion h auf stationäre Punkte, d.h., Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Hinweis:
Dank der Eigenschaft von g ist es möglich, das Problem in handhabbare Form zu bringen.

(c) (6 Punkte)

Ein Investment Fonds generiert innerhalb der Zeitspanne von $t = 0$ zu $T = 12$ einen stetigen Cashflow von $B(t) = 10t + 5$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$.

Bestimmen Sie den Nettobarwert $PV(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $T = 12$ generiert.

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x} dx.$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist der Rang von A gleich 3?

(b) (6 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1.5	3
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2
Rezession	1.5	0.5

Ermitteln Sie, ob das folgende Auszahlungsschema für den Investor möglich ist, wenn er nur in die Aktien 1 und 2 investiert:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	1'500
wirtschaftliche Stabilität	2'000
Rezession	1'000

(c) (6 Punkte)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A.

(d) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x, y) = e^{2x^2+y^3+3x+3y}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung (allgemeine Form) einer Ebene β so, dass der Vektor $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^\top$ orthogonal zu β ist, wobei $(x_0, y_0)^\top = \mathbf{grad} f(0, 0)$ und $z_0 = f(0, 0)$ gilt.

(e) (6 Punkte)

Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \end{array}$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3x + 2y - 2 = 0$. Dann gilt:

(a) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4x + 2y - 1 = 0$.

(b) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 5x + 2y - 1 = 0$.

(c) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4x + 2y - 1 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Frage 2 (4 Punkte)

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ für $x \in [0, 1]$, und

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = 3$.

Dann gilt:

(a) $g_1 = \frac{1}{3}f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(b) $g_2 = f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(c) $g_3 = \frac{1}{6}f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(d) $g_4 = \frac{1}{6}f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 4. Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 4×4 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 4×4 Untermatrix von A.

Frage 4 (2 Punkte)

A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A^{-1}B^2A^2B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösungen.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A und B unendlich viele Lösungen, keine Lösung, oder eine eindeutige Lösung.

Frage 5 (3 Punkte)

Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear abhängig. Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Frage 6 (2 Punkte)

Für das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 4$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

Frage 7 (3 Punkte)

A ist eine quadratische Matrix und $\lambda = 0$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) Da aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\mathbf{x} = 0$, hat A keinen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Frage 8 (3 Punkte)

Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^\top \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

für $t = 0, 1, \ldots$

Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda \mathbf{u}_t$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 2$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\ x\ +\ (2\ x^2\ +\ 1)e^{x^2}\right]\ dx$$

ist

(a) $x^2 + xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3x + 2xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3x^2 + 2xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3x^2 + xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 2 (3 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist eine Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1.$

(b) $t \in \{1, -2\}.$

(c) $t = -2.$

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A\mathbf{x}$ ist.

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) A ist singulär.

Frage 5 (5 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Dann gilt:

(a) $\lambda_1 \lambda_2 = 0$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

(c) $\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_2 = 0$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Frage 6 (2 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 4 - \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$4y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 4$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$5y_{k+1} + 6y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$m\ y_{k+1} + y_k \ = \ m^2, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Lösungen

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = c_1^{0.6} c_2^{0.4}$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$. Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.
Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.

Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Formuliere das Optimierungsproblem mathematisch.
2. Löse die Aufgabe mithilfe der Lagrange Methode.
3. Alternative Rechenmethode.

1. Formuliere das Optimierungsproblem mathematisch

Unser Ziel ist es, die Funktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{0.6} c_2^{0.4}$$

unter der Nebenbedingung

$$p_1 c_1 + p_2 c_2 = e \Rightarrow \varphi(c_1, c_2) = p_1 c_1 + p_2 c_2 - e = 3c_1 + 4c_2 - 15 = 0$$

zu maximieren.

2. Löse die Aufgabe mithilfe der Lagrange Methode

Zunächst bietet es sich bei Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen an, die Lagrange Methode zu verwenden Die Nebenbedingung

$$\varphi(c_1, c_2) = 3c_1 + 4c_2 - 15 = 0$$

besitzt nur lineare Terme. Das heißt, wir können diese explizit nach c_1 bzw. c_2 auflösen. Durch diese Umformung erhalten wir aus u eine Funktion, welche von einer Variablen abhängt. Beide Methoden sind in etwa gleich schwer, jedoch funktioniert die zweite Methode nicht immer.

Wir definieren durch

$$F(c_1, c_2, \lambda) = u(c_1, c_2) + \lambda\varphi(c_1, c_2)$$

die Lagrange-Funktion. Die notwendige Bedingung für Extremstellen unter unserer Nebenbedingung ist, dass die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion gleichzeitig Null sind. Durch

$$\begin{aligned} F_{c_1}(c_1, c_2, \lambda) &= 0.6c_1^{-0.4}c_2^{0.4} + 3\lambda \\ F_{c_2}(c_1, c_2, \lambda) &= 0.4c_1^{0.6}c_2^{-0.6} + 4\lambda \\ F_\lambda(c_1, c_2, \lambda) &= \varphi(c_1, c_2) = 3c_1 + 4c_2 - 15 \end{aligned}$$

erhalten wir die partiellen Ableitungen. Wir müssen nun das Gleichungssystem

$$0.6c_1^{-0.4}c_2^{0.4} + 3\lambda = 0 \tag{I}$$

$$0.4c_1^{0.6}c_2^{-0.6} + 4\lambda = 0 \tag{II}$$

$$3c_1 + 4c_2 - 15 = 0 \tag{III}$$

lösen. Die Gleichungen (I) und (II) liefern uns durch

$$0.6c_1^{-0.4}c_2^{0.4} + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = -0.6c_1^{-0.4}c_2^{0.4} \Leftrightarrow 3\lambda = -0.6\frac{c_2^{0.4}}{c_1^{0.4}} \Leftrightarrow 3\lambda = -0.6\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{0.4} \tag{IV}$$

$$0.4c_1^{0.6}c_2^{-0.6} + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow 4\lambda = -0.4c_1^{0.6}c_2^{-0.6} \Leftrightarrow 4\lambda = -0.4 = \frac{c_1^{0.6}}{c_2^{0.6}} \Leftrightarrow 4\lambda = -0.4\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{0.6} \tag{V}$$

zwei neue Gleichungen. Wegen $c_1, c_2 > 0$ sehen wir, dass $\lambda \neq 0$ gilt. Also können wir (IV) durch (V) teilen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{3\lambda}{4\lambda} &= \frac{-0.6\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{0.4}}{-0.4\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{0.6}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{c_2^{0.4}c_2^{0.6}}{c_1^{0.6}c_1^{0.4}} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} \\ \Rightarrow \frac{3\lambda}{4\lambda} &= \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{2}\frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow 6c_1 = 12c_2 \Leftrightarrow c_1 = 2c_2, \end{aligned}$$

womit durch Gleichung (III)

$$\begin{aligned} 3c_1 + 4c_2 - 15 = 3(2c_2) + 4c_2 - 15 = 10c_2 - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow 10c_2 = 15 \Leftrightarrow c_2 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

folgt. Durch $c_1 = 2c_2$ wissen wir auch $c_1 = 3$. Damit ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremstelle unter der Nebenbedingung φ.

<u>3. Alternative Rechenmethode</u>

Für die alternative Methode formen wir die Nebenbedingung φ nach einer Variablen um und substituieren diese in u. Durch die Umformung

$$\begin{aligned} \varphi(c_1, c_2) = p_1c_1 + p_2c_2 - e = 3c_1 + 4c_2 - 15 = 0 \\ \Leftrightarrow 3c_1 = 15 - 4c_2 \\ \Leftrightarrow c_1 = 5 - \frac{4}{3}c_2 \end{aligned}$$

können wir c_1 durch c_2 darstellen. Damit erhalten wir mit

$$U(c_2) = u(c_1, c_2) = u\left(5 - \frac{4}{3}c_2, c_2\right) = \left(5 - \frac{4}{3}c_2\right)^{0.6} c_2^{0.4} \tag{1}$$

eine Funktion, welche nur von der Variablen c_2 abhängt. Wir müssen nun die Extrempunkte von U finden. Hierfür lösen wir $U'(c_2) = 0$. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
U'(c_2) &= 0.6\left(5-\frac{4}{3}c_2\right)^{-0.4}\left(-\frac{4}{3}\right)c_2^{0.4} + 0.4\left(5-\frac{4}{3}c_2\right)^{0.6}c_2^{-0.6}\\
&= -\frac{4}{5}\left(5-\frac{4}{3}c_2\right)^{-0.4}c_2^{0.4} + \frac{2}{5}\left(5-\frac{4}{3}c_2\right)^{0.6}c_2^{-0.6}\\
&= -\frac{4}{5}\left(\frac{c_2}{5-\frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4} + \frac{2}{5}\left(\frac{5-\frac{4}{3}c_2}{c_2}\right)^{0.6}\\
&= -\frac{4}{5}\left(\frac{c_2}{5-\frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4} + \frac{2}{5}\left(\frac{c_2}{5-\frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4}\frac{5-\frac{4}{3}c_2}{c_2}\\
&= \left(\frac{c_2}{5-\frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4}\left(-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\frac{5-\frac{4}{3}c_2}{c_2}\right)
\end{aligned}$$

mithilfe der Produkt und Kettenregel. Die weiteren Umformungen helfen uns $U'(c_2) = 0$ zu lösen. Wegen $c_2 \neq 0$ erhalten wir durch

$$\begin{aligned}
U'(c_2) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{c_2}{5-\frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4}\left(-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\frac{5-\frac{4}{3}c_2}{c_2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\frac{5-\frac{4}{3}c_2}{c_2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow -\frac{4}{5}c_2\frac{2}{5}\left(5-\frac{4}{3}c_2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{4}{5}-\frac{8}{15}\right)c_2 = -2\\
&\Leftrightarrow \frac{20}{15}c_2 = 2 \Leftrightarrow c_2 = 1.5
\end{aligned}$$

das passende c_2. Mit $c_1 = 5 - \frac{4}{3}c_2$ folgt auch $c_1 = 3$. Damit ist auch bei dieser Methode

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremstelle unter der Nebenbedingung φ.

Der Kandidat für das optimale Konsumbündel ist $(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$.

(b) (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times (-5, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) \; = \; x^2 + 3xy + 16\ln(y + 5).$$

Sei $g : R_f \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion einer reellen Variablen mit $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$, wobei R_f der Wertebereich von f ist. Schließlich sei die Komposition h gegeben als

$$h : D_f \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) = g(f(x, y)),$$

D_f ist dabei das Definitionsgebiet von f.

Untersuchen Sie die Funktion h auf stationäre Punkte, d.h., Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Hinweis:
Dank der Eigenschaft von g ist es möglich, das Problem in handhabbare Form zu bringen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die gegebenen Eigenschaften, um das Problem zu strukturieren.
2. Finde die stationären Punkte von h.
3. Bestimme die Art des stationären Punkts.

1. Verwende die gegebenen Eigenschaften, um das Problem zu strukturieren

Nach Voraussetzung ist $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$. Die *notwendige* Bedingung für stationäre Punkte ist, dass die partiellen Ableitungen von h gleichzeitig Null sind. Mathematisch können wir dies durch

$$h_x(x, y) = 0 \qquad h_y(x, y) = 0$$

ausdrücken. Die Punkte (x, y), welche diese Bedingung erfüllen, nennen wir stationäre Punkte. Wegen $g'(x) > 0$ gilt

$$h_x(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow f_x(x, y) = 0$$
$$h_y(x, y) = g'(f(x, y)) \cdot f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow f_y(x, y) = 0.$$

Dies kann man sich mithilfe der Kettenregel überlegen. Die Kettenregel findet Anwendung bei verketteten Funktionen sprich, wenn eine Funktion eine äußere und eine innere Funktion hat. Dies ist bei

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

gegeben. Hierbei ist g die äußere und f die innere Funktion. Die Kettenregel funktioniert hier wie im eindimensionalen Fall. Wenn wir partiell nach x ableiten, behandeln wir y als eine Konstante. Damit genügt es die stationären Punkte von f zu bestimmen, da diese mit denen von h übereinstimmen. Wegen $g'(x) > 0$ können h_x und h_y nur Null ergeben, wenn f_x bzw. f_y Null ergeben.

<u>2. Finde die stationären Punkte von h</u>

Zunächst bestimmen wir durch

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x+3y \\ f_y(x,y) &= 3x+16(y+5)^{-1} = 3x+\frac{16}{y+5} \end{aligned}$$

die ersten partiellen Ableitungen von f. Diese müssen nun die *notwendigen* Bedingungen

$$f_x(x,y) = 0 \text{ und } f_y(x,y) = 0$$

erfüllen. Dies führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x+3y = 0 \\ f_y(x,y) &= 3x+\frac{16}{y+5} = 0. \end{aligned}$$

Durch Umformen der ersten Gleichung erhalten wir mit

$$2x+3y = 0 \Leftrightarrow 3y = -2x \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

eine Darstellung für y. Wir lösen die Gleichung durch Einsetzen in die Mitternachtsformel Mitternachtsformel:

$$\begin{aligned} 3x+\frac{16}{y+5} &= 3x+\frac{16}{-\frac{2}{3}x+5} = 0 \\ \Leftrightarrow 3x\left(-\frac{2}{3}x+5\right)+16 &= -2x^2+15x+16 = 0 \\ \Leftrightarrow x_{1/2} &= \frac{-15\pm\sqrt{15^2+4\cdot 2\cdot 16}}{-2\cdot 2} = \frac{15\pm\sqrt{353}}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{15+\sqrt{353}}{4}, \quad x_2 = \frac{15-\sqrt{353}}{4} \end{aligned}$$

Wir setzen nun x_1 und x_2 in die Gleichung $y = -\frac{2}{3}x$ ein und bestimmen so die möglichen stationären Punkte:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{15-\sqrt{353}}{4} \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3}x_1 = \frac{-15+\sqrt{353}}{6} \Rightarrow P_1 = \left(\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{-15+\sqrt{353}}{6}\right) \\ x_2 &= \frac{15+\sqrt{353}}{4} \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{3}x_2 = \frac{-15-\sqrt{353}}{6} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{15+\sqrt{353}}{4}, \frac{-15-\sqrt{353}}{6}\right). \end{aligned}$$

Wir können den Punkt P_2 direkt ausschließen, da dieser sich nicht in dem Definitionsgebiet von f befindet. Dies können wir an

$$\frac{-15-\sqrt{353}}{6} < -5$$

erkennen. Unser stationärer Punkt ist also durch

$$P_1 = \left(\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{-15+\sqrt{353}}{6}\right)$$

gegeben.

3. Bestimme die Art des stationären Punkts

Auch hier reicht es wieder aus f zu untersuchen. Zunächst betrachten wir die *hinreichenden* Bedingungen für Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Hinreichende Bedingungen

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben und (x_0, y_0) ein kritischer Punkt. Dann ist

1. $f(x_0, y_0)$ ein *Minimum*, falls
$$f_{xx}(x_0, y_0) > 0,\; f_{yy}(x_0, y_0) > 0,\; \text{und } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

2. $f(x_0, y_0)$ ein *Maximum*, falls
$$f_{xx}(x_0, y_0) < 0,\; f_{yy}(x_0, y_0) < 0,\; \text{und } f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

3. $f(x_0, y_0)$ ein *Sattelpunkt*, falls
$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0.$$

Wir bestimmen nun die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}(2x + 3y) = 2\\
f_{xy}(x, y) &== \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(2x + 3y) = 3\\
f_{yy}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(3x + \frac{16}{y+5}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(3x + 16 \cdot (y+5)^{-1}\right) = 16 \cdot (-1) \cdot (y+5)^{-2} - \frac{16}{(y+5)^2}.
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $f_{xx}(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in D_f$ gilt. Es gilt auch $f_{yy}(x, y) < 0$ für alle $(x, y) \in D_f$. Damit ist
$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 < 0$$
für alle $(x, y) \in D_f$ gegeben. Somit ist P_1 ein Sattelpunkt.

(c) (6 Punkte)

Ein Investment Fonds generiert innerhalb der Zeitspanne von $t = 0$ zu $T = 12$ einen stetigen Cashflow von $B(t) = 10t + 5$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$.

Bestimmen Sie den Nettobarwert $PV(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $T = 12$ generiert.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Formuliere das Problem mathematisch.
2. Bestimme die nötige Stammfunktion mithilfe partieller Integration.
3. Berechne den Wert des Integrals.

1. Formuliere das Problem mathematisch

Um den Nettobarwert $PV(0)$ zu bestimmen, müssen wir das Integral

$$PV(0) = \int_0^T B(t)e^{-it}\ dt = \int_0^{12} (10t + 5)e^{-0.05t}\ dt$$

berechnen.

2. Bestimme die nötige Stammfunktion mithilfe partieller Integration

Wir wählen

$$u'(t) = e^{-0.05t}, \quad v(t) = 10t + 5$$

für die partielle Integration. Dies macht Sinn, denn v wird nach einmal Ableiten konstant. Es gilt

$$u(t) = \frac{1}{-0.05}e^{-0.05t} = -\frac{100}{5}e^{-0.05t} = -20e^{-0.05t}, \quad v'(t) = 10.$$

Mithilfe der Regel für partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int (10t+5)e^{-0.05t}\ dt &= (10t+5)(-20)e^{-0.05t}) - \int 10(-20)e^{-0.05t}\ dt \\
&= -(200t + 100)e^{-0.05t} + 200 \int e^{-0.05t}\ dt \\
&= -(200t + 100)e^{-0.05t} + 200(-20)e^{-0.05t} + C \\
&= -(200t + 100)e^{-0.05t} - 4000e^{-0.05t} + C \\
&= -(200t + 4100)e^{-0.05t} + C
\end{aligned}$$

als Stammfunktion.

3. Berechne den Wert des Integrals

Da wir nun die Stammfunktion kennen, können wir das Integral direkt durch

$$\int_0^{12} (10t+5)e^{-0.05t}\ dt = \left[-(200t+4100)e^{-0.05t}\right]_0^{12} = -6500e^{-0.6} + 4100 \approx 532.70$$

berechnen.

Der Nettobarwert beträgt ungefähr 532.70.

(d) (4 Punkte)

Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x} dx.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde eine geeignete Substitution und bestimme die Stammfunktion.

1. Finde eine geeignete Substitution und bestimme die Stammfunktion

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\ln(x)) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

mit der Kettenregel. Demnach haben wir durch

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x} dx = \int \sin(\ln(x)) \cdot \frac{\cos(\ln(x))}{x} dx = \int \sin(\ln(x))\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\ln(x)) dx$$

die geeignete Substitution

$$u = \sin(\ln(x))$$

gefunden. Durch

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\cos(\ln(x))}{x}\ \mathrm{d}x$$

erhalten wir mit

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x} dx = \int u\ du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(\sin(\ln(x)))^2 + C$$

die gesuchte Stammfunktion.

Eine andere Möglichkeit ist, zweimal zu substituieren. Zuerst substituieren wir $v = \ln(x)$. Mit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}v = \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$$

erhalten wir

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x}\ dx = \int \sin(v)\cos(v)\ dv.$$

Die zweite Substitution ist $w = \sin(v)$. Für diese gilt

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v} = \cos(v) \Rightarrow \mathrm{d}w = \cos(v)\ \mathrm{d}v$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x}\ dx &= \int \sin(v)\cos(v)\ dv = \int w\ dw \\ &= \frac{1}{2}w^2 + C = \frac{1}{2}(\sin(v))^2 = \frac{1}{2}(\sin(\ln(x)))^2 + C\end{aligned}$$

durch zweimaliges Zurücksubstituieren.

Die gesuchte Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}(\sin(\ln(x)))^2 + C.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von t ist der Rang von A gleich 3?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe eine Bedingung an, sodass eine quadratische Matrix den Rang 3 besitzt.
2. Bestimme die Werte von t.

1. Gebe eine Bedingung an, sodass eine quadratische Matrix den Rang 3 besitzt

Für eine quadratische Matrix kennen wir den Zusammenhang:

$$\text{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Wir müssen also nur die Determinate auf Nullstellen überprüfen.

2. Bestimme die Werte von t

Zunächst berechnen wir die Determinate von A. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2t \end{pmatrix} \right| \\ &= 1 \cdot t \cdot 2t + t \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot t - (-1) \cdot t \cdot 1 - t \cdot 0 \cdot 1 - 2t \cdot 2 \cdot t \\ &= 2t^2 + 2t + t - 4t^2 = -2t^2 + 3t = -t(2t-3) \end{aligned}$$

durch die Regel von Sarrus (Sauron). Weiter gilt

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow -t(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{3}{2}$$

für die Nullstellen der Determinante. Wir wissen nun, dass

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$$

gilt.

Die Matrix A besitzt den Rang 3 für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$.

(b) (6 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1.5	3
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2
Rezession	1.5	0.5

Ermitteln Sie, ob das folgende Auszahlungsschema für den Investor möglich ist, wenn er nur in die Aktien 1 und 2 investiert:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	1'500
wirtschaftliche Stabilität	2'000
Rezession	1'000

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe eine Bedingung an, sodass der Payoff des Investors realisiert werden kann.
2. Überprüfe diese Bedingung.

1. Gebe eine Bedingung an, sodass der Payoff des Investors realisiert werden kann

Wir können den Payoff des Investors realisieren, falls wir λ_1, λ_2 finden, so dass

$$\begin{pmatrix}1500\\2000\\1000\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1.5\\1.5\\1.5\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\2\\0.5\end{pmatrix}$$

gilt. Die Payoff-Vektoren der Wertpapiere sind linear unabhängig. Damit finden wir unsere λ_1, λ_2 nur, falls

$$\left\{ \begin{pmatrix}1500\\2000\\1000\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1.5\\1.5\\1.5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0.5\end{pmatrix} \right\}$$

linear abhängig ist. Um uns die Rechnung zu vereinfachen, können wir die Vektoren mit geschickten Vielfachen austauschen. Durch

$$\left\{ \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} \right\}$$

erhalten wir ein einfacheres System. Wir wollen noch exemplarisch die Rechnung für den ersten Vektor durchführen:

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{100} \begin{pmatrix}1500\\2000\\1000\end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$$

Wenn die lineare Abhängigkeit nachgewiesen werden kann, wissen wir, dass

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulär ist.

<u>2. Überprüfe diese Bedingung</u>
Die Matrix A ist singulär genau dann, wenn

$$\det(A) = 0$$

gilt. Hier berechnen wir die Determinante

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 3 + 8 + 24 - 12 - 12 - 4 = 7$$

mit der Regel von Sarrus. Damit ist die Matrix A regulär und das System

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Eine weitere Möglichkeit ist es, elementare Zeilenumformungen auf die Matrix A anzuwenden. Die Matrix A ist regulär, wenn wir eine Zeilenstufenform erreichen. Wir betrachten nun:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -1 \quad -1 \\ + \\ + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -3 \quad \cdot 1 \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \cdot 2 \quad \cdot(12) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit sehen wir auch hieran, dass die Matrix nicht singulär ist.

Das Auszahlungsschema des Investors lässt sich also nicht verwirklichen.

(c) (6 Punkte)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.

Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren in Erinnerung.
2. Bestimme s.
3. Bestimme die Eigenvektoren

1. Rufe dir die Definition von Eigenwerten und Eigenvektoren in Erinnerung

Ein Vektor $v \neq 0$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ, falls

$$Av = \lambda v$$

gilt. Dies können wir zu

$$Av - \lambda v = (A - \lambda I)v = 0$$

umformen. Hierbei bezeichnet I die Einheitsmatrix. Da $v \neq 0$ ist, kann diese Gleichung nur erfüllt sein, wenn A singulär ist. Deswegen untersuchen wir

$$\det(A - \lambda I)$$

auf Nullstellen, um die Eigenwerte zu finden. In der Aufgabe ist der Eigenwert vorgegeben. Damit $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, muss also

$$\det(A(s) - 0I) = \det(A(s)) = 0$$

gelten.

2. Bestimme s

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile und der dritten Spalte erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A(s)) &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \left| \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4s & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \cdot (-1) \left| \begin{pmatrix} 3 & 4s \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \cdot (-1)(-3 - 4s) = 2(3 + 4s) = 6 + 8s \end{aligned}$$

die Determinante von A in Abhängigkeit von s. Damit erhalten wir durch

$$\det(A(s)) = 8s + 6 = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

das gesuchte s. Für $s = -\frac{3}{4}$ ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

3. Bestimme die Eigenvektoren

Um die Eigenvektoren zu bestimmen, müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - 0I)v = Av = 0$$

lösen. Wir wenden also auf erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

elementare Zeilenumformungen an. Da die rechte Seite nur der Nullvektor ist, können wir diese Spalte in der Matrix getrost ignorieren. Durch

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

erhalten wir das System

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

mit frei wählbarem $x_4 \in \mathbb{R}$. Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{x_4}{6} \\ x_2 &= x_3 = \frac{x_4}{6} \\ x_1 &= 0, \end{aligned}$$

womit die Eigenvektoren durch

$$\mathbf{x} \; = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben sind.

Beim Gaußverfahren von Hand ist es empfehlenswert Brüche zu vermeiden. Man reduziert dabei die Wahrscheinlichkeit für Rechnenfehler sehr.

(d) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x,y) = e^{2x^2+y^3+3x+3y}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung (allgemeine Form) einer Ebene β so, dass der Vektor $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^\top$ orthogonal zu β ist, wobei $(x_0, y_0)^\top = \mathbf{grad} f(0,0)$ und $z_0 = f(0,0)$ gilt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle eine passende Ebenengleichung auf und berechne die fehlenden Parameter.

1. Stelle eine passende Ebenengleichung auf und berechne die fehlenden Parameter

Da der Vektor $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^\top$ orthogonal auf β ist, ist $\mathbf{u}$ ein Normalenvektor. Damit können wir β durch

$$\beta : x_0 x + y_0 y + z_0 z + d = 0, \qquad d \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Wir müssen also nur noch u bestimmen. Es gilt

$$\mathbf{grad} f(x,y) = e^{2x^2+y^3+3x+3y} \begin{pmatrix} 4x+3 \\ 3y^2+3 \end{pmatrix}$$

für den Gradienten von f. Durch

$$\mathbf{grad} f(0,0) = e^0 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$f(0,0) = e^0 = 1$$

erhalten wir $(x_0, y_0, z_0)^\top = (3,3,1)^\top$. Damit haben wir durch

$$\beta : 3x + 3y + 1z + d, \qquad d \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Form von β gegeben.

(e) (6 Punkte)

Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 8x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1 \end{array}$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und löse das System.

1. Stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf und löse das System

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist durch

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

gegeben. Durch die Anwendung des Gauss Verfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -11 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -10 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ & & & & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

mit frei wählbarem $x_3 \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen folgt:

$$x_4 = \frac{5}{2}$$
$$x_2 = -3 - x_3$$
$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 10 = -2(-3 - x_3) - 3x_3 - 10 = 6 + 2x_3 - 3x_3 - 10 = -x_3 - 4$$

Damit können wir durch

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \ : \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

die Lösungsmenge beschreiben.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 3x + 2y - 2 = 0$. Dann gilt:

(a) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 4x + 2y - 1 = 0$.

(b) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 5x + 2y - 1 = 0$.

(c) Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 4x + 2y - 1 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Antworten ausgeschlossen werden können.

1. Überlege dir, welche Antworten ausgeschlossen werden können

Wegen

$$\varphi\left(-1, \frac{5}{2}\right) = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{5}{2} - 2 = -5 + 5 - 2 = -2$$

ist die Nebenbedingung von (b) nicht erfüllt. Bei (a) und (c) sind die Nebenbedingung erfüllt. Jedoch sind diese Aussagen im Allgemeinen falsch, denn das Erfüllen der Nebenbedingung lässt nicht auf einen Extrempunkt von f unter dieser schließen.

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 2 (4 Punkte)

Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ für $x \in [0,1]$, und

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = 3$.

Dann gilt:

(a) $g_1 = \frac{1}{3}f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(b) $g_2 = f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(c) $g_3 = \frac{1}{6}f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

(d) $g_4 = \frac{1}{6}f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0,1]$.

Wir wissen, dass

$$g_1(x) = \frac{1}{3}f(x) \geq \frac{1}{3}(-3) = -1$$

gilt. Damit ist Antwort (a) falsch.
Für g_2 ist

$$g_2(x) = f(x) + 3 \geq -3 + 3 = 0$$

erfüllt. Jedoch ist die zweite Bedingung wegen

$$\int_0^1 g_2(x)\ dx = \int_0^1 f(x) + 3\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx + \int_0^1 3\ dx = 3 + 3 = 6$$

nicht erfüllt.
Für g_3 ist wegen

$$g_3(x) = \frac{1}{6}f + 3 \geq \frac{1}{6} \cdot (-3) + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

die erste Bedingung erfüllt. Jedoch gilt

$$\int_0^1 g_3(x)\ dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\ dx + \int_0^1 3\ dx = \frac{1}{6} \cdot 3 + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

für die zweite Bedingung. Also wissen wir schon durch das Ausschlußprinzip, dass Antwort (d) korrekt ist. Die Funktion g_4 erfüllt beide Bedingungen:

$$g_4(x) = \frac{1}{6}f(x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$
$$\int_0^1 g_4(x)\ dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\ dx + \int_0^1 \frac{1}{2}\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Die Antwort (d) ist korrekt.

Frage 3 (2 Punkte)

$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 4. Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 4×4 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 4×4 Untermatrix von A.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was der Rang bezüglich der Spalten bedeutet und bestimme die richtige Antwort.

1. Überlege dir, was der Rang bezüglich der Spalten bedeutet und bestimme die richtige Antwort

Der Rang 4 der Matrix A bedeutet, dass die Matrix vier linear unabhängige Spalten besitzt. Also existiert eine reguläre 4×4 Untermatrix in A. Für (a),(b) und (c) können wir mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Gegenbeispiel angeben. Wir sehen, dass die letzten vier Spalten linear unabhängig sind. Dementsprechend haben wir mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine reguläre 4×4 Untermatrix. Durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

haben wir eine reguläre und eine singuläre 3×3 Untermatrix. Eine Matrix A heißt regulär, falls wir eine Matrix A^{-1} finden, so dass

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gilt. Andernfalls ist A singulär. Analog können wir mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eine singuläre 4×4 Matrix angeben.

Also ist Antwort (d) korrekt.

Frage 4 (2 Punkte)

A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A^{-1}B^2A^2B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösungen.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A und B unendlich viele Lösungen, keine Lösung, oder eine eindeutige Lösung.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was man über das Produkt von regulären Matrizen sagen kann und bestimme die Antwort.

1. Überlege dir, was man über das Produkt von regulären Matrizen sagen kann und bestimme die Antwort

Wir wissen, dass

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(B) \neq 0$$

für reguläre Matrizen gilt. Wegen

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0$$

sind die Produkte von regulären Matrizen auch regulär. Sei nun $\det(A) = 1$ und $\det(B) = -1$. Mit obiger Argumentation können wir direkt sagen, dass C regulär ist. Damit folgt sofort, dass Antwort (c) korrekt ist. Durch

$$\begin{aligned}\det(C) &= \det(A^{-1}B^2A^2B^{-1}) = \det(A^{-1})\det(B^2)\det(A^2)\det(B^{-1}) \\ &= \frac{1}{\det(A)}\det(B)^2\det(A)^2\frac{1}{\det(B)} = 1 \cdot (-1)^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{-1} = -1\end{aligned}$$

können wir dies auch von Hand nachrechnen.

Also ist Antwort (c) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear abhängig. Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, ob A regulär oder singulär ist und löse damit die Aufgabe.

1. Überlege dir, ob A regulär oder singulär ist und löse damit die Aufgabe

Eine quadratische Matrix ist genau dann regulär, wenn die Spalten linear unabhängig sind. Da die Spalten von A linear abhängig sind, ist A singulär. Damit gilt auch $\det(A) = 0$. Aus dem Zusammenhang

$$\det(A^n) = \det(A)^n = 0^n = 0$$

erhalten wir die Singularität von A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Frage 6 (2 Punkte)

Für das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\text{rg}(A) = 4$ und $\text{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wann ein lineares Gleichungssystem lösbar ist.
2. Bestimme die korrekte Antwort.

1. Überlege dir, wann ein lineares Gleichungssystem lösbar ist

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{rg}(A) = (\text{A}|\text{b})$$

gilt. Dies ist in der Aufgabenstellung gegeben. Dementsprechend können wir Antwort (a) ausschließen.

2. Bestimme die korrekte Antwort

Falls $Ax = b$ lösbar ist, gilt

$$\dim L = n - \text{rg}(A)$$

für eine $m \times n$ Matrix. Hierbei bezeichnen wir mit L die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems. In unserem Fall ist $n = 6$ und $\text{rg}(A) = 4$: Wegen

$$\dim L = 6 - 4 = 2$$

ist Antwort (d) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

A ist eine quadratische Matrix und $\lambda = 0$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) Da aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\mathbf{x} = 0$, hat A keinen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Definition des Eigenwerts in Erinnerung.
2. Bestimme die korrekte Antwort.

1. Rufe dir die Definition des Eigenwerts in Erinnerung

Ein Vektor $v \neq 0$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ, falls

$$Av = \lambda v$$

erfüllt ist. Dies können wir durch

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = (A - \lambda I)v = 0$$

umformen. Hierbei ist I die Einheitsmatrix. Wegen $v \neq 0$ sind auch beliebige Vielfache von v wieder Eigenvektoren zum Eigenwert λ. Dies können wir durch

$$A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ veranschaulichen. Damit können wir allgemein sagen, dass es zu einem Eigenwert λ immer unendlich viele Eigenvektoren gibt.

2. Bestimme die korrekte Antwort

Im Prinzip haben wir die korrekte Antwort (c) im ersten Abschnitt gefunden. Ein anderer Weg ist es, die Determinante zu betrachten. Da $\lambda = 0$ ein Eigenwert ist, gilt

$$\det(A) = 0.$$

Damit ist A singulär und das System

$$Ax = 0$$

besitzt unendliche viele Lösungen. Diese Lösungen sind gerade die Eigenvektoren.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 8 (3 Punkte)

Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^\top \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

für $t = 0, 1, \ldots$

Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda \mathbf{u}_t$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 2$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie man die Gleichgewichtsbedingung auf Eigenwerte zurückführen kann.
2. Bestimme die korrekte Antwort.

1. Überlege dir, wie man die Gleichgewichtsbedingung auf Eigenwerte zurückführen kann

Es ist

$$\mathbf{u}_{t+1} = A\mathbf{u}_t$$

gegeben. Damit entspricht die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{u}_{t+1} = \lambda \mathbf{u}_t \Rightarrow A\mathbf{u}_t = \lambda \mathbf{u}_t$$

dem Eigenwertproblem.

2. Bestimme die korrekte Antwort

Um die korrekte Antwort zu finden, untersuchen wir die Eigenwerte der Matrix A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 2$$

Wir sehen nun, dass

$$\det(A - \lambda I) > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit besitzt A keine reellen Eigenwerte.

Also ist Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\ x\ +\ (2\ x^2\ +\ 1)e^{x^2}\right]\ dx$$

ist

(a) $x^2 + xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3x + 2xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3x^2 + 2xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3x^2 + xe^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was für die Stammfunktionen gelten muss und finde die korrekte Antwort.

1. Überlege dir, was für die Stammfunktionen gelten muss und finde die korrekte Antwort

Wir suchen eine Funktion f, welche eine der Funktionen von (a) - (d) ist. Wir wissen, dass

$$f'(x) = 6x + (2x^2 + 1)e^{x^2}$$

erfüllt sein muss. Wir sehen an den ersten Summanden von (a) und (b), dass wir diese ausschließen können. Dies können wir aufgrund von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = 2x$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3x = 3$$

machen. Weiter gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xe^{x^2} = 1 \cdot e^{x^2} + x(2xe^{x^2}) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2}$$

mit der Produkt und Kettenregel,womit wir die korrekte Antwort (d) erhalten.

Frage 2 (3 Punkte)

Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist eine Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1$.

(b) $t \in \{1, -2\}$.

(c) $t = -2$.

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A\mathbf{x}$ ist.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, worauf du aufgrund der Eigenvektoreigenschaft schließen kannst.
2. Rufe dir die Definition von Orthogonalität in Erinnerung und finde die korrekte Antwort.

1. Überlege dir, worauf du aufgrund der Eigenvektoreigenschaft schließen kannst

Der Vektor $\mathbf{x}$ ist Eigenvektor zu dem Eigenwert $\lambda \neq 0$. Damit gilt

$$A\mathbf{x} = \lambda x,$$

womit $A\mathbf{x}$ nur ein skalares Vielfaches von $\mathbf{x}$ ist.

2. Rufe dir die Definition von Orthogonalität in Erinnerung und finde die korrekte Antwort

Zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ sind Orthogonal, falls das Skalarprodukt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

erfüllt. Für skalare Vielfache gilt

$$(\alpha \mathbf{u}) \cdot \ \mathbf{v} = \alpha \ (\mathbf{u} \cdot \ \mathbf{v})$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Dementsprechend müssen wir für die Orthogonalität das Skalarprodukt von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ betrachten. Es gilt:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 8 + 3t + 4t + 3 = 14 + 7t$$

Man erkennt durch schnelles Nachrechnen, dass

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 14 + 7t = 0 \Leftrightarrow 14 = -7t \Leftrightarrow t = -2$$

gelten muss.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 3 (5 Punkte)

Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende das Gaußverfahren, um den Rang zu bestimmen.
2. Alternativer Lösungweg.

1. Verwende das Gauß-Verfahren, um den Rang zu bestimmen

Wir wenden das Gauß-Verfahren an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \\ \cdot(-1) & \cdot 2 \\ + & \\ & + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist der Rang der Matrix gleich 4.

<u>2. Alternativer Lösungweg</u>

Der Rang einer Matrix ist gleich der Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen. Die Anzahl linear unabhängiger Spalten nennen wir Spaltenrang und die Anzahl linear unabhängiger Zeilenrang. Spalten -und Zeilenrang sind bei jeder Matrix gleich. Dies sieht man auch an

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$$

für jede Matrix A. Sollten wir also eine reguläre 4×4 Untermatrix von A finden, so ist der Rang von A gleich 4. Wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{array}{ll} \cdot(-1) & \cdot(-2) \\ + & \\ & \\ & + \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 20 = -10 \neq 0$$

haben wir eine reguläre 4×4 Untermatrix von A gefunden. Damit ist der Rang von A mindestens 4. Wir haben 5 Zeilen mit jeweils 4 Einträgen. Demnach sind diese linear abhängig, womit der Rang nicht 5 sein kann.

Die Antwort (c) ist korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) A ist singulär.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Antworten falsch sind und gebe die richtige Antwort an.

1. Überlege dir, welche Antworten falsch sind und gebe die richtige Antwort an

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \qquad\quad \\ \qquad\quad + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1, \end{aligned}$$

womit A regulär ist. Damit ist Antwort (d) falsch. Wir untersuchen nun nacheinander die Antworten (b) und (c). Uns ist bekannt, dass der Zusammenhang

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gelten muss. Wir überprüfen bei den Matrizen von (b) und (c), ob unpassende Einträge vorliegen. Für Antwort (b) betrachten wir die erste Zeile von A mal die erste Spalte von A^{-1}. Wir erhalten

$$(1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot -1 = 2$$

für den ersten Diagonaleintrag. Somit ist Antwort (b) falsch.

Für Antwort (c) wählen wir die dritte Zeile von A mal die zweite Spalte A^{-1}. Dies ergibt den zweiten Eintrag der dritten Zeile von $A \cdot A^{-1}$. Dieser sollte gleich 0 sein. Wegen

$$(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

ist auch Antwort (c) falsch.

Es gibt noch zwei weitere Lösungsmöglichkeiten. Die Erste wäre (a)-(c) nachzurechnen. Dies ist aber zeitaufwendig und fehleranfällig. Die Zweite wäre das Gauß-Verfahren durchzurechnen. Die angegebene Methode lässt sich jedoch bis auf die Determinante ohne schriftliche Rechnungen lösen, was zeitsparend ist.

Frage 5 (5 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Dann gilt:

(a) $\lambda_1\lambda_2 = 0$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

(c) $\mathbf{v}_1^\top \mathbf{v}_2 = 0$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Eigenwerte von A.
2. Bestimme Eigenvektoren zu den zugehörigen Eigenwerten.
3. Bestimme die korrekte Antwort.

1. Bestimme die Eigenwerte von A

Durch Lösen von

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

erhalten wir die Eigenwerte zu A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 - 9$$

Durch

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow &(1-\lambda)^2 = 9 \\ \Leftrightarrow &\ 1-\lambda = \pm 3 \\ \Leftrightarrow &\ \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

erhalten wir die Eigenwerte λ_1 und λ_2.
Wir sehen, dass die Antworten (a) und (b) falsch sind.

2. Bestimme Eigenvektoren zu den zugehörigen Eigenwerten

Zuerst bestimmen wir einen Eigenvektor $\mathbf{v}_1$ zu λ_1. Hierfür lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Mit

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die frei wählbare Variable x_2 und die Gleichung

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2.$$

Damit können wir die Eigenvektoren zu λ_1 durch

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

angeben. Der Nullvektor der erweiterten Koeffizientenmatrix kann hierbei ignoriert werden. Da ein Eigenvektor ausreicht, können wir

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

setzen. Wir erhalten analog durch

$$(A - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$-x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Damit können wir den zweiten Eigenvektor durch

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

angeben.

<u>3. Bestimme die korrekte Antwort</u>
Wir sehen wegen

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Antwort (d) nicht erfüllt ist. Des Weiteren ist wegen

$$\mathbf{v}_1^\top \cdot \mathbf{v}_2 = (-1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$$

Antwort (c) korrekt. Die Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind also orthogonal zueinander.
Man könnte die Aufgabe auch schneller lösen: Die Matrix A ist symmetrisch, d.h. es gilt

$$A = A^\top.$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind bei symmetrischen Matrizen immer orthogonal.

Die Antwort (c) ist korrekt.

Frage 6 (2 Punkte)

Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 4 - \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$4y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 4$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Normalform der Differenzengleichung an.
2. Finde die allgemeine Lösung der Differenzengleichung und löse die Aufgabe.

1. Gebe die Normalform der Differenzengleichung an

In unserem Fall erhalten wir diese durch

$$4y_{k+1} - y_k = 12 \;\Leftrightarrow\; 4y_{k+1} = y_k + 12 \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = \frac{1}{4}y_k + 3$$

mit $A = \frac{1}{4}$ und $B = 3$.

2. Finde die allgemeine Lösung der Differenzengleichung und löse die Aufgabe

Die allgemeine Lösung einer Differenzengleichung erster Ordnung ist durch

$$y_k = A^k(y_0 - y^\star) + y^\star$$

mit

$$y^\star = \frac{B}{1-A}, \quad A \neq 1$$

gegeben. Es gilt:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{3} = 4.$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$y_k = A^k(y_0 - y^\star) + y^\star = \frac{1}{4^k}(y_0 - 4) + 4 = \left(\frac{1}{4}\right)^k (y_0 - 4) + 4.$$

Mit $y_0 = 3$ erhalten wir durch

$$y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k (3-4) + 4 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

das passende $a = 4$. Dies können wir durch Vergleichen mit der Aufgabenstellung erkennen.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$5y_{k+1} + 6y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Normalform und allgemeine Lösung der Differenzengleichung an.
2. Bestimme die relevanten Eigenschaften.

1. Gebe die Normalform und allgemeine Lösung der Differenzengleichung an

Wie in der vorigen Aufgabe erhalten wir durch

$$5y_{k+1} + 6y_k = 1 \;\Leftrightarrow\; 5y_{k+1} = -6y_k + 1 \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = -\frac{6}{5}y_k + \frac{1}{5}$$

die Normalform mit $A = -\frac{6}{5}$ und $B = \frac{1}{5}$. Mit

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{6}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11} = \frac{1}{11}$$

erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y_k = A^k(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(-\frac{6}{5}\right)^k \left(y_0 - \frac{1}{11}\right) + \frac{1}{11}.$$

2. Bestimme die relevanten Eigenschaften

Wir wissen, dass $A \neq 1$ ist. Damit können die Fälle

$$\begin{aligned} A > 0 \rightarrow &\text{ Lösung monoton} \\ A < 0 \rightarrow &\text{ Lösung oszillierend} \\ |A| < 1 \rightarrow &\text{ Lösung konvergent} \\ |A| > 1 \rightarrow &\text{ Lösung divergent} \end{aligned}$$

eintreten. Wegen $A = -\frac{6}{5} < 0$ wissen wir, dass die allgemeine Lösung oszillierend ist. Zudem gilt $|A| = \frac{6}{5} > 1$, womit die allgemeine Lösung divergent ist. Durch

$$\lim_{k\to\infty} |A^k| = \lim_{k\to\infty} \left| \left(-\frac{6}{5}\right)^k \right| = \infty$$

können wir die Divergenz veranschaulichen und an

$$A^k = \left(-\frac{6}{5}\right)^k = (-1)^k \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^k$$

sehen wir, dass die Lösung oszilliert.

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$m\ y_{k+1} + y_k \ = \ m^2, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Normalform und allgemeine Lösung der Differenzengleichung an.
2. Argumentiere mithilfe den bekannten Eigenschaften.

1. Gebe die Normalform an

Wie in den vorigen Aufgaben erhalten wir mit

$$my_{k+1} + y_k = m^2 \ \Leftrightarrow \ my_{k+1} = -y_k + m^2 \ \Leftrightarrow \ y_{k+1} = -\frac{1}{m}y_k + m$$

die Normalform mit $A = -\frac{1}{m}$ und $B = m$.

2. Argumentiere mithilfe den bekannten Eigenschaften

Wir wissen, dass die allgemeine Lösung genau dann monoton und konvergent ist, wenn

$$A > 0 \text{ und } |A| \leq 1$$

erfüllt ist. Wegen $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $B = 0$ unmöglich. Daraus folgt

$$0 < -\frac{1}{m} \leq 1.$$

Wegen

$$-\frac{1}{m} > 0$$

wissen wir direkt, dass $m < 0$ ist. Weiter gilt:

$$-\frac{1}{m} < 1 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{m} > -1 \ \Leftrightarrow \ m < -1$$

Somit ist Antwort (c) korrekt.