Teil I: Offene Aufgaben (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im großen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}d$.

(a1) (2 Punkte)

Verknüpfen Sie die beiden Funktionen P und D zur Funktion $Q = P \circ D$,

$$Q : R_+ \to \mathbb{R}_{++},\ p \mapsto q = Q(p),$$

welche die Beziehung zwischen dem neuen Preis q und dem alten Preis p beschreibt, nachdem der Investor $D(p)$ Stück Aktien gekauft hat. Geben Sie die Abbildungsvorschrift Q an.

(a2) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Fixpunkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ gibt, für welchen die Relation $p^\star = Q(p^\star)$ gilt. Gesucht ist also der Gleichgewichtspreis $p^\star$, welcher unverändert bleibt, wenn der Investor $D(p^\star)$ Stück Aktien kauft.

(a3) (6 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im großen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}d$.
Für die Funktion $Q = P \circ D$ gibt es einen eindeutigen Punkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ mit $p^\star = Q(p^\star)$.
Verwenden Sie eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung im Punkt $p_0 = 1$, um eine Näherung für $p^\star$ zu finden.

(b) (6 Punkte)

Ein Computer hat eine Rechenleistung von a_n während der Periode $n,\ n = 1, 2, ...$ Mithilfe maschinellen Lernens erhöht sich die Rechenleistung in jeder Periode um 2%, wobei sie zu Beginn $a_1 = 10$ beträgt. Mit dem Computer benötigt die vollständige Berechnung einer bestimmten, anspruchsvollen Aufgabe 15 Perioden (d.h. die komplette Rechenleistung der ersten 15 Perioden wird für die Berechnung benötigt).

Anstelle die Berechnungen direkt zu starten, beschliesst das Rechenzentrum zunächst die Rechenleistung des Computers aufzustocken. Damit kann mit der Aufgabe zwar erst nach 3 Perioden begonnen werden, dafür aber hat der Computer nun eine neue anfängliche Rechenleistung von 15, welche sich pro Periode um 3% erhöht.
Wie viel Zeit (in Perioden) kann das Rechenzentrum durch das Aufstocken des Computers und den Aufschub der Berechnung einsparen?

(c) (10 Punkte)

Eine Familie leiht sich CHF $1'000'000$, um ein Haus zu kaufen. Der Zins beträgt zu Beginn $i = 1\%$. Die Familie beschliesst, CHF C_1 am Ende jeden Jahres für 10 Jahre zurückzuzahlen, um so den Schuldenstand auf CHF $750'000$ am Ende des 10. Jahres zu reduzieren. Am Ende des 5-ten Jahres ergibt sich die Möglichkeit einer Sondertilgung. Die Familie zahlt folglich am Ende des 5-ten Jahres einen Gesamtbetrag von CHF $150'000$ (einschliesslich C_1) zurück und verhandelt die Konditionen mit der Bank neu. Der Zinssatz fällt damit auf 0.5%. Die Familie beschliesst, die Schulden weiterhin mit CHF C_1 am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, bis diese auf CHF $500'000$ reduziert sind. Aus steuerlichen Gründen zahlen sie anschliessend CHF C_2 pro Jahr an die Bank, um ihre Schulden konstant bei CHF $500'000$ zu halten.

(c1) Fügen Sie alle Ereignisse und Mittelflüsse dem Zeitstrahl hinzu.

(c2) Berechnen Sie C_1.

(c3) Wie hoch ist der Schuldenstand, nachdem die Familie die Zahlung von CHF 150’000 am Ende des 5-ten Jahres veranlasst hat?

(c4) Wie lange dauert es nach Ende des 5-ten Jahres, bis der Schuldenstand CHF $500'000$ erreicht hat?

(c5) Berechnen Sie C_2.

(d) (10 Punkte)

Ein Anbieter für Tablets schätzt die Nachfrage q_d nach seinem neusten Produkt auf

$$q_d(p) = \frac{15'840 - 30\,p}{p + 50},$$

wobei $p > 20$ der Verkaufspreis in US-Dollar pro Tablet ist. Die Kosten für Produktion und Vertrieb eines Tablets betragen 20 US-Dollar.

(d1) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion des Anbieters unter der Annahme, dass der Preis $p > 20$ ist.

(d2) Leiten Sie die Funktion her, welche die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit vom Verkaufspreis beschreibt.

(d3) Approximieren Sie mit Hilfe der Elastizitätsfunktion die relative Änderung des Gewinns bei einer Erhöhung des anfänglichen Verkaufspreises von $p_0 = 100$ US-Dollar um 5 US-Dollar.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, genau dann wenn A und B in ihrem Wahrheitsgehalt verschieden sind (eine Aussage ist wahr, die andere falsch)?

(a) $A \vee B$.

(b) $A \wedge B$.

(c) $\neg(A \Rightarrow B)$.

(d) $(A \vee B) \wedge (\not(A \wedge B))$.

Frage 2 (3 Punkte)

Sei $A =$ „Jeanette und Hans kommen an die Party " und $B =$ „Mark kommt an die Party ". Wir wissen, dass Hans die Party nicht besuchte. Über Jeanette und Mark ist jedoch nichts bekannt.
Welche Aussage ist demnach richtig?

(a) $A \wedge B$.

(b) $A \vee B$.

(c) $A \Rightarrow B$.

(d) $A \Leftrightarrow B$.

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton und konvergent. Zudem gilt $a_n \neq 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n}$. Dann folgt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(d) Keine der obigen Eigenschaften folgt.

Frage 4 (4 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in (0,1)$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere geometrische Folge mit $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q}{2}$.
Zudem gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Dann folgt

(a) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{1}{3}$.

(b) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{1}{2}$.

(c) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{2}{3}$.

(d) Die Bedingung $b_1 = 2a_1$ ist nie erfüllt.

Frage 5 (3 Punkte)

Am Tag, an dem Mark einen Kredit über $P_1 = 1'000'000$ CHF mit Zinssatz $i_1 = 1\%$ aufnimmt, nimmt Lucie einen Kredit über $P_2 = 800'000$ CHF mit Zinssatz $i_2 = 1.2\%$ auf. Mark zahlt den Kredit in konstanten Raten von $10'500$ CHF jeweils am Ende des Jahres zurück, während Lucie $9'500$ CHF auch jeweils am Ende des Jahres zurückbezahlt.
Welche der folgenden Antworten ist richtig?

(a) Mark bezahlt den Kredit vor Lucie zurück.

(b) Lucie bezahlt den Kredit vor Mark zurück.

(c) Lucie und Mark bezahlen den Kredit zum gleichen Zeitpunkt zurück.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig..

Frage 6 (3 Punkte)

Seien f und g Funktionen einer reellen Variable mit Definitionsbereich D_f beziehungsweise D_g.
Sei $h = f \circ g$. Welche der folgenden Aussagen über den Definitionsbereich D_h ist richtig?

(a) $D_h = D_f \cup D_g$.

(b) $D_h \subseteq D_g$.

(c) $D_h \subseteq D_f$.

(d) $D_h = D_f \cap D_g$.

Frage 7 (3 Punkte)

Eine Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$ habe eine Elastizität ε_f, die konstant gleich 2 ist.

Welche der folgenden Aussagen über die die Wachstumsrate ρ_f von f ist richtig?

(a) ρ_f ist streng monoton fallend.

(b) ρ_f ist streng monoton wachsend.

(c) ρ_f ist konstant.

(d) ρ_f ist nicht monoton.

Frage 8 (4 Punkte)

Eine differenzierbare Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist streng konkav und erfüllt $f(x) > 0$ für alle $x \in D_f$. Zudem gibt es ein $x_0 \in D_f, x_0 \neq 0$, so dass für die Elastizität von f an der Stelle $\varepsilon_f(x_0) = 0$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Bei x_0 ist f elastisch.

(b) Bei x_0 besitzt f ein lokales Minimum.

(c) Bei x_0 besitzt f ein lokales Maximum.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 9 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion einer reellen Variable, die mindestens n-mal differenzierbar ist. Sei P_k das Taylor-Polynom k-ter Ordnung von f an der Stelle x_0, für $k = 1, ..., n-1$, und R_k das zugehörige Restglied k-ter Ordnung.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) < R_{k-1}(x)$.

(b) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) > R_{k-1}(x)$.

(c) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) = R_{k-1}(x)$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 10 (2 Punkte)

Eine Funktion zweier reellen Variablen f sei homogen von Grad 2 und ihre partielle Elastizität erfülle

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = e^{x+y} + 1.$$

Dann folgt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = 1 + e^{x+y}$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = 1 - e^{x+y}$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = e^{x+y}$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = -e^{x+y}$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

ist gleich:

(a) $-\frac{1}{2}$.

(b) 0.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) ∞.

Frage 2 (4 Punkte)

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} x^x$$

ist gleich:

(a) 0.

(b) 1.

(c) e.

(d) e^e.

Frage 3 (4 Punkte)

Ein Blatt Papier sei 0.5 Millimeter dick. Man faltet das Blatt nun in der Hälfte, so dass es eine neue Dicke von 1 Millimeter hat. Anschliessend faltet man es solange erneut, bis die Dicke des gefalteten Papiers $400'000$ Kilometer erreicht (ungefähr die Distanz zwischen Erde und Mond).
Wie oft muss das Blatt Papier gefaltet werden ?

(a) Ungefähr 20 Mal.

(b) Ungefähr 30 Mal.

(c) Ungefähr 40 Mal.

(d) Ungefähr 50 Mal.

Frage 4 (4 Punkte)

Ein Projekt benötigt eine Anfangsinvestition von $10'000$ CHF. Nach einem Jahr generiert das Projekt eine Auszahlung in Höhe von $5'000$ CHF und nach zwei Jahren eine Auszahlung in Höhe von $10'000$ CHF.
Der interne Zinssatz des Projekts ist ungefähr

(a) 5%.

(b) 10%.

(c) 20%.

(d) 30%.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

(a) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(b) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

(c) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2, ohne das Innere (mit Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(d) Der Definitionsbereich von f ist die leere Menge.

Frage 6 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion zweier reellen Variablen gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 10x^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$.
Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f am Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gleich -0.5.
Dann folgt:

(a) $\alpha = \frac{1}{6}$.

(b) $\alpha = \frac{1}{3}$.

(c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) $\alpha = \frac{2}{3}$.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) \quad \text{für } x > 0, y > 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist homogen von Grad 5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen von Grad 0.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion einer reellen Variablen, definiert als $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha > 0$, und sei g eine Funktion zweier reellen Variablen, die strikt positiv und homogen von Grad κ ist.
Wir definieren die Funktion h als $h(x,y) = f(g(x,y))$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) h ist homogen von Grad 1, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$.

(b) h ist homogen von Grad 2, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$.

(c) h ist homogen von Grad 3, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$.

(d) h ist homogen von Grad 5, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.

Lösungen

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im großen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}d$.

(a1) (2 Punkte)

Verknüpfen Sie die beiden Funktionen P und D zur Funktion $Q = P \circ D$,

$$Q : R_+ \to \mathbb{R}_{++}, \ p \mapsto q = Q(p),$$

welche die Beziehung zwischen dem neuen Preis q und dem alten Preis p beschreibt, nachdem der Investor $D(p)$ Stück Aktien gekauft hat. Geben Sie die Abbildungsvorschrift Q an.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die Verknüpfung der beiden Funktionen

1. Berechne die Verknüpfung der beiden Funktionen

Um die Abbildungsvorschrift von Q zu bestimmen, müssen wir die Verknüpfung $P \circ D$ berechnen. Es gilt

$$Q(p) = (P \circ D)(p) = P(D(p)) = P(4 - 2e^{p-1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(4 - 2e^{p-1}) = \frac{1}{4} + 2 - e^{p-1} = \frac{9}{4} - e^{p-1}$$

für den Preis $p \in \mathbb{R}_+$. Durch Q erhalten wir eine Funktion, welche den Preis der Aktie $p = P(d)$ in Abhängigkeit von der Nachfrage $d = D(p)$ beschreibt.

(a2) (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Fixpunkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ gibt, für welchen die Relation $p^\star = Q(p^\star)$ gilt. Gesucht ist also der Gleichgewichtspreis $p^\star$, welcher unverändert bleibt, wenn der Investor $D(p^\star)$ Stück Aktien kauft.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie der Nullstellensatz von Bolzano anwendbar ist.
2. Zeige mit dem Nullstellensatz die Existenz eines Fixpunktes.
3. Zeige die Eindeutigkeit des Fixpunktes.

1. Überlege dir, wie der Nullstellensatz von Bolzano anwendbar ist

Wir beginnen mit der Aussage des Nullstellensatzes von Bolzano. Gegeben ist eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder umgekehrt). Dann existiert mindestens ein $x \in [a, b]$, sodass $f(x) = 0$ ist.
Wir können also sagen, dass eine stetige Funktion mit wechselnden Vorzeichen mindestens eine Nullstelle dazwischen besitzt.
Unser Ziel ist nun nachzuweisen, dass genau ein $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ mit $p^\star = Q(p^\star)$ existiert. Um den Nullstellensatz anzuwenden, behelfen wir uns mit der Funktion

$$f : \left[0, \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}, \ p \mapsto f(p) = Q(p) - p$$

und erhalten die Tatsache, dass

$$p = Q(p) \ \Leftrightarrow \ 0 = Q(p) - p = f(p)$$

gilt. Die Nullstellen von f entsprechen also den Fixpunkten von Q auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ und f ist stetig. Falls nun die Funktionswerte an den Intervallgrenzen unterschiedliche Vorzeichen besitzen, können wir den Nullstellensatz von Bolzano anwenden.

2. Zeige mit dem Nullstellensatz die Existenz eines Fixpunktes

Die Stetigkeit von f haben wir bereits abgeklärt. Für die Werte von f an den Grenzen des Intervalls gilt:

$$f(0) = Q(0) - 0 = \underbrace{\underbrace{\frac{9}{4}}_{>2} - \underbrace{e^{-1}}_{<1}}_{>0} \approx 1.88 > 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = Q\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - e^{\frac{3}{2}-1} - \frac{6}{4} = \underbrace{\underbrace{\frac{3}{4}}_{<1} - \underbrace{e^{\frac{1}{2}}}_{>1}}_{<0} \approx -0.90 < 0.$$

Nach dem Nullstellensatz von Bolzano existiert mindestens ein $p \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ mit $f(p) = 0$.

3. Zeige die Eindeutigkeit des Fixpunktes

Bisher wurde abgeklärt das wir Fixpunkte von Q in $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ finden. Nun müssen wir nachweisen, dass nur ein solcher gefunden werden kann. Falls f streng monoton ist, wissen wir das jeder Wert nur einmal von f angenommen werden kann. Damit erhalten wir einen eindeutigen Fixpunkt. Es gilt

$$f'(p) = -e^{p-1} - 1 < 0$$

für einen beliebigen Preis p. Insbesondere ist f auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ streng monoton.
Alternativ ist f die Summe zweier streng monoton fallender Funktionen.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass wir einen eindeutigen Fixpunkt finden. Damit existiert genau ein $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, sodass $p^\star = Q(p^\star)$ gilt.

(a3) (6 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im großen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}d$.
Für die Funktion $Q = P \circ D$ gibt es einen eindeutigen Punkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ mit $p^\star = Q(p^\star)$.
Verwenden Sie eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung im Punkt $p_0 = 1$, um eine Näherung für $p^\star$ zu finden.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe zwei verschiedene Lösungswege an.
2. Lösungsweg nach Variante 1.
3. Lösungsweg nach Variante 2.
4. Bestimme die Annäherung an den Fixpunkt.

1. Gebe zwei verschiedene Lösungswege an

Wir haben in den vorherigen Aufgaben bereits festgestellt, dass

$$Q(p) = p \ \Leftrightarrow f(p) = 0$$

mit $f(p) = Q(p) - p$ für $p \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ gilt. Demnach lässt sich der Fixpunkt $p^\star$ von Q über eine Taylor-Approximation von Q selbst oder über eine Taylor-Approximation von f annähern. In der ersten Variante lösen wir ein Fixpunktproblem und in der zweiten Variante ein Nullstellenproblem für das jeweilig auftretende Taylorpolynom.
Wir werden jedoch sehen, dass beide Varianten äquivalent sind.

2. Lösungsweg nach Variante 1

Wir bestimmen nun das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_{Q,2}$ im Punkt $p_0 = 1$. Dieses ist schematisch durch

$$P_{Q,2}(p) = Q(p_0) + Q'(p_0)(p - p_0) + \frac{1}{2}Q''(p_0)(p - p_0)^2 = Q(1) + Q'(1)(p - 1) + \frac{1}{2}Q''(1)(p - 1)^2$$

gegeben. Es gilt $Q(p) = \frac{9}{4} - e^{p-1}$. Also folgt $Q^{(k)}(p) = -e^{p-1}$ für $k \geq 1$ mithilfe der Kettenregel. Das heißt, die Ableitungen ab der ersten Ordnung sind alle identisch. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Q(1) &= \frac{9}{4} - e^{1-1} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \\ Q'(1) &= Q''(1) = -e^{1-1} = e^0 = -1, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\begin{aligned} P_{Q,2}(p) &= \frac{5}{4} - (p - 1) - \frac{1}{2}(p - 1)^2 = \frac{5}{4} - p + 1 - \frac{1}{2}(p^2 - 2p + 1) = \frac{5}{4} - p + 1 - \frac{1}{2}p^2 + p - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}p^2 + \frac{5}{4} + \frac{4}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

ergibt. Damit entspricht das Fixpunktproblem einer quadratischen Gleichung:

$$p = P_{Q,2}(p) = -\frac{1}{2}p^2 + \frac{7}{4} \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}p^2 + p - \frac{7}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 + 2p - \frac{7}{2} = 0.$$

Wir werden nun hier die Notbremse ziehen und die zweite Variante auf die selbe quadratische Gleichung führen. Falls hieran kein Interesse besteht, kann gerne zu dem vierten Schritt gesprungen werden.

3. Lösungsweg nach Variante 2

Wir betrachten nun $f(p) = Q(p) - p$ und erhalten:

$$\begin{aligned} f(1) &= Q(1) - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \\ f'(p) &= Q'(p) - 1 \;\Rightarrow\; f'(1) = Q'(1) - 1 = -1 - 1 = -2 \\ f''(p) &= Q''(p) \;\Rightarrow\; f''(1) = Q''(1) = -1. \end{aligned}$$

Damit ergibt die Taylor-Approximation von f in $p_0 = 1$:

$$\begin{aligned} P_{f,2}(p) &= f(p_0) + f'(p_0)(p - p_0) + \frac{1}{2}f''(p_0)(p - p_0)^2 = \frac{1}{4} - 2(p-1) - \frac{1}{2}p^2 + p - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} - 2p + 2 - \frac{1}{2}p^2 + p - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist nun, dass Nullstellenproblem

$$0 = P_{f,2}(p) \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; p^2 + 2p - \frac{7}{2} = 0$$

zu lösen. Dieses Problem ist äquivalent zu dem in Variante 1 auftretenden Fixpunktproblem.

4. Bestimme die Annäherung an den Fixpunkt

Wir wissen, dass wir durch das Lösen der Gleichung $p^2 + 2p - \frac{7}{2} = 0$ die Näherung an den Fixpunkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ erhalten. Die Lösungen der Gleichung sind durch

$$p^2 + 2p - \frac{7}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; p_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{7}{2}\right)} = \; -1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}}$$

gegeben. Es gilt $p_- = -1 - \sqrt{\frac{9}{2}} < 0$. Damit kommt nur p_+ infrage. Für diese Lösung gilt:

$$p_+ = -1 + \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 1.12132 \approx p^\star.$$

Damit haben wir eine Näherung an den Fixpunkt $p^\star$ gefunden.

(b) (6 Punkte)

Ein Computer hat eine Rechenleistung von a_n während der Periode n, $n = 1, 2, ...$ Mithilfe maschinellen Lernens erhöht sich die Rechenleistung in jeder Periode um 2%, wobei sie zu Beginn $a_1 = 10$ beträgt. Mit dem Computer benötigt die vollständige Berechnung einer bestimmten, anspruchsvollen Aufgabe 15 Perioden (d.h. die komplette Rechenleistung der ersten 15 Perioden wird für die Berechnung benötigt).
Anstelle die Berechnungen direkt zu starten, beschliesst das Rechenzentrum zunächst die Rechenleistung des Computers aufzustocken. Damit kann mit der Aufgabe zwar erst nach 3 Perioden begonnen werden, dafür aber hat der Computer nun eine neue anfängliche Rechenleistung von 15, welche sich pro Periode um 3% erhöht.
Wie viel Zeit (in Perioden) kann das Rechenzentrum durch das Aufstocken des Computers und den Aufschub der Berechnung einsparen?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Rechenleistung der ersten 15 Perioden ohne die Verbesserung.
2. Bestimme die Anzahl der notwendigen Perioden nach der Verbesserung.

1. Bestimme die Rechenleistung der ersten 15 Perioden ohne die Verbesserung
Um eine bestimmte, anspruchsvolle Rechenaufgabe zu lösen, benötigt der Computer 15 Perioden. Demnach ist die benötigte Rechenleistung durch

$$s_{15} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + ... + a_{15}$$

gegeben. Dies ist die 15. Partialsumme zur Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge selbst ist rekursiv durch

$$a_{n+1} = (1 + 2\%)a_n = 1.02\ a_n, \quad a_1 = 10$$

definiert. Damit liegt eine geometrische Folge mit $a_1 = 10$ und $q = 1.02$ vor. Also folgt

$$\begin{aligned} s_{15} &= \sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} a_1 q^{n-1} = a_1 \sum_{n=1}^{15} q^{n-1} = a_1 \sum_{n=0}^{14} q^n = a_1 \frac{1-q^{14+1}}{1-q} = 10\frac{1-(1.02)^{15}}{1-1.02} \\ &\approx 1729342 \end{aligned}$$

mithilfe der geometrischen Summenformel.
Durch die Verbesserung erhalten wir die rekursive Vorschrift

$$b_{n+1} = (1 + 3\%)b_n = 1.03\ b_n$$

mit der Ausgangsrechenleistung $b_1 = 15$. Dies ist eine geometrische Folge mit $b_1 = 15$ und $\tilde{q} = 1.03$
Die Rechenleistung nach n Perioden erhalten wir dann wieder mit der geometrischen Summenformel:

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} b_1 \tilde{q}^{k-1} = b_1 \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{q}^k = b_1 \frac{1-\tilde{q}^n}{1-\tilde{q}} = 15\frac{1-(1.03)^n}{1-1.03}.$$

Wir wollen nach herausfinden wie viele Perioden nach der Verbesserung für die geforderte Rechenleistung notwendig sind. Dies erhalten wir mit :

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_n = s_{15} \;&\Leftrightarrow\; 15\frac{1-(1.03)^n}{1-1.03} = s_{15} \;\Leftrightarrow\; \frac{1-(1.03)^n}{1-1.03} = s_{15}\frac{1}{15} \;\Leftrightarrow\; 1-(1.03)^n = s_{15}\frac{1-1.03}{15}\\
&\Leftrightarrow\; (1.03)^n = 1 - s_{15}\frac{1-1.03}{15} \overset{(I)}{=} (1.02)^{15} \;\Leftrightarrow\; \ln(1.03^n) = \ln(1.02^{15})\\
&\Leftrightarrow\; n\cdot\ln(1.03) = \ln((1.02)^{15})\\
&\Leftrightarrow\; n = \frac{\ln(1.02^{15})}{\ln(1.03)} = 15\frac{\ln(1.02)}{\ln(1.03)} \approx 10.0491
\end{aligned}$$

Damit braucht der verbesserte Computer ungefähr 10 Perioden um die Berechnung der Aufgabe abzuschließen. Da 3 Perioden zur Verbesserung benötigt werden erhalten wir eine Beschleunigung von $15 - 10 - 3 = 2$ Perioden im Vergleich zu dem alten Computer.

Nebenrechnung (I):

$$\begin{aligned}
1 - s_{15}\frac{1-1.03}{15} &= 1 - 10\frac{1-(1.02)^{15}}{1-1.02}\frac{1-1.03}{15} = 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1-(1.02)^{15}}{-0.02}\cdot(-0.03)\\
&= 1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1-(1.02)^{15}}{\frac{2}{100}}\cdot\frac{3}{100} = 1 - \frac{2}{3}\cdot(1-(1.02)^{15})\cdot\frac{3}{100}\frac{100}{2}\\
&= 1 - \frac{2}{3}\cdot(1-(1.02)^{15})\cdot\frac{3}{2} = (1.02)^{15}
\end{aligned}$$

(c) (10 Punkte)

Eine Familie leiht sich CHF 1′000′000, um ein Haus zu kaufen. Der Zins beträgt zu Beginn $i = 1\%$. Die Familie beschliesst, CHF C_1 am Ende jeden Jahres für 10 Jahre zurückzuzahlen, um so den Schuldenstand auf CHF 750′000 am Ende des 10. Jahres zu reduzieren. Am Ende des 5-ten Jahres ergibt sich die Möglichkeit einer Sondertilgung. Die Familie zahlt folglich am Ende des 5-ten Jahres einen Gesamtbetrag von CHF 150′000 (einschliesslich C_1) zurück und verhandelt die Konditionen mit der Bank neu. Der Zinssatz fällt damit auf 0.5%. Die Familie beschliesst, die Schulden weiterhin mit CHF C_1 am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, bis diese auf CHF 500′000 reduziert sind. Aus steuerlichen Gründen zahlen sie anschliessend CHF C_2 pro Jahr an die Bank, um ihre Schulden konstant bei CHF 500′000 zu halten.

(c1) Fügen Sie alle Ereignisse und Mittelflüsse dem Zeitstrahl hinzu.

(c2) Berechnen Sie C_1.

(c3) Wie hoch ist der Schuldenstand, nachdem die Familie die Zahlung von CHF 150’000 am Ende des 5-ten Jahres veranlasst hat?

(c4) Wie lange dauert es nach Ende des 5-ten Jahres, bis der Schuldenstand CHF 500′000 erreicht hat?

(c5) Berechnen Sie C_2.

Lösung:

Vorgehensweise:

(c1) Erstelle den Zeitstrahl.

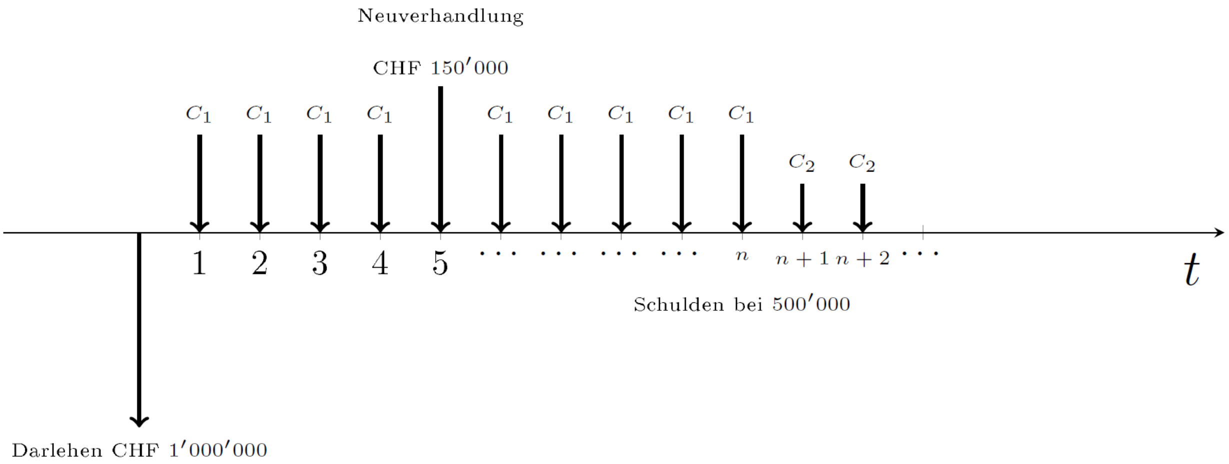
(c2) Berechne die jährliche Zahlung C_1.

(c3) Bestimme den Schuldenstand nach der Sondertilgung.

(c4) Bestimme die Anzahl an Jahren um einen Schuldenstand von 500′000 zu erreichen.

(c5) Bestimme die Rate C_2 für einen konstanten Schuldenstand.

(c1) Erstelle den Zeitstrahl
Der Zeitstrahl ist durch



gegeben. Damit ist die Teilaufgabe (c1) erledigt

(c2) Berechne die jährliche Zahlung C_1
Es war geplant, C_1 am Ende jeden Jahres über 10 Jahre zurückzuzahlen, sodass die Schulden von $1'000'000$ CHF auf $750'000$ reduziert werden. Bei einem Zinssatz von 1% ist ihm Jahre 10 der Betrag

$$1'000'000(1+1\%)^{10} - 750'000 = 1'000'000 \cdot 1.01^{10} - 750'000 \approx 354'622.10$$

zur Reduktion der Schulden notwendig. Dieser Wert muss nun einer nachschüssigen Rente mit jährlicher Zahlung C_1 nach 10 Jahren entsprechen. Mit dem Endwert einer nachschüssigen Rente nach 10 Jahren erhalten wir:

$$C_1 \frac{(1+1\%)^{10}-1}{1\%} = 354'622.10 \;\Leftrightarrow\; C_1 = \frac{1\%}{(1+1\%)^{10}-1} \cdot 354'622.10 \approx 33'895.50 \text{ (CHF)}.$$

Damit müssen jährlich ca. $33'895.50$ CHF zurückgezahlt werden.

(c3) Bestimme den Schuldenstand nach der Sondertilgung
Den Schuldenstand nach 5 Jahren erhalten wir aus der über 5 Jahre verzinsten Kreditsumme abzüglich der über 5 Jahre getätigten Rückzahlung(Endwert nach 5 Zahlungen von C_1) und abzüglich der Sondertilgung $150'000 - C_1$ CHF im fünften Jahr. Man beachte das einschliesslich in der Aufgabenstellung. Damit ergibt sich für den Schuldenstand am Ende des fünften Jahres:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{1'000'000(1+1\%)^5}_{\text{Kreditsumme über 5 Jahre verzinst}} - \underbrace{C_1\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%}}_{\text{Endwert nach 5 Jahren}} - \underbrace{(150'000 - C_1)}_{\text{Sondertilgung}} \\
&\approx 1'051'010 - 33'895.5\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%} - 150'000 + 33'895.5 \\
&\approx 1'051'010 - 172'901.1 - 150'000 + 33'895.5 \\
&= 762'004.4 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

Am Ende des fünften Jahres hat die Familie eine Restschuld von $762'004.4$ CHF.

(c4) Bestimme die Anzahl an Jahren um einen Schuldenstand von $500'000$ zu erreichen

Nun ist die Frage nach wie vielen Jahren der Schuldenstand von $762'004.4$ CHF auf $500'000$ CHF sinkt. Hierbei ist der neue Zinssatz durch $i = 0.5\%$ und die Jahresrate bleibt C_1. Damit erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}\underbrace{500'000}_{\text{Zielschuldenstand}} &= \underbrace{762'004.4(1+0.5\%)^n}_{\text{Verzinsung über } n \text{ Jahre}} - \underbrace{C_1 \frac{(1+0.5\%)^n - 1}{0.5\%}}_{\text{Endwert nach } n \text{ Jahren}} \\ &= \left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right)(1+0.5\%)^n + \frac{C_1}{0.5\%}.\end{aligned}$$

Durch Auflösen der Gleichung nach n erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right)(1+0.5\%)^n = 500'000 - \frac{C_1}{0.5\%} \\ \Leftrightarrow\ &(1+0.5\%)^n = \frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}} \\ \Leftrightarrow\ &n \ln(1+0.5\%) = \ln\left(\frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}}\right) = \ln\left(500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}\right) - \ln\left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right) \\ \Leftrightarrow\ &n = \frac{\ln\left(500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}\right) - \ln\left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right)}{\ln(1+0.5\%)} \approx 8.54.\end{aligned}$$

Damit erreicht die Familie den Schuldenstand 9 Jahre nach der Sondertilgung bzw. dem Abschluss der neuen Konditionen. Genau genommen ist die verbleibende Schuld nach 9 Jahren geringer als $500'000$ CHF, denn es gilt:

$$762'004.4(1+0.5\%)^9 - C_1 \frac{(1+0.5\%)^9 - 1}{0.5\%} \approx 485'756.1 \text{ (CHF)}.$$

Damit erhalten wir eine Interpretationsmöglichkeit, weswegen $n = 8.54$ und $n = 9$ beides korrekte Antworten sind. In der nächsten Teilaufgabe rechnen wir mit einem Schuldenstand von $500'000$ weiter.

(c5) Bestimme die Rate C_2 für einen konstanten Schuldenstand

Die Schulden von $500'000$ bleiben konstant, wenn C_2 den anfallenden Zinsen entspricht. Also ist C_2 durch

$$C_2 = 0.5\% \cdot 500'000 = 2'500 \text{ (CHF)}$$

gegeben.

Damit können sie als reicher Sack die Linkspartei für läppische $2'500$ CHF verärgern, indem sie $2'500$ CHF an dem Fiskus vorbeischleusen und diese stattdessen ihren Buddys von der Bank geben.

(d) (10 Punkte)

Ein Anbieter für Tablets schätzt die Nachfrage q_d nach seinem neusten Produkt auf

$$q_d(p) = \frac{15'840 - 30\,p}{p+50},$$

wobei $p > 20$ der Verkaufspreis in US-Dollar pro Tablet ist. Die Kosten für Produktion und Vertrieb eines Tablets betragen 20 US-Dollar.

(d1) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion des Anbieters unter der Annahme, dass der Preis $p > 20$ ist.

(d2) Leiten Sie die Funktion her, welche die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit vom Verkaufspreis beschreibt.

(d3) Approximieren Sie mit Hilfe der Elastizitätsfunktion die relative Änderung des Gewinns bei einer Erhöhung des anfänglichen Verkaufspreises von $p_0 = 100$ US-Dollar um 5 US-Dollar.

Lösung:

Vorgehensweise:

(d1) Gebe die Gewinnfunktion an.

(d2) Verwende einen Zusammenhang zwischen Kettenregel und der Logarithmusfunktion.

(d3) Approximiere die relative Änderung durch die Elastizität.

(d1) Gebe die Gewinnfunktion an

Wir bezeichnen die Gewinnfunktion mit G. Diese Funktion besteht aus der Differenz aus Ertrag und Kosten. Mit E und K bezeichnen wir die Ertrags bzw. Kostenfunktion. Damit gilt

$$E(p) = q_d(p) \cdot p \text{ und } K(p) = q_d(p) \cdot 20$$

für $p > 20$. Die Gewinnfunktion für $p > 20$ ergibt sich dann durch das Bilden der Differenz:

$$G(p) = E(p) - K(p) = q_d(p) \cdot p - q_d(p) \cdot 20 = q_d(p) \cdot (p-20) = \frac{15'840 - 30\,p}{p+50}(p-20).$$

(d2) Verwende einen Zusammenhang zwischen Kettenregel und der Logarithmusfunktion.

Die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit des Preises p ist durch

$$\varepsilon_G(p) = p\frac{G'(p)}{G(p)}$$

gegeben. Nun liegen zwei Möglichkeiten vor. Die Erste ist das (fehleranfällige) bestimmen der Ableitung von G. Deswegen werden dies als Alternative durchführen. Für die Zweite betrachten wir die aus der Kettenregel folgende Tatsache:

$$(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Wenn wir also die Ableitung von $\ln(G(p)))$ bestimmen können, erhalten wir die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit des Preises p unmittelbar. Hierfür formen wir zunächst $\ln(G(p)))$ mit Logarithmusregeln um:

$$\begin{aligned}\ln(G(p))) &= \ln\left(\frac{15'840-30p}{p+50}(p-20)\right) = \ln\left((15'840-30p)(p-20)\frac{1}{p+50}\right)\\ &= \ln(15'840-30p)+\ln(p-20)-\ln(p+50).\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich das Differenzieren und mit $\frac{30}{15'840}=\frac{1}{528}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}(\ln(G(p))))' &= (\ln(15'840-30p)+\ln(p-20)-\ln(p+50))' = \frac{-30}{15'840-30p}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}\\ &= \frac{1}{p-528}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}.\end{aligned}$$

Insgesamt ist die Elastizität durch

$$\varepsilon_G(p) = p\frac{G'(p)}{G(p)} = p\cdot(\ln(G(p))))' = \frac{p}{p-528}+\frac{p}{p-20}-\frac{p}{p+50}$$

gegeben.

Alternativ erhalten wir mit der Produkt-und Quotientenregel:

$$\begin{aligned}G'(p) &= \frac{(-30(p-20)+(15'840-30p))(p+50)-(15'840-30p)(p-20)}{(p+50)^2}\\ &= \frac{-30(p-20)(p+50)+(15'840-30p)(p+50-p+20)}{(p+50)^2}\\ &= \frac{-30(p-20)(p+50)+70(15'840-30p)}{(p+50)^2}.\end{aligned}$$

Für die Elastizität folgt

$$\begin{aligned}\varepsilon_G(p) = p\frac{G'(p)}{G(p)} &= p\cdot\frac{-30(p-20)(p+50)+70(15'840-30p)}{(p+50)^2}\cdot\frac{p+50}{(15'840-30p)(p-20)}\\ &= \frac{p}{p-578}+\frac{70p}{(p+50)(p-20)}\end{aligned}$$

durch geschicktes Kürzen. Das dies der vorher bestimmten Elastizität entspricht lassen wir euch als (Bruchrechen-)Übungsaufgabe.

(d3) Approximiere die relative Änderung durch die Elastizität

Die relative Änderung von 100 USD auf 105USD des Gewinns ist durch

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)}$$

gegeben. Für diese gilt der Zusammenhang

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)} \approx \varepsilon_G(100)\frac{105-100}{100} = \varepsilon_G(100)\cdot 5\%$$

mit der Elastizität. Wegen

$$\varepsilon_G(100) = \frac{100}{100-528}+\frac{100}{100-20}-\frac{100}{100+50}\approx 0.35$$

ergibt sich die ungefähre relative Änderung:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)} \approx 0.35\cdot 5\% = 1.75\%.$$

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, genau dann wenn A und B in ihrem Wahrheitsgehalt verschieden sind (eine Aussage ist wahr, die andere falsch)?

(a) $A \vee B$.

(b) $A \wedge B$.

(c) $\neg(A \Rightarrow B)$.

(d) $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstabelle.

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstabelle

Eine Aussage kann nur die Wahrheitswerte wahr (W) oder falsch (F) annehmen. Dementsprechend gibt es bei zwei Aussagen A, B genau vier Kombinationsmöglichkeiten der Wahrheitswerte. Aus diesen Kombinationen ergeben sich dann die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen.

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
(a) $A \vee B$	W	W	W	F
(b) $A \wedge B$	W	F	F	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg(A \wedge B)$	F	W	W	W
(c) $\neg(A \Rightarrow B)$	F	W	F	F
(d) $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$	F	W	W	F

Damit sind die Antworten (a)–(c) falsch und die richtige Antwort bleibt übrig.

Also ist die Antwort (d) korrekt.

Alternativ lässt sich die Antwort auch anders herleiten. Durch Umformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B)) &= (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) = ((A \vee B) \wedge (\neg A)) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg B)) \\ &= (A \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg B) \\ &= (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).\end{aligned}$$

Hierbei geht ein, dass $(A \wedge \neg A)$ unabhängig von dem Wahrheitsgehalt der Aussage falsch ist und für logische Operationen das Distributivgesetz gilt.

Man nennt diese logische Verknüpfung auch exklusives Oder und entspricht der sprachlichen Verwendung von “oder “.

Frage 2 (3 Punkte)

Sei $A =$ "Jeanette und Hans kommen an die Party " und $B =$ "Mark kommt an die Party ". Wir wissen, dass Hans die Party nicht besuchte. Über Jeanette und Mark ist jedoch nichts bekannt.
Welche Aussage ist demnach richtig?

(a) $A \wedge B$.

(b) $A \vee B$.

(c) $A \Rightarrow B$.

(d) $A \Leftrightarrow B$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Übersetze die Aufgabenstellung in Wahrheitswerte und leite die korrekte Antwort her.

1. Übersetze die Aufgabenstellung in Wahrheitswerte und leite die korrekte Antwort her
Uns ist bekannt, dass Hans die Party nicht besuchte. Demnach gilt $A = F$. Wir wissen nichts über Mark. Also kann entweder $B = W$ oder $B = F$ gelten. Unser Ziel ist die Aussage zu finden, welche unabhängig von B wahr ist. Die Antwort (a) können wir direkt ausschließen, da diese wegen A falsch ist. Die Aussage in (b) kann nur wahr sein, falls $B = W$ und für (d) gilt dies umgekehrt. Also bleibt die Antwort (c) übrig.
Die Wahrheitstafel in der letzten Aufgabe zeigt, dass die Aussage von (c) wirklich unabhängig von dem Wahrheitswert von B ist. Man sagt auch: "Aus etwas Falschem kann alles folgen".

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Alternativ lässt sich diese Aufgabe auch über eine Wahrheitstabelle lösen. Hierbei ist zu bedenken, dass

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

gilt. Damit lässt sich aus der Wahrheitstabelle der letzten Aufgabe die passende Wahrheitstabelle aufstellen.

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton und konvergent. Zudem gilt $a_n \neq 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n}$. Dann folgt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(d) Keine der obigen Eigenschaften folgt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde passende Gegenbeispiele.

1. Finde passende Gegenbeispiele

Für die Beschränktheit und Konvergenz finden wir mit $a_n = \frac{1}{n}$ ein Gegenbeispiel. Dies erkannt man an:

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n.$$

Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und somit auch divergent. Also sind die Antworten (a) und (c) falsch.
Ein Gegenbeispiel für die Monotonie ist schwieriger zu finden. Sollte sich das Vorzeichen der a_n nicht ändern bleibt die Monotonie für $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ erhalten. Wir benötigen also eine monotone, konvergente Folge $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$, welche das das Vorzeichen ändert. Hierfür setzen wir

$$a_n = \frac{1}{n} - 0.9.$$

Wichtig ist hier, dass $a_n \neq 0$ eingehalten wird. Dann gilt $a_1 > 0$ und $a_n < 0$ für alle $n \geq 2$. Die Monotonie liefert

$$a_n \geq a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_n} \;\Leftrightarrow\; b_{n+1} \geq b_n \;\Leftrightarrow\; b_n \leq b_{n+1}$$

für $n \geq 2$. Hierbei ist wichtig, das die Multiplikation mit einer negativen Zahl die Richtung der Ungleichung verändert. Mit

$$a_1 \geq a_2 \;\Leftrightarrow\; 1 \geq \frac{a_2}{a_1} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1} \;\Leftrightarrow\; b_2 \leq b_1 \;\Leftrightarrow\; b_1 \geq b_2$$

erhalten wir das Argument für das Gegenbeispiel. Da

$$b_n \leq b_{n+1}$$

nicht für alle $n \geq 1$ erfüllt (für $n = 1$), ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton.

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in (0,1)$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere geometrische Folge mit $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q}{2}$.
Zudem gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Dann folgt

(a) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{1}{3}$.

(b) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{1}{2}$.

(c) $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{2}{3}$.

(d) Die Bedingung $b_1 = 2a_1$ ist nie erfüllt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Reihen über die geometrischen Folgen an.
2. Verwende die Voraussetzung aus der Aufgabe um die korrekte Antwort zu finden.

1. Gebe die Reihen über die geometrischen Folgen an
Wir betrachten die geometrische Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in (0,1)$. Wegen

$$a_{n+1} = a_n q$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Mit der geometrischen Reihe erhalten wir wegen $q \in (0,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{a_1}{1-q}.$$

Mit $q \in (0,1)$ folgt auch $\frac{q}{2} \in (0,1)$. Damit gilt durch analoge Argumentation:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = ... = \frac{b_1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{2b_1}{2-q}.$$

2. Verwende die Voraussetzung aus der Aufgabe um die korrekte Antwort zu finden
Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ muss

$$\text{(I)} \frac{a_1}{1-q} = \frac{2b_1}{2-q}$$

erfüllt sein. Nach den Regeln der Bruchrechnung gilt dies, falls $a_1 = 2b_1$ und $1-q = 2-q$ erfüllt ist. Wir setzen die geforderte Bedingung $b_1 = 2a_1$ in (I) ein und erhalten

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{4a_1}{2-q}.$$

Diese Gleichung ist sicher für $a_1 = 0$ und alle $q \in (0,1)$ erfüllt. Nun betrachten wir noch was für $a_1 \neq 0$ geschieht. Dann gilt

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{4a_1}{2-q} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1-q} = \frac{4}{2-q} \;\Leftrightarrow\; 2-q = 4(1-q) \;\Leftrightarrow\; 2-q = 4-4q) \;\Leftrightarrow\; q = \frac{2}{3}.$$

Damit ist $b_1 = 2a_1$, falls $q = \frac{2}{3}$ gilt.

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Am Tag, an dem Mark einen Kredit über $P_1 = 1'000'000$ CHF mit Zinssatz $i_1 = 1\%$ aufnimmt, nimmt Lucie einen Kredit über $P_2 = 800'000$ CHF mit Zinssatz $i_2 = 1.2\%$ auf. Mark zahlt den Kredit in konstanten Raten von $10'500$ CHF jeweils am Ende des Jahres zurück, während Lucie $9'500$ CHF auch jeweils am Ende des Jahres zurückbezahlt.
Welche der folgenden Antworten ist richtig?

(a) Mark bezahlt den Kredit vor Lucie zurück.

(b) Lucie bezahlt den Kredit vor Mark zurück.

(c) Lucie und Mark bezahlen den Kredit zum gleichen Zeitpunkt zurück.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig..

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die jährlichen Zinszahlungen von Mark und Lucie.

1. Vergleiche die jährlichen Zinszahlungen von Mark und Lucie

Wir stellen uns die Frage ob Mark und Lucie ihre Zinsen überhaupt zurückzahlen können. Für Mark erhalten wir mit

$$1'000'000 \cdot 1\% = 10'000,$$

die Zinsen des ersten Jahres. Damit kann Mark seine Schulden mit der Rate $10'500$ in endlicher Zeit zurückzahlen. Für Lucie erhalten wir

$$800'000 \cdot 1.2\% = 9'600$$

für die Zinszahlung des ersten Jahres. Die Zinszahlung übersteigt die Rate von Lucie. Also kann Lucie ihre Schulden mit dieser Rate nie zurückzahlen.

Damit ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Seien f und g Funktionen einer reellen Variable mit Definitionsbereich D_f beziehungsweise D_g. Sei $h = f \circ g$. Welche der folgenden Aussagen über den Definitionsbereich D_h ist richtig?

(a) $D_h = D_f \cup D_g$.

(b) $D_h \subseteq D_g$.

(c) $D_h \subseteq D_f$.

(d) $D_h = D_f \cap D_g$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde die korrekte Antwort mit Hilfe der Definition.

1. Finde die korrekte Antwort mit Hilfe der Definition

Gegeben seien die Funktionen f und g einer reellen Variable mit den Definitionsbereichen D_f und D_g. Dann ist die Verknüpfung definiert durch

$$h(x) = (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

für $x \in D_h$. Da zuerst $g(x)$ ausgewertet wird, muss zwingend $x \in D_g$ folgen. Wir haben also $x \in D_h \Rightarrow x \in D_g$ gezeigt. Wegen

$$D_h \subseteq D_g \;:\Leftrightarrow\; x \in D_h \Rightarrow x \in D_g$$

ist die Antwort (b) korrekt.

Für die anderen Antwortmöglichkeiten lassen sich Gegenbeispiele konstruieren.
Sei $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$. Dann gilt $D_f = \mathbb{R}$ und $D_g = (0, \infty)$. Dies ist ein Gegenbeispiel für Antwort (a).
Sei $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = e^x$. Dann gilt $D_f = (0, \infty)$ und $D_g = \mathbb{R}$. Dies ist ein Gegenbeispiel für die Antworten (c) und (d).

Frage 7 (3 Punkte)

Eine Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$ habe eine Elastizität ε_f, die konstant gleich 2 ist.

Welche der folgenden Aussagen über die die Wachstumsrate ρ_f von f ist richtig?

(a) ρ_f ist streng monoton fallend.

(b) ρ_f ist streng monoton wachsend.

(c) ρ_f ist konstant.

(d) ρ_f ist nicht monoton.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite mit der Definition der Elastizität die korrekte Antwort her.

1. Leite mit der Definition der Elastizität die korrekte Antwort her

Die Wachstumsrate $\rho_f(x)$ von f ist gegeben durch $\rho_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ Die Elastizität von f ist definiert durch

$$\varepsilon_f(x) := x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\rho_f(x).$$

Da ε_f konstant ist, erhalten wir

$$2 = x\rho_f(x) \;\Leftrightarrow\; \rho_f(x) = \frac{2}{x}$$

für $x \in D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$. Also ist ρ_f streng monoton fallend.

Damit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Eine differenzierbare Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}$ ist streng konkav und erfüllt $f(x) > 0$ für alle $x \in D_f$. Zudem gibt es ein $x_0 \in D_f, x_0 \neq 0$, so dass für die Elastizität von f an der Stelle $\varepsilon_f(x_0) = 0$ gilt. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Bei x_0 ist f elastisch.

(b) Bei x_0 besitzt f ein lokales Minimum.

(c) Bei x_0 besitzt f ein lokales Maximum.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Leite mit der Definition der Elastizität die korrekte Antwort her.

1. Leite mit der Definition der Elastizität die korrekte Antwort her

Wir machen uns auch in dieser Aufgabe die Definition der Elastizität ε_f zunutze. Es gilt

$$\varepsilon_f(x) := x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

für $x \in D_f$. Sei x_0 die in der Aufgabe beschriebene Stelle. Wegen $x_0 \neq 0$ und $f(x_0) > 0$ gilt

$$0 = \varepsilon_f(x_0) = x_0\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \underbrace{\frac{x_0}{f(x_0)}}_{\neq 0} f'(x_0) \;\Leftrightarrow\; f'(x_0) = 0$$

wegen des Satzes des Nullprodukts. Da f auf D_f konkav ist, liegt ein globales Maximum vor. Außerdem sind globale Maxima stets lokal.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 9 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion einer reellen Variable, die mindestens n-mal differenzierbar ist. Sei P_k das Taylor-Polynom k-ter Ordnung von f an der Stelle x_0, für $k = 1, ..., n-1$, und R_k das zugehörige Restglied k-ter Ordnung.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) < R_{k-1}(x)$.

(b) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) > R_{k-1}(x)$.

(c) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, ..., n-1$ gilt, dass $R_k(x) = R_{k-1}(x)$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende das Restglied nach Lagrange.

1. Verwende das Restglied nach Lagrange
Das Restglied nach Lagrange ist gegeben durch

$$R_k(x) = \frac{f^{k+1}(\xi)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

für $\xi \in (0, x)$ oder $\xi \in (x, 0)$ (abhängig vom Vorzeichen von x). Wir werden nun ein Gegenbeispiel für die Antworten (a)–(c) angeben. Wir setzen $f(x) = \sin(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
R_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{f^{(2)}(\xi_1)}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{-\sin(\xi_1)}{(2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0 \\
R_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{-\cos(\xi_2)}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 < 0 \\
R_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{f^{(4)}(\xi_3)}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = \frac{\sin(\xi_3)}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 > 0 \\
R_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{f^{(5)}(\xi_4)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = \frac{\cos(\xi_4)}{5!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 > 0 \\
R_5\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{f^{(6)}(\xi_5)}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 = \frac{-\sin(\xi_5)}{6!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6 < 0
\end{aligned}$$

für $\xi_1, .., \xi_5 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Damit haben wir einen Widerspruch zur strengen Monotonie und Gleichheit bezüglich der Ordnung des Restglieds.

Also ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 10 (2 Punkte)

Eine Funktion zweier reellen Variablen f sei homogen von Grad 2 und ihre partielle Elastizität erfülle

$$\varepsilon_{f,y}(x,y) = e^{x+y} + 1.$$

Dann folgt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = 1 + e^{x+y}$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = 1 - e^{x+y}$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = e^{x+y}$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x,y) = -e^{x+y}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die eulersche Relation.

1. Verwende die eulersche Relation

Da f homogen vom Grad 2 ist, liefert die eulersche Relation

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_{f,x}(x,y) = 2 - \varepsilon_{f,y}(x,y).$$

Mit der Tatsache $\varepsilon_{f,y}(x,y) = e^{x+y} + 1$ erhalten wir

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = 2 - \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2 - (e^{x+y} + 1) = 1 - e^{x+y}.$$

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

ist gleich:

(a) $-\frac{1}{2}$.

(b) 0.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) ∞.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende die Regel von l'Hôpital an.

1. Wende die Regel von l'Hôpital an

Wegen

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)\ln(x)}$$

erhalten wir den l'Hôpital-Fall „$\frac{0}{0}$“. Mit zweifacher Anwendung der Regel von l'Hôpital gilt somit (Der Fall „$\frac{0}{0}$“ tritt ein weiteres Mal auf):

$$\lim_{x \to 1+} \frac{\ln(x) - (x-1)}{(x-1)\ln(x)} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{(x-1)\frac{1}{x} + \ln(x)} = \lim_{x \to 1+} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

Frage 2 (4 Punkte)

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0+} x^x$$

ist gleich:

(a) 0.

(b) 1.

(c) e.

(d) e^e.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Nutze die Stetigkeit der Exponentialfunktion aus.
2. Wende die Regel von l'Hôpital an.

1. Nutze die Stetigkeit der Exponentialfunktion aus

Zunächst formen wir um:

$$x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln(x)}.$$

Nun gilt wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion:

$$\lim_{x \to 0+} x^x = \lim_{x \to 0+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \to 0+} x \ln(x)}.$$

Damit genügt es $\lim_{x \to 0+} x \ln(x)$ zu bestimmen.

2. Wende die Regel von l'Hôpital an

Mit

$$x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

erhalten wir den l'Hôpital-Fall „$\frac{0}{0}$“. Durch die Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x \to 0+} x \ln(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} -x = 0.$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\lim_{x \to 0+} x^x = e^{\lim_{x \to 0+} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Ein Blatt Papier sei 0.5 Millimeter dick. Man faltet das Blatt nun in der Hälfte, so dass es eine neue Dicke von 1 Millimeter hat. Anschliessend faltet man es solange erneut, bis die Dicke des gefalteten Papiers $400'000$ Kilometer erreicht (ungefähr die Distanz zwischen Erde und Mond).
Wie oft muss das Blatt Papier gefaltet werden ?

(a) Ungefähr 20 Mal.

(b) Ungefähr 30 Mal.

(c) Ungefähr 40 Mal.

(d) Ungefähr 50 Mal.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Übersetze die Aufgabenstellung in eine geeignete geometrische Folge.
2. Bestimme die Anzahl der Faltungen.

1. Übersetze die Aufgabenstellung in eine geeignete geometrische Folge

Mit a_n bezeichnen wir die Dicke nach n Faltungen. Da die Dicke in jeder Faltung verdoppelt wird, erhalten wir die rekursive Darstellung

$$a_n = 2a_{n-1}$$

mit dem Anfangswert $a_0 = 0.5$ (mm) $= 0.5 \cdot 10^{-6}$ (km). Also liegt eine geometrische Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit expliziter Vorschrift

$$a_n = q^n a_0 = 2^n \cdot 0.5 \cdot 10^{-6}$$

mit $q = 2$ und $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-6}$ (km) vor.

2. Bestimme die Anzahl der Faltungen

Die Anzahl der Faltungen für $400'000$ Kilometer ergibt durch lösen der Ungleichung $a_n \geq 400'000$. Durch Umformungen erhalten wir:

$$a_n \geq 400'000 = 4 \cdot 10^5 \;\Leftrightarrow\; 2^n \cdot 0.5 \cdot 10^{-6} \geq 4 \cdot 10^5 \;\Leftrightarrow\; 2^n \cdot 0.5 \geq 4 \cdot 10^{11} \;\Leftrightarrow\; 2^n \geq 8 \cdot 10^{11}$$
$$\Leftrightarrow\; \ln(2^n) \geq \ln\left(8 \cdot 10^{11}\right) \;\Leftrightarrow\; n \geq \frac{\ln\left(8 \cdot 10^{11}\right)}{\ln(2)} \approx 39.54.$$

Also muss das Papier ungefähr 40 Mal gefaltet sein.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Ein Projekt benötigt eine Anfangsinvestition von 10′000 CHF. Nach einem Jahr generiert das Projekt eine Auszahlung in Höhe von 5′000 CHF und nach zwei Jahren eine Auszahlung in Höhe von 10′000 CHF.
Der interne Zinssatz des Projekts ist ungefähr

(a) 5%.

(b) 10%.

(c) 20%.

(d) 30%.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Zusammenhang von Nettobarwert und internem Zinssatz.

1. Verwende den Zusammenhang von Nettobarwert und internem Zinssatz

Der Nettobarwert des Projekts muss für den internen Zinssatz r gleich null sein. Es muss also

$$-10'000 + \frac{5'000}{1+r} + \frac{10'000}{(1+r)^2} = 0$$

gelten. Durch Umformen erhalten wir hieraus eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} -10'000 + \frac{5'000}{1+r} + \frac{10'000}{(1+r)^2} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \left(-10'000 + \frac{5'000}{1+r} + \frac{10'000}{(1+r)^2}\right) \cdot \frac{(1+r)^2}{5'000} = 0 \\ &\Leftrightarrow\; -2(1+r)^2 + (1+r) + 2 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen hiervon sind durch

$$1 + r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 16}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4}$$

gegeben. Für uns ist nur die positive Lösung relevant:

$$1 + r = \frac{-1 - \sqrt{17}}{-4} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \approx 1.3 \;\Rightarrow\; r \approx 30\%.$$

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

(a) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(b) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

(c) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2, ohne das Innere (mit Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(d) Der Definitionsbereich von f ist die leere Menge.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Definitionsbereiche der Logarithmus-und Wurzelfunktion.

1. Verwende die Definitionsbereiche der Logarithmus-und Wurzelfunktion

Der Definitionsbereich der Logarithmusfunktion liefert die Bedingung

$$x^2 + y^2 - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 > 1^2$$

und mit dem der Wurzelfunktion erhalten wir

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 < 4 = 2^2.$$

Zusammengefasst gilt:

$$(x, y) \in D_f \;\Leftrightarrow\; \underbrace{x^2 + y^2 > 1^2}_{\text{(i)}} \wedge \underbrace{x^2 + y^2 < 2^2}_{\text{(ii)}}.$$

Durch (i) schneiden wir die Kreisscheibe mit Radius 1 und Rand aus der durch (ii) gegebenen Kreisscheibe mit Radius 2 und ohne Rand heraus.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion zweier reellen Variablen gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 10x^{\alpha}y^{1-\alpha},$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$.
Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f am Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gleich -0.5.
Dann folgt:

(a) $\alpha = \frac{1}{6}$.

(b) $\alpha = \frac{1}{3}$.

(c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) $\alpha = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Satz über implizite Funktionen.

1. Verwende den Satz über implizite Funktionen
Mit dem Satz über implizite Funktionen können wir die Steigung der Tangente an der Niveaulinie von f bei $(x_0, y_0) = (1, 1)$ direkt berechnen. Zuerst benötigen wir die partiellen Ableitung:

$$f_x(x, y) = 10\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}$$
$$f_y(x, y) = 10(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}.$$

Mit diesen liefert der Satz über implizite Funktionen

$$-0.5 = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{10\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}}{10(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

mit $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Mit

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha} = -0.5 \Leftrightarrow \alpha = 0.5(1-\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

erhalten wir die passenden Antwort.

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) \quad \text{für } x > 0, y > 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist homogen von Grad 5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen von Grad 0.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rechne die Homogenitätsbedingung nach.

1. Rechne die Homogenitätsbedingung nach

Für $\lambda > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \ln\left((\lambda x)^3\sqrt[3]{(\lambda y)^4} + \sqrt[6]{(\lambda x)^{11}(\lambda y)^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda x) \\
&= \ln\left(\lambda^3 x^3\sqrt[3]{\lambda^4 y^4} + \sqrt[6]{\lambda^{11}x^{11}\lambda^{15}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \ln\left(\lambda^3 x^3 \lambda^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{\lambda^{26}x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{9}{3}+\frac{4}{3}} x^3\sqrt[3]{y^4} + \lambda^{\frac{13}{3}}\sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right)\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\right) + \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \frac{13}{3}\ln(\lambda) + \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \frac{13}{3}\ln(\lambda) + \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(\lambda) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) = \lambda^0 f(x,y).
\end{aligned}$$

Also ist f homogen von Grad 0.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 8 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion einer reellen Variablen, definiert als $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha > 0$, und sei g eine Funktion zweier reellen Variablen, die strikt positiv und homogen von Grad κ ist.
Wir definieren die Funktion h als $h(x, y) = f(g(x, y))$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) h ist homogen von Grad 1, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$.

(b) h ist homogen von Grad 2, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$.

(c) h ist homogen von Grad 3, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$.

(d) h ist homogen von Grad 5, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Definition einer homogenen Funktion.

1. Verwende die Definition einer homogenen Funktion

Sei $\lambda > 0$. Dann erhalten wir mit der Homogenität von g:

$$\begin{aligned} h(\lambda x, \lambda y) &= f(g(\lambda x, \lambda y)) = f(\lambda^\kappa g(x, y)) = (\lambda^\kappa g(x, y))^\alpha \\ &= \lambda^{\alpha\kappa}(g(x, y))^\alpha = \lambda^{\alpha\kappa} f((g(x, y)) \\ &= \lambda^{\alpha\kappa} h(x, y). \end{aligned}$$

Also ist h homogen vom Grad $\alpha\kappa$. Wir müssen noch überprüfen, welche Antwort passt.
Die Multiplikation von α und κ ergibt in (a), (c) und (d) keine ganze Zahl. Damit können wir diese Möglichkeiten ausschließen. Für $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$ ergibt sich $\alpha \cdot \kappa = 2$.

Damit ist Antwort (b) korrekt.