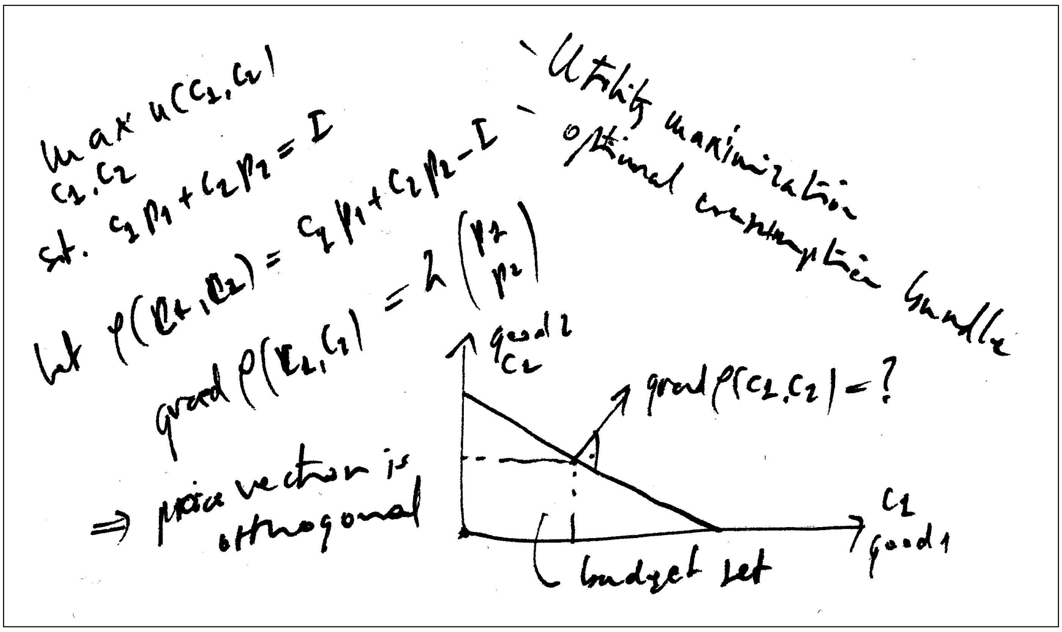
Enrico G. De Giorgi

Mathematatik B

Alte Musterlösungen 2010-2020

Frühjahrssemester 2021



Lehrstuhl für Mathematik
Universität St.Gallen

Diese Version: 3. Dezember 2020.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses PDF beinhaltet eine Sammlung von Musterlösungen zu alten Prüfungsaufgaben aus dem Zeitraum vom Frühjahrssemester 2010 bis zum Frühjahrssemester 2019. Im begleitenden PDF "Alte Prüfungen 2010-2020" sind die zugehörigen Prüfungen zu finden. Beginnend mit dem Frühjahrssemester 2010 werden zudem auch die Nachholprüfungen veröffentlicht. Des Weiteren stehen seit dem Frühjahrssemester 2010 vollständige und ausführliche Lösungen für alle Prüfungen zur Verfügung. Diese neueren Lösungen zeigen beispielhaft auf, wie Prüfungsaufgaben generell beantwortet und Argumentationsketten präsentiert werden sollten. Dazu gehört insbesondere die korrekte Verwendung mathematischer Notation. Es wird erwartet, dass die Studenten ihre Lösungen unter Verwendung der mathematischen Notation logisch strukturiert präsentieren. Diese Aspekte der Bearbeitung gehen in die Bewertung der Prüfungsleistung mit ein. Seit dem Frühjahrssemester 2013 beinhalten die Prüfungen auch Multiple-Choice Fragen.

Frühling 2010

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

28. Juni 2010

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen für Maxima, Minima und Sattelpunkte. Dazu berechnen wir die partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x\,y + \frac{3}{2\,x} + \frac{1}{2}\,y^2 \\ f_y(x,y) &= x^2 + x\,y \\ f_{xx}(x,y) &= 2\,y - \frac{3}{2\,x^2} \\ f_{xy} &= 2\,x + y \\ f_{yy} &= x \end{aligned}$$

<u>Notwendige Bedingungen:</u>

$$f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x\,y + \frac{3}{2\,x} + \frac{1}{2}\,y^2 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + x\,y = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \;&\Rightarrow\; x\,(x+y) = 0 \\ &\Rightarrow\; x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -y. \end{aligned}$$

Die Lösung $x = 0$ ist ausgeschlossen wegen $x > 0$. Somit folgt

$$x = -y \qquad \text{(III)}$$

und

$$\begin{aligned} \text{(III) in (I)} \quad &\Rightarrow\; -2y^2 - \frac{3}{2y} + \frac{1}{2}y^2 = 0 \\ &\Rightarrow\; y^3 = -1 \\ &\Rightarrow\; y = -1 \\ &\overset{\text{(III)}}{\Rightarrow}\; x = 1 \end{aligned}$$

<u>Hinreichende Bedingungen:</u>

$$\begin{aligned} f_{xx}(1,-1) &= 2\,(-1) - \frac{3}{2\cdot 1^2} = -2 - \frac{3}{2} < 0, \quad \text{und} \\ f_{yy}(1,-1) &= 1 > 0 \end{aligned}$$

und somit ist $(1,-1)$ ein Sattelpunkt.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Langrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$F(x,y,\lambda) \;=\; f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y)=2\,e^{x}+4\,e^{y}+\lambda\,(4x+8y-12).$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen

$$\begin{aligned}
F_x(x,y,\lambda)=0 \;&\Rightarrow\; 2\,e^{x}+4\,\lambda=0 && \text{(I)}\\
F_y(x,y,\lambda)=0 \;&\Rightarrow\; 4\,e^{y}+8\,\lambda=0 && \text{(II)}\\
F_\lambda(x,y,\lambda)=0 \;&\Rightarrow\; 4x+8y-12=0 && \text{(III)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\,(\mathrm{I})\;-\;(\mathrm{II}) \;&\Rightarrow\; 2\,(2e^{x}+4\,\lambda)-(4e^{y}+8\,\lambda)=0\\
&\Rightarrow\; 4\,(e^{x}-e^{y})=0\\
&\Rightarrow\; e^{x}=e^{y}\\
&\Rightarrow\; x=y. && \text{(IV)}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{IV})\text{ in }(\mathrm{III}) \;&\Rightarrow\; 4\,x+8\,x-12=0\\
&\Rightarrow\; 12\,x-12=0\\
&\Rightarrow\; x=1\\
&\overset{(\mathrm{IV})}{\Rightarrow}\; (x,y)=(1,1)
\end{aligned}$$

Variante Substitutionsmethode

Man löst die Nebenbedingung nach x auf:

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y)=0 \;&\Rightarrow\; 4\,x+8\,y-12=0\\
&\Rightarrow\; x=-2\,y+3. && \text{(V)}
\end{aligned}$$

Man substituiert x mit $-2\,y+3$ in der Zielfunktion f. Es folgt:

$$f(x,y) \;=\; f(-2\,y+3,y)=2\,e^{-2\,y+3}+4\,e^{y}=g(y).$$

Die erste Ableitung von g ist:

$$g'(y) = -4\,e^{-2\,y+3} + 4\,e^{y} = 4\,e^{y}\,(1 - e^{-3\,y+3}).$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned}
g'(y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4\,e^{y}\,(1 - e^{-3\,y+3}) = 0\\
&\overset{4\,e^{y}>0}{\Rightarrow} \quad 1 - e^{-3\,y+3} = 0\\
&\Rightarrow \quad e^{0} = 1 = e^{-3\,y+3}\\
&\Rightarrow \quad 0 = -3\,y + 3\\
&\Rightarrow \quad y = 1\\
&\overset{\text{(V)}}{\Rightarrow} \quad x = -2 \cdot 1 + 3 = 1.
\end{aligned}$$

(c) Partielle Integration:

$$\int_1^2 \underbrace{x^3}_{u'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx$$

$$\begin{aligned}
u'(x) = x^3 \quad &\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{4}x^4\\
v(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int x^3 \ln(x)\,dx \quad &= \quad \underbrace{\frac{1}{4}\,x^4}_{u(x)}\,\underbrace{\ln x}_{v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{4}\,x^4}_{u(x)}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)}\,dx\\
&= \quad \frac{1}{4}\,x^4\,\ln(x) - \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}\,x^4 + c\\
&= \quad \frac{1}{4}\,x^4\,\left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + c.
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3 \ln(x)\,dx &= \frac{1}{4}\,x^4 \left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right)\Big|_1^2 \\
&= 4\left(\ln(2) - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{4}\right) \\
&= 4\ln(2) - \frac{15}{16}.
\end{aligned}$$

(d) Substitutionsmethode:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_e^N \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\,dx.$$

Man setzt

$$y = \ln x.$$

Es folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_e^N \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\,dx &= \int_1^{\ln(N)} \frac{1}{y^n}\,dy \\
&= \frac{1}{(1-n)\,y^{n-1}}\Big|_1^{\ln(N)} \\
&= \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(\ln(N))^{n-1}} - \frac{1}{1-n}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x\,(\ln(x))^n}\,dx &= \lim_{N\to\infty}\left(\underbrace{\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(\ln(N))^{n-1}}}_{\to 0 \text{ wenn } N\to\infty} - \frac{1}{1-n}\right) \\
&= -\frac{1}{1-n} \\
&= \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$A^T\,B \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 4 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & -1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & -1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 4a & -4+4a & a\end{pmatrix}.$$

(a2)

$$A\,B^T \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ -1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 4\\ -1 & 4+a\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} AB^T \text{ regulär} &\iff \det(AB^T) \neq 0\\ &\iff a\,(4+a) - 4\,(-1) \neq 0\\ &\iff a^2 + 4\,a + 4 \neq 0\\ &\iff (a+2)^2 \neq 0\\ &\iff a \neq -2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B^{-1}\,(A^T\,B)^T\,(B\,A)^T\,B^{-1} &= B^{-1}\,B^T\,(A^T)^T\,A^T\,B^T\,B^{-1}\\ &\overset{B=B^T}{=} \underbrace{B^{-1}\,B}_{I}\,A\,A^T\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{I}\\ &= A\,A^T \end{aligned}$$

(c1)

$$\textbf{grad}\,f(x_1,x_2) \;=\; \begin{pmatrix}f_{x_1}(x_1,x_2)\\ f_{x_2}(x_1,x_2)\end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1,x_2) &= 6\,x_1 + \ln(x_2) + a\,e^{a\,x_1}\\ f_{x_2}(x_1,x_2) &= \frac{x_1}{x_2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) \quad = \quad \begin{pmatrix} 6\, x_1 + \ln(x_2) + a\, e^{a\, x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}.$$

(c2) <u>Vektor $\mathbf{n}$ ist orthogonal zur Tangente an eine Niveaulinie in $\hat{\mathbf{x}}$:</u>

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \lambda\, \mathbf{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow\ &\begin{pmatrix} 6\, \hat{x}_1 + \ln(\hat{x}_2) + a\, e^{a\, \hat{x}_1} \\ \frac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow\ &\hat{x}_1 = 0 \quad \text{and} \quad \hat{x}_2 > 0 \quad \text{beliebig.} \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

<u>$\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ auf der Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$:</u>

$$f(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \quad = \quad 3\, \hat{x}_1^2 + \hat{x}_1\, \ln(\hat{x}_2) + e^{a\, \hat{x}_1} = 1 \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned} \text{(I) in (II)} \quad \Rightarrow \quad & 3 \cdot 0^2 + 0 \cdot \ln(\hat{x}_2) + e^{a \cdot 0} = 1 \\ \Rightarrow \quad & 1 = 1 \quad \text{immer erfüllt für } \hat{x}_2 > 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass für alle Punkte $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ mit $\hat{x}_1 = 0$ and $\hat{x}_2 > 0$ ist der Vektor $\mathbf{n}$ orthogonal zur Tangente and die Niveaulinie $f(x_1, x_2) = 1$ in $\hat{\mathbf{x}}$ ist.

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$$

$$\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 0 & t & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 2\,t - 5\,t^2 = t\,(2-5\,t).$$

Es folgt, dass $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist, falls $t \neq 0$ und $t \neq \frac{2}{5} = 0.4$, d.h. $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 0.4\}$.

(a2)

$\{\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal genau dann wenn diese drei Bedingungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} c^T\,d = 0 &\iff s + t = 0 && \text{(I)} \\ c^T\,e = 0 &\iff s + t = 0 && \text{(II)} \\ d^T\,e = 0 &\iff 2\,t + s^2 + 1 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\text{(I)}\ ,\ \text{(II)} \implies t = -s \qquad \text{(IV)}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (III)} &\implies s^2 - 2\,s + 1 = 0 \\ &\iff (s-1)^2 = 0 \\ &\iff s = 1 \ (\text{und } t = -1) \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\{\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal sind genau dann wenn $s = 1$ und $t = -1$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_4 &= 0 && \text{(I)} \\ 3\,x_1 + x_2 &= 0, && \text{(II)} \end{aligned}$$

wobei x_1 und x_3 freie Variablen sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= s \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} &\implies x_4 = -\frac{s}{2} \\ \text{(II)} &\implies x_2 = -3\,s \end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} \in W$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -3\,s \\ 0 \\ \frac{-s}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis für W ist.

(c) Gauss-Algorithmus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ m & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -m \cdot (I) \end{array} \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 2-2m & 1-m & 1-m^2 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot (II) \\ \\ +(2\,m-2) \cdot (II) \end{array} \\ &\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-2m & m-2 \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & \underbrace{2m^2-2m+1-m}_{2m^2-3m+1=(2m-1)(m-1)} & \underbrace{2m-2+1-m^2}_{-(m^2-2m+1)=-(m-1)^2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

(i) Genau eine Lösung: $\mathrm{rg}(A) = 3 \iff m \neq 1, m \neq \frac{1}{2}$,

(ii) Unendlich viele Lösungen: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b) = 2 \iff m = 1$,

(iii) Keine Lösung: $\mathrm{rg}(A) = 2$ und $\mathrm{rg}(A, b) = 3 \iff m = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4

(a1)

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } A \text{ genau dann wenn } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 8 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (2-\lambda)^3 - (2-\lambda) - 8\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^3 - 9\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\,[(2-\lambda)^2 - 9] \\
&= (2-\lambda)\,(5-\lambda)\,(-1-\lambda).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (2-\lambda)(5-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -1.
\end{aligned}$$

(a2)

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erfüllt

$$A\,\hat{x} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\,\hat{x}.$$

Somit ist $\hat{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 2$. Es folgt für $n \geq 1$

$$A^n\,\hat{x} = A^{n-1}\,A\,\hat{x} = A^{n-1}\,2\,\hat{x} = 2\,A^{n-1}\,\hat{x} = \cdots = 2^n\,\hat{x}.$$

Insbesondere gilt

$$A^{100}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2^{100}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

(b1)

$$a^2 y_{k+1} - (a+2)y_k = a+1$$

Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+2}{a^2}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{a+1}{a^2}}_{B} \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots$$

Man berechnet zuerst

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a+1}{a^2}}{1-\frac{a+2}{a^2}} \\ &= \frac{a+1}{a^2-a-2} = \frac{a+1}{(a-2)(a+1)} \\ &= \frac{1}{a-2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+2}{a^2}\right)^k \left(y_0 - \frac{1}{a-2}\right) + \frac{1}{a-2}. \end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$\begin{aligned} A > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{a+2}{a^2} > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a+2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a > -2. \end{aligned}$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$|A| < 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{a+2}{a^2}\right| < 1$$

Zwei Fälle:

(i) $a \geq -2$: $\left|\frac{a+2}{a^2}\right| = \frac{a+2}{a^2}$

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Longleftrightarrow \frac{a+2}{a^2} < 1 \\ &\Longleftrightarrow a^2 - a - 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow (a-2)(a+1) > 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in [-2, -1) \cup (2, \infty). \end{aligned}$$

(ii) $a < -2$: $\left|\frac{a+2}{a^2}\right| = -\frac{a+2}{a^2}$

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Longleftrightarrow -\frac{a+2}{a^2} < 1 \\ &\Longleftrightarrow -a - 2 < a^2 \\ &\Longleftrightarrow a^2 + a + 2 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \\ &\Longleftrightarrow a \in (-\infty, -2). \end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls $a \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

(b4) <u>Notwendige Bedingung für die Konvergenz:</u>

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star$$

Es folgt

$$y^\star = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a-2} = 1 \Leftrightarrow a = 3.$$

<u>Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:</u>

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a+2}{a^2}\right| < 1.$$

Für $a = 3$

$$\left|\frac{3+2}{3^2}\right| = \frac{5}{9} < 1$$

ist diese Bedingung erfüllt. Somit ist $a = 3$ die gesuchte Lösung.

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

9. Februar 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,y \\
f_y(x,y) &= 2\,y - 2\,x \\
f_{xx}(x,y) &= 4\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} \\
f_{xy}(x,y) &= -2 \\
f_{yy}(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,y = 0 \tag{I}$$

$$f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,y - 2\,x = 0 \tag{II}$$

$$\text{(II)} \;\Rightarrow\; x = y \tag{III}$$

$$\begin{aligned}
\text{(III) in (I)} \quad &\Rightarrow\; 2\,e^{x-1} + 2\,(x-1)\,e^{x-1} - 2\,x = 0 \\
&\Rightarrow\; e^{x-1}\,(2 + 2x - 2) - 2x = 0 \\
&\Rightarrow\; 2x\,(e^{x-1} - 1) = 0 \\
&\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_2 & = & 1 \\ y_2 & = & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(0,0) &= 4\,e^{-1} - 2\,e^{-1} = 2\,e^{-1} > 0, \\
f_{yy}(0,0) &= 2 > 0, \\
f_{xx}(0,0)\,f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 &= 4\,e^{-1} - 4 < 0,
\end{aligned}$$

und somit ist $(0,0)$ ein **Sattelpunkt**.

$$\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= 4 > 0, \\
f_{yy}(1,1) &= 2 > 0, \\
f_{xx}(1,1)\,f_{yy}(1,1) - f_{xy}(1,1)^2 &= 4\,.\,2 - (-2)^2 = 4 > 0,
\end{aligned}$$

und somit ist $(1,1)$ ein **Minimum**.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Langrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2\,y^3 + \lambda\,(2x^2 + 2y^2 - 8) \end{aligned}$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x\,y^3 + \lambda\,(4\,x) = 0 \tag{I}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 3\,x^2\,y^2 + \lambda\,(4\,y) = 0 \tag{II}$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x^2 + 2\,y^2 - 8 = 0 \tag{III}$$

$$\text{(I)} \overset{x\,,y\neq 0}{\Rightarrow} \lambda = -\frac{2\,x\,y^3}{4\,x} = -\frac{1}{2}\,y^3 \tag{IV}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (II)} &\Rightarrow 3\,x^2\,y^2 - (\frac{1}{2}\,y^3)(4\,y) = 0 \\ &\Rightarrow 3\,x^2 - 2\,y^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}\,y^2 \qquad \text{(V)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(V) in (III)} &\Rightarrow 2\,(\frac{2}{3}\,y^2) + 2\,y^2 = 8 \\ &\Rightarrow \frac{4}{3}\,y^2 + 2\,y^2 = 8 \\ &\Rightarrow \frac{10}{3}\,y^2 = 8 \\ &\overset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{\frac{12}{5}} \\ &\overset{\text{(V)}}{\Rightarrow} x = \sqrt{\frac{8}{5}}. \qquad \text{(VI)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)=0 \quad &\Rightarrow \quad 2\,x^2+2\,y^2-8=0 \\ &\Rightarrow \quad x^2=4-y^2. \end{aligned} \tag{VII}$$

Man substituiert x^2 mit $4-y^2$ in der Zielfunktion f. Es folgt:

$$f(x,y) \quad = \quad 2\,(4-y^2)\,y^3 = 8\,y^3 - 2\,y^5 = g(y).$$

Die erste Ableitung von g ist:

$$g'(y) = 24\,y^2 - 10\,y^4.$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} g'(y)=0 \quad &\Rightarrow \quad 24\,y^2-10\,y^4=0 \\ &\overset{(y>0)}{\Rightarrow} \quad 24-10\,y^2=0 \\ &\Rightarrow \quad y^2=\frac{12}{5} \\ &\overset{(y>0)}{\Rightarrow} \quad y=\sqrt{\frac{12}{5}} \\ &\overset{\text{(VII)}}{\Rightarrow} \quad x=\sqrt{\frac{8}{5}}. \end{aligned}$$

(c) <u>Partielle Integration:</u>

$$\int_1^{\sqrt{e}} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{u'(x)} \underbrace{\ln(x^2)}_{v(x)}\,dx$$

$$\begin{aligned} u'(x)=\frac{1}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad u(x)=-\frac{1}{x} \\ v(x)=\ln(x^2) \quad &\Rightarrow \quad v'(x)=\frac{1}{x^2}\,2\,x=\frac{2}{x} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2}\ln(x^2)\,dx &= \underbrace{-\frac{1}{x}}_{u(x)}\,\underbrace{\ln(x^2)}_{v(x)} - \int \underbrace{(-\frac{1}{x})}_{u(x)}\,\underbrace{\frac{2}{x}}_{v'(x)}\,dx \\
&= -\frac{1}{x}\,\ln(x^2) + \int \frac{2}{x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{x}\,\ln(x^2) - \frac{2}{x} + c \\
&= -\frac{1}{x}\Big(\ln(x^2) + 2\Big) + c.
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2}\ln(x^2)\,dx &= -\frac{1}{x}\Big(\ln(x^2) + 2\Big)\Big|_1^{\sqrt{e}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e}}\Big(\ln(e) + 2\Big) - (-1)\Big(\ln(1) + 2\Big) \\
&= 2 - \frac{3}{\sqrt{e}}.
\end{aligned}$$

(d) <u>Substitutionsmethode:</u>

$$\int \Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)\,dx$$

Man setzt:

$$y = \ln(x+\sqrt{x})$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x}}\Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \Big(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)\,dx &= \int y\,dy \\
&= \frac{1}{2}\,y^2 + c \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln(x+\sqrt{x})\Big)^2 + c.
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \Big(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big(\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\Big)dx &= \frac{1}{2}\Big(\ln(4+\sqrt{4})\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\ln(1+\sqrt{1})\Big)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Big((\ln 6)^2 - (\ln 2)^2\Big).
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\ A^T\,B &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a & -2a \\ 4a & 7 & -26 \\ a & 2 & -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a2)

$$\begin{aligned} A\,B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ a^2-2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(AB^T)^{-1} = \frac{1}{-1-2\,(a^2-2)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -(a^2-2) & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad (AB^T)^{-1} = AB^T \\ &\Longleftrightarrow \quad -1-2\,(a^2-2) = -1 \\ &\Longleftrightarrow \quad a^2 = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Gauss Verfahren:

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \\ \text{(IV)} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2\,\text{(I)} \\ \\ -4\,\text{(I)} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2\,(\mathrm{III}) \\ +5\,(\mathrm{III}) \\ \\ +4\,(\mathrm{III}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{rr} & -3\,(\mathrm{II}) \\ :(-6) & \\ & +(\mathrm{II}) \\ & +6\,(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \ \mathrm{Rg}\ (\mathrm{A}) = 3.$$

(c1)

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, x_2) \\ f_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x_1, x_2) &= 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} + a \\ f_{x_2}(x_1, x_2) &= 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} + a \\ 3\, e^{x_1 + x_2 - 6} \end{pmatrix}.$$

(c2) Der stärksten Funktionionszunahme im Punkt $(x_1, x_2)^T = (4, 2)^T$ durch den Vektor $\mathbf{n} = \binom{6}{1}$

$$\mathbf{grad}\, f(4,2) = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3\, e^{4+2-6} + a \\ 3\, e^{4+2-6} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(I)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 + a \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(II)}$$

$$\overset{\text{(II)}}{\Rightarrow} \lambda = 3. \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(III) in (II)} \Rightarrow 3 + a = 3 \cdot 6$$

$$\Rightarrow a = 15.$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= \begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\t\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5+t\\2\end{pmatrix}\\
\mathbf{d}+\mathbf{e} &= \begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t+1\\t+1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{e}) &= 1\cdot(t+1)+(5+t)(t+1)+2\cdot 2\\
&= t+1+5t+5+t^2+t+4\\
&= t^2+7t+10\\
&= (t+5)(t+2).
\end{aligned}$$

$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ and $\mathbf{d}+\mathbf{e}$ orthogonal genau dann wenn:

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{d}+\mathbf{e}) = 0\\
\Leftrightarrow\ & (t+5)(t+2) = 0\\
\Leftrightarrow\ & t \in \{-5,-2\}.
\end{aligned}$$

(a2)

$$\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \text{ ist eine Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) &= \begin{vmatrix}0 & r & 1\\ t & 3 & t\\ 1 & t & 1\end{vmatrix}\\
&= 0+r\cdot t+t^2-3-0-r\cdot t\\
&= t^2-3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) \neq \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad t^2 - 3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 &= 0 && \text{(I)} \\ 3\,x_2 + 4\,x_5 &= 0 && \text{(II)} \\ 3\,x_3 + 2\,x_5 &= 0 && \text{(III)} \\ x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_5 &= 0 && \text{(IV)} \end{aligned}$$

wobei x_4 und x_5 freie Variablen sind:

$$\begin{aligned} x_4 &= s \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = -\frac{4}{3}\,t \\ \text{(III)} \quad &\Longrightarrow \quad x_3 = -\frac{2}{3}\,t \\ \text{(I)} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -2\,x_2 \overset{\text{(II)}}{=} -2\left(-\frac{4}{3}\,t\right) = \frac{8}{3}\,t. \end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} \in W$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \\ &= t \begin{pmatrix} 8/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^5 \;:\; \underline{\mathbf{x}} = t \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t\,,\, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) <u>Gauss-Algorithmus:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & m^2 - 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) \quad &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m^2-12 & m-2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3\,(\mathrm{I}) \\ -2\,(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -11 & -1 \\ 0 & -1 & m^2-12-8 & m-2-2 \end{array}\right) \;:\; (-1) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & -1 & m^2-20 & m-4 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\,(\mathrm{II}) \\ \\ +\,(\mathrm{II}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & m^2-9 & m-3 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

(i) Genau eine Lösung: $m^2 - 9 \neq 0 \Longleftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

(ii) Unendlich viele Lösungen: $m^2 - 9 = 0$ und $m - 3 = 0 \Longleftrightarrow m = 3$.

(iii) Keine Lösung: $m^2 - 9 = 0$ und $m - 3 \neq 0 \Longleftrightarrow m = -3$.

Aufgabe 4

(a1) <u>Gleichungssystem:</u>

$$(A - 6\,I_d)\ \underline{\mathbf{x}} = 0 \quad (*)$$

besitzt eine nicht-triviale Lösung $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^T$:

$$\begin{aligned} (3-6)\,x_1 + 5\,x_3 &= 0 && \text{(I)} \\ (2-6)\,x_2 &= 0 && \text{(II)} \\ 3\,x_1 + (1-6)\,x_3 &= 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(II)} &\Rightarrow x_2 = 0 && \text{(IV)} \\ \text{(I) oder (III)} &\Rightarrow x_3 = \frac{3}{5}\,x_1 && \text{(V)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \text{ sind nicht-triviale Losungen von (*)}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 6 \text{ ist Eigenwert mit Eigenvektoren } c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix},\ c \in \mathbb{R}.$$

(a2) $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 15\,(2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)\Big((3-\lambda)(1-\lambda) - 15\Big) \\ &= (2-\lambda)\Big(3 - 3\,\lambda - \lambda + \lambda^2 - 15\Big) \\ &= (2-\lambda)\Big(\lambda^2 - 4\,\lambda - 12\Big) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)=0 &\iff (2-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+2)=0\\ &\iff \lambda_1=2,\ \lambda_2=6,\ \lambda_3=-2.\end{aligned}$$

(b1)

$$ay_{k+1}-(a^2-2)y_k=b+1$$

Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a^2-2}{a}}_{A}\,y_k+\underbrace{\frac{b+1}{a}}_{B} \qquad \text{für } k=0,1,2,\ldots$$

Man berechnet zuerst:

$$\begin{aligned}y^\star &= \frac{B}{1-A}=\frac{\frac{b+1}{a}}{1-\frac{a^2-2}{a}}\\ &= \frac{b+1}{a-a^2+2}.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}y_k &= A^k\,(y_0-y^\star)+y^\star\\ &= \left(\frac{a^2-2}{a}\right)^k\left(y_0-\frac{b+1}{a-a^2+2}\right)+\frac{b+1}{a-a^2+2}.\end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a^2-2}{a} > 0.$$

$$\begin{aligned}
a > 0: \quad a^2 - 2 > 0 &\iff a^2 > 2 \\
&\iff a > \sqrt{2}. \\
a < 0: \quad a^2 - 2 < 0 &\iff a^2 < 2 \\
&\iff a \in (-\sqrt{2},\, 0) \\
&\overset{(a \neq -1)}{\iff} a \in (-\sqrt{2},\, 0) \ \setminus \ \{-1\}.
\end{aligned}$$

Monotonie falls:

$$a \in (-\sqrt{2},\, -1) \ \cup \ (-1, 0) \ \cup \ (\sqrt{2},\, \infty).$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned}
|A| &= \left| \frac{a^2-2}{a} \right| \\
|A| < 1 &\iff \left| \frac{a^2-2}{a} \right| < 1 \\
&\iff \left(\frac{a^2-2}{a} \right)^2 < 1 \\
&\iff a^4 - 4a^2 + 4 < a^2 \\
&\iff a^4 - 5a^2 + 4 < 0 \\
&\iff (a^2-4)(a^2-1) < 0 \\
&\iff a^2 \in (1, 4) \\
&\iff a \in (-2, -1) \ \cup \ (1, 2).
\end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls $a \in (-2, -1) \ \cup \ (1, 2)$.

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star &= \frac{b+1}{a-a^2+2} \\ &= \frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2} \\ &= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{6}{4}-\frac{9}{4}+\frac{8}{4}} \\ &= \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1.\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a^2-2}{a}\right| < 1.$$

Für $a = \frac{3}{2}$:

$$\left|\frac{(\frac{3}{2})^2-2}{\frac{3}{2}}\right| = \left|\frac{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}{\frac{6}{4}}\right| = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{4}} = \frac{1}{6} < 1$$

ist diese Bedingung erfüllt.

Frühling 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

27. Juni 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= x^3 - \frac{x^2}{y} \\
f_y(x,y) &= \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{y^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{y^2} - 1\right) \\
f_{xx}(x,y) &= 3\,x^2 - \frac{2x}{y} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{x^2}{y^2} \\
f_{yy}(x,y) &= -\frac{2}{3}\,\frac{x^3}{y^3}
\end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; x^3 - \frac{x^2}{y} = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2\left(x - \frac{1}{y}\right) = 0 \tag{I}$$

$$f_y(x,y) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{y^2} - 1\right) = 0 \tag{II}$$

$$\begin{aligned}
\text{(II)} &\;\Rightarrow\; x \neq 0 \\
\text{(I)} &\;\Rightarrow\; x = \frac{1}{y} \qquad \text{(III)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(III) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad x^5 = 1 \quad\Rightarrow\quad x = 1 \quad\Rightarrow\quad y = 1 \\
&\Rightarrow \quad \text{Kandidat für Extremstelle ist} \quad (x^*, y^*) = (1,1).
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= 3\,(\,1\,)^2 - \frac{2\cdot 1}{1} = 3 - 2 = 1 > 0 \\
f_{yy}(1,1) &= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1^3}{1^3} = -\frac{2}{3} < 0
\end{aligned}$$

und somit ist $(1,1)$ ein **Sattelpunkt**.

(b) Variante Lagrange Methode:

Die Lagrange-Funktion für das Optimierungsproblem ist

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2\,y + 2\,y + \lambda\,(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

Man erhält die Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x\,y + 2\,\lambda\,x = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2 + 2\,\lambda\,y = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(I)} \;\Rightarrow\; 2\,x\,(\,y+\lambda\,) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0, & \textbf{Fall 1}, \\ y = -\,\lambda, & \textbf{Fall 2}. \end{cases}$$

Fall 1, $\quad x = 0:$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \;\Rightarrow\; 2 + 2\,\lambda\,y = 0 \;&\Rightarrow\; 2\,(\,1 + \lambda\,y\,) = 0 \\ &\Rightarrow\; y = -\,\frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \qquad \text{(IV)}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV) in (III)} \;&\Rightarrow\; \left(-\,\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\,1 \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} (x_1,y_1,\lambda_1) = (0,1,-1) \\ (x_2,y_2,\lambda_2) = (0,-1,1) \end{cases} \end{aligned}$$

Fall 2, $\quad y = -\lambda:$

$$\begin{aligned} \text{(II)} \;&\Rightarrow\; x^2 + 2 + 2\,\lambda\,(-\,\lambda\,) = 0 \\ &\Rightarrow\; x^2 = 2\,\lambda^2 - 2 \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

$$\begin{aligned} \text{(V) in (III)} \;&\Rightarrow\; 2\,\lambda^2 - 2 + (-\,\lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\; 3\,\lambda^2 = 3 \\ &\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\,1 \\ &\Rightarrow\; \begin{cases} (x_1,y_1,\lambda_1) = (0,1,-1) \\ (x_2,y_2,\lambda_2) = (0,-1,1) \end{cases} \end{aligned}$$

Zweite Variante:

(I), (II), und (III) wie vorher und dann:

Falls $x = 0$:

$$\overset{\text{(III)}}{\Rightarrow} \quad y^2 = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

$$\overset{\text{(II)}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (x_1, y_1, \lambda_1) = (0, 1, -1) \\ (x_2, y_2, \lambda_2) = (0, -1, 1) \end{cases}$$

Falls $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y + 2\,\lambda = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = -\lambda && \text{(VI)} \\ \text{(VI) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y^2 = x^2 + 2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = 2\,y^2 - 2 && \text{(VII)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VII) in (III)} \quad &\Rightarrow \quad 2\,y^2 - 2 + y^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad 3\,y^2 = 3 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad \text{Widerspruch für den Fall } x \neq 0. \end{aligned}$$

Variante Substitutionsmethode:

Die Nebenbedingung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) \quad &= \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \quad x^2 = -\,y^2 + 1. \end{aligned}$$

x^2 in der Zielfunktion $f(x,y)$ mit $-\,y^2 + 1$ substituieren. Es folgt:

$$\begin{aligned} F(y) &= f(x,y) \\ &= x^2\,y + 2\,y \\ &= (-\,y^2\, +\, 1)\,y\, +\, 2\,y \\ &= -\,y^3\, +\, 3\,y. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung von $F(y)$ ist:

$$F'(y) = -\,3\,y^2\, +\, 3.$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} F'(y) = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\,3\,y^2\, +\, 3 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases} \\ &\overset{\text{Nebenbed.}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} (x_1, y_1) = (0, 1) \\ (x_2, y_2) = (0, -\,1). \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Partielle Integration:

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x^5}}_{u'(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)}\,dx$$

$$\begin{aligned} u'(x) = \frac{1}{x^5} \quad &\Rightarrow \quad u(x) = -\frac{1}{4\,x^4} \\ v(x) = \ln(x) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^5}\ln(x)\,dx &= \underbrace{-\frac{1}{4\,x^4}}_{u(x)}\underbrace{\ln(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{4\,x^4}\right)}_{u(x)}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{v'(x)}dx \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\,\ln(x) + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^5}\,dx \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\,\ln(x) - \frac{1}{16}\,\frac{1}{x^4} + c \\ &= -\frac{1}{4\,x^4}\left(\ln(x) + \frac{1}{4}\right) + c. \end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx &= -\frac{1}{4\,x^4}\left(\ln(x) + \frac{1}{4}\right)\Big|_1^e \\ &= -\frac{1}{4\,e^4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{16} - \frac{5}{16\,e^4}. \end{aligned}$$

(d) Substitutionsmethode:

Man setzt:

$$f(x) = x^2 + \sqrt{3x}$$
$$f'(x) = 2\,x + \frac{3}{2\,\sqrt{3\,x}} = 2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int \left(e^{x^2+\sqrt{3x}}\right)\left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}\right)dx &= \int e^y\,dy \\ &= e^y + c \\ &= e^{x^2+\sqrt{3x}} + c.\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{4}{3}}^{3} \left(e^{x^2+\sqrt{3x}}\right)\left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12x}}\right)dx &= e^{(3)^2+\sqrt{3\cdot 3}} - e^{(\frac{4}{3})^2+\sqrt{3\cdot\frac{4}{3}}} \\ &= e^{12} - e^{\frac{34}{9}}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$
\begin{aligned}
A^T &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
A\,A^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & a^2+5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^T &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
B\,B^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+10 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \det\,(\,A\,A^T\,) = \det\,(\,B\,B^T\,) \\
\Longleftrightarrow\quad & 5\,(\,a^2\,+\,5\,)\,-\,16 = 2\,(\,a^2\,+\,10\,)\,-\,4 \\
\Longleftrightarrow\quad & 5\,a^2\,+\,25\,-\,16 = 2\,a^2\,+\,20\,-\,4 \\
\Longleftrightarrow\quad & 3\,a^2 = 7 \\
\Longleftrightarrow\quad & a = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}
$$

(a2)

$$
\begin{aligned}
A\,B^T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ a^2-1 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} B\,A^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & a^2-1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\,B^T = B\,A^T \iff & a^2 - 1 = 3 \\ \iff & a^2 = 4 \\ \iff & a = \pm 2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (\,B\,B^T\,)\,(\,A\,B^{-1}\,)^T\,(\,B\,A\,)^{-1}\,(\,B\,A^T\,) &= B\,B^T\,(\,B^{-1}\,)^T\,A^T\,A^{-1}\,B^{-1}\,B\,A^T \\ &= \overbrace{B\,\underbrace{\left(B^T\,(\,B^T\,)^{-1}\right)}_{=I}\,\underbrace{\left(A\,A^{-1}\right)}_{=I}\,\underbrace{\left(B^{-1}\,B\right)}_{=I}\,A}^{A=A^T \text{ da A symmetrisch, und } (\,B^{-1}\,)^T = (\,B^T\,)^{-1}} \\ &= B\,A \end{aligned}$$

(c1)

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3\,x^2\,y + 4\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\,\sqrt{x\,y} \\ &= 3\,x^2\,y + 4\,\ln(x) - 4\ln(y) - 2\,\sqrt{x\,y} \\ f_x(x,y) &= 6\,x\,y + \frac{4}{x} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= 6\,x\,y + \frac{4}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}} \\ f_y(x,y) &= 3\,x^2 - \frac{4}{y} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \\ &= 3\,x^2 - \frac{4}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 6\,x\,y + \frac{4}{x} - \sqrt{\frac{y}{x}} \\ 3\,x^2 - \frac{4}{y} - \sqrt{\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$$

(c2) Richtung der stärksten Zunahme der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)$ ist $\mathbf{grad}\ f(1,1)$:

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden: $A\,x + B\,y + C = 0$

Bedingung 1: Gerade orthogonal zu $\mathbf{grad}\ f(1,1) \Rightarrow \begin{cases} A = 9 \\ B = -\,2 \end{cases}.$

Bedingung 2: Gerade durch $(1,1)^T \Rightarrow A\cdot 1 + B\cdot 1 + C = 0 \Rightarrow C = -\,A\,-\,B = -\,9\,+\,2 = -7.$

Somit ist die Gleichung der Geraden: $9\,x - 2\,y - 7 = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{9}{2}\,x - \frac{7}{2}.$

Interpretation: Diese Gerade ist die Tangente an der Niveaulinie von f im Punkt $(1,1)^T$.

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ ist eine Basis für } \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ linear unabhängig} \Leftrightarrow \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & t \\ 0 & 2t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 4 + 0 - 2\,t^2 - 3 - 0 \\
&= -2\,t^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \neq \mathbf{0} \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,t^2 + 1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t \neq \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow \quad \{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^3 \text{ falls } t \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}, +\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

(a2)

$$t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 2\,t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,t \\ 2\,t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
(t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} 7\,t \\ 2\,t^2 \\ 2\,t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= 14\,t + 4\,t^2 - 10\,t \\
&= 4\,t^2 + 4\,t \\
&= 4\,t\,(t+1)
\end{aligned}$$

$t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$ sind genau dann orthogonal, wenn:

$$\begin{aligned} & (t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}) \cdot \mathbf{d} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 4\,t\,(t+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t = 0\ ,\ t = -\,1. \end{aligned}$$

Bemerkung: Falls $t = 0$ dann ist $t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ der Nullvektor.

(b) Man löst das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 &= 0 && \text{(I)} \\ x_2 + 2\,x_3 &= 0 && \text{(II)} \\ x_1 + 3\,x_2 + 6\,x_3 &= 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

<u>Variante Gauss-Verfahren:</u>

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ -\,\text{(I)} \end{array}$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} -\,2\,\text{(II)} \\ \\ -\,\text{(II)} \end{array}$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & x_1 = 0 \\ \Rightarrow\quad & x_2 + 2\,x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2\,x_3 \end{aligned}$$

wobei x_3 eine freie Variable ist:

$$x_3 = t.$$

Die Lösung ist:

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -\,2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

und somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von W.

<u>Variante Substitutionsmethode:</u>
Da (III) = (I) + (II), ist (III) erfüllt wenn (I) und (II) erfüllt sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad &\Longrightarrow \quad x_2 = -\,2\,x_3 && \text{(IV)} \\ \text{(IV) in (I)} \quad &\Longrightarrow \quad x_1 = -2\,x_2 - 4\,x_3 = -2\,(-2\,x_3) - 4\,(x_3) = 0 \end{aligned}$$

wobei x_3 eine freie Variable ist. Die Lösung ist:

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

und somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von W.

(c) Gauss-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & (a^2-a-11) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) \quad &= \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & (a^2-a-11) & a+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ -2\,(\mathrm{I}) \\ -\,(\mathrm{I}) \\ -\,(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\to \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & (a^2-a-11) & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} +\,(\mathrm{II}) \\ \cdot\,(-\,1) \\ -\,(\mathrm{II}) \\ \\ \end{array} \\
&\to \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-a-12) & a+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} -\,(\mathrm{IV}) \\ +\,(\mathrm{IV}) \\ \\ \\ \end{array} \\
&\to \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (a^2-a-12) & a+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
\text{Genau eine Lösung:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - a - 12 \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a-4)(a+3) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \neq 4\,,\ a \neq -3.
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\text{Unendlich viele Lösungen:} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A,b) < 4 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - a - 12 = 0 \quad \text{und} \quad a+3 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (\,a = 4 \quad \text{oder} \quad a = -3\,) \quad \text{und} \quad a = -3 \\
&\Longleftrightarrow \quad a = -3.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\text{Keine Lösung:} \quad &\iff \quad \operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A, b) \\
&\iff \quad a^2 - a - 12 = 0 \quad \text{und} \quad a + 3 \neq 0 \\
&\iff \quad (\, a = 4 \quad \text{oder} \quad a = -3\,) \quad \text{und} \quad a \neq -3 \\
&\iff \quad a = 4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1) <u>Gleichungssystem:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

$\lambda = 0:$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(A) \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= -8 + 6 + 45 + 5 - 12 - 36 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ ist ein Eigenwert von A.

$\mathbf{x}$ ist genau ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 0$, wenn $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Wir lösen das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -5 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\,(\mathrm{I}) \\ +\,(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\,2\,(\mathrm{II}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -11 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :\,(-11) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\,4\cdot(\mathrm{I}) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 1 & 0 & 10/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} x_2 &= -\frac{3}{11}\,x_3 \\ x_1 &= -\frac{10}{11}\,x_3 \end{aligned}$$

wobei x_3 eine freie Variable ist. Somit sind

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$.

(a2) Es gilt:

$$\begin{aligned} A\,\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} = -2\,\mathbf{u} \\ A\,\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} (\,A^{100}\,\mathbf{u}\,)^T\,(\,A^{100}\,\mathbf{v}\,) &= \left((-2)^{100}\,\mathbf{u}\right)^T\;\mathbf{v} \\ &= (-2)^{100}\,\mathbf{u}^T\,\mathbf{v} \\ &= (-2)^{100}\,(-11) \\ &= -11\cdot(-2)^{100} \end{aligned}$$

(b1)

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2+3$$

<u>Normalform:</u>

$$y_{k+1} \;=\; \underbrace{\frac{a-4}{a+2}}_{A}\,y_k + \underbrace{\frac{a^2+3}{a+2}}_{B} \qquad \text{für } k = 0,1,2,\ldots$$

Berechnen zuerst:

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a^2+3}{a+2}}{1-\frac{a-4}{a+2}} \\ &= \frac{a^2+3}{6} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a-4}{a+2}\right)^k\left(y_0 - \frac{a^2+3}{6}\right) + \frac{a^2+3}{6}. \end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a-4}{a+2} > 0$$

$$\begin{aligned} a > -2: \quad & \frac{a-4}{a+2} > 0 \iff a-4 > 0 \iff a > 4 \\ a < -2: \quad & \frac{a-4}{a+2} > 0 \iff a-4 < 0 \Longrightarrow a < -2 \end{aligned}$$

Monotonie falls:

$$a \in (-\infty,\, -2) \;\cup\; (4,\, \infty)$$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned} |A| &= \left|\frac{a-4}{a+2}\right| \\ |A| < 1 &\iff \left|\frac{a-4}{a+2}\right| < 1 \\ &\iff (a-4)^2 < (a+2)^2 \\ &\iff a^2 - 8a + 16 < a^2 + 4a + 4 \\ &\iff 12 < 12a \\ &\iff a > 1 \quad (\,a \neq 4\,) \end{aligned}$$

Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls:

$$a \in (1,\, \infty) \;\setminus\; \{4\}.$$

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$\begin{aligned} & \lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 2 \\ \Rightarrow \quad & y^\star = \frac{a^2+3}{6} = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 + 3 = 12 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & a = \pm 3 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

d.h.

$$\left|\frac{a-4}{a+2}\right| < 1.$$

Für $a = 3$:

$$|A| = \left|\frac{3-4}{3+2}\right| = \frac{1}{5} < 1$$

Für $a = -3$:

$$|A| = \left|\frac{-3-4}{-3+2}\right| = \frac{-7}{-1} = 7 > 1$$

$\Rightarrow$ Konvergent gegen 2 für $a = 3$

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

18. Februar 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1)\\
f_y(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)\\
f_{xx}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1)^2+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2x)\\
f_{xy}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)(-x^2+1)\\
f_{yy}(x,y) &= \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)^2+\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2)
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y)=0 &\Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-x^2+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -x^2+1=0 \qquad \text{(I)}\\
f_y(x,y)=0 &\Rightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x^3+x-y^2}(-2y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2y=0 \qquad \text{(II)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &\Rightarrow x=\pm 1\\
\text{(II)} &\Rightarrow y=0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \text{Kandidaten für Extremstellen} \quad (x_1^*,y_1^*)=(1,0) \quad \text{und} \quad (x_2^*,y_2^*)=(-1,0).$$

Hinreichende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{+\frac{2}{3}} < 0\\
f_{yy}(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{+\frac{2}{3}} < 0\\
f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0)-f_{xy}^2(1,0) &= -2\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}(-2\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}})-0\\
&= 4\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}} > 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad (1,0) \quad \text{ist ein Maximum.}$$

$$
\left.\begin{aligned}
f_{xx}(-1,0) &= 2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} > 0\\
f_{yy}(-1,0) &= -2\cdot\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} < 0
\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad (-1,0) \quad \text{ist ein Sattelpunkt}
$$

(b) Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 200x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(50x + 100y - 150) \end{aligned}$$

Lagrange-Bedingungen

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}200x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} + 50\lambda = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}200x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} + 100\lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 50x + 100y - 150 = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(I)} \;\Rightarrow\; 100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} = -50\lambda \qquad \text{(IV)}$$

$$\text{(II)} \;\Rightarrow\; 50x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} = -100\lambda \qquad \text{(V)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{(V)}}{\text{(IV)}} &\Rightarrow \frac{50x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}}{100x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}} = \frac{-100\lambda}{-50\lambda} \\ &\Rightarrow \frac{x}{2y} = 2 \\ &\Rightarrow x = 4y \qquad \text{(VI)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(VI) in (III)} &\Rightarrow 50(4y) + 100y = 150 \\ &\Rightarrow 300y = 150 \\ &\Rightarrow \underline{y = \frac{150}{300} = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{(VI)}}{\Rightarrow} \quad \underline{x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2}$$

Zweite Variante (Substitutionsmethode)

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad \Rightarrow \quad & x + 2y = 3 \\ \Rightarrow \quad & x = 3 - 2y \qquad \text{(VII)} \end{aligned}$$

(VII) in f:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & g(y) = f(3-2y, y) = 200(3-2y)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} \\ \Rightarrow \quad & g'(y) = 200\frac{1}{2}(3-2y)^{-\frac{1}{2}}(-2)y^{\frac{1}{4}} + 200(3-2y)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}} \\ \Rightarrow \quad & g'(y) = 50(3-2y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}[3-2y-4y] = 50(3-2y)^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}[3-6y] \end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} g'(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & 3 - 6y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \\ \overset{\text{(VII)}}{\Rightarrow} \quad & \underline{x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2} \end{aligned}$$

(c) Partielle Integration:

$$\begin{aligned} u'(x) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ v(x) = \ln(4x) \quad &\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \int_1^4 \underbrace{x^2}_{u'(x)} \underbrace{\ln(4x)}_{v(x)} dx &= \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u(x)} \underbrace{\ln(4x)}_{v(x)} \Big|_1^4 - \int_1^4 \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'(x)} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(4x)\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{3}x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln(4x)\Big|_1^4 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^4 \\ &= \frac{1}{3}4^3 \ln(4 \cdot 4) - \frac{1}{3}1^3 \ln(4) - \left[\frac{1}{9}4^3 - \frac{1}{9}1^3\right] \\ &= \frac{64}{3} \ln(4^2) - \frac{1}{3} \ln(4) - \left[\frac{64}{9} - \frac{1}{9}\right] \\ &= \frac{128}{3} \ln(4) - \frac{1}{3} \ln(4) - \frac{63}{9} \\ &= \underline{\frac{127}{3} \ln(4) - 7} \end{aligned}$$

(d) <u>Substitutionsregel:</u>

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x + \ln(x) \\ f'(x) &= \mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x + \ln(x)} \left(\mathrm{e}^x + \frac{1}{x} \right) dx \\ = \quad & \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^e + 1} \mathrm{e}^y \, dy \\ = \quad & \mathrm{e}^y \Big|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^e + 1} \\ = \quad & \mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{e}} + 1)} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}} \\ = \quad & \underline{\mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}} - \mathrm{e}^{\mathrm{e}}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1) $(A^T\,B)^{-1}$ existiert genau dann wenn $\det(A^T B) \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} A^T B &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 2a \\ a & 1 & 1+a \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \det(A^T B) &= a^2 + (1+a)a - 2a^2 - a \\ &= a^2 + a + a^2 - 2a^2 - a \\ &= 0 \qquad \text{für alle } \ a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (A^T B)^{-1} \text{ existiert nicht für alle } a \in \mathbb{R}$$

(a2)

$$\begin{aligned} A\,B^T &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+1 & 1+a \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(AB^T) = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \det(AB^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 1 - (1+a)a \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 1 - a - a^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \neq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rg}(AB^T) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

(b) <u>Gauss Verfahren</u>

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{(I)} \\ -2\,\text{(I)} \\ -4\text{(I)} \\ -\text{(I)} \end{array} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -\text{(II)} \\ -\text{(II)} \end{array} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & -11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = 2$$

(c1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2}(-3ax^2+2) \\ \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2}(-a^2y) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{-ax^3+2x-\frac{a^2}{2}y^2} \begin{pmatrix} -3ax^2+2 \\ -a^2y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{grad} f(1,1) = \underbrace{\mathrm{e}^{-a+2-\frac{a^2}{2}}}_{=\lambda} \begin{pmatrix} -3a+2 \\ -a^2 \end{pmatrix}$$

(c2)

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad -3a+2 = -a^2 \\
&\Rightarrow \quad a^2-3a+2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad (a-1)(a-2) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \underline{a=1} \quad \text{oder} \quad \underline{a=2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a1)

$$\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^4$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \neq \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 1 & 3t & 1 \\ 0 & t & t & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 3\,(3t^2 + t^2 - 3t^3 - t^2) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 9t^2(1-t) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{t \neq 0} \quad \text{und} \quad \underline{t \neq 1}
\end{aligned}$$

(a2)

$$\mathbf{b} \text{ und } \mathbf{c} \text{ orthogonal}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3t \\ t \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & 2 + 3t + t^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & (t+2)(t+1) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \underline{t = -2} \quad \text{oder} \quad \underline{t = -1}
\end{aligned}$$

(b) Gauss-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{I}) \leftrightarrow (\mathrm{II}) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3(\mathrm{I}) \\ -2(\mathrm{I}) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \; : (-2) \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2(\mathrm{II}) \\ \\ -2(\mathrm{II}) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 4x_3$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = -3x_3$$

wobei x_3 eine freie Variable ist:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Basis} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Variante Substitutionsmethode:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 0 && \text{(I)} \\ x_1 + 2x_2 \quad +2x_3 &= 0 && \text{(II)} \\ 2x_1 + 6x_2 \quad +10x_3 &= 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}x_2 && \text{(IV)} \\ \text{(IV) in (II)} \quad &\Rightarrow \quad -\frac{4}{3}x_2 + 2x_2 = -2x_3 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{3}x_2 = -2x_3 \\ &\Rightarrow \quad x_2 = -3x_3 && \text{(V)} \\ &\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{4}{3}x_2 = -\frac{4}{3}(-3x_3) = 4x_3 && \text{(VI)} \end{aligned}$$

$$\text{(V) und (VI) in (III)} \quad \Rightarrow \quad 8x_3 + (-18)x_3 + 10x_3 = 0 \quad \forall x_3$$

x_3 freie Variable (für Basis siehe oben)

(c) Gauss-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3(\mathrm{I}) \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & -5 & -3 & -3m \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ :(-5) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3/5 & 3m/5 \\ 0 & 3 & m^2 & m+1 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2(\mathrm{II}) \\ \\ -3(\mathrm{II}) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/5 & -1m/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & 3m/5 \\ 0 & 0 & m^2-9/5 & 1-4m/5 \end{array}\right)$$

(i)

$$\begin{aligned} \text{Genau eine Lösung:} \iff & \operatorname{rg}(A) = 3 \\ \iff & m^2 - \frac{9}{5} \neq 0 \\ \iff & m \neq \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \text{Unendlich viele Lösungen:} \iff & \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A,b) < 3 \\ \iff & m^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{4}{5}m = 0 \\ \iff & m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{und} \quad m = \frac{5}{4} \\ \iff & \quad \text{nie unendlich viele Lösungen} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \text{Keine Lösung:} \iff & \operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A,b) \\ \iff & m^2 - \frac{9}{5} = 0 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{4}{5}m \neq 0 \\ \iff & m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \quad \text{und} \quad m \neq \frac{5}{4} \\ \iff & m = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a1) $\lambda = 2$ Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\det(A - 2\,I) = 0$. Es gilt:

$$\det(A - 2\,I) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ein Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ gehört zum Eigenraum für den Eigenwert $\lambda = 2$ genau dann wenn

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = 0.$$

Es gilt

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - 3x_4 & = 0 \\ 10x_3 + 4x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_3 = x_4 = 0 \text{ und } x_1, x_2 \text{ freie Variablen}$$

Es folgt den Eigenraum:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

(a2)

$$
\begin{aligned}
n = 1 \qquad A\,\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ 3 ist ein Eigenwert von A und $\mathbf{u}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 3

$$
\begin{aligned}
n = 2 \qquad A^2\mathbf{u} &= A(A\mathbf{u}) = A(3\mathbf{u}) = 3A\mathbf{u} \\
&= 3 \cdot 3\mathbf{u} = 3^2\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n = 3 \qquad A^3\mathbf{u} &= A(A^2\mathbf{u}) = A(3^2\mathbf{u}) = 3^2 A\mathbf{u} \\
&= 3^2 \cdot 3\mathbf{u} = 3^3\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n-1 \to n \qquad A^n\mathbf{u} &= A^{n-1}(A\mathbf{u}) = A^{n-1}(3\mathbf{u}) = 3A^{n-1}\mathbf{u} \\
&= 3 \cdot 3^{n-1}\mathbf{u} = 3^n\mathbf{u}
\end{aligned}
$$

(b1) Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{-\frac{3-a}{a+5}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}{1-\frac{a-3}{a+5}} \\ &= \frac{\frac{a^2+\frac{31}{4}}{a+5}}{\frac{a+5-a+3}{a+5}} = \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^k \left(y_0 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{31}{32}\right) + \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} \end{aligned}$$

(b2) Monotonie falls $A > 0$:

$$\begin{aligned} A > 0 &\iff \frac{a-3}{a+5} > 0 \\ a+5>0 \Leftrightarrow a>-5: \quad \frac{a-3}{a+5} > 0 &\iff a-3>0 \Longleftrightarrow \underline{a>3} \\ a+5<0 \Leftrightarrow a<-5: \quad \frac{a-3}{a+5} > 0 &\iff a-3<0 \Longrightarrow \underline{a<3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung der Differenzengleichung ist monoton falls: $a \in (-\infty,\,-5) \cup (3,\,\infty)$

(b3) Konvergenz falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned}
|A| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a-3}{a+5}\right| < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^2 < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a-3)^2 < (a+5)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 - 6a + 9 < a^2 + 10a + 25 \\
&\Longleftrightarrow \quad 16a > -16 \\
&\Longleftrightarrow \quad a > -1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Lösung der Differenzengleichung konvergiert falls: $a \in (-1, \infty) \setminus \{3\}$

(b4) Notwendige Bedingung für die Konvergenz:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 1 \\
\Rightarrow \quad & y^\star = \frac{1}{8}a^2 + \frac{31}{32} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{32} \\
\Leftrightarrow \quad & a^2 = \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \quad & a = \pm\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung für die Konvergenz:

$$|A| < 1,$$

$$a = \frac{1}{2}: \quad \left|\frac{a-3}{a+5}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}+5}\right| = \frac{5}{11} < 1$$

$$a = -\frac{1}{2}: \quad \left|\frac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+5}\right| = \left|\frac{-7}{9}\right| = \frac{7}{9} < 1$$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\frac{1}{2}$$

Frühling 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

25. Juni 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -4x^3+4y \\ f_y(x,y) &= -4y^3+4x \\ f_{xx}(x,y) &= -12x^2 \\ f_{xy}(x,y) &= 4 \\ f_{yy}(x,y) &= -12y^2 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_x(x,y)=0 \Rightarrow \quad & -4x^3+4y=0 \\ f_y(x,y)=0 \Rightarrow \quad & -4y^3+4x=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y = x^3 \qquad \text{(I)}$$
$$\Rightarrow \quad x = y^3 \qquad \text{(II)}$$

$$\begin{aligned} \text{(I) in (II)}: \qquad & x = y^3 = (x^3)^3 = x^9 \\ \Leftrightarrow \quad & x(x^8-1)=0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1 \end{aligned}$$

Drei Kandidaten für Extremalstellen $P_1(0,0)$ und $P_2(1,1)$, und $P_3(-1,-1)$

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 0 \\ f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) &= -16 < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_1(0,0)$ ist ein Sattelpunkt

$$\begin{aligned}
f_{xx}(1,1) &= -12 \; < \; 0 \\
f_{yy}(1,1) &= -12 \; < \; 0 \\
f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}^2(1,1) &= (-12 \cdot -12) - 16 > 0 \\
&= 128 > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_2(1,1)$ ist ein relatives Maximum

$$\begin{aligned}
f_{xx}(-1,-1) &= -12 \; < \; 0 \\
f_{yy}(-1,-1) &= -12 \; < \; 0 \\
f_{xx}(-1,-1)f_{yy}(-1,-1) - f_{xy}^2(-1,-1) &= (12 \cdot 12) - 16 > 0 \\
&= 128 > 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad P_3(-1,-1)$ ist ein relatives Maximum

(b) Erste Variante (Lagrange Funktion)

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 2x^3y + \lambda(x^2+y^2-4) \end{aligned}$$

Lagrange Bedingungen

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 6x^2y + \lambda(2x) = 0 && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2x^3 + \lambda(2y) = 0 && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 4 = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Zwei Fälle

i) $x = 0$

$$\text{(III)} \;\Rightarrow\; y = \pm 2$$

ii) $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{(II)} &\;\Rightarrow\; y \neq 0 \text{ und } -\lambda(2y) = 2x^3 && \text{(IV)} \\ \text{(I)} &\;\Rightarrow\; -\lambda(2x) = 6x^2y && \text{(V)} \\ \frac{\text{(IV)}}{\text{(V)}} &\;\Rightarrow\; \frac{-\lambda(2x)}{-\lambda(2y)} = \frac{6x^2y}{2x^3} \\ &\;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y} = 3\frac{y}{x} \\ &\;\Leftrightarrow\; x^2 = 3y^2 && \text{(VI)} \\ \text{(VI) in (III)} &\;\Rightarrow\; 3y^2 + y^2 = 4 \\ &\;\Leftrightarrow\; y = \pm 1 \\ &\;\overset{\text{(VI)}}{\Rightarrow}\; x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kandidaten für Extremalstellen:

$$\underline{(0,2), (0,-2), (1,\sqrt{3}), (1,-\sqrt{3}), (-1,\sqrt{3}), (-1,-\sqrt{3})}$$

<u>Zweite Variante (Substitution Methode)</u>

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4-y^2}$$

Definiere:

$$\begin{aligned} g_+(y) &= f(+\sqrt{4-y^2}, y) &&= 2(\sqrt{4-y^2})^3 y \\ g_-(y) &= f(-\sqrt{4-y^2}, y) &&= 2(-\sqrt{4-y^2})^3 y \end{aligned}$$

Weil $g_-(y) = -g_+(y)$; ein lokales Maximum von $g_+(y)$ ist ein lokales Minimum von $g_-(y)$ und vice versa. Es genügt $g_+(y)$ zu untersuchen

$$\begin{aligned} g'_+(y) &= 6(4-y^2)\frac{1}{2}((4-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)y + 2(\sqrt{4-y^2})^3 \\ &= 2(4-y^2)^{\frac{1}{2}}[-3y^2 + (4-y^2)] \\ &= 2(4-y^2)^{\frac{1}{2}}(4-4y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'_+(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = \pm 2,\ y = \pm 1 \\ &\underset{x \geq 0}{\Rightarrow} \quad x = 0,\ x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Für q_- haben wir:

$$\begin{aligned} g'_-(y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad y = \pm 2,\ y = \pm 1 \\ &\underset{x \leq 0}{\Rightarrow} \quad x = 0,\ x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kandidaten für Extremalstelle cf. erste Variante.

(c) Zwei Bedingungen für Dichtefunktion:

$$\begin{aligned} &(1) \quad f(x) \geq 0 \quad \text{für alle } x \\ &(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{aligned}$$

(1) ist erfüllt für $c > 0$
(2):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} c\frac{\ln(2x)}{x^2}dx \\ &= c\int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \frac{\ln(2x)}{x^2}dx \end{aligned}$$

Antiderivativ:

$$\int \frac{\ln(2x)}{x^2}dx$$

Partielle Integration

$$\begin{aligned} u(x) = \ln(2x) \quad &\Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^{-2} \quad &\Rightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln(2x)}{x^2}dx &= \underbrace{\ln(2x)}_{u}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{v}dx \\
&= -\frac{\ln(2x)}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&\Rightarrow \; 1 = c\int_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \frac{\ln(2x)}{x^2}dx = c\left[-\frac{ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{\mathrm{e}/2} \\
&= c\left[-\frac{ln(2\frac{\mathrm{e}}{2})}{\mathrm{e}/2} - \frac{1}{\mathrm{e}/2} - \left(-\frac{ln(2\frac{1}{2})}{1/2} - \frac{1}{1/2}\right)\right] \\
&= c\left(-\frac{4}{\mathrm{e}} + 2\right) \\
&\Rightarrow \; c = \frac{1}{2 - \frac{4}{\mathrm{e}}}
\end{aligned}
$$

Merke $\ln(\mathrm{e}) = 1$ und $\ln(1) = 0$

(d) <u>Substitution Regel:</u>

Wir setzten $u(x) = \sqrt{2x} + \ln(x)$, dann haben wir:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{x} = \frac{2+\sqrt{2x}}{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{\sqrt{2x} + \ln(x)} \left(\frac{2+\sqrt{2x}}{2x} \right) dx \\ =\; & \int_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2\,\mathrm{e}}} \sqrt{u}\; du = \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2\,\mathrm{e}}} \\ =\; & \frac{2}{3}(1+\sqrt{2\,\mathrm{e}})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(\sqrt{2})^{\frac{3}{2}} \\ =\; & \frac{2}{3}(1+\sqrt{2\,\mathrm{e}})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} 2^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1)

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ a+1 & 2+a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AA^T \text{ regulär} &\Rightarrow \det(AA^T) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(2+a^2) - (1+a)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 4 + 2a^2 - 1 - 2a - a^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1)^2 + 2 \neq 0 \quad \text{immer erfüllt für alle } a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad AA^T$ regulär für alle $a \in \mathbb{R}$

(a2)

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & a \\ 1+a & a & 1+a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T A \text{ singulär} &\Rightarrow \det(A^T A) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(1+a^2) + a(1+a) + a(1+a) - (1+a)^2 - 2a^2 - (1+a^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2a^2 + a + a^2 + a + a^2 - 1 - 2a - a^2 - 2a^2 - 1 - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \text{immer erfüllt} \end{aligned}$$

(b) Gauss Methode

$$
\begin{aligned}
A \quad &= \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ (\div 2) \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(\mathrm{I}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \ (\div 2) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1/2 \cdot (\mathrm{II}) \\ \\ -1/2 \cdot (\mathrm{II}) \end{array} \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right) \ -(\mathrm{III}) \\
&\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/4 & 1 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & -1 \\ -1/2 & -1/4 & 1 \end{pmatrix}}
$$

(c1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad} f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} \\
f(x,y) &= \ln(x^{a^3+2a^2+1} y^{a^2+12a+1}) \\
&= \ln(x^{a^3+2a^2+1}) + \ln(y^{a^2+12a+1}) \\
&= (a^3+2a^2+1)\ln(x) + (a^2+12a+1)\ln(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f_x(x,y) &= \frac{a^3+2a^2+1}{x} \\
f_y(x,y) &= \frac{a^2+12a+1}{y} \\
f_x(1,1) &= a^3+2a^2+1 \\
f_y(1,1) &= a^2+12a+1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} a^3+2a^2+1 \\ a^2+12a+1 \end{pmatrix}$$

(c2) Folgendes muss gelten:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a^3+2a^2+1 = a^2+12a+1 \\
&\Leftrightarrow \quad a^3+a^2-12a = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a(a^2+a-12) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a(a+4)(a-3) = 0 \\
&\Rightarrow \quad a=0,\ a=3 \text{ or } a=-4
\end{aligned}$$

Da $a > 0$, $\underline{a = 3}$ folgt direkt.

Aufgabe 3

(a1) $\{a,b,c\}$ linear unabhänging genau dann wenn $\det[a,b,c] \neq 0$

$$\begin{aligned}
\det[a,b,c] &= \begin{vmatrix} 3d & d & d \\ 1 & 0 & d \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + d^2 + d - 0 - 3d^2 - 2d \\
&= -2d^2 - d \\
&= -2d\left(d + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{a,b,c\}$ linear unabhänging genau dann wenn $d \in \mathbb{R} \;/\big\{0, -\frac{1}{2}\big\}$

(a2) Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 3d & d & d \\ 1 & 0 & d \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \overset{\text{Substit. (I) mit (III)}}{\rightarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & d \\ 3d & d & d \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(\mathrm{I}) \\ -(3d)\cdot(\mathrm{II}) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & d-2 \\ 0 & d & d-3d^2 \end{pmatrix} \; \div(-1)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2-d \\ 0 & d & d-3d^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(\mathrm{II}) \\ \\ -d\cdot(\mathrm{II}) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-(2-d) \\ 0 & 1 & 2-d \\ 0 & 0 & d-3d^2-d(2-d) \end{pmatrix}$$

$\{a,b\}$ linear unabhänging und darum $\operatorname{rank}(A) \geq 2$.

Zweite Lösung:
Zeige dass $\{a,b\}$ linear unabhänging

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcll} 3\lambda_1 d & + & \lambda_2 d & = & 0 & \text{(I)} \\ \lambda_1 & & & = & 0 & \text{(II)} \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 0 & \text{(III)} \end{array}$$

(II) $\Rightarrow \lambda_1 = 0$, einsetzten in (III) gibt $\lambda_2 = 0$. Darum ist $\{a, b\}$ linear unabhängig.

(b) Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Substit.} \underset{\text{(I) mit (II)}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & -1 \\ 2 & 0 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3(\text{I}) \\ -2(\text{I}) \\ -2(\text{I}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -5 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \div(-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2(\text{II}) \\ \\ -2(\text{II}) \\ +4(\text{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \div(-10) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +3(\text{III}) \\ -5/2 \cdot (\text{III}) \\ \\ -10(\text{III}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A, 0) = 3 < 4 = n$$
$$\Rightarrow \dim(W) = 4 - 3 = 1$$

Zweiter Weg das Problem anzugehen: Explizite Ableitung des Lösungsraums

$$\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + x_4 &= 0 && \text{(I)}\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 && \text{(II)}\\
2x_1 + 6x_2 + 10x_3 - x_4 &= 0 && \text{(III)}\\
2x_1 - 8x_3 + 4x_4 &= 0 && \text{(IV)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \Rightarrow x_4 &= -3x_1 - 4x_2 && \text{(V)}\\
\text{(II)} \Rightarrow x_1 &= -2x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\
&\overset{\text{(V)}}{=} -2x_2 - 2x_3 - 2(-3x_1 - 4x_2)\\
&= 6x_2 - 2x_3 + 6x_1\\
\Rightarrow 5x_1 &= -6x_2 + 2x_3\\
\Rightarrow x_1 &= -\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 && \text{(VI)}\\
\text{(VI) in (V)}:\ x_4 &= -3(-\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3) - 4x_2\\
&= -\frac{2}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3 && \text{(VII)}\\
\text{(VI) und (VII) in (IV)}:\ 0 &= 2(-\frac{6}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3) - 8x_3 + 4(-\frac{2}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3)\\
&\Leftrightarrow -4x_2 - 12x_3 = 0\\
&\Leftrightarrow x_2 = -3x_3 && \text{(VIII)}\\
\text{(VIII) in (VI)}:\ &\Rightarrow x_1 = -\frac{6}{5}(-3x_3) + \frac{2}{5}x_3 = 4x_3\\
\text{(VIII) in (VII)}:\ &\Rightarrow x_4 = -\frac{2}{5}(-3x_3) - \frac{6}{5}x_3 = 0
\end{aligned}$$

x_3 ist eine freie Variable

$$W = \left\{ c \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ c \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \dim(W) = 1$$

(c) Gauss Methode:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b & 1 \end{array}\right) \quad -(\mathrm{I}) \;\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & -2a & a-1 & 1-b \\ 0 & 1 & b & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Substit. } \overset{(\mathrm{II})}{\rightarrow} \text{ mit } (\mathrm{III}) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & -2a & a-1 & 1-b \end{array}\right) \begin{array}{c} -2a(\mathrm{II}) \\ \\ +2a(\mathrm{II}) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-2ab & b-2a \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & a-1+2ab & 1-b+2a \end{array}\right)$$

System hat unendlich viele Lösungen genau dann wenn

$$\begin{cases} a-1+2ab=0 & (\mathrm{I}) \\ 1-b+2a=0 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(\mathrm{II})}{\Rightarrow} b = 1+2a \quad (\mathrm{III}) \\ (\mathrm{III}) \text{ in } (\mathrm{I}) : \; & a-1+2a(1+2a) = 0 \\ &\Leftrightarrow a-1+2a+4a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4a^2+3a-1=0 \\ &\Leftrightarrow (4a-1)(a+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{4},\; a_2 = -1 \end{aligned}$$

System hat unendlich viele Lösungen genau dann wenn $\underline{(a,b) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)}$ oder $\underline{(a,b) = (-1,-1)}$

Aufgabe 4

(a1) $\lambda = 1$ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - 1 \cdot Id) = 0$

$$\begin{aligned}\det(A - 1\,I) &= \det\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 45 + 6 - 0 - 6 - 45 \\ &= 0\end{aligned}$$

Eigenvektoren zu Eigenwert $\lambda = 1$ erfüllen

$$(A - \ Id)\,\mathbf{x} = 0.$$

Mit Gauss Methode:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3(\mathrm{I}) \\ +5(\mathrm{I}) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = -x_1$$
$$x_1 = c \quad \text{freie Variable}$$

$$\mathbf{x} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Länge $\sqrt{2}$:</u>

$$\begin{aligned} ||x|| &= \sqrt{c^2+0^2+c^2} = \sqrt{2}\cdot|c| = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow c = \pm 1 \\ &\Rightarrow \underline{x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(a2) Eigenwerte λ von A erfüllen $\det(a - \lambda Id) = 0$

$$\left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 45 + 6 + 5(1-\lambda) + 9(-4-\lambda) - 6(2-\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 8 - 8\lambda = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda)(-8+2\lambda+\lambda^2+8) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(1-\lambda)(\lambda+2) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -2$

(b1) Normale Form:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+5}{2a+1}}_{A} y_k + \underbrace{\frac{b-1}{2a+1}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{b-1}{2a+1}}{1-\frac{a+5}{2a+1}} \\ &= \frac{\frac{b-1}{2a+1}}{\frac{2a+1-a-5}{2a+1}} = \frac{b-1}{a-4} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+5}{2a+1}\right)^k \left(y_0 - \frac{b-1}{a-4}\right) + \frac{b-1}{a-4} \end{aligned}$$

(b2) Monoton falls $A > 0$:

$$A > 0 \iff \frac{a+5}{2a+1} > 0$$

$$2a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}: \quad \frac{a+5}{2a+1} > 0 \iff a+5 > 0 \iff \underline{a > -5}$$

$$2a+1 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}: \quad \frac{a+5}{2a+1} > 0 \iff a+5 < 0 \Longrightarrow \underline{a < -5}$$

$\Rightarrow (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton $\Leftrightarrow a \in (-\infty, -5) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)\ /\{4\}$

(b3) Konvergent falls $|A| < 1$:

$$\begin{aligned}
|A| < 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left|\frac{a+5}{2a+1}\right| < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{a+5}{2a+1}\right)^2 < 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (a+5)^2 < (2a+1)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad a^2 + 10a + 25 < 4a^2 + 4a + 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3a^2 - 6a - 24 > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 3(a-4)(a+2) > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a \in (4, \infty) \cup (-\infty, -2) \;/\{-5\}
\end{aligned}$$

(b4) Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{b-1}{a-4} \overset{!}{=} b-1 \\
&\Leftrightarrow a - 4 = 1 \\
&\Leftrightarrow a = 5
\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned}
&|A| < 1 \\
&|A| = \left|\frac{a+5}{2a+1}\right| = \left|\frac{10}{11}\right| < 1.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\underline{\lim_{k\to\infty} y_k \; = \; b-1 \; \Leftrightarrow \; a = 5}$

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1

(a) Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2x+2y}{x^2+2y^2+2xy+2}\\
f_y(x,y) &= \frac{4y+2x}{x^2+2y^2+2xy+2}\\
f_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+2y^2+2xy+2)-(2x+2y)(2x+2y)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}\\
&= \frac{-2x^2-4xy+4}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}\\
f_{xy}(x,y) &= \frac{2(x^2+2y^2+2xy+2)-(2x+2y)(4y+2x)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}\\
&= \frac{-2x^2-4y^2-8xy+4}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}\\
f_{yy}(x,y) &= \frac{4(x^2+2y^2+2xy+2)-(4y+2x)(4y+2x)}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}\\
&= \frac{-8y^2-8xy+8}{(x^2+2y^2+2xy+2)^2}
\end{aligned}
$$

Notwendige Bedingungen:

$$f_x(x,y)=0 \;\Rightarrow\; 2x+2y=0 \qquad \text{(I)}$$
$$f_y(x,y)=0 \;\Rightarrow\; 4y+2x=0 \qquad \text{(II)}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} &\;\Rightarrow\; x=-y \qquad \text{(III)}\\
\text{(III) in (II)} &\;:\; 4y+2(-y)=0 \Leftrightarrow 2y=0 \Leftrightarrow y=0.
\end{aligned}
$$

Somit ist $P(0,0)$ ein Kandidat für eine Extremalstelle.

Hinreichende Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= 1 > 0 \\ f_{yy}(0,0) &= 2 > 0 \\ f_{xy}(0,0) &= 1 \\ f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) &= 1 \cdot 2 - 1^2 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Somit ist $P(0,0)$ ein Minimum.

(b) Erste Variante (Lagrange Methode)

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 60x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{6}} + \lambda(20x + 50y - 100) \end{aligned}$$

Lagrange Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 60\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}} + 20\lambda = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 60\frac{5}{6}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 50\lambda = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 20x + 50y - 100 = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} &\;\Rightarrow\; \lambda = -x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{6}} && \text{(IV)} \\ \text{(II)} &\;\Rightarrow\; \lambda = -x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} && \text{(V)} \\ \text{(IV)} = \text{(V)} &\;\Rightarrow\; x = y && \text{(VI)} \\ \text{(VI) in (III)} &\;\Rightarrow\; 20x + 50x - 100 = 0 \\ &\;\Rightarrow\; x = \frac{100}{70} = \frac{10}{7} \end{aligned}$$

Zweite Variante (Substitutionsmethode)

$$\text{(III)} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{100}{50} - \frac{20}{50}x = 2 - \frac{2}{5}x \tag{VII}$$

(VII) in die Zielfunktion f einsetzen:

$$h(x) = f\left(x, 2 - \frac{2}{5}\,x\right) = 60\,x^{\frac{1}{3}}\,(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}}$$

Die notwendige Bedingung für h ist:

$$h'(x) = 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 60\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}} + 60x^{\frac{1}{3}}\frac{5}{6}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{\frac{5}{6}} - 20x^{\frac{1}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}} \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left[2 - \frac{2}{5}x - x\right] \\ &= 20x^{-\frac{2}{3}}(2 - \frac{2}{5}x)^{-\frac{1}{6}}\left[2 - \frac{7}{5}x\right]. \end{aligned}$$

Somit

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{7}{5}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{7}.$$

(c) Zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion:

(i) $f(x) \geq 0 \quad$ für alle x;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Bedingung (i) ist genau dann erfüllt, wenn $c > 0$. Für Bedingung (ii) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_1^4 3cx^2 \ln(4x)dx \\
&= c\left\{\left[x^3 \ln(4x)\right]_1^4 - \int_1^4 x^3 \frac{4}{4x} dx\right\} \\
&= c\left[x^3 \ln(4x) - \frac{1}{3}x^3\right]_1^4 \\
&= c\left[64 \ln(16) - \frac{64}{3} - \ln(4) + \frac{1}{3}\right] \\
&= c\left[127 \ln(4) - 21\right].
\end{aligned}$$

Somit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{127 \ln(4) - 21} > 0.$$

(d) Substitutionsregel:

Wir setzten $u(x) = x^2 + \sqrt{\ln(x)}$, damit haben wir:

$$u'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\ln(x)}} \frac{1}{x}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln(x^2 + \sqrt{\ln(x)}) \left(2x + \frac{1}{2\,x\sqrt{\ln(x)}}\right) dx \\
&= \int_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} \ln(u)du \\
&= u\ln(u)\Big|_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} - \int_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} 1du \\
&= \left[u\ln(u) - u\right]_{\mathrm{e}^2+1}^{\mathrm{e}^4+\sqrt{2}} \\
&= (\mathrm{e}^4+\sqrt{2})\ln(\mathrm{e}^4+\sqrt{2}) - \mathrm{e}^4 - \sqrt{2} - (\mathrm{e}^2+1)\ln(\mathrm{e}^2+1) + e^2 + 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a1) Lösung 1:

A^2 ist genau dann regulär wenn A regulär ist, d.h., $\det(A) \neq 0$. Es gilt:

$$\det(A) = a^2 - 1.$$

Somit sind A und A^2 genau dann regulär wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lösung 2:

$$A^2 = A\ A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix}.$$

Somit

$$\det(A^2) \quad = \quad \begin{vmatrix} a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2+1 \end{vmatrix} = (a^2+1)^2 - 4a^2 = a^4 + 2a^2 + 1 - 4a^2 = a^4 - 2a^2 + 1.$$

Sei $x = a^2$, dann $\det(A^2) = x^2 - 2x + 1 = 0$ und

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Da $x = a^2$, es folgt

$$det(A^2) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 1$$

und somit ist A^2 genau dann regulär wenn $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(a2) A ist symmetrisch da $A = A^T$. Es folgt:

$$\begin{aligned} (A^4)^T &= (AAAA)^T \\ &= A^T A^T A^T A^T \\ &= AAAA \\ &= A^4 \end{aligned}$$

Somit $(A^4)^T = A^4$, d.h., A^4 ist symmetrisch.

(b) Gauss Methode

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I) \leftrightarrow (II)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)-2(I)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(II)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)+(II)}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\operatorname{Rg}(A) = 3.$$

(c1)

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \ln(x^{2a^3+a^2+1} y^{a^3+12a+1}) \\ &= \ln(x^{2a^3+a^2+1}) + \ln(y^{a^3+12a+1}) \\ &= (2a^3+a^2+1)\ln(x) + (a^3+12a+1)\ln(y). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2a^3+a^2+1}{x} \\ f_y(x,y) &= \frac{a^3+12a+1}{y} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{grad} f(c,c) = \begin{pmatrix} f_x(c,c) \\ f_y(c,c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a^3+a^2+1}{c} \\ \frac{a^3+12a+1}{c} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 2a^3+a^2+1 \\ a^3+12a+1 \end{pmatrix}.$$

(c2) Es existiert ein Parameter $\lambda > 0$ mit der Eigenschaft

$$\lambda \, \mathbf{grad} f(c,c) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

für alle $c > 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda}{c} \begin{pmatrix} 2a^3 + a^2 + 1 \\ a^3 + 12a + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \mathrm{e} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\frac{\lambda}{c} 2a^3 + a^2 + 1}{\frac{\lambda}{c} a^3 + 12a + 1} = \frac{e}{e} = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 2a^3 + a^2 + 1 = a^3 + 12a + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & a^3 + a^2 - 12a = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a^2 + a - 12) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(a+4)(a-3) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0, \; a = -4, \; a = 3.
\end{aligned}$$

Da $a > 0$, ist die einzige Lösung $a = 3$.

Aufgabe 3

(a1) $\{a, b, c, d\}$ linear unabhänging genau dann wenn $\det[a, b, c, d] \neq 0$

$$\{a, b, c, d\} \quad = \quad \begin{pmatrix} t & t & 1 & 1 \\ 1 & t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & t & +1 \end{pmatrix}$$

$\{a, b, c, d\}$ hat als eine Zeile den Nullvektor, somit $\det[a, b, c, d] = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit sind $\{a, b, c, d\}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig.

(a2) $\{a, b\}$ orthogonal genau dann wenn $a^T b = 0$. Es gilt:

$$a^T b = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t^2 + t + 0 + t = t^2 + 2t = t\,(t + 2).$$

Somit $a^T b = 0$ genau dann wenn $t = 0$ und $t = -2$.

(b) <u>Gauss Methode:</u>

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(I)} \leftrightarrow \text{(I)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(II)} - 3\text{(I)} \\ \text{(III)} - 2\text{(I)} \\ \text{(IV)} - 2\text{(I)} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}\text{(II)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{(I)} - 2\text{(II)} \\ \\ \text{(III)} - 2\text{(II)} \\ \text{(IV)} + 4\text{(II)} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
8x_3 + 3x_4 = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_3 = -\frac{3}{8}x_4 \\
x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_2 = -3x_3 - x_4 = \frac{9}{8}x_4 - x_4 = \frac{1}{8}x_4 \\
x_1 - 4x_3 - x_4 = 0 \;&\Leftrightarrow\; x_1 = 4x_3 + x_4 = -\frac{12}{8}x_4 + x_4 = -\frac{4}{8}x_4
\end{aligned}
$$

Somit ist $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von W.

(c) <u>Gauss Methode:</u>

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & m^2 & (m+2) \end{array}\right) \text{(II)} - \text{(I)}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 0 & 0 & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & 3 & m^2 & m+2 \end{array}\right) \text{(II)} \leftrightarrow \text{(III)}
$$

$$
\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & (m-1) & (m^2-1) \\ 0 & 3 & m^2 & (m+2) \\ 0 & 0 & 1-m & (1-m^2) \end{array}\right)
$$

Es folgt:

(i) genau eine Lösung wenn $1 - m \neq 0$, d.h., $m \neq 1$.

(ii) unendlich viele Lösungen wenn $1 - m = 0$ und $1 - m^2 = 0$, d.h., $m = 1$.

(iii) keine Lösung wenn $1 - m = 0$ und $1 - m^2 \neq 0$. Diesen Fall ist hier nicht möglich.

Aufgabe 4

(a1) λ ist Eigenwert von A genau dann wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda\, I) &= \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2+\lambda)^2 - 1 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda + 3 \\ &= (\lambda+3)(\lambda+1).\end{aligned}$$

Somit

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \text{ und } \lambda_2 = -3.$$

(a2) Lösung 1:

Seien v_1 und v_2 die Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} Av_1 = \lambda_1 v_1 \quad &\Rightarrow \quad v_2^T A v_1 = \lambda_1 v_2^T v_1 \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 \quad &\Rightarrow \quad v_1^T A v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= v_1^T A v_2 - v_1^T A v_2 \\ &= v_1^T A v_2 - v_2^T A^T v_1 \\ &\stackrel{A=A^T}{=} v_1^T A v_2 - v_2^T A v_1 \\ &= \lambda_2 v_1^T v_2 - \lambda_1 v_2^T v_1 \\ &= \lambda_2 v_1^T v_2 - \lambda_1 v_1^T v_2 \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1) v_1^T v_2. \end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist $v_1^T v_2 = 0$, somit sind v_1 und v_2 orthogonal.

Lösung 2: Berechnung der expliziten Eigenvektoren

$\lambda_1 = -1$:

$$(A - (-1)\cdot I)\, v = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} -v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - v_2 &= 0 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Es folgt

$$v_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $c_1 \in \mathbb{R}$.

$\underline{\lambda_1 = -3:}$

$$(A - (-3) \cdot I)\, v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 + v_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad v_1 = -v_2.$$

Es folgt:

$$v_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für $c_2 \in \mathbb{R}$.

Somit ist das Skalarprodukt zwischen v_1 und v_2

$$v_1^T\, v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 c_2 (1 - 1) = 0,$$

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, d.h., v_1 und v_2 sind orthogonal.

(b1) Normale Form:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{a+4}{a+7}}_{A}\, y_k + \underbrace{\frac{3a^2 + 6a - 9}{a+7}}_{B}$$

$$\begin{aligned} y^\star &= \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{3a^2+6a-9}{a+7}}{1 - \frac{a+4}{a+7}} \\ &= \frac{3a^2 + 6a - 9}{a + 7 - a - 4} = \frac{3a^2 + 6a - 9}{3} \\ &= a^2 + 2a - 3. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y_k &= A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star \\ &= \left(\frac{a+4}{a+7}\right)^k \big(y_0 - (a^2+2a-3)\big) + a^2 + 2a - 3. \end{aligned}$$

(b2) <u>Monoton falls $A > 0$:</u>

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{a+4}{a+7} > 0$$

Zwei Fälle:

$$\begin{aligned} a+7>0 (\Leftrightarrow a > -7): &\quad \frac{a+4}{a+7} > 0 \Leftrightarrow a+4 > 0 \Leftrightarrow a > -4; \\ a+7<0 (\Leftrightarrow a < -7): &\quad \frac{a+4}{a+7} > 0 \Leftrightarrow a+4 < 0 \Leftrightarrow a < -4 \end{aligned}$$

Somit ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann monoton wenn $a \in (-\infty, -7) \cup (-4, \infty)$.

(b3) <u>Konvergent falls $|A| < 1$:</u>

$$\begin{aligned} |A| < 1 &\Leftrightarrow \left|\frac{a+4}{a+7}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+4}{a+7}\right)^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow (a+4)^2 < (a+7)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 8a + 16 < a^2 + 14a + 49 \\ &\Leftrightarrow 6a > -33 \\ &\Leftrightarrow a > -\frac{33}{6} = -\frac{11}{2} \\ &\Leftrightarrow a \in (-\frac{11}{2}, \infty) \setminus \{-4\} \end{aligned}$$

(b4) Notwendige Bedingung: $\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} y_k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow \quad (a+3)(a-1) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad a_1 = -3 \text{ oder } a_2 = 1\end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung: $|A| = \left|\frac{a_1+4}{a_1+7}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} a_1 = -3: &\qquad \left|\tfrac{a_1+4}{a_1+7}\right| = \left|\tfrac{-3+4}{-3+7}\right| = \left|\tfrac{1}{4}\right| < 1\\ a_2 = 1: &\qquad \left|\tfrac{a_2+4}{a_2+7}\right| = \left|\tfrac{1+4}{1+7}\right| = \left|\tfrac{5}{8}\right| < 1\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$ genau dann wenn $a \in \{-3, 1\}$.

Frühling 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Musterlösungen Prüfung Frühlingssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

24. Juni 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Multiple-choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

Q1 (d). Eine Dichtefunktion muss zwei Bedingungen erfüllen: $g_i(x) \geq 0$ für alle $x \in [5, 8]$ und $\int_5^8 g_i(x)\,dx = 1$. Nur g_4 erfüllt diese Bedingungen.

Q2 (b). Die absoluten Werte werden gebraucht, da $f - g$ beide positiv und negativ zwischen a und b sind, und g negativ zwischen c und d ist.

Q3 (b). Da A eine 3×3 reguläre sub-Matrix hat, muss A mindestens 3 linear unabhängige Kolonnenvektoren haben. Im weiteren hat A vier Kolonnenvektoren. Deshalb können höchstens 4 Kolonnenvektoren unabhängig sein. Es folgt, dass der Rang von A entweder 3 oder 4 ist.

Q4 (b). Da die maximale Anzahl linear unabhängiger Kolonnenvektoren einer Matrix identisch der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der gleichen Matrix ist und zusätzlich dem Rang der Matrix entspricht, hat die transponierte Matrix (Zeilenvektoren werden Kolonnenvektoren und umgekehrt) den gleichen Rang wie die originale Matrix.

Q5 (d). Da $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3 < n = 5$ hat das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen. Im weiteren ist die Dimension des Lösungsraumes $n - \mathrm{rg}(A) = 5 - 3 = 2$.

Q6 (c). Es gilt $\det(A) = 31 \neq 0$. Folglich ist A regulär und $\mathrm{rg}(A) = n = 3$, wobei n die Anzahl der Kolonnen-(Zeilen-)vektoren in A ist.

Q7 (a). Da $\dim(W) = 3$ existieren höchstens 3 linear unabhängige Vektoren in W. Folglich kann der Rang der Matrix A, welche die Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in W$ hat, nicht höher als 3 sein. Im Weiteren können $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ auch linear abhängig sein. In diesem Fall könnte die Matrixa A Rang 1 oder 2 haben.

Q8 (a). Die normale Form der Differenzengleichung ist $y_{k+1} = \frac{2}{3}\,y_k - 1$, d.h., $A = \frac{2}{3}$ und $B = -1$. Da $|A| < 1$, gilt für die allgemeine Lösung der Differenzengleichung, dass sie konvergent ist. Die allgemeine Lösung konvergiert zu $y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{-1}{1-\frac{2}{3}} = -3$.

Teil II: Offene Fragen

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Die notwendige Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen deshalb die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und wir erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4\,x - 2\,y, \\ f_y(x,y) &= -2\,x + 2\,e^{y-3} + 2\,(y-1)\,e^{y-3} = -2\,x + 2\,y\,e^{y-3}. \end{aligned}$$

Es folgt, dass:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x^\star - 2\,y^\star = 0 \\ -2\,x^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0 \end{cases}.$$

Von $4\,x^\star - 2\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$x^\star = \frac{1}{2}\,y^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $-2\,x^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0$ ein und finden, dass

$$-2\,\frac{1}{2}\,y^\star + 2\,y^\star\,e^{y^\star-3} = 0 \Leftrightarrow y^\star\,\left(2\,e^{y^\star-3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow y^\star = 0 \text{ oder } y^\star = 3 - \ln(2).$$

Es folgt, dass

$$P_1 = (0,0) \text{ und } P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$$

Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte sind.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichende Bedingungen: falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendige Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\,f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt}$$

Für die hinreichende Bedingungen brauchen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4 \\ f_{yy}(x,y) &= 2\, e^{y-3} + 2\, y\, 3^{y-3} = 2\, e^{y-3}\,(1+y) \\ f_{xy}(x,y) &= -2 \end{aligned}$$

Für $P_1 = (0,0)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(0,0) = 4 > 0 \\ f_{yy}(0,0) = 2\, e^{-3} > 0 \\ f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) - (f_{xy}(0,0))^2 = 8\, e^{-3} - 4 < 0 \end{array} \right. .$$

Es folgt, dass $P_1 = (0,0)$ ein Sattelpunkt ist.

Für $P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) = 4 > 0 \\ f_{yy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) = 4 - \ln(2) > 0 \\ f_{xx}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) f_{yy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right) - \left(f_{xy}\left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3-\ln(2)\right)\right)^2 = 12 - 4\,\ln(2) > 0 \end{array} \right. .$$

Es folgt, dass $P_2 = \left(\frac{3-\ln(2)}{2}, 3 - \ln(2)\right)$ ein Minimum ist.

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Wir zeigen hier zwei verschiedene Lösungswege auf.

<u>Lagrange Methode:</u>
Wir definieren die Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) \\ &= 16\, \ln(x) - 9\, ln(y) + \lambda(x^2 - y^2 - 4). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f, unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$, sind die sogenannten Lagrange Bedingungen:

$$\begin{aligned}
F_x(x, y, \lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; \frac{16}{x} + 2\,\lambda\,x = 0, && \text{(I)}\\
F_y(x, y, \lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; \frac{-9}{y} - 2\,\lambda\,y = 0, && \text{(II)}\\
F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; x^2 - y^2 - 4 = 0. && \text{(III)}
\end{aligned}$$

Aus (I) erhalten wir

$$16 = -2\,\lambda\,x^2. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$-9 = 2\,\lambda\,y^2. \tag{V}$$

Dividieren wir (IV) mit (V) ergibt dies

$$-\frac{16}{9} = \frac{-2\,\lambda\,x^2}{2\,\lambda\,y^2} = -\frac{x^2}{y^2},$$

d.h.,

$$x^2 = \frac{16}{9}\,y^2. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) und erhalten:

$$\frac{16}{9}\,y^2 - y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{9}\,y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{36}{7}.$$

Da $y > 0$ (sonst wäre $\ln(y)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$y = \frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Nutzen wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$x^2 = \frac{16}{9}\,\frac{36}{7} = \frac{64}{7}.$$

Da $x > 0$ (sonst wäre $\ln(x)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$x = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Es folgt, dass $P = \left(\frac{8}{\sqrt{7}}, \frac{6}{\sqrt{7}}\right)$ ein Kandidate für eine Extremalstelle von f unter Nebenbedingung ist.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $x^2 - y^2 - 4 = 0$, um x als eine Funktion von y zu erhalten, d.h., $x = \pm\sqrt{y^2+4}$. Da $x > 0$ (sonst wäre $\ln(x)$ nicht definiert), erhalten wir

$$x = \sqrt{y^2+4}. \tag{VII}$$

Wir ersetzen nun im Ausdruck f x mit $\sqrt{y^2+4}$, d.h., wir definieren die Funktion h als

$$h(y) = f(\sqrt{y^2+4}, y) = 16\ \ln(\sqrt{y^2+4}) - 9\ \ln(y).$$

Die Optimierung unter Nebenbedingung von f, gegeben die Nebenbedingung $x^2 - y^2 - 4 = 0$, ist äquivalent zur Optimierung ohne Nebenbedingung von h. Es folgt, dass wir die notwendige Bedingung $h'(y) = 0$ nach einer Extremalstelle y von h lösen. Es gilt:

$$h'(y) = \frac{16}{\sqrt{y^2+4}}\,\frac{2\,y}{2\,\sqrt{y^2+4}} - \frac{9}{y} = \frac{16\,y}{y^2+4} - \frac{9}{y}.$$

Es folgt, dass:

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{16\,y}{y^2+4} - \frac{9}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{16\,y^2 - 9\,(y^2+4)}{(y^2+4)\,y} = 0 \Leftrightarrow \frac{7\,y^2 - 36}{(y^2+4)\,y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm\frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Da $y > 0$ (sons wäre $\ln(y)$ nicht definiert) erhalten wir schlussendlich

$$y = \frac{6}{\sqrt{7}}.$$

Benutzen wir (VII), erhalten wir:

$$x = \frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion sind:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle x;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

(i) ist erfüllt für alle $c \geq 0$. Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad = \quad \int_1^4 c\, e^{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Wir berechnen das Integral mittels Substitutionsregel. Wir setzen $y = 2\sqrt{x}$, somit ist $\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Es folgt,

$$\int_1^4 c\, e^{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \quad = \quad \int_2^4 c\, e^y \; dy = c\, e^y \Big|_2^4 = c\,(e^4 - e^2).$$

Im Weiteren erhalten wir:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \Leftrightarrow 1 = c\,(e^4 - e^2) \Leftrightarrow c = \frac{1}{e^4 - e^2} > 0.$$

Folglich muss c gleich

$$c = \frac{1}{e^4 - e^2}$$

sein, damit f eine Dichtefunktion ist.

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Es gilt

$$\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, \ln\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, \ln\left(x^{-1}\right)\, dx = \int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, (-1)\, \ln(x)\, dx = -\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, \ln(x)\, dx.$$

Wir berechnen das Integral $\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5\, \ln(x)\, dx$ mittels der partiellen Integralregel. Sei

$$v'(x) = \frac{4}{3}\, x^5$$

und

$$u(x) = \ln(x).$$

Also ist,

$$v(x) = \frac{4}{3}\,\frac{1}{6}\, x^6 = \frac{2}{9}\, x^6$$

und

$$u'(x) = \frac{1}{x}.$$

Es folgt, dass:

$$\begin{aligned}
&\int_1^2 \underbrace{\frac{4}{3}\,x^5}_{=v'(x)}\ \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\ dx \\
&= \Big[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\ \underbrace{\frac{2}{9}\,x^6}_{=v(x)}\Big]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{\frac{2}{9}\,x^6}_{=v(x)}\ \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)}\ dx \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \frac{2}{9}\int_1^2 x^5\,dx \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \left[\frac{2}{9}\,\frac{1}{6}\,x^6\right]_1^2 \\
&= \left[\ln(x)\,\frac{2}{9}\,x^6\right]_1^2 - \left[\frac{1}{27}\,x^6\right]_1^2 \\
&= \ln(2)\,\frac{2}{9}\,2^6 - \ln(1)\,\frac{2}{9}\,1^6 - \frac{1}{27}\,\left(2^6 - 1^6\right) \\
&= \ln(2)\,\frac{128}{9} - \frac{63}{27} \\
&= \ln(2)\,\frac{128}{9} - \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\int_1^2 \frac{4}{3}\,x^5\,\ln\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = -\int_1^2 \frac{4}{3}\,x^5\,\ln(x)\,dx = \frac{7}{3} - \frac{128}{9}\,\ln(2).$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Folgendes gilt:

$$A\,A^T \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+a \\ 1+a & 1+b^2+a^2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb erhalten wir,

$$\begin{aligned} AA^T \text{ singulär } &\Leftrightarrow \det(AA^T) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,(1+b^2+a^2) - (1+a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 + 2\,b^2 + 2\,a^2 - 1 - 2\,a - a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - 2\,a + a^2 + 2\,b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-a)^2 + 2\,b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ und } b = 0. \end{aligned}$$

Es folgt, dass AA^T singulär für $(a,b) = (1,0)$ ist.

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Wir wenden die Gauss Methode an:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (:2) \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -(I) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (:2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ -\frac{1}{2}\,(II) \\ +\frac{1}{2}\,(II) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(III) \\ \\ -(III) \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{2}\,(IV) \\ -\frac{1}{2}\,(IV) \\ +\frac{1}{2}\,(IV) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1}).$$

Es folgt, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (0.5, 1)^T$ ist

$$\mathbf{grad} f(0.5, 1).$$

Folglich ist die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (0.5,1)^T$ genau dann durch $\mathbf{n}$ gegeben, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0.5, 1).$$

Es muss Folgendes gelten:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{a\,x^2\,y + a^2\,y^2}\,2\,a\,x\,y \\ e^{a\,x^2\,y+a^2\,y^2}\,(a\,x^2 + 2\,a^2\,y) \end{pmatrix} = e^{a\,x^2\,y+a^2\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,a\,x\,y \\ a\,x^2 + 2\,a^2\,y \end{pmatrix}.$$

D.h.,

$$\mathbf{grad} f(0.5, 1) = e^{\frac{a}{4}+a^2} \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{4} + 2\,a^2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \lambda\, \mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0.5, 1) \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} = e^{\frac{a}{4}+a^2} \begin{pmatrix} a \\ \frac{a}{4} + 2\,a^2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\lambda\, e}{\lambda\, e} = \frac{e^{\frac{a}{4}+a^2}\, a}{e^{\frac{a}{4}+a^2} \left(\frac{a}{4} + 2\,a^2\right)} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 = \frac{a}{\frac{a}{4} + 2\,a^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a}{4} + 2\,a^2 = a \\
\Leftrightarrow \quad & a \left(2\,a - \frac{3}{4}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a = 0 \text{ or } a = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Da angenommen wird, dass a streng positiv sei ($a > 0$), ist die Richtung der stärksten Zunahme von f im Punkt $(x, y)^T = (0.5, 1)^T$ genau dann gleich $\mathbf{n}$, wenn $a = \frac{3}{8}$.

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Wir wenden die Gauss Methode an:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 1 & 0 & 3\,m & m^2 \\ 0 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -(I) \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2 - m \\ 0 & 1 & m & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (II) \leftrightarrow (III) \\ (III) \leftrightarrow (II) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2 - m \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\,m\,(II) \\ \\ +2\,m\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 - 2\,m^2 & m - 2\,m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 3\,m - 2 + 2\,m^2 & m^2 - m + 2\,m \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2\,m^2 & -m \\ 0 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 2\,m^2+3\,m-2 & m^2+m \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu

$$2\,m^2+3\,m-2=0 \text{ und } m^2+m \neq 0.$$

Es gilt:

$$2\,m^2+3\,m-2=0 \Leftrightarrow 2\,(m+2)\left(m-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow m_1=\frac{1}{2} \text{ or } m_2=-2.$$

Da $m_1^2+m_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\neq 0$ und $m_2^2+m_2=4-2=2\neq 0$ schliessen wir, dass das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung hat, wenn $m \in \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

$\lambda = 2$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - 2\,I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A - 2\,I) &= \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 - 2 + 1 + 1 - 0 - 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert $\lambda = 2$ löst das System

$$(A - 2\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir wenden die Gauss Methode an und erhalten:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \leftrightarrow (II) \\ (I) \leftrightarrow (II) \\ \end{matrix} \quad &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +(I) \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(II) \\ \\ -2\,(II) \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Letzteres lineare Gleichungssystem ist

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right. .$$

Sei $x_3 = t$ die freie Variable, wir erhalten dann:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um einen Eigenvektor mit Länge 4 zu erhalten, brauchen wir:

$$4 = |\mathbf{x}| = \sqrt{(-t)^2 + (-t)^2 + t^2} = \sqrt{3\,t^2} = |t|\,\sqrt{3}.$$

Es folgt,

$$|t| = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t \in \{-\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\}.$$

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\,(3-\lambda)\,(2-\lambda) - 2 + 1 + (3-\lambda) - 2\,(2-\lambda) - 1\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^2\,(3-\lambda) + (2-\lambda) - 2\,(2-\lambda) - (2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)^2\,(3-\lambda) - 2\,(2-\lambda) \\
&= (2-\lambda)\,\left[(2-\lambda)\,(3-\lambda) - 2\right] \\
&= (2-\lambda)\,\left[4 - 5\,\lambda + \lambda^2\right] \\
&= (2-\lambda)\,(4-\lambda)\,(1-\lambda)
\end{aligned}$$

Es folgt,

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2, 4\},$$

d.h., die Eigenwerte von A sind 1,2 und 4.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Als erstes ermitteln wir die normale Form der Differenzengleichung:

$$y_{k+1} = \frac{2\,a-2}{a^2-1}\,y_k + \frac{a\,b-(a-b)-1}{a^2-1} = \frac{2\,(a-1)}{(a-1)\,(a+1)}\,y_k + \frac{(a+1)\,(b-1)}{(a+1)\,(a-1)} = \frac{2}{a+1}\,y_k + \frac{b-1}{a-1},$$

d.h.,

$$y_{k+1} = \frac{2}{a+1}\,y_k + \frac{b-1}{a-1}.$$

Die Koeffizienten sind deshalb

$$A = \frac{2}{a+1} \text{ und } B = \frac{b-1}{a-1}.$$

Wir erhalten

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{b-1}{a-1}}{1-\frac{2}{a+1}} = \frac{\frac{b-1}{a-1}}{\frac{a+1-2}{a+1}} = \frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)^2}.$$

und die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist

$$y_k = A^k (y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{2}{a+1}\right)^k \left(y_0 - \frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)^2}\right) + \frac{(b-1)(a+1)}{(a-1)^2}.$$

Frage 3 (b2) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann monoton, wenn $A > 0$. Es gilt:

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a+1} > 0 \Leftrightarrow a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1.$$

Merke, dass b in der letzten Bedingung nicht vorkommt, deshalb darf b willkürlich ausgewählt werden. Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann monoton, wenn $a \in (-1, \infty) \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (b3) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |A| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{a+1}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{2}{a+1}\right|^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{(a+1)^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 4 < (a+1)^2 = a^2 + 2\,a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a^2 + 2\,a - 3 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (a+3)\,(a-1) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a < -3 \text{ or } a > 1.
\end{aligned}$$

Merke, dass b auch in dieser letzten Bedingung nicht vorkommt, deshalb darf b willkürlich ausgewählt werden. Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann konvergent, wenn $a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (b4) (4 Punkte)

Falls die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$ konvergiert, haben wir $\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star$. Folglich ist eine notwendige Bedingung für Konvergenz zu 1 $y^\star = 1$. Es gilt:

$$y^\star = 1 \Leftrightarrow \frac{(b-1)\,(a+1)}{(a-1)^2} = 1 \Leftrightarrow (b-1)\,(a+1) = (a-1)^2 \Leftrightarrow b - 1 = \frac{(a-1)^2}{a+1} \Leftrightarrow b = \frac{(a-1)^2}{a+1} + 1.$$

Wir erhalten des Weiteren:

$$b = \frac{(a-1)^2}{a+1} + 1 = \frac{a^2 - 2\,a + 1 + a + 1}{a+1} = \frac{a^2 - a + 2}{a+1}.$$

Eine hinreichende Bedingung für Konvergenz folgt von (b3), d.h.,

$$a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty).$$

Folglich konvergiert die allgemeine Lösung genau dann zu 1, wenn

$$(a, b) \in \left\{ \left(a, \frac{a^2 - a + 2}{a+1} \right) \,:\, a \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \right\}.$$

Mathematik II
Musterlösung Nacholprüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

8. Februar 2014

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)

Maxima, Minima und Sattelpunkte einer Funktion f sind stationäre Punkte von f. Ein Punkt (x_0, y_0) ist ein stationärer Punkt von f, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ und } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Daher müssen wir die ersten partiellen Ableitungen von f berechnen. Es gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{10}{x} - 2\,y - 8$$

und

$$f_y(x, y) = -2\,x + 2\,y.$$

Daraus folgt:

$$f_y(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow -2\,x_0 + 2\,y_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = y_0.$$

Wir setzen die Gleichung $x_0 = y_0$ in die Bedingung $f_x(x_0, y_0) = 0$ ein und erhalten

$$\frac{10}{x_0} - 2\,x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow 10 - 2\,x_0^2 - 8\,x_0 = 0 \Leftrightarrow -2\,(x_0^2 + 4\,x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow -2\,(x_0 + 5)\,(x_0 - 1) = 0.$$

Wir erhalten zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$, die $y_1 = x_1 = 1$ und $y_2 = x_2 = -5$ implizieren. Da $x > 0$ (andernfalls wäre der Logarithmus nicht definiert), ist

$$P = (x_1, y_1) = (1, 1)$$

der einzige stationäre Punkt von f.

Wir prüfen nun, ob der stationäre Punkt P eine Extremalstelle von f ist. Eine hinreichende Bedingung für eine Extremalstelle im stationären Punkt (x_0, y_0) von f ist

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Daher benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -\frac{10}{x^2}, \\ f_{yy}(x, y) &= 2, \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -2. \end{aligned}$$

Für $P = (1, 1)$ gilt:

$$f_{xx}(1, 1)\, f_{yy}(1, 1) - (f_{xy}(1, 1))^2 = (-10) \cdot 2 - (-2)^2 = -24 < 0.$$

Daher ist $P = (1, 1)$ ein Sattelpunkt von f.

Frage 1 (b) (8 Punkte)

Das zu lösende Problem lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = 12\,x + 20\,y \to \text{max! min!} \\ &\text{sodass}\varphi(x,y) = 0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Dies ist eine Optimierung unter Nebenbedingungen. Wir wenden die Lagrange-Methode an.
Lagrange-Funktion:

$$F(x,y,\lambda) = 12\,x + 20\,y + \lambda\,(0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r)\,.$$

Notwendige Bedingungen für eine Extremalstelle (x_0, y_0, λ_0) sind die folgenden Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 12 + \lambda_0\,\frac{0.6}{x_0} = 0 \tag{2}$$

$$F_y(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 20 + \lambda_0\,\frac{1}{y_0} = 0 \tag{3}$$

$$F_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 0.6\,\ln(x_0) + \ln(y_0) - r = 0 \tag{4}$$

Wir lösen die Gleichungen (2) und (3) nach λ_0 auf und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{-12\,x_0}{0.6} = -20\,x_0 \quad \text{und} \\ \lambda_0 &= -20\,y_0. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen durcheinander teilen, erhalten wir:

$$1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{-20\,x_0}{-20\,y_0} = \frac{x_0}{y_0},$$

d. h.

$$x_0 = y_0.$$

Wir setzen $x_0 = y_0$ in die Gleichung (4) ein und erhalten

$$0.6\,\ln(x_0) + \ln(x_0) - r = 0 \Leftrightarrow 1.6\,\ln(x_0) = r \Leftrightarrow \ln(x_0) = \frac{r}{1.6} \Leftrightarrow x_0 = e^{\frac{r}{1.6}}.$$

Unter Verwendung von $x_0 = y_0$ und der Gleichung (2) kommen wir schliesslich zum Ergebnis, dass der einzige Punkt, der den Lagrange-Bedingungen (2)-(4) genügt,

$$(x_0, y_0, \lambda_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)$$

ist.
Daraus folgt, dass

$$(x_0, y_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter Nebenbedingungen ist.

Nicht verlangt in der Prüfung: Leider sind die Lagrange-Bedingungen nur notwendig, aber nicht hinreichend für eine Extremalstelle der Optimierung unter Nebenbedingungen. Darüber hinaus muss die hinreichende Bedingung überprüft werden. Hinreichende Bedingung für ein Maximum (Minimum) ist

$$\begin{aligned} &2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)\\ &\qquad -F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)^2 - F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)\,\varphi_x(x_0,y_0)^2 > 0 \quad (<0). \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y) &= \frac{0.6}{x} &&\Rightarrow \quad \varphi_x\left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}\right) > 0\\ \varphi_y(x,y) &= \frac{1}{y} &&\Rightarrow \quad \varphi_y\left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}\right) > 0\\ F_{xx}(x,y,\lambda) &= -\lambda\,\frac{0.6}{x^2} &&\Rightarrow \quad F_{xx}\left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right) > 0\\ F_{xy}(x,y,\lambda) &= 0 &&\Rightarrow \quad F_{xy}\left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right) = 0\\ F_{yy}(x,y,\lambda) &= -\lambda\,\frac{1}{y^2} &&\Rightarrow \quad F_{yy}\left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right) > 0 \end{aligned}$$

Daher haben wir für $(x_0,y_0,\lambda_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}, -20\,e^{\frac{r}{1.6}}\right)$:

$$\begin{aligned} &2\,\varphi_x(x_0,y_0)\,\varphi_y(x_0,y_0)\,\underbrace{F_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{=0}\\ &\qquad -\underbrace{F_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{>0}\,\varphi_y(x_0,y_0)^2 - \underbrace{F_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)}_{>0}\,\varphi_x(x_0,y_0)^2 < 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $(x_0,y_0) = \left(e^{\frac{r}{1.6}}, e^{\frac{r}{1.6}}\right)$ ein lokales Minimum der Optimierung unter Nebenbedingungen ist.

Frage 1 (c) (5 Punkte)

Um eine Dichtefunktion zu sein, muss f die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Bedingung (i) ist erfüllt, wenn $c \geq 0$. Bedingung (ii) impliziert:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} c^2\,x\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}\,dx + \int_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} \frac{c}{3}\,x^3\,dx \\
&= c^2 \int_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} x\,e^{\frac{1}{2}\,x^2}\,dx + \frac{c}{3} \int_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} x^3\,dx \\
&= c^2 \left[e^{\frac{1}{2}\,x^2}\right]_{\sqrt{2\,\ln(2)}}^{\sqrt{2\,\ln(4)}} + \frac{c}{12} \left[x^4\right]_{\sqrt{2\,\ln(4)}}^{2} \\
&= c^2\,(4-2)) + \frac{c}{12}\,\left(4\,(4-(\ln(4))^2\right) \\
&= 2\,c^2 + \frac{c}{3}\,\left(4-(\ln(4))^2\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$2\,c^2 + \frac{c}{3}\,\left(4-(\ln(4))^2\right) - 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen:

$$c_{1,2} = \frac{-\frac{1}{3}\,\left(4-(\ln(4))^2\right) \pm \sqrt{\frac{1}{9}\,\left(4-(\ln(4))^2\right)^2 + 8}}{4}.$$

Wir erhalten $c_1 \approx 0.5548$ und $c_2 \approx -0.9012$. Die Lösung c_2 muss ausgeschlossen werden, da Bedingung (i) nicht erfüllt ist. Daher:

$$c = c_1 \approx 0.5548.$$

Frage 1 (d) (5 Punkte)

Zuerst schreiben wir das Integral wie folgt um:

$$\int_1^e x^4 \, \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right) \, dx = \int_1^e x^4 \, \ln\left(x^{-20}\right) \, dx = \int_1^e x^4 \, (-20) \, \ln(x) \, dx = -20 \int_1^e x^4 \, \ln(x) \, dx.$$

In einem zweiten Schritt berechnen wir das Integral $\int_1^e x^4 \, \ln(x) \, dx$. Wir wenden das Verfahren der partiellen Integration an. Seien $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = x^4$. Dann sind $u'(x) = \frac{1}{x}$ und $v(x) = \frac{1}{5} x^5$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int_1^e \underbrace{x^4}_{=v'(x)} \, \underbrace{\ln(x) \, dx}_{=u(x)} \\
&= \Big[\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} \, \underbrace{\frac{1}{5} x^5}_{=v(x)}\Big]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{1}{5} x^5}_{=v(x)} \, \underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)} \, dx \\
&= \frac{1}{5} \left[\ln(x) \, x^5\right]_1^e - \frac{1}{5} \int_1^e x^4 \, dx \\
&= \frac{1}{5} \left[\ln(x) \, x^5\right]_1^e - \frac{1}{5} \left[\frac{1}{5} x^5\right]_1^e \\
&= \frac{1}{5} \left(\underbrace{\ln(e)}_{=1} \, e^5\right) - \frac{1}{5} \left(\underbrace{\ln(1)}_{=0} \, 1^5\right) - \frac{1}{25} \left(e^5 - 1^5\right) \\
&= \frac{1}{5} \cdot e^5 - \frac{1}{25} e^5 + \frac{1}{25} \\
&= \frac{4}{25} \cdot e^5 + \frac{1}{25} \\
&\approx 23.786.
\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir

$$\int_1^e x^4 \, \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right) \, dx = -20 \int_1^e x^4 \, \ln(x) \, dx = -\frac{16}{5} \cdot e^5 - \frac{4}{5} \approx -475.722.$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)

Die Matrix $A^T A$ ist regulär genau dann, wenn $\det(A^T A) \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & a \\ 1+a & a & 1+a^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Deshalb erhalten wir

$$\det(A^T A) = 2\,(a^2+1) + a\,(1+a) + a\,(1+a) - (1+a)^2 - 2\,a^2 - (1+a^2) = 0.$$

Es folgt, dass $A^T A$ singulär für alle $a \in \mathbb{R}$ ist.

Frage 2 (b) (7 Punkte)

Wir wenden das Gauss-Verfahren an:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} :(2) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ -\frac{1}{2}\,(II) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(III) \\ \\ +2\,(III) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Frage 2 (c) (6 Punkte)

Die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x, y)^T = (1, 1)^T$ ist gegeben durch

$$\mathbf{grad} f(1, 1).$$

Daher ist die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x, y)^T = (1, 1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert, mit

$$\lambda\, \mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 1).$$

Folgendes gilt:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{a\,x^2\,y + a^2\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,a\,x\,y \\ a\,x^2 + 2\,a^2\,y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2\,y + a\,y^2} \begin{pmatrix} 2\,x\,y \\ x^2 + 2\,a\,y \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1, 1) = \frac{1}{1 + a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2\,a \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\, \mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 1) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda \begin{pmatrix} 0.5\,\sqrt{e} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + a} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + 2\,a \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\quad & \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda\, 0.5\,\sqrt{e} & = & \frac{2}{1+a} \\ \lambda\,\sqrt{e} & = & \frac{1+2\,a}{1+a} \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{2}{1 + a} = \frac{1}{2}\,\frac{1 + 2\,a}{1 + a} \\
\Leftrightarrow\quad & 4 = 1 + 2\,a \\
\Leftrightarrow\quad & a = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Frage 2 (d) (10 Punkte)

Wir wenden das Gauss-Verfahren an:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 1 & 0 & 3\,m & m^2 \\ 0 & 1 & m & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -(I) \\ \\ \end{array} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2-m \\ 0 & 1 & m & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (II) \leftrightarrow (III) \\ (III) \leftrightarrow (II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\,m & 2 & m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & -2\,m & 3\,m-2 & m^2-m \end{array}\right) \begin{array}{c} -2\,m\,(II) \\ \\ +2\,m\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2\,m^2 & m-4\,m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 3\,m-2+2\,m^2 & m^2-m+4\,m \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-2\,m^2 & -3\,m \\ 0 & 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & 2\,m^2+3\,m-2 & m^2+3\,m \end{array}\right)$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu

$$2\,m^2 + 3\,m - 2 \neq 0.$$

Es gilt:

$$2\,m^2 + 3\,m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\,(m+2)\left(m - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{2} \text{ or } m_2 = -2.$$

Daher hat das lineare Gleichungssystem genau dann eine Lösung, wenn $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= \left|\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 2 & 3\\1 & 8 & 6\end{pmatrix}\right|\\ &= 1\cdot 2\cdot 6 + 4\cdot 3\cdot 1 + 0 - 0 - 1\cdot 3\cdot 8\\ &= 12 + 12 - 24\\ &= 0.\end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A.

Ein Eigenvektor $\mathbf{x}$ zum Eigenwert $\lambda = 0$ löst das System

$$A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir wenden das Gauss-Verfahren an und erhalten:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 2 & 3\\1 & 8 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ -(I)\end{matrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 2 & 3\\0 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ :(2) \\ \end{matrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\0 & 1 & \frac{3}{2}\\0 & 4 & 6\end{pmatrix}\begin{matrix}-4\,(II)\\ \\ -4\,(II)\end{matrix}$$
$$\to \begin{pmatrix}1 & 0 & -6\\0 & 1 & \frac{3}{2}\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & - & 6\,x_3 & = & 0\\ & & x_2 & + & \frac{3}{2}\,x_3 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & 6\,x_3\\ x_2 & = & -\frac{3}{2}\,x_3\end{array}\right. .$$

Sei $\frac{1}{2}\,x_3 = t$ die freie Variable. Wir erhalten:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\,t\\-3\,t\\2\,t\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}12\\-3\\2\end{pmatrix}.$$

Um einen Eigenvektor mit Länge 12 zu erhalten, brauchen wir:

$$12 = |\mathbf{x}| = \sqrt{(12\,t)^2 + (-3\,t)^2 + (2\,t)^2} = \sqrt{157\,t^2} = |t|\,\sqrt{57}\,|t|.$$

Daraus folgt

$$|t| = \frac{12}{\sqrt{157}} \Leftrightarrow t \in \{-\frac{12}{\sqrt{157}}, \frac{12}{\sqrt{157}}\}.$$

Frage 3 (a2) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 8 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (1-\lambda)\,(2-\lambda)\,(6-\lambda) + 12 - 24\,(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\,(12 - 8\,\lambda + \lambda^2) - 12 + 24\,\lambda \\
&= 12 - 8\,\lambda + \lambda^2 - 12\,\lambda + 8\,\lambda^2 - \lambda^3 - 12 + 24\,\lambda \\
&= 4\,\lambda + 9\,\lambda^2 - \lambda^3 \\
&= \lambda\,(4 + 9\,\lambda - \lambda^2).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ oder } \lambda_2 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \text{ oder } \lambda_3 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Daraus folgt, dass die Eigenwerte von A $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{97}}{2} \approx -0.424$ und $\lambda_3 = \frac{9}{2} + \frac{\sqrt{97}}{2} \approx 9.424$ sind.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)

Zunächst ermitteln wir die Normalform der Differenzengleichung. Es gilt:

$$y_{k+1} = \frac{a+3}{a}\, y_k + \frac{2}{a}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Das heisst, die Koeffizienten sind

$$A = \frac{a+3}{a} \text{ und } B = \frac{2}{a}.$$

Wir erhalten:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{2}{a}}{1 - \frac{a+3}{a}} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{a-(a+3)}{a}} = -\frac{2}{3}.$$

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung lautet:

$$y_k = A^k \left(y_0 - y^\star\right) + y^\star = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}.$$

Frage 3 (b2) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann monoton, wenn $A > 0$. Es gilt:

$$A > 0 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a} > 0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $a > 0$: $\frac{a+3}{a} > 0 \Leftrightarrow a + 3 > 0 \Leftrightarrow a > -3$;

(ii) $a < 0$: $\frac{a+3}{a} > 0 \Leftrightarrow a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -3$;

Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung genau dann monoton ist, wenn $a \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$.

Frage 3 (b3) (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |A| < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a+3}{a}\right| < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{a+3}{a}\right|^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{(a+3)^2}{a^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 6\,a + 9 < a^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 6\,a + 9 < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a < -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Folglich ist die allgemeine Lösung genau dann konvergent, wenn $a \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \setminus \{-3\}$.

Frage 3 (b4) (4 Punkte)

Lösung 1:
Aus Frage 3 (b1) wissen wir, dass

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}.$$

Es gilt

$$y_k + \frac{2}{3} = \left(\frac{a+3}{a}\right)^k \left(y_0 + \frac{2}{3}\right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} y_5 + \frac{2}{3} &= \left(\frac{a+3}{a}\right)^5 \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) \\ y_7 + \frac{2}{3} &= \left(\frac{a+3}{a}\right)^7 \left(y_0 + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichungen durcheinander teilen, erhalten wir:

$$\frac{y_7 + \frac{2}{3}}{y_5 + \frac{2}{3}} = \left(\frac{a+3}{a}\right)^2 = \frac{(a+3)^2}{a^2}.$$

Da

$$\frac{y_7 + \frac{2}{3}}{y_5 + \frac{2}{3}} = \frac{7 + \frac{2}{3}}{5 + \frac{2}{3}} = \frac{23}{17},$$

erhalten wir:

$$\frac{23}{17} = \frac{(a+3)^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{23}{17}\,a^2 = a^2 + 6\,a + 9 \Leftrightarrow \frac{6}{17}\,a^2 - 6\,a - 9 = 0 \Leftrightarrow 2\,a^2 - 34\,a - 51 = 0.$$

Die Lösungen sind:

$$a_{12} = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-51)}}{4} = \frac{34 \pm \sqrt{1,564}}{4} = \frac{17 \pm \sqrt{391}}{2},$$

d. h., $a_1 \approx 18.387$ und $a_2 \approx -1.387$.

Lösung 2:
Aus der Rekursion

$$a\,y_{k+1} - (a+3)\,y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} a\,y_7 - (a+3)\,y_6 &= 2 \\ a\,y_6 - (a+3)\,y_5 &= 2 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a, die zweite Gleichung mit $(a + 3)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} a^2\, y_7 - a\,(a+3)\, y_6 &= 2\,a \\ a\,(a+3)\, y_6 - (a+3)^2\, y_5 &= 2\,(a+3) \end{aligned}$$

Dann addieren wir diese beiden Gleichungen und erhalten:

$$\begin{aligned} & a^2\, y_7 - a\,(a+3)\, y_6 + a\,(a+3)\, y_6 - (a+3)^2\, y_5 = 2\,a + 2\,(a+3) \\ \Leftrightarrow \quad & a^2\, y_7 - (a+3)^2\, y_5 = 2\,a + 2\,(a+3) \\ \Leftrightarrow \quad & 7\,a^2 - 5\,(a+3)^2 = 4\,a + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 7\,a^2 - 5\,a^2 - 30\,a - 45 = 4\,a + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,a^2 - 34\,a - 51 = 0 \text{ (dieselbe Gleichung wie in Lösung 1).} \end{aligned}$$

Teil I: Multiple-choice Fragen

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☒	☐	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1 (d). Eine Dichtefunktion h in $\mathbb{R}$ muss die zwei Bedingungen $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 1$ erfüllen. Nur die Funktion in (d) erfüllt diese Bedingungen.

Q2 (c). Da $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$, folgt $\int_0^{4\pi} \cos(x)\,dx = \sin(4\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$.

Q3 (d). Da A regulär ist, gilt $\det(A) \neq 0$. Da allerdings $\det(A) = \det(B)\,\det(C)$, gilt $\det(A) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(B) \neq 0$ und $\det(C) \neq 0$. Daher müssen B und C regulär sein.

Q4 (b). B und B^{-1} sind reguläre Matrizen derselben Dimension. Daher haben sie denselben Rang.

Q5 (a). Da $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b})$, kann $\mathbf{b}$ nicht als Linearkombination der Spaltenvektoren von A geschrieben werden. Daher hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Q6 (c). Da $\det(A) \neq 0$, ist A regulär mit $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Q7 (d). 5 Vektoren in einem 4-dimensionalen Raum sind linear abhängig. Daher muss die korrespondierende Matrix singulär sein.

Q8 (c). Die Normalform der Differenzengelichung lautet $y_{k+1} = -\frac{2}{5}\,y_k - \frac{1}{5}$, d. h., $A = -\frac{2}{5}$ und $B = -\frac{1}{5}$. Da $-1 < A < 0$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem konvergiert die allgemeine Lösung zu $y^\star = \frac{B}{1-A} = -\frac{1}{7}$.

Frühling 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Musterlösungen Prüfung Frühlingssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

23. Juni 2014

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 1 - \frac{a^4}{x^2\, y^2}, \\ f_y(x,y) &= 2 - 2\,\frac{a^4}{x\, y^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^4}{(x^\star)^2\,(y^\star)^2} = 0 \\ 2 - 2\,\frac{a^4}{x^\star\,(y^\star)^3} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2 - 2\,\frac{a^4}{x^\star\,(y^\star)^3} = 0$ erhalten wir

$$x^\star = \frac{a^4}{(y^\star)^3}.$$

Wir setzen dieses Resultat in $1 - \frac{a^4}{(x^\star)^2\,(y^\star)^2} = 0$ ein und erhalten

$$1 - \frac{a^4}{\frac{a^8}{(y^\star)^6}\,(y^\star)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{(y^\star)^4}{a^4} = 0 \Leftrightarrow y^\star = a \text{ oder } y^\star = -a.$$

Daraus folgt:

$$P_1 = (a,a) \text{ und } P_2 = (-a,-a)$$

sind stationäre Punkte, d.h. Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum},$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum},$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt}.$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{2\,a^4}{x^3\,y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{6\,a^4}{x\,y^4}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{2\,a^4}{x^2\,y^3}. \end{aligned}$$

Für $P_1 = (a,a)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{r} f_{xx}(a,a) = \frac{2}{a} > 0 \\ f_{yy}(a,a) = \frac{6}{a} > 0 \\ f_{xx}(a,a)\,f_{yy}(a,a) - (f_{xy}(a,a))^2 = \frac{12}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{8}{a^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daraus folgt, dass $P_1 = (a,a)$ ein Minimum ist.

Für $P_2 = (-a,-a)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{r} f_{xx}\left(-a,-a\right) = -\frac{2}{a} < 0 \\ f_{yy}\left(-a,-a\right) = -\frac{6}{a} < 0 \\ f_{xx}\left(-a,-a\right)\; f_{yy}\left(-a,-a\right) - \left(f_{xy}\left(-a,-a\right)\right)^2 = \frac{12}{a^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{8}{a^2} > 0 \end{array} \right. .$$

Daraus folgt, dass $P_2 = (-a,-a)$ ein Maximum ist.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x + \ln(y^2) + \lambda(x^2 + y^2 - 20). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 1 + 2\,\lambda\,x = 0, \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{y} + 2\,\lambda\,y = 0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 - 20 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir

$$-1 = 2\,\lambda\,x. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$-\frac{2}{y} = 2\,\lambda\,y. \tag{V}$$

Dividieren wir (IV) durch (V) ergibt dies

$$\frac{y}{2} = \frac{x}{y},$$

d.h.

$$y^2 = 2\,x. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$x^2 + y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\,x - 20 = 0.$$

Da $2\,x = y^2$ (cf. VI) und $y^2 > 0$ (sonst wäre $\ln(y^2)$ nicht definiert) ist gilt $x > 0$. Daraus folgt:

$$x = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{84}}{2} = -1 + \sqrt{21} = \sqrt{21} - 1.$$

Nutzen wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$y^2 = 2\,x = 2\,\sqrt{21} - 2,$$

d.h.

$$y = \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2} \text{ oder } y = -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{21} - 1, \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}\right) \text{ und } P_2 = \left(\sqrt{21} - 1, -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}\right)$$

Kandidaten für Extremalstellen von f unter der o. g. Nebenbedingung.

<u>Substitutionsmethode:</u>
Wir benutzen die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$, um y als Funktion von x zu erhalten, d.h. $y^2 = 20 - x^2$. Ausserdem, da $y^2 > 0$ ($y = 0$ ist ausgeschlossen, da andernfalls $\ln(y^2)$ nicht definiert wäre), gilt $20 - x^2 > 0$, d.h. $-\sqrt{20} < x < \sqrt{20}$. Wir ersetzen nun y^2 durch $20 - x^2$ im Ausdruck für f, d.h. wir definieren die Funktion h als

$$h(x) = f(x, 20 - x^2) = x + \ln(20 - x^2).$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $x^2+y^2-20 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ für eine Extremalstelle x von h. Es gilt:

$$h'(x) = 1 - \frac{2\,x}{20 - x^2}.$$

Daraus folgt:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2\,x}{20 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\,x - 20 = 0 \overset{x\in(-\sqrt{20},\sqrt{20})}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{21} - 1.$$

Unter Verwendung von $y^2 = 20 - x^2$ erhalten wir

$$y = \sqrt{2\sqrt{21} - 2} \text{ oder } y = -\sqrt{2\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{21} - 1, \sqrt{2\sqrt{21} - 2}\right) \text{ und } P_2 = \left(\sqrt{21} - 1, -\sqrt{2\sqrt{21} - 2}\right)$$

Kandidaten für eine Extremalstelle von f unter der o. g. Nebenbedingung.

(c) (5 Punkte)

Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion auf $[1, e]$ sind:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, e]$;

(ii) $\int_1^e f(x)\,dx = 1$.

Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_1^e f(x)dx \\ &= \int_1^e \left[c + \frac{\sin(\ln(x))}{x}\right] dx \\ &= \int_1^e c\,dx + \int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx \\ &= c\,(e-1) + \int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Wir setzen $y = \ln(x)$, somit ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Es gilt:

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx = \int_0^1 \sin(y)\,dy = [-\cos(y)]_0^1 = 1 - \cos(1).$$

Daraus folgt:

$$1 = c\,(e-1) + 1 - \cos(1) \Leftrightarrow c = \frac{\cos(1)}{e-1}.$$

Da für $c = \frac{\cos(1)}{e-1}$ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, e]$ gilt, ist Bedingung (i) auch erfüllt. Daher muss

$$c = \frac{\cos(1)}{e-1}$$

sein, damit f eine Dichtefunktion auf $[1, e]$ ist.

(d) (5 Punkte)

Es gilt:

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) dx = \int x^n \ln(x^{-m})\, dx = \int x^n\, (-m) \ln(x)\, dx = -m \int x^n \ln(x)\, dx.$$

Wir berechnen das Integral $\int x^n \ln(x)\, dx$ mit der Methode der partiellen Integration. Sei

$$u(x) = \ln(x)$$

und

$$v'(x) = x^n.$$

Dann gilt:

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^n}_{=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} dx \\
&= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) dx = -m \int x^n \ln(x)\, dx = \frac{-m\, x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Das System der Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn die Matrix

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & a+1 \end{pmatrix}$$

mit den Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ singulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 2 & b \\ a & a+1 \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,(a+1) - a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2\,a + 2 - a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a\,(2-b) = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad a = \frac{2}{b-2} \text{ und } b \neq 2. \\ (\quad &\Leftrightarrow \quad b = \frac{2\,a+2}{a} \text{ und } a \neq 0.) \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ ist linear abhängig} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, b \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\, a = \frac{2}{b-2} \right\}.$$

Oder:

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \text{ ist linear abhängig} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\, b = \frac{2\,a+2}{a} \right\}.$$

(b) (4 Punkte)

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\,I) = \det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} a & 2\,a \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a\,(a+2) - 2\,a\,(a+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + 2\,a - 2\,a^2 - 2\,a = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -a^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 0. \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $a = 0$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (6 Punkte)

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x, y)^T = (1, 0.5)^T$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 0.5)$$

mit $\lambda > 0$.

Es gilt:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + a\,y^2 + 3\,x + 8\,y} \begin{pmatrix} 6\,a\,x + a^2\,y + 3 \\ a^2\,x + 2\,a\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1, 0.5) = \frac{1}{3\,a + 0.5\,a^2 + 0.25\,a + 7} \begin{pmatrix} 6\,a + 0.5\,a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1, 0.5) \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{3\,a + 0.5\,a^2 + 0.25\,a + 7} \begin{pmatrix} 6\,a + 0.5\,a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow\quad & \frac{\lambda\,\pi}{\lambda\,2\,\pi} = \frac{6\,a + 0.5\,a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2} = \frac{6\,a + 0.5\,a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\ \Leftrightarrow\quad & 12\,a + a^2 + 6 = a^2 + a + 8 \\ \Leftrightarrow\quad & 11\,a = 2 \\ \Leftrightarrow\quad & a = \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x, y)^T = (0.5, 1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben ist, wenn $a = \frac{2}{11}$.

(d) (10 Punkte)

Wir wenden das Gauß-Verfahren an:

$$
\begin{array}{rcl}
(A, \mathbf{b}) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & m^2 \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 1 & 0 & 2\,m & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \end{array} \end{array} \\[2ex]
 & = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & m^2 \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & -m & 2\,m-3 & 3-m^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -m\,(II) \\ \\ +m\,(II) \end{array} \end{array} \\[2ex]
 & \to & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m^2 & m^2 - m\,(m+1) \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & 0 & 2\,m - 3 + m^2 & 3 - m^2 + m\,(m+1) \end{array}\right) \end{array} \\[2ex]
(A^\star \mathbf{b}^\star) & = & \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-m^2 & -m \\ 0 & 1 & m & m+1 \\ 0 & 0 & m^2 + 2\,m - 3 & 3+m \end{array}\right) \end{array} .
\end{array}
$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^\star) < \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star)$, d.h.

$$m^2 + 2\,m - 3 = 0 \text{ und } 3 + m \neq 0.$$

Es gilt:

$$m^2 + 2\,m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m+3)\,(m-1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = -3 \text{ oder } m_2 = 1.$$

Da $3 + m_1 = 0$ und $3 + m_2 \neq 0$ ist, hat das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung, wenn $m = m_2 = 1$.

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (d). Da das lokale Maximum im Punkt $P = (0, 1)$ die Nebenbedingung $x + y = 1$ erfüllt, ist es auch ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung. Der Punkt $P = (0, 1)$ hingegen erfüllt die Nebenbedingung $2\,x + y = 0$ nicht; deshalb sind (a) und (c) falsch. Ein lokales Maximum ohne Nebenbedingung schliesslich kann nicht zugleich ein lokales Minimum unter einer Nebenbedingung sein; daher ist (b) ebenfalls falsch.

Q2. (c). Nur g_3 erfüllt die Bedingungen für eine Dichtefunktion g auf $[0, 10]$ $g(x) \geq 0$ für $x \in [0, 10]$ und $\int_0^1 g(x)\,dx = 1$.

Q3. (b). Da A die Dimension 6×3 hat, ist $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Da A eine reguläre 3×3 Untermatrix hat, gilt $\mathrm{rg}(A) \geq 3$. Daher ist $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Q4. (d). Da $\det(A) \neq 0$, ist A invertierbar. Ausserdem ist $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1$.

Q5. (b). Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind immer linear abhängig.

Q6. (c). Da $\mathrm{rg}(A) = 5 < n = 10$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$ ist, hat das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendliche viele Lösungen. Der Lösungsraum hat die Dimension $n - \mathrm{rg}(A) = 10 - 5 = 5$.

Q7. (c). Es gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2 < 3 = n$ und $\mathrm{rg}(A, b) = \mathrm{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = 2 = \mathrm{rg}(A)$. Daher hat das System unendlich viele Lösungen.

Q8. (b). Da $A^3\,\mathbf{x} = A^2\,(A\,\mathbf{x}) = A^2\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A^2\,\mathbf{x} = \lambda\,A\,(A\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda^2\,A\,\mathbf{x} = \lambda^2\,\lambda\,\mathbf{x} = \lambda^3\,\mathbf{x}$ ist λ^3 ein Eigenwert von A^3 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (d). Es gilt $K(x) = \int K'(x)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Ausserdem $20 = K(0) = -1 + C$. Daher ist $C = 21$.

Q2. (b). Die Vektoren sind genau dann orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Das Skalarprodukt beträgt $1 \cdot 0 + t \cdot t + 3 \cdot (-5) + (-5) \cdot 2 = t^2 - 25$. Daher ist das Skalarprodukt genau dann null, wenn $t \in \{-5, 5\}$.

Q3. (c). Die 4×4 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist regulär, da

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 4 \neq 0.$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A) \geq 4$. Da A die Dimension 4×5 hat, ist $\mathrm{rg}(A) \leq 4$. Daher gilt $\mathrm{rg}(A) = 4$.

Man kann den Rang von A auch mit Hilfe des Gauß-Verfahrens bestimmen (dies ist jedoch zeitaufwändiger):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(II) \\ \\ +(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(4) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

Q4. (c). In Matrizennotation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(A) = 4$ ist, ist A regulär und wir können die Cramersche Regel anwenden, um das System zu lösen. Es gilt:

$$x_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{9}{4},$$

$$x_2 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{-1}{4},$$

und

$$x_3 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{-3}{4}.$$

Q5. (b). λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, I) &= \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] \\ &= (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\,\lambda) \\ &= \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Daher sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$ die Eigenwerte von A.

Q6. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{2}{3}\, y_k - \frac{5}{3}.$$

Daraus folgt, dass $A = \frac{2}{3}$ und $B = -\frac{5}{3}$. Da $A \in (0,1)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = -\frac{1}{2}\, y_k + 3.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{1}{2} \neq 1$ und $B = 3$. Da $A \in (-1,0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{3}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2.$$

Q8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{1}{a+2}\, y_k - \frac{a^2-4}{a+2},$$

d.h. $A = \frac{1}{a+2}$ und $B = -\frac{a^2-4}{a+2} = 2 - a$. Da $a \neq -1$ isst, ist $A \neq 1$, und eine notwendige Bedingung für Konvergenz der allgemeinen Lösung ist

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = -\frac{a^2-4}{a+1}.$$

Eine notwendige Bedingung dafür, dass die allgemeine Lösung gegen 0 konvergiert, ist $y^\star = 0$, d.h. $a = 2$ oder $a = -2$ ist. Da per Definition der Differenzengleichung $a \neq -2$, erfüllt nur $a = 2$ die notwendige Bedingung. Für $a = 2$ überprüfen wir nun die hinreichende Bedingung $A \in (0,1)$ für monotone Konvergenz der allgemeinen Lösung. Es gilt:

$$A = \frac{1}{a+2} \overset{a=2}{=} \frac{1}{4} \in (0,1).$$

Mathematik II
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

4. Februar 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2 - 2\,\frac{b^4}{x^2\,y^2}, \\ f_y(x, y) &= 4 - 4\,\frac{b^4}{x\,y^3}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0 \\ 4 - 4\,\frac{b^4}{x_0\,y_0^3} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0$, erhalten wir

$$x_0^2\,y_0^2 = b^4.$$

Aus $4 - 4\,\frac{b^4}{x_0\,y_0^3} = 0$ erhalten wir $x_0\,y_0^3 = b^4$. Daraus folgt:

$$x_0^2\,y_0^2 = x_0\,y_0^3 \overset{x_0 \neq 0, y_0 \neq 0}{\Leftrightarrow} x_0 = y_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $2 - 2\,\frac{b^4}{x_0^2\,y_0^2} = 0$ ein und erhalten

$$x_0^4 = b^4 \Leftrightarrow x_0 = b \text{ oder } x_0 = -b.$$

Daraus folgt:

$$P_1 = (b, b) \text{ und } P_2 = (-b, -b)$$

sind stationäre Punkte, d.h., Kandidaten für Maxima, Minima oder Sattelpunkte.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\,f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum},$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\,f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Maximum},$$

und

$$f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0)-(f_{xy}(x_0,y_0))^2<0 \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{4\,b^4}{x^3\,y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{12\,b^4}{x\,y^4}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{4\,b^4}{x^2\,y^3}. \end{aligned}$$

Für $P_1=(b,b)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(b,b)=\frac{4}{b}>0 \\ f_{yy}(b,b)=\frac{12}{b}>0 \\ f_{xx}(b,b)\,f_{yy}(b,b)-(f_{xy}(b,b))^2=\frac{48}{b^2}-\frac{16}{b^2}=\frac{32}{b^2}>0 \end{array} \right. .$$

Daher ist $P_1=(b,b)$ ein Minimum.

Für $P_2=(-b,-b)$ erhalten wir:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}\,(-b,-b)=-\frac{4}{b}<0 \\ f_{yy}\,(-b,-b)=-\frac{12}{b}<0 \\ f_{xx}\,(-b,-b)\;f_{yy}\,(-b,-b)-(f_{xy}\,(-b,-b))^2=\frac{48}{b^2}-\frac{16}{b^2}=\frac{32}{b^2}>0 \end{array} \right. .$$

Daher ist $P_2=(-b,-b)$ ein Maximum.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y) \\ &= \ln(x^4)+2\,y+\lambda\,\left(x^2+y^2-20\right) \\ &= 4\,\ln(x)+2\,y+\lambda\,\left(x^2+y^2-20\right). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{4}{x}+2\,\lambda\,x=0, \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda)=0 \quad\Rightarrow\quad 2+2\,\lambda\,y=0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 20 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir

$$2\,\lambda\,x^2 = -4. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$2\,\lambda\,y = -2. \tag{V}$$

Gleichung (V) impliziert, dass $y \neq 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{2\,\lambda\,x^2}{2\,\lambda\,y} = \frac{-4}{-2},$$

d.h.

$$x^2 = 2\,y. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$2\,y + y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\,y - 20 = 0.$$

Da $x^2 = 2\,y$ (cf. VI) und $x^2 > 0$ (sonst wäre $\ln(x^4)$ nicht definiert), gilt $y > 0$. Daraus folgt:

$$y = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{84}}{2} = -1 + \sqrt{21} = \sqrt{21} - 1.$$

Verwenden wir nochmals (VI), erhalten wir:

$$x^2 = 2\,y = 2\,\sqrt{21} - 2,$$

d.h.,

$$x = \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2} \text{ oder } x = -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right) \text{ und } P_2 = \left(-\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right)$$

Kandidaten für Extremalstellen von f unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:
Wir verwenden die Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$, um x^2 als eine Funktion von y zu erhalten, d.h. $x^2 = 20 - y^2$. Ausserdem, da $x^2 > 0$ ($x = 0$ ist ausgeschlossen, da andernfalls $\ln(x^4)$ nicht definiert wäre), gilt $20 - y^2 > 0$, d.h. $-\sqrt{20} < y < \sqrt{20}$. Wir ersetzen nun x^2 durch $20 - y^2$ im Ausdruck für f, d.h., wir definieren die Funktion h als

$$h(y) = \ln((20 - y^2)^2) + 2\,y = 2\,\ln(20 - y^2) + 2\,y.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 20 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(y) = 0$

für eine Extremalstelle y von h. Es gilt:

$$h'(y) = -\frac{4\,y}{20 - y^2} + 2.$$

Daraus folgt:

$$h'(y) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4\,y}{20-y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow -4\,y + 2\,(20 - y^2) = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2\,y - 20 = 0 \overset{y \in (-\sqrt{20}, \sqrt{20})}{\Leftrightarrow} y = \sqrt{21} - 1.$$

Unter Verwendung von $x^2 = 20 - y^2$ erhalten wir

$$x = \sqrt{2\,\sqrt{21} - 2} \text{ oder } x = -\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}.$$

Daher sind

$$P_1 = \left(\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right) \text{ und } P_2 = \left(-\sqrt{2\,\sqrt{21} - 2}, \sqrt{21} - 1\right)$$

Kandidaten für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

(c) (5 Punkte)
Die zwei Bedingungen für eine Dichtefunktion in $\mathbb{R}$ lauten:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

Für (ii) muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_{\ln(0.5)+\ln(\pi)}^{\ln(\pi)} c\,\sin\left(e^x\right)\,e^x\,dx \\ &= c\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin\left(e^x\right)\,e^x\,dx. \end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin\left(e^x\right)\,e^x\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsregel. Wir setzen $y = e^x$; somit ist $\frac{dy}{dx} = e^x$. Es gilt:

$$c\int_{\ln(0.5\,\pi)}^{\ln(\pi)} \sin\left(e^x\right)\,e^x\,dx = c\int_{0.5\,\pi}^{\pi} \sin(y)\,dy = c\,\left[-\cos(y)\right]_{0.5\,\pi}^{\pi} = c.$$

Daraus folgt:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow c = 1.$$

Da für $c = 1$ $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist Bedingung (i) auch erfüllt. Daher muss

$$c = 1$$

sein, damit f eine Dichtefunktion in $\mathbb{R}$ ist.

(d) (5 Punkte)

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int x^n \left[\ln(x^m) - \ln(x^{m+2})\right] dx &= \int x^n \ln\left(\frac{x^m}{x^{m+2}}\right) dx \\
&= \int x^n \ln\left(x^{-2}\right) dx \\
&= -2 \int x^n \ln(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Wir berechnen das Integral $\int x^n \ln(x)\, dx$ mit der Methode der partiellen Integration. Es sei

$$u(x) = \ln(x)$$

und

$$v'(x) = x^n.$$

Ausserdem:

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^n}_{=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} dx \\
&= \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{=v(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'(x)} dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n\, dx \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) - \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\int x^n \left[\ln(x^m) - \ln(x^{m+2})\right] dx = -2 \int x^n \ln(x)\, dx = \frac{-2\, x^{n+1}}{n+1} \left[\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right] + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Die Matrix

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] = \begin{pmatrix} 2 & 2\,b \\ a & 2\,a+2 \end{pmatrix}$$

mit den Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ ist genau dann singulär, wenn $\det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist singulär } &\Leftrightarrow \det(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} 2 & 2\,b \\ a & 2\,a+2 \end{pmatrix}\right| = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,(2\,a+2) - 2\,a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\,a + 4 - 2\,a\,b = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\,a\,(2-b) = -4 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{2}{b-2} \text{ und } b \neq 2. \end{aligned}$$

Deshalb gilt:

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2] \text{ ist singulär} \Leftrightarrow (a,b) \in \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \,:\, b \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\, a = \frac{2}{b-2} \right\}.$$

(b) (4 Punkte)

$\lambda = 0$ ist genau dann ein Eigenwert von A^5, wenn $\det(A^5 - \lambda\, I) = \det(A^5) = (\det(A))^5 = 0$. Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A^5, wenn $\det(A) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) = 0 &\Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} a+1 & 2\,a \\ a+3 & a \end{pmatrix}\right| = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+1)\,a - 2\,a\,(a+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 + a - 2\,a^2 - 6\,a = 0 \\ &\Leftrightarrow -a^2 - 5\,a = 0 \\ &\Leftrightarrow -a\,(a+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow a \in \{-5, 0\}. \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = 0$ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $a \in \{-5, 0\}$.

(c) (6 Punkte)

Die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2) + \ln(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2\,\pi) \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1)$$

mit $\lambda > 0$.

Es gilt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix} = e^{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + \frac{1}{2}\,a\,y^2 + 3\,x + 8\,y} \begin{pmatrix} 6\,a\,x + a^2\,y + 3 \\ a^2\,x + a\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = e^{3\,a + a^2 + \frac{1}{2}\,a + 11} \begin{pmatrix} 6\,a + a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix}.$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned}
&\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(1,1) \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2\,\pi) \end{pmatrix} = e^{3\,a + a^2 + \frac{1}{2}\,a + 11} \begin{pmatrix} 6\,a + a^2 + 3 \\ a^2 + a + 8 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow\quad & \frac{\lambda\,\ln(2\,\pi)}{\lambda\,\ln(2\,\pi)} = \frac{6\,a + a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
\Leftrightarrow\quad & 1 = \frac{6\,a + a^2 + 3}{a^2 + a + 8} \\
\Leftrightarrow\quad & a^2 + a + 8 = 6\,a + a^2 + 3 \\
\Leftrightarrow\quad & 5\,a = 5 \\
\Leftrightarrow\quad & a = 1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ genau dann durch den Vektor $\mathbf{n}$ gegeben ist, wenn $a = 1$.

(d) (10 Punkte)
Wir wenden die Gauss-Methode an:

$$(A,\mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & m^2-m-1 & m \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ -(I) \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m^2-m-1 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array} : (-1)$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & m^2-m-1 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ -(II) \\ \\ +(II) \end{array}$$

$$(A^\star \mathbf{b}^\star) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & m^2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2-m-2 & m-m^2 \end{array}\right) \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A,\mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{rg}(A^\star) < \mathrm{rg}(A^\star,\mathbf{b}^\star)$, d.h.,

$$m^2 - m - 2 = 0 \text{ und } m - m^2 \neq 0.$$

Es gilt:

$$m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 2 \text{ or } m_2 = -1.$$

Da $m_1 - m_1^2 = 2 - 4 = -2 \neq 0$ und $m_2 - m_2^2 = -1 - 1 = -2$, hat das lineare Gleichungssystem genau dann keine Lösung, wenn $m \in \{-1, 2\}$.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (b). Da das globale Minimum im Punkt $P = (0, 1)$ die Nebenbedingung $x + y = 1$ erfüllt, ist es auch ein globales Minimum unter der Nebenbedingung. Der Punkt $P = (0, 1)$ hingegen erfüllt die Nebenbedingung $2\,x + y = 0$ nicht; deshalb sind (a) und (c) falsch. Ein Minimum ohne Nebenbedingung schliesslich kann nicht zugleich ein Maximum unter einer Nebenbedingung sein. Daher ist (d) ebenfalls falsch.

Q2. (d). Nur g_4 erfüllt die Bedingungen für eine Dichtefunktion g in $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$.

Q3. (d). Da $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^T)$, ist (a) falsch. Ausserdem sind reguläre und singuläre Matrizen immer quadratische Matrizen; deshalb sind (b) und (c) ebenfalls falsch. Schliesslich muss eine Matrix mit Rang 3 eine reguläre 3×3 Untermatrix haben; daher ist (d) korrekt.

Q4. (a). Da $\det(A\,B) = \det(A)\det(B)$ und $\det(B) = 0$, ist $\det(A\,B) = 0$. Daher ist $A\,B$ singulär. Daraus folgt auch, dass (b), (c) und (d) falsch sind.

Q5. (b). Drei linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$. Daher kann jeder Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ als eindeutige Linearkombination von $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ geschrieben werden.

Q6. (a). Da $5 = \operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A; \mathbf{b}) = 6$ ist, hat das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

Q7. (a). Zunächst stellen wir fest, dass $\operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = 3$, da $b_3^\star \neq 0$. Ausserdem: $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\star) = 2 < 3 = \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) = \operatorname{rg}(A, b)$. Daher hat das System keine Lösung.

Q8. (c). Es gilt:

$$(A\,B)\,\mathbf{x} = A\,(B\,\mathbf{x}) = A\,(\xi\,\mathbf{x}) = \xi\,A\,\mathbf{x} = \xi\,\lambda\,\mathbf{x}.$$

Daher ist $\xi\,\lambda$ ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒

Q1. (d). Es gilt: $K(x) = \int K'(x)\,dx = x + \frac{x^3}{3} + e^x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Ausserdem: $50 = K(0) = e^0 + C = 1 + C$. Daher ist $C = 49$.

Q2. (b). Es gilt:

$$6 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + t^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{t^2 + 35}.$$

Daraus folgt:

$$t^2 + 35 = 36 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t \in \{-1, 1\}.$$

Q3. (c). Wir bestimmen den Rang von A mit Hilfe des gausschen Eliminationsverfahrens:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(2) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(III) \\ -(III) \\ \\ +(III) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

Q4. (d). In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right| = 9 - 2 = 7 \neq 0,$$

ist A regulär und wir können die Cramersche Regel anwenden, um das System zu lösen. Es gilt:

$$x_1 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{9-2-6}{7} = \frac{1}{7},$$

$$x_2 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{3-1+1}{7} = \frac{3}{7},$$

und

$$x_3 = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|}{\det(A)} = \frac{3+2-3}{7} = \frac{2}{7}.$$

Q5. (c). λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (7-\lambda)(-2-\lambda)(-8-\lambda) + 3 \cdot 18\,(-2-\lambda) \\
&= (-2-\lambda)\,[(7-\lambda)(-8-\lambda) + 54] \\
&= (-2-\lambda)(-56+\lambda+\lambda^2+54) \\
&= (-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) \\
&= (-2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1).
\end{aligned}$$

Daher sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$ die Eigenwerte von A.

Q6. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{4}{5}\,y_k - \frac{2}{5}.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{4}{5}$ und $B = -\frac{2}{5}$. Da $A \in (-1, 0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{3}{4}\,y_k + \frac{28}{4} = -\frac{3}{4}\,y_k + 7.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{3}{4} \neq 1$ und $B = 7$. Da $A \in (-1, 0)$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und konvergent. Ausserdem:

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{7}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = 4.$$

Q8. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{a-3}{a}\,y_k + \frac{6}{a},$$

d.h., $A = \frac{a-3}{a}$ und $B = \frac{6}{a}$. Die allgemeine Lösung oszilliert genau dann, wenn $A < 0$. Es gilt:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-3}{a} < 0 \Leftrightarrow a \in (0, 3).$$

Die allgemeine Lösung konvergiert genau dann, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$|A| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-3}{a}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{(a-3)^2}{a^2} < 1 \Leftrightarrow a^2 - 6\,a + 9 < a^2 \Leftrightarrow 6\,a > 9 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}.$$

Daher oszilliert und konvergiert die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann, wenn

$$a \in \left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

Frühling 2015

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

22. Juni 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{14}{y+4} = 3\,x + 14\,(y+4)^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 14\,(y^\star + 4)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 14\,(y^\star + 4)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 14\left(-\frac{2}{3}\,x^\star + 4\right)^{-1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,(x^\star)^2 + 12\,x^\star + 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^\star)^2 - 6\,x^\star - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^\star + 1)\,(x^\star - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star = -1 \text{ oder } x^\star = 7 \end{aligned}$$

Aus $y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star$ folgt $y^\star = \frac{2}{3}$ für $x^\star = -1$, und $y^\star = -\frac{14}{3}$ für $x^\star = 7$. Da $\left(7, -\frac{14}{3}\right) \notin D_f$, ist

$$P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$$

der einzige stationäre Punkte von f, d.h. Kandidat für Maxima, Minima oder Sattelpunkt.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und
$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= 2,\\
f_{yy}(x,y) &= -14\,(y+4)^{-2} = -\frac{14}{(y+4)^2},\\
f_{xy}(x,y) &= 3.
\end{aligned}$$

Für $P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{c}
f_{xx}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = 2 > 0\\
f_{yy}\left(-1, \frac{2}{3}\right) = -\frac{9}{14} < 0\\
f_{xx}\left(-1, \frac{2}{3}\right)\, f_{yy}\left(-1, \frac{2}{3}\right) - \left(f_{xy}\left(-1, \frac{2}{3}\right)\right)^2 = 2\left(-\frac{9}{14}\right) - 3^2 < 0
\end{array}\right. .$$

Daraus folgt, dass $P = \left(-1, \frac{2}{3}\right)$ ein Sattelpunkt ist.

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}
F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y)\\
&= 5\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} + \lambda\left(2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16\right).
\end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{3}\,x^{-\frac{2}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\,\lambda\,x^{-\frac{2}{3}} = 0, \tag{I}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{10}{3}\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}\,\lambda\,y^{-\frac{1}{3}} = 0, \tag{II}$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0. \tag{III}$$

Da $x > 0$, erhalten wir aus (I)
$$5\,y^{\frac{2}{3}} = -2\,\lambda. \tag{IV}$$

Mit $y > 0$ erhalten wir aus (II)
$$5\,x^{-\frac{1}{3}} = -2\,\lambda. \tag{V}$$

Dividieren wir (IV) durch (V) ergibt dies

$$y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}},$$

d.h.

$$x = y^2. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$4\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow y = 8.$$

Da $x = y^2$ (siehe VI) folgt $x = 64$. Daher ist

$$P = (64, 8)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

<u>Substitutionsmethode:</u>
Wir benutzen die Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$, um y als Funktion von x zu erhalten, d.h. $y^{\frac{2}{3}} = 8 - x^{\frac{1}{3}}$. Wir ersetzen nun $y^{\frac{2}{3}}$ im Ausdruck für f durch $8 - x^{\frac{1}{3}}$, d.h. wir definieren die Funktion h als

$$h(x) = 5\,x^{\frac{1}{3}}\left(8 - x^{\frac{1}{3}}\right) = 40\,x^{\frac{1}{3}} - 5\,x^{\frac{2}{3}}.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von f unter der Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von h ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $h'(x) = 0$ für eine Extremalstelle x von h. Es gilt:

$$h'(x) = \frac{40}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}.$$

Daraus folgt:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{40}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{3}} = 4 \Leftrightarrow x = 64.$$

Wegen $y^{\frac{2}{3}} = 8 - x^{\frac{1}{3}}$ erhalten wir

$$y = (8 - 64^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 8.$$

Daher ist

$$P = (64, 8)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

(c) (6 Punkte)

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int x^2\, e^{-6\,x}\, dx$ mit Hilfe der Methode der partiellen Integration. Sei

$$u(x) = x^2$$

und

$$v'(x) = e^{-6\,x}.$$

Dann gilt

$$u'(x) = 2\,x$$

und

$$v(x) = -\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x^2}_{=u(x)}\, \underbrace{e^{-6\,x}}_{=v'(x)}\, dx \\
&= \underbrace{x^2}_{=u(x)}\, \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} - \int \underbrace{2\,x}_{=u'(x)}\, \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)}\, dx \\
&= -\frac{1}{6}\, x^2\, e^{-6\,x} + \frac{1}{3} \int x\, e^{-6\,x}\, dx.
\end{aligned}$$

Um das unbestimmte Integral $\int x\, e^{-6\,x}\, dx$ zu berechnen, verwenden wir erneut partielle Integration. Sei

$$u(x) = x$$

und

$$v'(x) = e^{-6\,x}.$$

Dann gilt

$$u'(x) = 1$$

und

$$v(x) = -\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{x}_{=u(x)}\, \underbrace{e^{-6\,x}}_{=v'(x)}\, dx \\
&= \underbrace{x}_{=u(x)}\, \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)} - \int \underbrace{1}_{=u'(x)} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{6}\, e^{-6\,x}\right)}_{=v(x)}\, dx \\
&= -\frac{1}{6}\, x\, e^{-6\,x} + \frac{1}{6} \int e^{-6\,x}\, dx \\
&= -\frac{1}{6}\, x\, e^{-6\,x} - \frac{1}{36}\, e^{-6\,x} + C.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir:

$$\int x^2 e^{-6x} = -\frac{1}{6} x^2 e^{-6x} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{6} x e^{-6x} - \frac{1}{36} e^{-6x} \right) = -\frac{1}{6} \left(x^2 + \frac{1}{3} x + \frac{1}{18} \right) e^{-6x} + C.$$

Damit können wir nun das bestimmte Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-6x} \, dx &= \left[-\frac{1}{6} \left(x^2 + \frac{1}{3} x + \frac{1}{18} \right) e^{-6x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{25}{108} e^{-6} + \frac{1}{108} \\ &= \frac{1}{108} \left(1 - 25 e^{-6} \right) \\ &\approx 0.0087. \end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = \ln(x)$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

und

$$\frac{1}{x} dx = du.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx = \int \frac{\ln(u)}{u} du.$$

Um dieses Integral zu berechnen, verwenden wir ein weiteres Mal die Substitutionsmethode. Sei $v = \ln(u)$, dann gilt:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}$$

und

$$\frac{1}{u} du = dv.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\ln(u)}{u} du = \int v \, dv = \frac{1}{2} v^2 + C = \frac{1}{2} \left(\ln(u)\right)^2 + C.$$

Insgesamt folgt:

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x \ln(x)} dx = \frac{1}{2} \left(\ln(\ln(x))\right)^2 + C.$$

Aufgabe2

(a) (3 Punkte)

Das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn die Matrix

$$A = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3] = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

mit Spaltenvektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, und $\mathbf{b}_3$ regulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist regulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix} \right| \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t + t^2 + 0 + 1 - 3\,t - 0 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t^2 - 2\,t + 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (t-1)^2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Daher ist das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genau dann linear unabhängig, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(b1) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda\, I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 8 & -4\,a & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\lambda\,(5-\lambda)\,(3-\lambda) - 6\,(3-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)\,(\lambda^2 - 5\,\lambda - 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (3-\lambda)\,(\lambda+1)\,(\lambda-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-1, 3, 6\}. \end{aligned}$$

Daher ist $\lambda = -1$ ein Eigenwert von A.

(b2) (4 Punkte)

$\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = -1$, wenn

$$(A - \lambda I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow (A + I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Wir erhalten also:

$$(A + I)\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 8 & -4\,a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen das System mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$(A, \mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & -4\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -8\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\,a - 48 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (II) \leftrightarrow (III) \\ (III) \leftrightarrow (II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4\,a - 48 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ : (-4) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & a + 12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 6\,x_2 & & & = & 0 \\ & & (a + 12)\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Daher ist $x_2 = t$ eine freie Variable und es gilt $x_1 = -6\,x_2 = -6\,t$ sowie $x_3 = (a{+}12)\,x_2 = (a{+}12)\,t$. Damit ist der zum Eigenwert $\lambda = -1$ gehörige Eigenraum von A gegeben durch:

$$V = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,:\, \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ a + 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) (4 Punkte)

Der Gradient einer Funktion f ist definiert als:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{10\,x}{x^2+y^3} + 7 \\ \frac{15\,y^2}{x^2+y^3} + \frac{a-4}{y} \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 \\ a + \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{grad} f(1,1)\| = 15 \\ \Leftrightarrow\quad & \|\mathbf{grad} f(1,1)\|^2 = 15^2 = 225 \\ \Leftrightarrow\quad & 12^2 + \left(a + \frac{7}{2}\right)^2 = 225 \\ \Leftrightarrow\quad & \left(a + \frac{7}{2}\right)^2 = 225 - 12^2 = 81 = 9^2 \\ \Leftrightarrow\quad & a + \frac{7}{2} = \pm 9 \\ \Leftrightarrow\quad & a \in \left\{-\frac{25}{2}, \frac{11}{2}\right\}. \end{aligned}$$

(d) (9 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A,\mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & a & 10 & 12 \\ 0 & 1 & a & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -3\cdot(I) \\ \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & a-3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & a & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ (II)\leftrightarrow(III) \\ (III)\leftrightarrow(II) \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & a-3 & 4 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(a-3)\cdot(II) \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & 4-a\,(a-3) & -3+3\,(a-3) \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+1)\,(a-4) & 3\,(a-4) \end{array}\right) \end{array}$$

$$(A^\star\mathbf{b}^\star) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2-a & 8 \\ 0 & 1 & a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+1)\,(a-4) & 3\,(a-4) \end{array}\right) \end{array} .$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(i) $\operatorname{rg}(A^\star) = n = 3$, d.h., $-(a+1)\,(a-4) \neq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a \neq -1$ und gleichzeitig $a \neq 4$.
Das System hat genau eine Lösung.

(ii) $\operatorname{rg}(A^\star) = \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) < 3$, i.e., $-(a+1)\,(a-4) = 0$ und $3\,(a-4) = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = 4$.
Das System hat unendlich viele Lösungen.

(iii) $\operatorname{rg}(A^\star) < \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star)$, i.e., $-(a+1)\,(a-4) = 0$ und $3\,(a-4) \neq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = -1$.
Das System hat keine Lösung.

Part II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (b). Aus der Nebenbedingung $x - 2\,y = 0$ folgt $x = 2\,y$. Indem wir x durch $2\,y$ in der Funktion f ersetzen, erhalten wir $h(y) = f(2\,y, y) = (2\,y)\,y - 2\,(2\,y)^2 = -6\,y^2$. Die Funktion h ist eine quadratische Funktion mit einem Maximum in $y = 0$. Daher hat die Funktion f ein Maximum in $(0, 0)$.

Q2. (c). Die Funktion f ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn (i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Aus Bedingung (i) folgt $c \geq 0$. Um Bedingung (ii) zu prüfen, berechnen wir das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b c\,e^{-c\,x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-c\,x}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(1 - e^{-c\,b}\right) \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } c > 0 \\ 0 & \text{if } c = 0 \\ -\infty & \text{if } c < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Daher ist f genau dann eine Dichtefunktion, wenn $c > 0$.

Q3. (c). Da A eine 4×5 Matrix ist, ist A^T eine 5×4 Matrix. Da im Weiteren $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ gilt, ist der Rang von A^T ebenfalls gleich 4.

Q4. (c). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det(A^{-1}\,B^2\,A\,B^{-1}) \\
&= \det(A^{-1})\,\det(B)^2\,\det(A)\,\det(B^{-1}) \\
&= \frac{1}{\det(A)}\,\det(B)^2\,\det(A)\,\frac{1}{\det(B)} \\
&= \det(B) = 1.
\end{aligned}$$

Q5. (d). Da $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) < n = 3$, hat das System entweder keine oder unendlich viele Lösungen, abhängig davon, ob $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{b}) > \mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$ oder $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{b}) = \mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$.

Q6. (a). Da $\mathrm{rg}(A) = 3 < 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$ hat das System keine Lösung.

Q7. (c). Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Q8. (b). Es gilt:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow 5\, \det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \det(5\, A - 5\, \lambda\, I) = 0 = \det(B - 5\, \lambda\, I).$$

Daher ist λ genau dann ein Eigenwert von A, wenn $5\, \lambda$ ein Eigenwert von B ist.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☒	☐	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

Q1. (c). Lediglich die Funktionen in Antwort (c) sind Stammfunktionen des Integranden

$$f(x) = x\, e^{5\,x^2+1}.$$

Q2. (b). Da $\mathbf{a}$ senkrecht zu $\mathbf{b}$ ist, gilt $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$. Es folgt:

$$0 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 7\,t + 14 \Leftrightarrow t = -2.$$

Daher gilt

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{34}.$$

Q3. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\,(I) \\ \\ -2\,(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \\ -(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (III) \leftrightarrow (V) \\ \\ (V) \leftrightarrow (III) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :(-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \\ \\ \end{array}$$

$$A^\star \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 3$ und damit $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 3$.

Q4. (b). Zunächst überprüfen wir, ob A invertierbar ist:

$$\det(A) = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Da $\det(A) \neq 0$, ist A tatsächlich invertierbar. Weiterhin gilt für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $\det(A) = a\,d - c\,b \neq 0$, dass

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Daher folgt:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q5. (a). Ein Eigenvektor $\mathbf{v}$ von A erfüllt die Gleichung $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Lediglich der Vektor in Antwort (a) hat diese Eigenschaft (für $\lambda = 7$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Q6. (d). Indem wir die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, definiert durch $y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k + 1$, in die drei Differenzengleichungen in (a), (b), und (c) einsetzen, überprüfen wir leicht, dass keine der Gleichungen von $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ erfüllt wird.

Q7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{7}{3}\, y_k + \frac{1}{3}.$$

Es folgt, dass $A = \frac{7}{3} > 1$ und $B = \frac{1}{3}$. Da $A > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

Q8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{a+3}{a-2}\, y_k + \frac{a}{2-a},$$

d.h., $A = \frac{a+3}{a-2}$ und $B = \frac{a}{2-a}$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist genau dann divergent und oszillierend, wenn $A \leq -1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $a > 2$. Dann gilt:

$$A \leq -1 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a-2} \leq -1 \Leftrightarrow a+3 \leq 2-a \Leftrightarrow a \leq -\frac{1}{2}.$$

Die letzte Bedingung steht im Widerspruch zu $a > 2$.

(ii) $a < 2$. Dann gilt:

$$A \leq -1 \Leftrightarrow \frac{a+3}{a-2} \leq -1 \Leftrightarrow a+3 \geq (2-a) \Leftrightarrow a \geq -\frac{1}{2}.$$

Für $a < 2$ ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn $-\frac{1}{2} \leq a < 2$.

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

10. Februar 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte (x_0, y_0) sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3\,y - \frac{45}{2\,(x-4)}, \\ f_y(x, y) &= 3\,x + 2\,y. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,y_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ 3\,x_0 + 2\,y_0 = 0 \end{cases}.$$

Aus $3\,x_0 + 2\,y_0 = 0$ erhalten wir

$$y_0 = -\frac{3}{2}\,x_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,y_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0$ ein und erhalten:

$$\begin{aligned} & 3\left(-\frac{3}{2}\,x_0\right) + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{9}{2}\,x_0 + \frac{45}{2\,(x_0-4)} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -9\,x_0\,(x_0-4) + 45 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -9\,x_0^2 + 36\,x_0 + 45 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_0^2 - 4\,x_0 - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x_0-5)\,(x_0+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_{0,1} = 5, \quad (x_{0,2} = -1 \notin (4, \infty)!). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P = (5, -7.5)$$

ist der einzige stationäre Punkt von f, d.h., ein Kandidat für ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt.

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \\ f_{yy}(x_0,y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 < 0 \Rightarrow (x_0,y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -\frac{45}{2\,(x-4)^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= 2, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Weil $f_{xx}(x,y) < 0$ und $f_{yy}(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in D_f$, ist P ein Sattelpunkt:

$$f_{xx}(5,-7.5)\, f_{yy}(5,-7.5) - (f_{xy}(5,-7.5))^2 = -\frac{45}{2} \cdot 2 - 3^2 = -54 < 0.$$

(b) (8 Punkte)

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange-Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\, \varphi(x,y) \\ &= 7\, x^{\frac{1}{4}}\, y^{\frac{3}{4}} + \lambda \left(2\, x^{\frac{1}{4}} + 2\, y^{\frac{3}{4}} - 32 \right). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{7}{4}\, x^{-\frac{3}{4}}\, y^{\frac{3}{4}} + \lambda\, \frac{2}{4}\, x^{-\frac{3}{4}} = 0, \tag{I}$$

$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 7 \cdot \frac{3}{4}\, x^{\frac{1}{4}}\, y^{-\frac{1}{4}} + \lambda \cdot 2 \cdot \frac{3}{4}\, y^{-\frac{1}{4}} = 0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\, x^{\frac{1}{4}} + 2\, y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\, \lambda = -\frac{7}{4}\, y^{\frac{3}{4}}. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir

$$\frac{3}{2}\, \lambda = -\frac{21}{4}\, x^{\frac{1}{4}}. \tag{V}$$

Aus Gleichung (IV) oder (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$, da $x > 0$, $y > 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\frac{7}{4}\,y^{\frac{3}{4}}}{-\frac{21}{4}\,x^{\frac{1}{4}}},$$

d.h.,

$$x^{\frac{1}{4}} = y^{\frac{3}{4}}. \tag{VI}$$

Wir setzen (VI) in (III) ein und erhalten:

$$2\,y^{\frac{3}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{3}{4}} = 8 \Leftrightarrow y = 16.$$

Aus (VI) folgt, dass:

$$x = y^3 = 4096.$$

Daher ist

$$P = (4096, 16)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von f unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $2\,x^{\frac{1}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0$, um $y^{\frac{3}{4}}$ als Funktion von x zu erhalten, d.h., $y^{\frac{3}{4}} = 16 - x^{\frac{1}{4}}$. Setzen wir dies in die Zielfunktion f ein, erhalten wir:

$$F(x) = f\left(x, \left(16 - x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}\right) = 7\,x^{\frac{1}{4}}\,\left(16 - x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle von F ist $F'(x) = 0$. Da

$$F'(x) = \frac{7}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(16 - x^{\frac{1}{4}}) - \frac{7}{4}\,x^{\frac{1}{4}}\,x^{-\frac{3}{4}}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
F'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{7}{4}\,x^{-\frac{3}{4}}\,(16 - x^{\frac{1}{4}}) - \frac{7}{4}\,x^{\frac{1}{4}}\,x^{-\frac{3}{4}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (16 - x^{\frac{1}{4}}) - x^{\frac{1}{4}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 16 = 2\,x^{\frac{1}{4}} \\
&\Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{4}} = 8 \\
&\Leftrightarrow \quad x = 4096.
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in $y^{\frac{3}{4}} = 16 - x^{\frac{1}{4}}$ ein, erhalten wir $y = 16$. Dies führt zum selben Resultat wie oben.

(c) (6 Punkte)
Wir berechnen das Integral mit der Methode der partiellen Integration. Sei $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann gilt $u'(x) = 2\,x$ und $v(x) = \sin(x)$. Daraus folgt:

$$\int x^2 \cos(x)\, dx = x^2 \sin(x) - \int 2\,x \sin(x)\, dx.$$

Um das Integral $\int 2\,x \sin(x)\, dx$ zu lösen, wenden wir noch einmal die Methode der partiellen Integration an. Sei $u(x) = 2\,x$ und $v'(x) = \sin(x)$. Daraus folgt $u'(x) = 2$ und $v(x) = -\cos(x)$. Es gilt:

$$\int 2\,x \sin(x)\, dx = -2\,x \cos(x) + \int 2 \cos(x)\, dx = -2\,x \cos(x) + 2 \sin(c) + C.$$

Schliesslich erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\, dx \\
=\ & \left[x^2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-2\,x \cos(x) + 2 \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
=\ & \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0^2 \sin(0) \\
& \quad - \left[-2\,\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot 0 \cdot \cos(0) - 2 \sin(0)\right] \\
=\ & \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 - 0 + \pi \cdot 0 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\
=\ & \frac{\pi^2}{4} - 2 \ (\approx 0.4674).
\end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)
Wir wenden die Substitutionsregel an. Sei $y = \ln(\ln(x))$. Es gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(x)}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x\,\ln(x)}.$$

Daraus folgt:

$$\int \frac{3\,[\ln(\ln(x))]^2}{x\,\ln(x)}\, dx = \int 3\,y^2\, dy = y^3 + C = [\ln(\ln(x))]^3 + C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)

Das System der Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn die Matrix $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ singulär ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
B \text{ ist singulär} \quad &\Leftrightarrow \quad \det(B) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & -0.8 \\ 0 & 5 & t \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 + 0 + 5\,t - 0 + 4 - t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t^2 + 4\,t + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (t+2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -2.
\end{aligned}$$

Daher ist das System der Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ genau dann linear abhängig, wenn $t = -2$.

(b1) (5 Punkte)

λ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda\, I) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -6 & -5-\lambda & 0 \\ 8 & 16\,a & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\lambda\,(-5-\lambda)\,(2-\lambda) + 6\,(2-\lambda) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,\left[-\lambda\,(-5-\lambda) + 6\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,\left[\lambda^2 + 5\,\lambda + 6\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (2-\lambda)\,(\lambda+2)\,(\lambda+3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-3, -2, 2\}.
\end{aligned}$$

Daher sind $-3, -2$ und 2 die Eigenwerte von A.

(b2) (4 Punkte)
Der Vektor $\mathbf{x}$ ist genau dann ein Eigenvektor A mit zugehörigem Eigenwert $\lambda = -2$, wenn

$$(A + 2\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

d.h.,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$(A, \mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} :(2) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 0 & 0 \\ 8 & 16\,a & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ +6\,(I) \\ -8\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16\,a - 4 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Daraus folgt:

$$x_1 = -0.5\,x_2$$

und

$$x_3 = (1 - 4\,a)\,x_2.$$

Daher ist $x_2 = t$ eine freie Variable und

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 - 4\,a \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der Eigenraum von A zum zugehörigen Eigenwert $\lambda = -2$.

(c) (4 Punkte)
Der Gradient von f im Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch

$$\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$f_x(x,y) = \frac{4}{x^3+y^2} \cdot 3\,x^2 - \frac{10-a}{x} \Rightarrow f_x(1,1) = a-4$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{4}{x^3+y^2} \cdot 2\,y + 3 \Rightarrow f_y(1,1) = 7.$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} a-4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{grad} f(1,1)\| = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \sqrt{(a-4)^2+7^2} = 25 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-4)^2+7^2 = 25^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (a-4)^2 = 25^2-7^2 = 576 = 24^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a-4 = \pm 24 \\ \Leftrightarrow \quad & a \in \{-20, 28\}. \end{aligned}$$

(d) (10 Punkte)
Wir wenden das Gauß-Verfahren an:

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ (A, \mathbf{b}) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 2 & a & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2\,(I) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ & \rightarrow & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-2 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(a-2)\,(II) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \end{array} \\ (A^\star \mathbf{b}^\star). & = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & \underbrace{3-a\,(a-2)}_{=-(a-3)\,(a+1)} & \underbrace{-6-2\,(a-2)}_{-2\,(a+1)} \end{array}\right) \quad = \end{array}$$

(i) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn $\operatorname{rg}(A) = 3$. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{rg}(A^\star) = 3$, d.h.,

$$-(a-3)\,(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}.$$

(ii) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, wenn $\operatorname{rg}(A) < \operatorname{rg}(A, \mathbf{b})$. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{rg}(A^\star) < \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star)$, d.h.,

$$-(a-3)\,(a+1) = 0 \text{ und } -2\,(a+1) \neq 0 \Leftrightarrow a = 3.$$

(iii) Das lineare Gleichungssystem hat genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A, \mathbf{b}) < 3$. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{rg}(A^\star) = \operatorname{rg}(A^\star, \mathbf{b}^\star) < 3$, d.h.,

$$-(a-3)\,(a+1) = 0 \text{ und } -2\,(a+1) = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (c). Da $\varphi(x,y)=0$, gilt $x=2\,y$. Setzen wir dies in die Zielfunktion f ein, erhalten wir:

$$F(y)=f(2\,y,y)=2\,y\,y^2-2\,(2\,y)^3=-14\,y^3.$$

Die Funktion F hat einen Sattelpunkt an der Stelle $y_0=0$, aber nicht an der Stelle $\tilde{y}_0=1$. Daher ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt von f.

Q2. (c). f ist genau dann eine Dichtefunktion, wenn $f(x)\geq 0$ für $x\in\mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$. $f(x)\geq 0$ impliziert $c\geq 0$. Da

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{\infty} c\,x\,e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N} 2\,x\,e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\int_0^{N^2} e^{-y}\,dy \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-y}\right]_0^{N^2} \\
&= \frac{c}{2}\lim_{N\to\infty}\left[-e^{-N^2}+e^0\right] \\
&= \frac{c}{2},
\end{aligned}$$

gilt $c=2$. (Substituiert man $y=x^2$, erhält man $dy=2\,x\,dx$. Die Integrationsgrenzen sind dann $0^2=0$ und N^2.)

Q3. (c). Da $\mathrm{rg}(A)=3$, hat A genau drei linear unabhängige Spalten/Zeilen. Dies impliziert, dass A eine reguläre Untermatrix mit Rang 3 hat.

Q4. (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \det((A\,B^{-1})^2\,A^{-1}\,B) \\
&= (\det(A\,B^{-1}))^2\,\det(A^{-1}\,B) \\
&= \left(\frac{\det(A)}{\det(B)}\right)^2\,\frac{\det(B)}{\det(A)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\det(A)}{\det(B)}$$
$$= 2.$$

Q5. (b). Da das System der Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ linear unabhängig ist, bildet es eine Basis in $\mathbb{R}^3$. Daher existiert für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ eine *eindeutige* Linearkombination, sodass

$$x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 - x_3\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{b}.$$

Q6. (d). Da $4 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A;\mathbf{b}) < 6 = n$, hat das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension $n - \mathrm{rg}(A) = 6 - 4 = 2$.

Q7. (c). Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx = \left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{2\pi} = -\underbrace{\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 0.$$

Alternativ kann man den Graphen von $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ zwischen 0 und 2π zeichnen. Es zeigt sich, dass die Flächen über und unter der x-Achse gleich groß sind.

Q8. (c). Sei λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor, d.h., $A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Es gilt:

$$B\,\mathbf{x} = 2\,A^2\,\mathbf{x} = 2\,A\,(A\,\mathbf{x}) = 2\,A\,\lambda\,\mathbf{x} = 2\,\lambda\,A\,\mathbf{x} = 2\,\lambda\,\lambda\,\mathbf{x} = 2\,\lambda^2\,\mathbf{x}.$$

Daher ist $2\,\lambda^2$ ein Eigenwert von B und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (b). Indem man die Ableitung bildet, kann man leicht überprüfen, dass $F(x) = x\,e^{x^3} + C$ die einzigen Stammfunktionen von $f(x) = (3\,x^3 + 1)\,e^{x^3}$ sind.

Q2. (d). Vektor $\mathbf{a}$ ist genau dann orthogonal zum Vektor $\mathbf{b}$, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Jedoch gilt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 + 8 + t^2 + 12 + 2 = t^2 + 25 \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Q3. (c). Wir bestimmen den Rang von A mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\,(I) \\ \\ -2\,(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \\ -(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Da $A^\star$ vier linear unabhängige Zeilen hat, gilt $\operatorname{rg}(A^\star) = 4$ und $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\star) = 4$.

Q4. (a). Für eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

existiert die Inverse, falls $\det(A) = a\,d - c\,b \neq 0$. In diesem Fall gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{a\,d - c\,b} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Wir erhalten $\det(A) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$ und

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q5. (b). Man kann leicht sehen, dass $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ nur für $\mathbf{v}$ aus Antwort (b) gelten kann. In diesem Fall erhalten wir

$$A\,\mathbf{v} = 10\,\mathbf{v}.$$

Q6. (c). Setzt man $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ in die Differenzengleichungen in (a), (b) und (c) ein, wird deutlich, dass nur die Gleichung in (c) erfüllt wird. Es gilt:

$$6\,y_{k+1} - 2\,y_k = 6\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} + 3\right] - 2\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + 3\right] = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k} + 18 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k} - 6 = 12.$$

Q7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = -\frac{7}{4}\,y_k - \frac{3}{4}.$$

Daraus folgt, dass $A = -\frac{7}{4} \neq 1$ und $B = -\frac{3}{4}$. Da $A < -1$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und divergent.

Q8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet

$$y_{k+1} = \frac{a-2}{a+3}\,y_k - \frac{a}{a+3},$$

d.h., $A = \frac{a-3}{a+3}$ und $B = -\frac{a}{a+3}$. Die allgemeine Lösung ist genau dann oszillierend, wenn $A < 0$. Es gilt:

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-2}{a+3} < 0 \Leftrightarrow a \in (-3, 2).$$

Die allgemeine Lösung ist genau dann konvergent, wenn $|A| < 1$. Es gilt:

$$|A| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{a-2}{a+3}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{(a-2)^2}{(a+3)^2} < 1 \Leftrightarrow a^2 - 4\,a + 4 < a^2 + 6\,a + 9 \Leftrightarrow 10\,a > -5 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}.$$

Daher ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann konvergent, wenn

$$a \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

Frühling 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (6 Punkte)

Das Optimierungsproblem des Konsumenten lautet:

$$u(c_1, c_2) = c_1^{0.6}\, c_2^{0.4} \to \max$$
$$\text{sodass } \varphi(c_1, c_2) = p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - e = 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0.$$

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

Lagrange Methode:
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \lambda) &= u(c_1, c_2) + \lambda\, \varphi(c_1, c_2) \\ &= c_1^{0.6}\, c_2^{0.4} + \lambda\, (3\, c_1 + 4\, c_2 - 15)\,. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von u unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_{c_1}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.6\, c_1^{-0.4}\, c_2^{0.4} + 3\, \lambda = 0, \tag{I}$$
$$F_{c_2}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.4\, c_1^{0.6}\, c_2^{-0.6} + 4\, \lambda = 0, \tag{II}$$
$$F_{\lambda}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0. \tag{III}$$

Wegen $c_1 > 0$ erhalten wir aus (I)

$$3\, \lambda = -0.6 \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{0.4}. \tag{IV}$$

Mit $c_2 > 0$ folgt aus (II)

$$4\, \lambda = -0.4 \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{0.6}. \tag{V}$$

Aus den Gleichungen (IV) und (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$. Dividieren wir ausserdem (IV) durch (V) ergibt dies

$$\frac{3\, \lambda}{4\, \lambda} = \frac{3}{2} \frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = 2\, c_2.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (III) ein und erhalten:

$$3\, (2\, c_2) + 4\, c_2 - 15 = 0 \Leftrightarrow 10\, c_2 = 15 \Leftrightarrow c_2 = 1.5.$$

Mit $c_1 = 2\, c_2$ folgt $c_1 = 3$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $\varphi(c_1, c_2) = p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - e = 3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0$, um c_1 als Funktion von c_2 zu schreiben, d.h. $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\, c_2$. Wir ersetzen nun c_1 mit $5 - \frac{4}{3}\, c_2$ im Ausdruck für u, d.h. wir definieren die Funktion U als

$$U(c_2) = u\left(5 - \frac{4}{3}\, c_2, c_2\right) = \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} c_2^{0.4}.$$

Daraus folgt: Die Optimierung von u unter der Nebenbedingung $3\, c_1 + 4\, c_2 - 15 = 0$ ist äquivalent zur Optimierung von U ohne Nebenbedingungen. Daher lösen wir die notwendige Bedingung $U'(c_2) = 0$ für eine Extremalstelle c_2 von U. Es gilt:

$$U'(c_2) = 0.6\left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{-0.4}\left(-\frac{4}{3}\right) c_2^{0.4} + \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} 0.4\, c_2^{-0.6}\,.$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
&U'(c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 0.6\left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{-0.4}\left(-\frac{4}{3}\right) c_2^{0.4} + \left(5 - \frac{4}{3}\, c_2\right)^{0.6} 0.4\, c_2^{-0.6} \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\frac{c_2}{5 - \frac{4}{3}c_2}\right)^{0.4}\left[-\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\,\frac{5 - \frac{4}{3}\, c_2}{c_2}\right] = 0 \\
\overset{c_2 \neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & -\frac{4}{5}\, c_2 + \frac{2}{5}\,(5 - \frac{4}{3}\, c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{15}\right) c_2 = -2 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{20}{15}\, c_2 = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & c_2 = 1.5.
\end{aligned}$$

Aus $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\, c_2$ erhalten wir $c_1 = 3$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = (3, 1.5)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

(b) (9 Punkte)
Wegen $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$ stimmen die stationären Punkte von h mit den stationären Punkten von f überein. Tatsächlich gilt:

$$h_x(x, y) = g'(f(x, y))\, f_x(x, y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_x(x, y) = 0,$$

$$h_y(x, y) = g'(f(x, y))\, f_y(x, y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_y(x, y) = 0.$$

Folglich finden wir die stationären Punkte von h, indem wir die von f bestimmen.

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ von f sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{16}{y+5} = 3\,x + 16\,(y+5)^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 16\,(y^\star+5)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 16\,(y^\star+5)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 16\left(-\frac{2}{3}\,x^\star + 5\right)^{-1} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -2\,(x^\star)^2 + 15\,x^\star + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star \in \left\{\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{15+\sqrt{353}}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $y^\star = -\frac{2}{3}\,x^\star$ finden wir demnach zwei mögliche stationäre Punkte für f (und h):

$$P_1 = \left(\frac{15-\sqrt{353}}{4}, \frac{-15+\sqrt{353}}{6}\right)$$

und

$$P_2 = \left(\frac{15+\sqrt{353}}{4}, \frac{-15-\sqrt{353}}{6}\right).$$

Da P_2 *nicht* im Definitionsgebiet von f liegt, verbleiben wir mit nur einem einzelnen stationären Punkt von f (und h).

Als Nächstes überprüfen wir die <u>hinreichenden Bedingungen</u>: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{16}{(y+5)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Wegen $f_{xx}(x,y) > 0$ und $f_{yy}(x,y) < 0$ für alle $(x,y) \in D_f$ ist P_1 ist ein Sattelpunkt von f (und h).

(c) (6 Punkte)

Der Barwert $PV(0)$ aller Zahlungsströme entspricht:

$$PV(0) = \int_0^T B(t)\, e^{-i\,t}\, dt = \int_0^{12} (10\,t + 5)\, e^{-0.05\,t}\, dt.$$

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int (10\,t+5)\, e^{-0.05\,t}\, dt$ mittels partieller Integration. Sei

$$u(t) = 10\,t + 5$$

und

$$v'(t) = e^{-0.05\,t}.$$

Dann gilt:

$$u'(t) = 10$$

und

$$v(t) = -\frac{1}{0.05}\, e^{-0.05\,t}.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} &\int \underbrace{(10\,t+5)}_{=u(t)}\, \underbrace{e^{-0.05\,t}}_{=v'(t)}\, dt \\ &= \underbrace{(10\,t+5)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{0.05}\, e^{-0.05\,t}\right)}_{=v(t)} - \int \underbrace{10}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{0.05}\, e^{-0.05\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\ &= -20\,(10\,t+5)\, e^{-0.05\,t} + 200 \int e^{-0.05\,t}\, dt \\ &= -20\,(10\,t+5)\, e^{-0.05\,t} - 4000\, e^{-0.05\,t} + C \\ &= -(200\,t + 4100)\, e^{-0.05\,t} + C. \end{aligned}$$

Demnach können wir den Barwert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} PV(0) &= \int_0^T B(t)\, e^{-i\,t}\, dt \\ &= \int_0^{12} (10\,t + 5)\, e^{-0.05\,t}\, dt \\ &= \left[-(200\,t + 4100)\, e^{-0.05\,t}\right]_0^{12} \\ &= -6500\, e^{-0.6} + 4100 \\ &\approx 532.70. \end{aligned}$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = \sin(\ln(x))$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$$

und

$$\frac{\cos(\ln(x))}{x}\, dx = du.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x)}{x}\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}\ (\sin(\ln(x)))^2 + C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)

Folgendes gilt:

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow A \text{ ist regulär} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix} \right| \\
&= 2\,t^2 + 0 + 2\,t + t + 0 - 4\,t^2 \\
&= -2\,t^2 + 3\,t \\
&= -t\,(2\,t - 3).
\end{aligned}$$

Demnach folgt:

$$\mathrm{rg}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow -t\,(2\,t-3) \neq 0 \Leftrightarrow t \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{3}{2}\right\}.$$

(b) (6 Punkte)

Der Payoff des Investors lässt sich genau dann realisieren, wenn λ_1 und λ_2 so existieren, dass

$$\begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Da die Payoff-Vektoren der Wertpapiere 1 und 2 linear unabhängig sind, gilt dies genau dann, wenn das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

linear abhängig ist, oder äquivalent, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1500 & 1.5 & 3 \\ 2000 & 1.5 & 2 \\ 1000 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

singulär ist.

Wegen

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1500 & 1.5 & 3 \\ 2000 & 1.5 & 2 \\ 1000 & 1.5 & 0.5 \end{pmatrix} \right| \\
&= 1125 + 3000 + 900 - 4500 - 4500 - 1500 \\
&= 2625 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

ist A regulär und folglich das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1500 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Demnach ist das Auszahlungsschema des Investors nicht zu verwirklichen.

(c) (6 Punkte)

$\lambda = 0$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - 0 \cdot I) = \det(A) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= 2 \left| \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4\,s & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\
&= 2\,(0 + 0 + 3 + 4\,s) \\
&= 6 + 8\,s\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow 6 + 8\,s = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{3}{4}.$$

Folglich ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $s = -\frac{3}{4}$.

Wir nehmen nun $s = -\frac{3}{4}$ an und berechnen die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$. Wir lösen das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mittels dem Gauß-Verfahren:

$$
(A,\mathbf{b}) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ :(2) \\ \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -(I) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(5) \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ -3\,(II) \\ -(II) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ :\left(-\frac{18}{5}\right) \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{5}\,(III) \\ \\ +\frac{6}{5}\,(III) \end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .
$$

Folglich gilt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & \frac{1}{6}\,x_4 \\ x_3 & = & \frac{1}{6}\,x_4 \end{array}.$$

Wir wählen $x_4 = t$ als eine freie Variable und erhalten $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{6}\,t$ und $x_3 = \frac{1}{6}\,t$. Daher sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$ gegeben durch:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(d) (4 Punkte)

Da $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^T$ senkrecht auf der Ebene β steht, hat β die Ebenengleichung

$$\beta\,:\, x_0\,x + y_0\,y + z_0\,z + d = 0.$$

Mit

$$\mathbf{grad} f(x,y) = e^{2\,x^2+y^3+3\,x+2\,y} \begin{pmatrix} 4\,x+3 \\ 3\,y^2+3 \end{pmatrix}$$

folgt:

$$(x_0, y_0)^T = \mathbf{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem gilt:

$$z_0 = f(0,0) = 1.$$

Daher hat β die folgende allgemeine Form:

$$\beta\,:\, 3\,x + 3\,y + z + d = 0, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(e) (6 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A, \mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ -2\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -11 \end{array}\right)} & \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right)} & \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array} \end{array}$$

$$\overset{\text{tausche } x_3 \text{ und } x_4}{\rightarrow} \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right)} & \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right)} & \begin{array}{l} -2\,(III) \\ -2\,(III) \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$(A^\star, b^\star) \quad = \quad \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 & \\ \multicolumn{5}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right)} \end{array} .$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_3 \\ x_2 &= -3 - x_3 \\ x_4 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und $x_3 = t$ ist eine freie Variable. Damit erhalten wir die Lösungsmenge:

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☐	☐	☒
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒

F1. (d). (b) ist falsch, da der Punkt P die Nebenbedingung $5\,x + 2\,y - 1 = 0$ wegen $5\,(-1) + 2\,\left(-\frac{5}{2}\right) - 1 = -1 \neq 0$ nicht erfüllt. (a) und (d) sind im Allgemeinen falsch, da der Punkt P unter der neuen Nebenbedingung nicht notwendigerweise wieder ein Extrempunkt von f sein muss, selbst wenn er die Bedingung erfüllt.

F2. (d). Die Funktion g ist genau dann eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn (i) $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, und (ii) $\int_I g(x)\,dx = 1$. Folglich gilt: (a) ist falsch, da g_1 auf $[0,1]$ nicht notwendigerweise positiv ist nachdem wir lediglich wissen, dass $g_1(x) = \frac{1}{3}\,f(x) \geq -1$. (b) ist falsch, da $\int_0^1 g_2(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + 3 = 3 + 3 = 6 \neq 1$. (c) ist falsch, da $\int_0^1 g_3(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx + 3 = \frac{1}{6}3 + 3 = \frac{7}{2} \neq 1$. (d) ist richtig, da $g_4(x) = \frac{1}{6}\,f(x) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{6}\,(-3) + \frac{1}{2} = 0$ und $\int_0^1 g_4(x)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{2} = 1$. Demnach erfüllt g_4 die Eigenschaften einer Dichtefunktionen.

F3. (d). Da die Matrix A Rang 4 hat, hat sie 4 linear unabhängige Spalten. Folglich ist die 4×4 Matrix, die aus eben diesen 4 linear unabhängigen Spalten besteht, regulär. Antworten (a), (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, was man leicht anhand des folgenden Beispiels erkennen kann. Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat Rang 4, da die letzten 4 Spalten linear unabhängig sind. Allerdings ist ihre 4×4 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär, da eine Reihe der Nullvektor ist. Ausserdem ist die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär und die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär.

F4. (c). Wegen

$$\det(C) = \frac{1}{\det(A)} (\det(B))^2 (\det(A))^2 \frac{1}{\det(B)} = \det(B) \det(A) = -1 \neq 0$$

ist C regulär. Demnach hat das System $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung.

F5. (b). Da die Matrix A singulär ist, gilt $\det(A) = 0$. Wegen $\det(A^n) = (\det(A))^n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daher, dass auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ singulär ist.

F6. (d). Wegen $\mathrm{rg}(A) = 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 6$ hat das System unendlich viele Lösungen. Ausserdem hat der Lösungsraum aufgrund von $n - \mathrm{rg}(A) = 2$ die Dimension 2.

F7. (c). Da $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist, gilt $\det(A) = 0$, d.h. A ist singulär. Folglich hat das homogene System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen. Die Lösungen dieses Systems, die nicht der Nullvektor sind, sind aber gerade die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 0$.

Allgemeiner ist für jeden Eigenwert λ der Matrix A die Matrix $A - \lambda\, I$ singulär, da $\det(A - \lambda\, I) = 0$ per Definition von λ gilt. Also hat das homogene System $(A - \lambda\, I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

F8. (b). Wegen $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ entspricht die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ dem Eigenwertproblem

$$A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t.$$

Dieses Problem ist für $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$ lösbar, wenn λ ein Eigenwert von A ist, d.h. wenn

$$\det(A - \lambda\, I) = 0.$$

Da allerdings

$$\det(A - \lambda\, I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 2 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, kann die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ nie erfüllt sein.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

F1. (d). Lediglich die Funktionen in Antwort (d) sind Stammfunktionen des Integranden $f(x) = 6\,x+(2\,x^2+1)\,e^{x^2}$. Dies lässt sich durch Ableiten der gegebenen Funktionen leicht überprüfen.

F2. (c). $\mathbf{y}$ ist orthogonal zu $A\,\mathbf{x}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y}\cdot(A\,\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{y}\cdot(\lambda\,\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \lambda\,(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) = 0\\
&\quad\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad 3\cdot 1+4\cdot 2+3\cdot t+t\cdot 4+1\cdot 3 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad 7\,t+14 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t = -2.
\end{aligned}$$

F3. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \;=\; \begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&1&5&7\\0&1&2&1\\2&1&1&4\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-(I)\\ \\-2\,(I)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&4&5\\0&1&2&1\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\-(II)\\-(II)\\-(II)\end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&4&5\\0&0&-2&-4\\0&0&-5&-5\\0&0&-3&-5\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ :(-2)\\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(III) \\ -4\,(III) \\ \\ +5\,(III) \\ +3\,(III) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{3}{5}\,(IV) \\ -\frac{2}{5}\,(IV) \\ \\ -\frac{1}{5}\,(IV) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also gilt $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ und folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

F4. (a). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -(I) \\ -(I) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(II) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(III) \\ +(III) \\ \\ \end{matrix}$$

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

F5. (c). Zunächst berechnen wir die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\,\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\,(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\}.$$

Aus diesem Resultat folgt bereits, dass (a) und (b) falsch sind.

Nun bestimmen wir die Eigenvektoren:

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Folglich gilt

$$\mathbf{v}_1^T\,\mathbf{v}_2 = s\,t\,(-1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$, d.h. (c) ist richtig.

Antwort (d) ist dagegen falsch, wie man leicht durch ein Gegenbeispiel verifizieren kann.

F6. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{4}\,y_k + 3\,,$$

d.h. $A = \frac{1}{4}$ und $B = 3$. Folglich gilt:

$$y^\star = \frac{B}{1 - A} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung gegeben durch:

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{1}{4}\right)^k (y_0 - 4) + 4.$$

Mit $y_0 = 3$ erhalten wir die spezielle Lösung:

$$y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k (3-4) + 4 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Also löst die Folge das gegebene Anfangswertproblem für $a = 4$.

F7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{6}{5}\, y_k + \frac{1}{5}.$$

Folglich gilt $A = -\frac{6}{5}$ und $B = \frac{1}{5}$. Wegen $A < 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung oszillierend und divergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = -\frac{1}{m}\, y_k + m,$$

d.h. $A = -\frac{1}{m}$ und $B = m$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$, oder $A = 1$ und $B = 0$. Weil $B = 0$ wegen $m \neq 0$ unmöglich ist, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$. Es gilt:

$$A \in [0, 1) \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{m} \leq 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (6 Punkte)

Das Optimierungsproblem des Konsumenten lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} u(c_1, c_2) &= a\,\ln(c_1) + b\,\ln(c_2) \to \max \\ \text{sodass } \varphi(c_1, c_2) &= p_1\,c_1 + p_2\,c_2 - e = 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

<u>Lagrange-Methode:</u>
Wir definieren die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \lambda) &= u(c_1, c_2) + \lambda\,\varphi(c_1, c_2) \\ &= a\,\ln(c_1) + b\,\ln(c_2) + \lambda\,(3\,c_1 + 4\,c_2 - 15)\,. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von u unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_{c_1}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{c_1} + 3\,\lambda = 0, \tag{I}$$

$$F_{c_2}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{b}{c_2} + 4\,\lambda = 0, \tag{II}$$

$$F_{\lambda}(c_1, c_2, \lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) erhalten wir wegen $c_1 > 0$:

$$\frac{a}{c_1} = -3\,\lambda. \tag{IV}$$

Aus (II) erhalten wir wegen $c_2 > 0$:

$$\frac{b}{c_2} = -4\,\lambda. \tag{V}$$

Aus Gleichung (IV) oder (V) folgt, dass $\lambda \neq 0$, da $a > 0$, $b > 0$. Dividieren wir (IV) durch (V), ergibt dies

$$\frac{3\,\lambda}{4\,\lambda} = \frac{a}{b}\,\frac{c_2}{c_1} \Leftrightarrow 4\,c_2 = 3\,\frac{b}{a}\,c_1.$$

Wir setzen dieses Resultat in (III) ein und erhalten:

$$3\,c_1 + 3\,\frac{b}{a}\,c_1 - 15 = 0 \Leftrightarrow 3\,c_1\left(1 + \frac{b}{a}\right) = 15 \Leftrightarrow c_1 = \frac{5}{1 + \frac{b}{a}}.$$

Wegen $c_2 = \frac{3}{4}\,\frac{b}{a}\,c_1$ gilt, dass

$$c_2 = \frac{3}{4}\,\frac{b}{a}\,\frac{5}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{15}{4 + 4\,\frac{a}{b}}.$$

Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = \left(\frac{5}{1+\frac{b}{a}}, \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

Substitutionsmethode:
Wir benutzen die Nebenbedingung $\varphi(c_1, c_2) = p_1\,c_1 + p_2\,c_2 - e = 3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0$, um c_1 als Funktion von c_2 zu erhalten, d.h., $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\,c_2$. Wir ersetzen nun c_1 mit $5 - \frac{4}{3}\,c_2$ in der Zielfunktion u, d.h. wir definieren die Funktion U als:

$$U(c_2) = u\left(5 - \frac{4}{3}\,c_2, c_2\right) = a\,\ln\left(5 - \frac{4}{3}\,c_2\right) + b\,\ln(c_2).$$

Die Optimierung der Funktion u unter der Nebenbedingung $3\,c_1 + 4\,c_2 - 15 = 0$ ist nun äquivalent zu der Optimierung von U ohne Nebenbedingung. Eine notwendige Bedingung für eine Extremalstelle von U ist $U'(c_2) = 0$. Da

$$U'(c_2) = \frac{a}{5 - \frac{4}{3}\,c_2}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{b}{c_2}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
& U'(c_2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a}{5 - \frac{4}{3}\,c_2}\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{b}{c_2} = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a}{\frac{15}{4} - c_2} = \frac{b}{c_2} \\
\Leftrightarrow\quad & a\,c_2 = \left(\frac{15}{4} - c_2\right) b \\
\Leftrightarrow\quad & c_2 = \frac{\frac{15}{4}\,b}{a+b} = \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}.
\end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in $c_1 = 5 - \frac{4}{3}\,c_2$ ein, erhalten wir $c_1 = \frac{5}{1+\frac{b}{a}}$. Daher ist

$$(c_1^\star, c_2^\star) = \left(\frac{5}{1+\frac{b}{a}}, \frac{15}{4+4\,\frac{a}{b}}\right)$$

der einzige Kandidat für eine Extremalstelle von u unter der o.g. Nebenbedingung.

(b) (9 Punkte)

Wir definieren die Funktion g einer reellen Variablen als $g\,:\,R_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{x^3+x}$. Dann gilt:

$$h(x,y) = g(f(x,y)).$$

Wegen $g'(x) = e^{x^3+x}\,(2\,x^2+1) > 0$ für alle $x \in R_f$, stimmen die stationären Punkte von h mit den stationären Punkten von f überein. Tatsächlich gilt:

$$h_x(x,y) = g'(f(x,y))\,f_x(x,y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_x(x,y) = 0,$$

$$h_y(x,y) = g'(f(x,y))\,f_y(x,y) = 0 \overset{g'(f(x,y))>0}{\Leftrightarrow} f_y(x,y) = 0.$$

Folglich finden wir die stationären Punkte von h, indem wir die von f bestimmen.

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ von f sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star,y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star,y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4\,x + 3\,y, \\ f_y(x,y) &= 3\,x + \frac{12}{y+6} = 3\,x + 12\,(y+6)^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star,y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star,y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\,x^\star + 3\,y^\star = 0 \\ 3\,x^\star + 12\,(y^\star+6)^{-1} = 0 \end{cases}.$$

Aus $4\,x^\star + 3\,y^\star = 0$ erhalten wir

$$y^\star = -\frac{4}{3}\,x^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $3\,x^\star + 12\,(y^\star+6)^{-1} = 0$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} 3\,x^\star + 12\left(-\frac{4}{3}\,x^\star + 6\right)^{-1} = 0 \ &\Leftrightarrow\ 3\,x^\star\left(-\frac{4}{3}\,x^\star + 6\right) + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ -4\,(x^\star)^2 + 18\,x^\star + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x^\star \in \left\{\frac{18-\sqrt{516}}{8}, \frac{18+\sqrt{516}}{8}\right\} \\ &\Leftrightarrow\ x^\star \in \left\{\frac{9-\sqrt{129}}{4}, \frac{9+\sqrt{129}}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $y^\star = -\frac{4}{3}\,x^\star$ finden wir demnach zwei mögliche stationäre Punkte für f (und h):

$$P_1 = \left(\frac{9-\sqrt{129}}{4}, -\frac{9-\sqrt{129}}{3}\right)$$

und

$$P_2 = \left(\frac{9+\sqrt{129}}{4}, -\frac{9+\sqrt{129}}{3} \right).$$

Da $-\frac{9+\sqrt{129}}{3} < -6$, liegt P_2 *nicht* im Definitionsgebiet von f und P_1 ist der einzige stationären Punkt von f (und h).

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen: Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 4, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{12}{(y+6)^2}, \\ f_{xy}(x,y) &= 3. \end{aligned}$$

Wegen $f_{xx}(x,y) > 0$ und $f_{yy}(x,y) < 0$ für alle $(x,y) \in D_f$ ist P_1 ist ein Sattelpunkt von f (und h).

(c) (6 Punkte)

Der Barwert $PV(0)$ aller Zahlungsströme entspricht:

$$PV(0) = \int_0^T B(t)\, e^{-i\,t}\, dt = \int_0^{12} (a\,t + 6)\, e^{-i\,t}\, dt.$$

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int (a\,t+6)\, e^{-i\,t}\, dt$ mittels partieller Integration. Sei

$$u(t) = a\,t + 6$$

und

$$v'(t) = e^{-i\,t}.$$

Dann gilt:

$$u'(t) = a$$

und

$$v(t) = -\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
&\int \underbrace{(a\,t+6)}_{=u(t)}\ \underbrace{e^{-i\,t}}_{=v'(t)}\ dt \\
&= \underbrace{(a\,t+6)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} - \int \underbrace{a}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\
&= -\frac{a\,t+6}{i}\, e^{-i\,t} + \frac{a}{i} \int e^{-i\,t}\, dt \\
&= -\frac{a\,t+6}{i}\, e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\, e^{-i\,t} + C \\
&= -\left(\frac{a\,t+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-i\,t} + C.
\end{aligned}$$

Demnach können wir den Barwert wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
PV(0) &= \int_0^{12} B(t)\, e^{-i\,t}\, dt \\
&= \int_0^{12} (a\,t+6)\, e^{-i\,t}\, dt \\
&= \left[-\left(\frac{a\,t+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-i\,t}\right]_0^{12} \\
&= -\left(\frac{12\,a+6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) e^{-12\,i} + \left(\frac{6}{i} + \frac{a}{i^2}\right) \\
&= -\frac{1}{i}\left(12\,a + 6 + \frac{a}{i}\right) e^{-12\,i} + \frac{1}{i}\left(6 + \frac{a}{i}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{i=0.05}{=} \quad -20\ (12\,a+6+20\,a)\ e^{-0.6}+20\ (6+20\,a) \\ &= \quad \left(400-640\,e^{0.6}\right)\ a+120\,(1-e^{-0.6}). \end{aligned}$$

Schliesslich gilt:

$$PV(0)=100 \Leftrightarrow \left(400-640\,e^{0.6}\right)\ a+120\,(1-e^{-0.6})=100 \Leftrightarrow a=\frac{100-120\,(1-e^{-0.6})}{400-640\,e^{-0.6}} \approx 0.940461.$$

(d) (4 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u=\sin(e^x)$, dann folgt:

$$\frac{du}{dx}=\cos(e^x)\,e^x$$

und

$$\cos(e^x)\,e^x\,dx=du.$$

Daraus folgt:

$$\int \sin(e^x)\cos(e^x)\,e^x\,dx=\int u\,du=\frac{1}{2}\,u^2+C=\frac{1}{2}\,\sin^2(e^x)+C.$$

Aufgabe 2

(a) (3 Punkte)

Folgendes gilt:

$$A \text{ ist singulär} \Leftrightarrow \det(A) = 0.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix} \right| \\ &= 2\,t^2 + 0 + 2\,t + t + 0 - 8\,t^2 \\ &= 3\,t\,(1 - 2\,t). \end{aligned}$$

Demnach folgt:

$$A \text{ is singulär} \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow 3\,t\,(1-2\,t) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

(b1) (5 Punkte)

Das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist linear unabhängig genau dann, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & 2 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

Wegen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & 2 \\ 1.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2.625 \\ &\neq 0\,, \end{aligned}$$

ist A regulär und folglich das System von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

linear unabhängig. Demnach lässt sich der Payoff des neuen Wertpapiers (bzw. der Payoff eines beliebigen der drei Wertpapiere) nicht durch eine Kombination der zwei anderen Wertpapiere erzielen.

(c) (6 Punkte)

$\lambda = 1$ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - 1 \cdot I) = \det(A - I) = 0$ (charakteristische Gleichung). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s - 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= 1 \left| \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 4\,s - 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right| \\ &= -4\,(4\,s - 1) + 3 + (4\,s - 1) + 3 \\ &= -12\,s + 9. \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det(A - I) = 0 \Leftrightarrow -12\,s + 9 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{3}{4}.$$

Folglich ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A genau dann, wenn $s = \frac{3}{4}$.

Wir nehmen nun $s = \frac{3}{4}$ an und berechnen die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$. Wir lösen das Gleichungssystem $(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Hilfe des Gauß-Verfahrens:

$$(A - I, \mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\,(II) \\ -(II) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Folglich gilt:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & x_3 + x_4 \\ x_3 & = & -\frac{3}{5}\, x_4 \end{array} .$$

Wir wählen $x_4 = 5\,t$ als eine freie Variable und erhalten $x_1 = 0$, $x_2 = 2\,t$ und $x_3 = -3\,t$. Daher sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$ gegeben durch:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

(d) (4 Punkte)

Die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist genau dann durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \mathbf{grad} f(0, 0)$$

für ein $\lambda > 0$.

Wegen

$$\mathbf{grad} f(x, y) = e^{a\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y} \begin{pmatrix} 2\,a\,x + 3 \\ 3\,y^2 + 3 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\lambda\,\mathbf{n} = \mathbf{grad} f(0, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 3.$$

Demnach gilt unabhängig von a, dass $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = 3\,\mathbf{n}$. Also zeigt $\mathbf{n}$ für beliebige Werte $a \in \mathbb{R}$ in die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(e) (6 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A,\mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -(I) \\ -2\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -8 & -11 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{vertausche } x_3 \text{ und } x_4} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \end{array}$$

$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -2\,(III) \\ -2\,(III) \\ \\ \end{array}$$

$$(A^\star, b^\star) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{array}\right) \end{array} .$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 - x_3 \\ x_2 &= -3 - x_3 \\ x_4 &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

und $x_3 = t$ ist eine freie Variable. Damit erhalten wir die Lösungsmenge:

$$\left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teil II: Multiple-choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☒	☐	☐	☐
Question 2	☐	☐	☒	☐
Question 3	☐	☐	☐	☒
Question 4	☐	☐	☐	☒
Question 5	☒	☐	☐	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☐	☒	☐
Question 8	☐	☐	☐	☒

F1. (a). Wegen $g'(x) > 0$ ist g streng monoton steigend und die Extremalstellen von f stimmen mit denjenigen von h überein, gegeben, dass die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ unverändert bleibt. (b) ist offensichtlich falsch, da P die neue Nebenbedingung im Allgemeinen nicht erfüllt. (c) ist falsch, da g streng monoton wachsend ist und P demnach kein Minimum von h werden kann.

F2. (c). Die Funktion g ist genau dann eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$, wenn $g(x) \geq 0$ für $x \in I$ und $\int_I g(x)\,dx = 1$. Folglich gilt: (a) und (b) sind falsch, da $g = \frac{1}{3} f$ auf $[0, 1]$ nicht notwendigerweise positiv ist, nachdem wir lediglich wissen, dass $g(x) = \frac{1}{3} f(x) \geq -1$. (d) ist falsch, da $g = \frac{1}{6} f + \frac{1}{2}$ zwar eine Dichtefunktion ist, der Erwartungswert sich jedoch berechnet als $\int_0^1 x\, g(x)\,dx = \frac{1}{6} \int_0^1 x\, f(x)\,dx + \frac{1}{2} \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Demnach ist (c) richtig.

F3. (d). Da $\mathrm{rg}(A) = 3$, hat A genau drei linear unabhängige Spalten/Zeilen. Dies impliziert, dass wir eine reguläre 3×3 Untermatrix von A finden können. Da zwei beliebige Vektoren eines linear unabhängigen System aus 3 Vektoren wiederum linear unabhängig sind, gilt dies auch für eine 2×2 Untermatrix. Die Antworten (a), (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, was man leicht anhand des folgenden Beispiels erkennen kann. Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat Rang 3, da (nur) die Spalten 2-4 linear unabhängig sind. Allerdings ist ihre 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär, da eine Reihe der Nullvektor ist. Ausserdem ist die 3×3 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär und die 2×2 Untermatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

singulär.

F4. (d). Die Matrix C ist aufgrund

$$\det(C) = \det(A)\,(\det(B))^2\,(\det(A))^2\,\frac{1}{\det(B)} = 0\,,$$

singulär. Demnach hat das System $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ abhängig von A, B und $\mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

F5. (a). Da die Spalten der Matrix A linear unabhängig sind, ist A regulär, d.h. $\det(A) \neq 0$. Wegen $\det(A^n) = (\det(A))^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt daher, dass auch A^n für alle $n \in \mathbb{N}$ regulär ist.

F6. (c). Wegen $\mathrm{rg}(A) = 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 6$ hat das System unendlich viele Lösungen. Ausserdem hat der Lösungsraum aufgrund von $n - \mathrm{rg}(A) = 2$ die Dimension 2.

F7. (c). Da $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist, gilt $\det(A - I) = 0$, d.h. $A - I$ ist singulär. Folglich hat das homogene System $(A - I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen. Die Lösungen dieses Systems, die nicht der Nullvektor sind, sind aber gerade die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

Allgemeiner ist für jeden Eigenwert λ der Matrix A die Matrix $A - \lambda\,I$ singulär, da $\det(A - \lambda\,I) = 0$ per Definition von λ gilt. Also hat das homogene System $(A - \lambda\,I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ unendlich viele Lösungen, d.h. es gibt unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

F8. (d). Wegen $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ entspricht die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ dem Eigenwertproblem

$$A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t.$$

Dieses Problem ist für $\mathbf{u}_t \neq \mathbf{0}$ lösbar, wenn λ ein Eigenwert von A ist, d.h. wenn

$$\det(A - \lambda\,I) = 0.$$

Da allerdings

$$\det(A - \lambda\,I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)^2 + 2 > 0$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, kann die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ nie erfüllt sein.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☐	☐	☒	☐
Question 2	☐	☐	☒	☐
Question 3	☐	☐	☒	☐
Question 4	☐	☒	☐	☐
Question 5	☐	☒	☐	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☒	☐	☐
Question 8	☐	☐	☐	☒

F1. (c). Lediglich die Funktionen in Antwort (c) sind Stammfunktionen des Integranden $f(x) = 2\left[3\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]$. Dies lässt sich durch Ableiten der gegebenen Funktionen leicht überprüfen.

F2. (c). $\mathbf{y}$ ist orthogonal zu $A^5\,\mathbf{x}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{y} \cdot (A^5\,\mathbf{x}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \cdot (\lambda^5\,\mathbf{x}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^5\,(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) = 0 \\
&\overset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 1 + 4 \cdot t + 3 \cdot 2 + t \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 8\,t + 12 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad t = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

F3. (c). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(I) \\ -(V) \\ -2\,(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -(V) \\ \\ -(III) \\ -(III) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-4), -(III) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2\,(II) \\ \\ \\ \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (II) \rightarrow (VI) \\ \\ (IV) \rightarrow (V) \\ (V) \rightarrow (II) \end{matrix}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also gilt $\text{rg}(A^\star) = 4$ und folglich $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\star) = 4$.

F4. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -(I) \\ -(I) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -(III) \\ \\ \end{matrix}$$

$$(I|A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

F5. (b). Zunächst berechnen wir die Eigenwerte von A. Es gilt:

$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\,\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2)\,(\lambda-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 4\}$.

Aus diesem Resultat folgt bereits, dass (a) falsch und (b) wahr ist.

Der Vollständigkeit halber bestimmen wir die Eigenvektoren:

Zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$:

$$(A - \lambda_1\, I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$.

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} -3\,x_1 & + & 3\,x_2 & = & 0 \\ 3\,x_1 & - & 3\,x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad (x_2 \text{ freie Variable}).$$

D.h.

$$\mathbf{v}_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

Indem wir $t = s = 1$ setzen, verifizieren wir, dass (c) und (d) falsch sind:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

F6. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}\,y_k + 4\,,$$

d.h. $A = \frac{1}{3}$ und $B = 4$. Folglich gilt:

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung gegeben durch:

$$y_k = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = \left(\frac{1}{3}\right)^k (y_0 - 6) + 6.$$

Mit $y_0 = 3$ erhalten wir die spezielle Lösung:

$$y_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k (3-6) + 6 = 6 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 \cdot 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

Also löst die Folge das gegebene Anfangswertproblem für $a = 3$.

F7. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{7}{6}\,y_k + \frac{1}{6}.$$

Folglich gilt $A = \frac{7}{6}$ und $B = \frac{1}{6}$. Wegen $A > 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{m} y_k - m,$$

d.h. $A = \frac{1}{m}$ und $B = -m$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$, oder $A = 1$ und $B = 0$. Weil $B = 0$ wegen $m \neq 0$ unmöglich ist, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung konvergent und monoton genau dann, wenn $A \in [0, 1)$. Es gilt:

$$A \in [0, 1) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow m > 1.$$

Frühling 2017

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

26. Juni 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte (x_0, y_0) von f sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x + (x + y + a)\, e^x = (x + y + a + 1)\, e^x, \\ f_y(x, y) &= e^x - e^y. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + y_0 + a + 1)\, e^{x_0} = 0 \\ e^{x_0} - e^{y_0} = 0 \end{cases}.$$

Aus $e^{x_0} - e^{y_0} = 0$ erhalten wir

$$y_0 = x_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $(x_0 + y_0 + a + 1)\, e^{x_0} = 0$ ein und erhalten (unter Ausnützung von $e^{x_0} \neq 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + a + 1 = 0 \quad &\overset{x_0 = y_0}{\Leftrightarrow} \quad 2\, x_0 + a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{a+1}{2}. \end{aligned}$$

Mit $y_0 = x_0$ erhalten wir folgenden, eindeutigen stationären Punkt von f:

$$P = \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2} \right).$$

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen. Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^x + (x+y+a+1)\,e^x = (x+y+a+2)\,e^x, \\ f_{yy}(x,y) &= -e^y, \\ f_{xy}(x,y) &= e^x. \end{aligned}$$

Es folgt für $x_0 = y_0 = -\frac{a+1}{2}$:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0,y_0) = e^{x_0} > 0 \\ f_{yy}(x_0,y_0) = -e^{y_0} = -e^{x_0} < 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\,f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 = e^{x_0}\,(-e^{x_0}) - (e^{x_0})^2 = -2\,e^{2\,x_0} < 0 \end{cases}$$

Damit ist $P = \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ ein Sattelpunkt von f.

(b) (7 Punkte)

Wir verwenden die Lagrange Methode und definieren zunächst die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2 + y^2 + \lambda\,(a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2\,x + \lambda\,(2\,a\,x + b\,x) = 0, && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2\,y + \lambda\,(b\,x + 10\,y) = 0, && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16 = 0. && \text{(III)} \end{aligned}$$

Soll nun $(x,y) = (1,1)$ ein Extremum unter Nebenbedingung von f sein, muss folglich gelten:

$$\begin{aligned} F_x(1,1,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2 + \lambda\,(2\,a + b) = 0, && \text{(IV)} \\ F_y(1,1,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; 2 + \lambda\,(b + 10) = 0, && \text{(V)} \\ F_\lambda(1,1,\lambda) = 0 &\;\Rightarrow\; a + b - 11 = 0. && \text{(VI)} \end{aligned}$$

Aus (IV) bzw. (V) erhalten wir

$$\lambda = -\frac{2}{2\,a + b} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{2}{b + 10}. \qquad \text{(VII)}$$

Aus den Gleichungen in (VII) folgt, dass

$$-\frac{2}{2\,a+b} = \lambda = -\frac{2}{b+10} \Leftrightarrow 2\,a + b = b + 10 \Leftrightarrow 2\,a = 10 \Leftrightarrow a = 5.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (VI) ein und erhalten:

$$5 + b - 11 = 0 \Leftrightarrow b = 6.$$

(c) (5 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei

$$u = \cos(x^2).$$

Damit folgt

$$\frac{du}{dx} = -2\,x\,\sin(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\,du = x\,\sin(x^2)\,dx.$$

Wir erhalten:

$$\int x\,\sin(x^2)\,(\cos(x^2))^3\,dx = \int -\frac{1}{2}\,u^3\,du = -\frac{1}{8}\,u^4 + C = -\frac{1}{8}\,(\cos(x^2))^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt:

$$\int_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} x\,\sin(x^2)\,(\cos(x^2))^3\,dx = \left[-\frac{1}{8}\,(\cos(x^2))^4\right]_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

(d) (6 Punkte)

Es gilt:

$$\int_0^e |\ln(x)|\;dx = \int_0^1 |\ln(x)|\;dx + \int_1^e |\ln(x)|\;dx \overset{\ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1}{=} \underbrace{\int_0^1 (-\ln(x))\,dx}_{\text{uneigentliches Integral}} + \int_1^e \ln(x)\,dx.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral $\int \ln(x)\,dx$ mittels partieller Integration. Sei $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = 1$, dann gilt:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{=v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\,dx = \underbrace{x}_{=v(x)}\,\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{x}_{=v(x)}\;\underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)}\,dx = x\,\ln(x) - \int 1\,dx = x\,\ln(x) - x + C.$$

Wir erhalten:

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\,(\ln(x) - 1)]_1^e = 0 - (-1) = 1$$

und

$$\int_0^1 (-\ln(x))\,dx = \lim_{a \searrow 0} \int_a^1 (-\ln(x))\,dx = -\lim_{a \searrow 0}\,[x\,(\ln(x) - 1)]_a^1 = 1 + \lim_{a \searrow 0}(a\,\ln(a) - a) = 1.$$

Addieren der beiden Integrale liefert:

$$\int_0^e |\ln(x)|\;dx = 2.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $(A\,B)^T = B^T\,A^T$;

(ii) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$;

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

(iv) $A^{-1}\,A = I$;

(v) $A = A^T$ genau dann ,wenn A symmetrisch ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} &= B^T(B^T\,A^T)\,((A^{-1})^T\,(B^{-1})^T)\,B\,(B^{-1}\,A^{-1}) \\
&= B^T\,B^T\,\underbrace{A^T\,(A^T)^{-1}}_{=I}\,(B^T)^{-1}\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,\underbrace{B^T\,(B^T)^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,A^{-1} \\
&\overset{A \text{ ist symmetrisch}}{=} B^T\,(A^T)^{-1} \\
&= B^T\,(A^{-1})^T \\
&= (A^{-1}\,B)^T.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} = (A^{-1}\,B)^T.$$

(b) (4 Punkte)

Die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(x_0, y_0) = (8, 2)$ ist durch den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

genau dann gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(8, 2)$$

für ein $\lambda > 0$ gilt.

Wir berechnen:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{x-2} + y^2 \\ 2\,x\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\mathbf{grad} f(8,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,a + 4 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(8,2) \\ \Leftrightarrow\quad &\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,a + 4 \\ 40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = 10$ und

$$\frac{1}{6}\,a + 4 = 30 \Leftrightarrow a = 156.$$

(c) (3 Punkte)

Es gilt folgende Aussage: das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist <u>keine</u> Basis des 3-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear abhängig ist, d.h., wenn die Matrix $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ singulär ist. Letzteres ist wiederum äquivalent zu $\det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = 0$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 8 \\ t & 4 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= 4\,t^2 + 8\,t^2 - t^2 - 2\,t^4 \\ &= 11\,t^2 - 2\,t^4 \\ &= t^2\,(11 - 2\,t^2). \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = 0 \Leftrightarrow t^2\,(11 - 2\,t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ -\sqrt{\frac{11}{2}}, 0, \sqrt{\frac{11}{2}} \right\}.$$

Folglich ist $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ <u>keine</u> Basis des 3-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $t \in \left\{0, \pm\sqrt{\tfrac{11}{2}}\right\}$.

(d) (6 Punkte)

λ ist ein Eigenwert von M genau dann, wenn $\det(M - \lambda\,I) = 0$. Es gilt:

$$\det(M - \lambda\,I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2\,a \\ -3\,a & 5\,a - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 5\,a\,\lambda + 6\,a^2 = (\lambda - 2\,a)\,(\lambda - 3\,a)$$

und folglich

$$\det(M - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2\,a, 3\,a\}.$$

Wir berechnen nun die Eigenvektoren. Der Vektor $\mathbf{x} = (x, y)^T$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ genau dann, wenn $(M - \lambda\, I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Für $\lambda = \lambda_1 = 2\,a$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -2\,a & 2\,a \\ -3\,a & 3\,a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\,a\,x + 2\,a\,y & = 0 \\ -3\,a\,x + 3\,a\,y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

D.h.,

$$\mathbf{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 2\,a$.

Für $\lambda = \lambda_2 = 3\,a$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -3\,a & 2\,a \\ -3\,a & 2\,a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3\,a\,x + 2\,a\,y = 0 \Leftrightarrow 3\,x = 2\,y.$$

D.h.,

$$\mathbf{x}_2 = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 3\,a$.

Schliesslich erkennen wir noch, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $t = 2$ dem Vektor $\mathbf{x}_1$ entspricht und folglich ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 2\,a$ ist. Demnach gilt:

$$M^n\,\mathbf{x} = (2\,a)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n+1}\,a^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) (8 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ (A, \mathbf{b}) & = & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2\,(I) \\ -(I) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(II) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} +(III) \\ -2\,(III) \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} & \\ (A^\star, b^\star) \ = & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) & . \end{array}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7\,x_4 - 8\,x_5 \\ x_2 &= -13\,x_4 + 11\,x_5 \\ x_3 &= 5\,x_4 - 4\,x_5 \end{aligned}$$

und $x_4 = t$, $x_5 = s$ sind freie Variablen. Demnach ergibt sich die Lösungsmenge als:

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis von W ist gegeben durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. (d). Die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ entspricht einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen 5 und 3. Der Punkt mit der kleinsten y-Koordinate ist $P = (0, -3)$.

F2. (b). Eine Funktion f ist eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn (i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, und (ii) $\int_I f(x)\, dx = 1$. Aus

$$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 \left(a\, x + \frac{1}{8}\right)\, dx = \left[\frac{a}{2}\, x^2 + \frac{1}{8}\, x\right]_0^4 = 8\, a + \frac{1}{2}$$

folgt, dass

$$\int_0^4 f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow 8\, a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}.$$

Ausserdem gilt mit $a = \frac{1}{16}$, dass

$$f(x) = a\, x + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}\, x + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} \geq 0$$

für $x \in [0, 4]$.

F3. (c). Lediglich (c) ist korrekt, da jede auf $[a, b]$ differenzierbare Funktion f auch stetig auf $[a, b]$ ist, und folglich das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert. Andersherum kann allerdings aus der Existenz des bestimmten Integrals von f über $[a, b]$ nicht auf die Stetigkeit von f auf $[a, b]$ geschlossen werden.

F4. (b). Wegen

$$\det(C) = \det(A^{-1})\ \det(B)\ \det(A) = \frac{1}{\det(A)}\ \det(B)\ \det(A) = \det(B) = 2,$$

folgt:

$$\det(C^n) = (\det(C))^n = 2^n.$$

F5. (c). Wegen $\det([\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]) = -6 \neq 0$ ist das System von Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear unabhängig und demnach eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Damit lässt sich $\mathbf{d}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ darstellen.

F6. (a). Da das System mindestens eine Lösung hat, muss gelten, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$. Weiterhin schliessen wir mit dem Wissen, dass die Dimension des Lösungsraumes gleich $2 = 5 - \mathrm{rg}(A)$ ist, auf $3 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$.

F7. (b). Zunächst vereinfachen wir $f(x) = \ln(x\, e^x) = \ln(x) + \ln(e^x) = \ln(x) + x$. Weiter gilt:

$$\left(x\, \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x\right)' = \ln(x) + x\,\frac{1}{x} + x - 1 = \ln(x) + x = f(x).$$

Wir erhalten:

$$\int \ln(x\, e^x)\, dx = x\, \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Zudem kann man leicht zeigen, dass die Funktionen in den Antworten (a) und (c) *keine* Stammfunktionen von f sind.

F8. (a). λ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$0 = \det(A - \lambda\, I) = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)^2 - a^2 \Leftrightarrow 2 - \lambda = \pm|a| \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm |a|.$$

Folglich hat A zwei verschiedene reellwertige Eigenwerte genau dann, wenn $a \neq 0$.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☒	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. (a). Wegen $2\,\sin(x)\,\cos(x) = \sin(2\,x)$ gilt:

$$\int_0^\pi 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(2\,x)\,dx.$$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von $\sin(2\,x)$ schliessen wir auf:

$$\int_0^\pi \sin(2\,x)\,dx = 0.$$

Alternativ erhalten wir mittels der Substitution $u = \sin(x)$:

$$\int_0^\pi 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \int_0^0 2\,u\,du = \left[u^2\right]_0^0 = \left[(\sin(x))^2\right]_0^0 = 0.$$

F2. (c). $\mathbf{u}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow\quad (t-2) + t\,(t-1) + 27 = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 25 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann in $\mathbb{R}$ nie erfüllt sein. Demnach ist $\mathbf{u}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$.

F3. (a). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -3\,(I) \\ +(I) \\ +2\,(I) \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -16 & 16 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 24 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ :(-8) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0.5 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 24 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -4\,(II) \\ -12\,(II) \end{array}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2.5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\mathrm{rg}(A^\star) = 2$ und folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$.

F4. (b). Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (die Determinante der Matrix ist 1 und damit ungleich 0), folgt:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

F5. (c). Sei λ_i ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\mathbf{x}_i$. Es folgt:

$$A^2\,\mathbf{x}_i = A\,(A\,\mathbf{x}_i) = A(\lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \lambda_i\,A\,\mathbf{x}_i = \lambda_i\,(\lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \lambda_i^2\,\mathbf{x}_i.$$

Damit ist λ_i^2 Eigenwert von A^2 mit Eigenvektor $\mathbf{x}_i$.

Im Gegensatz dazu sind λ_i und $2\,\lambda_i$ im Allgemeinen keine Eigenwerte von A^2. Sei beispielsweise $A = 3\,I$, d.h., A ist die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen gleich 3. Der einzige Eigenwert von A ist dann $\lambda = 3$. Wegen $A^2 = 9\,I$ ist der einzige Eigenwert von A^2 gleich $9 = 3^2 = \lambda^2$.

F6. (b). Die Antworten (c) und (d) erfüllen die Bedingung $y_0 = 2$ nicht. Für Antwort (a) gilt:

$$y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 2\,(1+a)^{k+1} - (1+a)\,2\,(1+a)^k = 0 \neq a.$$

Antwort (b) dagegen erfüllt $y_0 = 2$ und

$$y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 2\,(1+a)^{k+1} - 1 - (1+a)\,(3\,(1+a)^k - 1) = 3\,(1+a)^{k+1} - 1 - 3\,(1+a)^{k+1} + 1 + a = a.$$

Alternativ löst man das Anfangswertproblem (Normalform)

$$y_{k+1} = \underbrace{(1+a)}_{=A}\,y_k + \underbrace{a}_{=B}, \qquad y_0 = 2$$

und erhält

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{a}{1-(1+a)} = -1$$

sowie

$$y_{k+1} = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = (1+a)^k\,(2+1) + (-1) = 3\,(1+a)^k - 1.$$

Dies entspricht der Folge in Antwort (b).

F7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}\,y_k + 5.$$

Es folgt $A = \frac{1}{3}$ und $B = 5$. Wegen $A > 0$ und $|A| < 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent.

F8. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{c-1}{c+2}\,y_k + \frac{5}{c+2},$$

d.h., $A = \frac{c-1}{c+2}$ und $B = \frac{5}{c+2}$. Wegen $B \neq 0$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und monoton genau dann, wenn $A > 1$. Es gilt:

Fall 1: $c + 2 > 0 \Leftrightarrow c > -2$:

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{c-1}{c+2} > 1 \Leftrightarrow c - 1 > c + 2 \Leftrightarrow -1 > 2 \;\rightarrow\; \text{unmöglich.}$$

Fall 2: $c + 2 < 0 \Leftrightarrow c < -2$:

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{c-1}{c+2} > 1 \Leftrightarrow c - 1 < c + 2 \Leftrightarrow -1 < 2 \;\rightarrow\; \text{allgemein gültig.}$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und monoton genau dann, wenn $c < -2$.

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

7. Februar 2018

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte $(x^\star, y^\star)$ von f sind

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2\,a\,y + 4\,x^3, \\ f_y(x,y) &= 2\,a\,y + 2\,a\,x. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x^\star, y^\star) = 0 \\ f_y(x^\star, y^\star) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a\,y^\star + 4\,(x^\star)^3 = 0 \\ 2\,a\,y^\star + 2\,a\,x^\star = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,a\,y^\star + 2\,a\,x^\star = 0$ ergibt sich

$$x^\star = -y^\star.$$

Wir setzen dieses Resultat in $2\,a\,y^\star + 4\,(x^\star)^3 = 0$ ein und berechnen

$$\begin{aligned} 4\,(x^\star)^3 = 2\,a\,x^\star \quad &\Leftrightarrow \quad 2\,x^\star \left(2\,(x^\star)^2 - a\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^\star \in \left\{-\sqrt{\frac{a}{2}}, 0, \sqrt{\frac{a}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

Mit $y^\star = -x^\star$ erhalten wir die folgenden drei stationären Punkte von f:

$$P_1 = (0,0)\,,$$

$$P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right),$$

und

$$P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right).$$

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen. Falls $(x^\star, y^\star)$ die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) > 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{yy}(x^\star, y^\star) < 0 \\ f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 < 0 \Rightarrow (x^\star, y^\star) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 12\, x^2, \\ f_{yy}(x, y) &= 2\, a, \\ f_{xy}(x, y) &= 2\, a. \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir:

$$f_{xx}(x^\star, y^\star)\, f_{yy}(x^\star, y^\star) - (f_{xy}(x^\star, y^\star))^2 = 24\, (x^\star)^2\, a - 4\, a^2.$$

Für $P_1 = (0, 0)$ gilt:

$$f_{xx}(0, 0)\, f_{yy}(0, 0) - (f_{xy}(0, 0))^2 = -4\, a^2 < 0.$$

Demnach ist $P_1 = (0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Für $P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ gilt (beachte, dass $a \in \mathbb{R}_{++}$):

$$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 6\, a > 0 \\ f_{yy}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 2\, a > 0 \\ f_{xx}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\, f_{yy}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right) - \left(f_{xy}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right)^2 = 8\, a^2 > 0 \end{array}\right. .$$

Demnach ist $P_2 = \left(\sqrt{\frac{a}{2}}, -\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ ein lokales Minimum.

Für $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ gilt (beachte, dass $a \in \mathbb{R}_{++}$):

$$\left\{\begin{array}{c} f_{xx}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 6\, a > 0 \\ f_{yy}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 2\, a > 0 \\ f_{xx}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)\, f_{yy}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right) - \left(f_{xy}\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right)^2 = 8\, a^2 > 0 \end{array}\right. .$$

Demnach ist $P_3 = \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ ein lokales Minimum.

(b) (7 Punkte)

Wir verwenden die Lagrange Methode und definieren zunächst die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= 2\,x^2 + y^2 + \lambda\,(x^2 - a\,x\,y + b\,y^2 + 15). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 4\,x + \lambda\,(2\,x - a\,y) = 0, \tag{I}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,y + \lambda\,(-a\,x + 2\,b\,y) = 0, \tag{II}$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - a\,x\,y + b\,y^2 + 15 = 0. \tag{III}$$

Soll nun $(x,y) = (1,2)$ ein Extremum unter Nebenbedingung von f sein, muss folglich gelten:

$$F_x(1,2,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 4 + \lambda\,(2 - 2\,a) = 0, \tag{IV}$$
$$F_y(1,2,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 4 + \lambda\,(-a + 4\,b) = 0, \tag{V}$$
$$F_\lambda(1,2,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 1 - 2\,a + 4\,b + 15 = 0. \tag{VI}$$

Aus (IV) bzw. (V) erhalten wir

$$\lambda = \frac{4}{2\,a - 2} \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{4}{a - 4\,b}. \tag{VII}$$

Aus den Gleichungen in (VII) folgt, dass

$$\frac{4}{2\,a-2} = \lambda = \frac{4}{a - 4\,b} \quad\Leftrightarrow\quad 2\,a - 2 = a - 4\,b \quad\Leftrightarrow\quad a = 2 - 4\,b.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (VI) ein und erhalten:

$$1 - 2\,(2 - 4\,b) + 4\,b + 15 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad -12\,b = 12 \quad\Leftrightarrow\quad b = -1 \quad\Rightarrow\quad a = 6.$$

(c) (5 Punkte)

Zunächst nutzen wir die Eigenschaft $\ln(x^r) = r\,\ln(x)$ des Logarithmus und erhalten:

$$\int_1^e x^2\,\ln(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e x^2\,\ln(x)\,dx.$$

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int x^2\,\ln(x)\,dx$ mit Hilfe partieller Integration. Sei

$$u'(x) = x^2 \qquad \text{und} \qquad v(x) = \ln(x).$$

Damit gilt, dass

$$u(x) = \frac{1}{3}\,x^3 \qquad \text{und} \qquad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x^2}_{=u'(x)}\,\underbrace{\ln(x)}_{=v(x)}\,dx &= \underbrace{\frac{1}{3}\,x^3}_{=u(x)}\,\underbrace{\ln(x)}_{=v(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{3}\,x^3}_{=u(x)}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{=v'(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\,x^3\,\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx \\
&= \frac{1}{3}\,x^3\,\ln(x) - \frac{1}{9}\,x^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{3}\,x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + C.
\end{aligned}$$

Wir berechnen nun das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2\,\ln(\sqrt{x})\,dx &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\,x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)\right]_1^e \\
&= \frac{1}{6}\,e^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{6}\left(0 - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{2\,e^3 + 1}{18} \approx 2.287.
\end{aligned}$$

(d) (6 Punkte)

Wir berechnen das unbestimmte Integral $\int \frac{e^x + x\,e^x}{(x\,e^x)^3}\,dx$ mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei $u = x\,e^x$, dann gilt:

$$\frac{du}{dx} = e^x + x\,e^x$$

und

$$(e^x + x\,e^x)\,dx = du.$$

Wir erhalten:

$$\int \frac{e^x + x\,e^x}{(x\,e^x)^3}\,dx = \int \frac{1}{u^3}\,du = -\frac{1}{2\,u^2} + C = -\frac{1}{2\,(x\,e^x)^2} + C.$$

Wir berechnen nun das uneigentliche Integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{e^x + x\,e^x}{(x\,e^x)^3}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{e^x + x\,e^x}{(x\,e^x)^3}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,(x\,e^x)^2}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,(b\,e^b)^2} + \frac{1}{2\,e^2}\right] \\
&= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2\,(b\,e^b)^2}\right]}_{\longrightarrow 0} + \frac{1}{2\,e^2} \\
&= \frac{1}{2\,e^2} \approx 0.0677.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Es ist zu zeigen, dass
$$C^T = C.$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} C^T &= \left[B^{-1}A\,A^{-T}(B^T)^{-1}\right]^T \\ &= \left[(B^T)^{-1}\right]^T (A^T)^T A^T (B^{-1})^T \\ &= \left[(B^T)^T\right]^{-1} A\,A^T (B^T)^{-1} \\ &= B^{-1}A\,A^T(B^T)^{-1} \\ &= C. \end{aligned}$$

(b) (4 Punkte)

Die Richtung des stärksten Abstiegs von f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$ ist durch den Vektor
$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
genau dann gegeben, wenn
$$\lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(-1, \pi)$$
für ein $\lambda < 0$ gilt.

Wir berechnen:
$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(y) + \frac{a}{x+2} + \frac{y}{\pi} \\ x\,\cos(y) + \frac{x}{\pi} \end{pmatrix}.$$
Damit folgt:
$$\mathbf{grad} f(-1, \pi) = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}.$$
Demnach erhalten wir:
$$\begin{aligned} &\lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(-1, \pi) \\ \Leftrightarrow\quad &\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 - \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Also gilt (beachte die 2. Komponente) $\lambda = \frac{1}{\pi} - 1 < 0$ und
$$a + 1 = 2\left(\frac{1}{\pi} - 1\right) \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{2}{\pi} - 3 \approx -2.3634.$$

(c) (3 Punkte)

Da wir drei linear unabhängige Gleichungen haben, berechnet sich die Dimension von V zu

$$\dim(V) = 5 - 3 = 2.$$

Insbesondere sind x_4 und eine weitere Variable freie Variablen. Wir wählen

$$x_1 = t, \quad x_4 = s.$$

Wir lösen nun nach den verbleibenden Variablen x_2, x_3, x_5 auf:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -x_1 = -t, \\ x_1 + 5\,x_2 - 2\,x_3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\,x_3 = x_1 + 5\,x_2 = -4\,t \quad \Rightarrow \quad x_3 = -2\,t, \\ x_1 - x_3 + x_5 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_5 = -x_1 + x_3 = -3\,t. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Basis von $V \subset \mathbb{R}^5$:

$$\mathcal{B}(V) = \left\{ \mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) (6 Punkte)

λ ist ein Eigenwert von M genau dann, wenn $\det(M - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda\, I) &= \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -5\,a & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= -\lambda\,(2-\lambda)\,(4-\lambda) - 3\,(4-\lambda) \\ &= (4-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\ &= (4-\lambda)\,(\lambda - 3)\,(\lambda + 1) \end{aligned}$$

und folglich:

$$\det(M - \lambda\, I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{-1, 3, 4\}.$$

Insbesondere ist $\lambda = 3$ ein Eigenwert von M.

Wir berechnen nun die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 3$. Der Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ genau dann, wenn $(M - \lambda\, I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Für $\lambda = 3$ gilt mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\
(M - 3\,I, \mathbf{0}) & = & \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5\,a & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(-3) \\ \\ \\ \end{array} \\
 & \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -5\,a & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +(I) \\ +5\,a\,(I) \end{array} \\
 & \to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 - 5\,a & 1 & 0 \end{array}\right) ,
\end{array}
$$

d.h.:

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad -x_2 \quad &= 0, \\
(5 - 5\,a)\,x_2 + x_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Wir wählen $x_2 = t$ als freie Variable und erhalten:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_2 = t, \\
x_2 &= t, \\
x_3 &= (5\,a - 5)\,x_2 = (5\,a - 5)\,t.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Eigenraum, das heisst die Menge aller Eigenvektoren zusammen mit dem Vektor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, gegeben durch

$$
V_{(\lambda=3)} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5\,a - 5 \end{pmatrix} ; \quad t \in \mathbb{R} \right\} .
$$

(e) (8 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 4 & 8 \\ 12 & 16 & 8 & 36+4\,r \\ 0 & 1 & -2 & s \\ 3 & 2 & 3 & 9-2\,r+s \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{l} :4 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 12 & 16 & 8 & 36+4\,r \\ 0 & 1 & -2 & s \\ 3 & 2 & 3 & 9-2\,r+s \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ -12\,(I) \\ \\ -3\,(I) \\ -I \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & -4 & 12+4\,r \\ 0 & 1 & -2 & s \\ 0 & 2 & 0 & 3-2\,r+s \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad \overset{(II)\leftrightarrow(V)}{\rightarrow} \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & s \\ 0 & 2 & 0 & 3-2\,r+s \\ 0 & 16 & -4 & 12+4\,r \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ -(II) \\ -2\,(II) \\ -16\,(II) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & s-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\,r+s \\ 0 & 0 & -4 & -4+4\,r \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ :(-2) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\,r+s \\ 0 & 0 & -4 & -4+4\,r \end{array}\right) & \begin{array}{l} -(III) \\ \\ \\ \\ -4\,(III) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}s \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\,r+s \\ 0 & 0 & 0 & -2+4\,r-2\,s \end{array}\right) \end{array}$$

Demnach ist das Gleichungssystem genau dann lösbar, wenn gilt:

$$1-2\,r+s=0 \;\wedge\; -2+4\,r-2\,s=0 \quad \Rightarrow \quad s=2\,r-1.$$

Folglich existiert für $s=2\,r-1$, $r\in\mathbb{R}$ die eindeutige Lösung:

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,s \\ 1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r+1 \\ 1 \\ 1-r \end{pmatrix}.$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☒	☐	☐	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒

F1. (c). Die Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$ entspricht einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Halbachsen 2 und 5. Die Funktion $f(x, y) = -x$ wird minimal genau dann, wenn x maximal wird. Der Punkt auf der Ellipse mit der grössten x-Koordinate ist $P = (2, 0)$. Beachte, dass der Punkt $P = (3, 1)$ die Nebenbedingung verletzt.

F2. (d). Da $f(2) = -1 < 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt, kann f keine Dichtefunktion sein.

F3. (b).Da $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{6, 4\} = 4$ und $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ gilt, kann lediglich Antwort (b) richtig sein.

F4. (d). Es gibt keine allgemein gültige Beziehung für die Determinante einer Summe von Matrizen.

F5. (a). Wegen $\det([\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]) = 0$ ist das System von Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear abhängig. Insbesondere gilt $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Demnach ist $\mathbf{d}$ eine Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ genau dann, wenn es eine Linearkombination von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist. Letzteres gilt genau dann, wenn $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ linear abhängig ist, also genau dann, wenn

$$\det([\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]) = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix} \right| = 3\,t - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 6.$$

Tatsächlich gilt:

$$\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b} = \mathbf{d}.$$

F6. (b). Wegen $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$ hat das System eine eindeutige Lösung genau dann, wenn $\mathrm{rg}(A) = 4$ und keine Lösung, falls $\mathrm{rg}(A) < 4$.

F7. (a). Sei $f(x) = \frac{x}{5} - \frac{2}{25}\ln(5\,x + 2) + C$, mit $C \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{2}{25}\,\frac{5}{5\,x+2} = \frac{(5\,x+2) - 2}{5\,(5\,x+2)} = \frac{x}{5\,x+2}.$$

Daraus folgt:

$$\int \frac{x}{5\,x+2}\,dx = \frac{x}{5} - \frac{2}{25}\,\ln(5\,x+2) + C.$$

Zudem kann man leicht zeigen, dass die Funktionen in den Antworten (b) und (c) *keine* Stammfunktionen von $\frac{x}{5\,x+2}$ sind.

F8. (d). Es gilt:

$$A\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix} = 5\,\mathbf{b}.$$

Demnach ist $\mathbf{b}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 5$ und es gilt:

$$A^n\,\mathbf{b} = 5^n\,\mathbf{b} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also sind (a) - (c) falsch.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☒	☐	☐

F1. (b). Es gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1} e^{2\,x+1}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\,e^{2\,x+1}\right]_a^1 \\ &= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^3}{2}-\frac{e^{2\,a+1}}{2}\right) \\ &= \frac{e^3}{2}-\underbrace{\lim_{a\to-\infty}\frac{e^{2\,a+1}}{2}}_{\longrightarrow 0} \\ &= \frac{e^3}{2}.\end{aligned}$$

F2. (c). Es gilt:

$$\mathbf{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ -\frac{1}{y}\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{grad} f(t,t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad} f(t,t)\cdot\mathbf{b} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\,t-\frac{1}{t} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t^2 = \frac{1}{2} \\ \overset{t>0}{\Rightarrow}\quad & t = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

F3. (b). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 9 & 5 & -10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ +2\,(I) \\ -9\,(I) \\ -2\,(I)\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & 14 & 21 \\ 0 & -4 & 17 & -45 & -53 \\ 0 & -2 & 9 & -17 & -11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ +4\,(II) \\ +2\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -9 & -15 \\ 0 & 1 & -4 & 14 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 31 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(III) \\ +4\,(III) \\ \\ -(III) \end{array}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -20 & -46 \\ 0 & 1 & 0 & 58 & 145 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Demnach gilt $\operatorname{rg}(A^\star) = 3$ und folglich $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\star) = 3$.

F4. (d). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ +(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -(III) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

F5. (c).

$$A\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = -2\,\mathbf{b}.$$

F6. (b). Wir setzen $y_0 = 2$ und $y_1 = \frac{5}{3}$ in die Differenzengleichung (für $k = 1$) ein und erhalten:

$$(1-a)\,y_1 + a\,y_0 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad (1-a)\,\frac{5}{3} + 2\,a - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{5}{3} - \frac{5}{3}\,a + 2\,a - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\,a = -\frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow \quad a = -2.
\end{aligned}$$

F7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
&3\,(y_k - 2\,y_{k+1}) = 6 - 7\,y_k \\
&\quad \Leftrightarrow \quad 3\,y_k - 6\,y_{k+1} = 6 - 7\,y_k \\
&\quad \Leftrightarrow \quad -6\,y_{k+1} = -10\,y_k + 6 \\
&\quad \Leftrightarrow \quad y_{k+1} = \frac{5}{3}\,y_k - 1.
\end{aligned}$$

Es folgt $A = \frac{5}{3}$ und $B = -1$. Wegen $A > 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{c-1}{c+2}\,y_k + \frac{5}{c+2},$$

d.h., $A = \frac{c-1}{c+2}$ und $B = \frac{5}{c+2}$. Wegen $B \neq 0$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und oszillierend genau dann, wenn

$$A = \frac{1+c}{c-2} \leq -1.$$

Fall 1: $c > 2$

$$\begin{aligned}
1 + c &\leq -c + 2 \\
2\,c &\leq 1 \\
c &\leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Widerspruch!

Fall 1: $c < 2$

$$\begin{aligned}
1 + c &\geq -c + 2 \\
2\,c &\geq 1 \\
c &\geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und oszillierend genau dann, wenn $c \in \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

Frühling 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B

Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

25. Juni 2018

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den, im entsprechenden Kontext am hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen, und erst in einem zweiten Schritt verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem Problem, das durch einen Text beschrieben wird, in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formulierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Wörter "Barwert" und "stetigen Cash Flow" auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hin. Der Barwert entspricht der diskontierten Summe der zukünftigen Cash Flows (Abschnitt 8.2). Weil jedoch der Cash Flow in dieser Aufgabe in kontinuierlicher Weise erfolgt, müssen wir die Summe durch ein Integral ersetzen und dabei die Exponentialfunktion für das Abdiskontieren verwenden (Abschnitt 15.2). Dies führt zu folgendem mathematischen Ausdruck für den Barwert:

$$PV(10) = \int_0^{10} B(t)\, e^{-i\,t}\, dt = \int_0^{10} (a\,t + 10)\, e^{-i\,t}\, dt.$$

Bevor wir das Integral berechnen, müssen wir zuerst verstehen, wonach wir überhaupt suchen. Mit der obigen Formulierung wollen wir den Parameter a bestimmen, für den gilt, dass

$$PV(10) = 1'000.$$

Nun wird klar, wie wir vorgehen müssen: (i) Löse das Integral, um eine explizite Form für $PV(10)$ zu erhalten, (ii) benutze die Bedingung $PV(10) = 1'000$, um den Parameter a zu bestimmen.

(i) Um das Integral $\int_0^{10} (a\,t+10)\, e^{-i\,t}\, dt$ zu lösen, verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = a\,t+10$ und $v'(t) = e^{-i\,t}$. Daraus folgt $u'(t) = a$ und $v(t) = -\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(a\,t+10)}_{=u(t)}\, \underbrace{e^{-i\,t}}_{=v'(t)}\, dt &= \underbrace{(a\,t+10)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} - \int \underbrace{a}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\
&= -\frac{a\,t+10}{i}\, e^{-i\,t} + \frac{a}{i} \int e^{-i\,t}\, dt \\
&= -\frac{a\,t+10}{i}\, e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\, e^{-i\,t} + C,
\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Daraus folgt:

$$PV(10) = \int_0^{10} (a\,t+10)\, e^{-i\,t}\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{a\,t+10}{i}\,e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\,e^{-i\,t}\right]_0^{10} \\
&= -\frac{10\,a+10}{i}\,e^{-10\,i} - \frac{a}{i^2}\,e^{-10\,i} - \left(-\frac{10}{i} - \frac{a}{i^2}\right) \\
&= a\left(\frac{1}{i^2} - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i} - \frac{1}{i^2}\,e^{-10\,i}\right) + \left(\frac{10}{i} - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i}\right) \\
&= a\left[\frac{1}{i^2}\left(1-e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i}\right] + \frac{10}{i}\left(1-\,e^{-10\,i}\right).
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir nun folgenden Ausdruck für den Barwert:

$$
PV(10) = a\left[\frac{1}{i^2}\left(1-e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i}\right] + \frac{10}{i}\left(1-\,e^{-10\,i}\right).
$$

(ii) Wir benutzen nun die obige Formel und die Bedingung $PV(10) = 1'000$, um a zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
PV(10) = 1'000 \quad &\Leftrightarrow \quad a\left[\frac{1}{i^2}\left(1-e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i}\right] + \frac{10}{i}\left(1-\,e^{-10\,i}\right) = 1'000 \\
&\Leftrightarrow \quad a = \frac{1'000 - \frac{10}{i}\left(1-\,e^{-10\,i}\right)}{\frac{1}{i^2}\left(1-e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\,e^{-10\,i}} \\
&\overset{i=0.05}{\Leftrightarrow} \quad a \approx 25.534.
\end{aligned}
$$

(b) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Schlüsselwörter "Tabelle" und "linear kombinieren" auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hin. "Tabelle" weist auf das Verwenden von Matrizen hin (Abschnitt 16.1) und die Frage, ob "lineares Kombinieren" von Spaltenvektoren einer Matrix einem vorgegebenen Vektor entspricht, bezieht sich auf das Problem, ob ein lineares Gleichungssystem eine Lösung besitzt oder nicht (Kapitel 18).

Der Payoff

$$
\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}
$$

kann durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden genau dann, wenn

$$
\lambda_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3.0 \\ 2.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} m \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}
$$

wenigstens eine Lösung $(\lambda_1^\star, \lambda_2^\star, \lambda_3^\star)$ besitzt. Weil lineare Gleichungssysteme entweder keine, eine oder unendliche viele Lösungen haben, müssen wir m so bestimmen, dass das lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt. Um dies zu erreichen, wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} & \\
(A,\mathbf{b}) = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1.5 & 3.0 & m & 2\,m \\ 1.5 & 2.0 & 0.5 & 1 \\ 1.5 & 0.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \cdot\left(\frac{2}{3}\right) \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} & \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{2}\,(I) \\ -\frac{3}{2}\,(I) \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} & \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} - m & 1 - 2\,m \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} - m & \frac{1}{2} - 2\,m \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ :\,(-1) \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} & \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ 0 & 1 & m - \frac{1}{2} & 2\,m - 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} - m & \frac{1}{2} - 2\,m \end{array}\right) & \begin{array}{l} -2\,(II) \\ :\,(-1) \\ +\frac{5}{2}\,(II) \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \end{array} & \\
\to & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 - \frac{4}{3}\,m & 2 - \frac{8}{3}\,m \\ 0 & 1 & m - \frac{1}{2} & 2\,m - 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\,m & 3\,m - 2 \end{array}\right) & .
\end{array}$$

Um m so zu bestimmen, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden kann, müssen wir den Fall von keiner Lösungen für das lineare Gleichungssystem *ausschliessen*. Dies ist der Fall, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$, also wenn

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\,m = 0 \text{ und } 3\,m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Es folgt daraus, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapieren erreicht werden kann genau dann, wenn $m \neq -\frac{1}{6}$.

(c) (10 Punkte)
In dieser Aufgabe deutet das Wort "maximal" auf die zu verwendenden Hilfsmittel hin. Die Aufgabenstellung ist ein Optimierungsproblem, entweder mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In diesem Fall können jedoch die Variablen a und p frei gewählt werden, so dass ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung vorliegt. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert werden muss. Im Text wird erwähnt, dass der Gewinn maximiert werden soll. Der Gewinn entspricht der Differenz zwischen Verkaufserlösen und den Kosten.

Es gilt:

Einnahmen/Verkaufserlöse:

$$\underbrace{(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)}_{\text{Nachfrage}}\ \underbrace{p}_{\text{Preis}}$$

Kosten:

$$\underbrace{20'000}_{\text{Fixkosten}} + \underbrace{2\,(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)}_{\text{Produktionskosten}} + \underbrace{a}_{\text{Werbung}}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(a,p) &= \textbf{Gewinn} \\ &= \textbf{Verkaufserlöse} - \textbf{Kosten} \\ &= (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)\,p - \left[20'000 + 2\,(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p) + a\right] \\ &= (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)\,(p-2) - 20'000 - a. \end{aligned}$$

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt (a_0, p_0) von f sind

$$\begin{cases} f_a(a_0,p_0) = 0 \\ f_p(a_0,p_0) = 0 \end{cases}.$$

Entsprechend berechnen wir die ersten partiellen Ableitungen von f and erhalten

$$\begin{aligned} f_a(a,p) &= \frac{4}{2\sqrt{a}}\,(p-2) - 1 = \frac{2}{\sqrt{a}}\,(p-2) - 1, \\ f_p(a,p) &= -20\,(p-2) + (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p) = -40\,p + 3'040 + 4\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_a(a_0,p_0) = 0 \\ f_y(a_0,p_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a_0}}\,(p_0-2) - 1 = 0 \\ -40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0 \end{cases}.$$

Aus $\frac{2}{\sqrt{a_0}}\,(p_0-2) - 1 = 0$ erhalten wir

$$\sqrt{a_0} = 2\,(p_0 - 2).$$

Dieses Resultat setzen wir in $-40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0$ ein und finden:

$$\begin{aligned} -40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0 \quad &\overset{\sqrt{a_0}=2\,(p_0-2)}{\Leftrightarrow} \quad -40\,p_0 + 3'040 + 8\,(p_0-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 32\,p_0 + 3'024 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_0 = 94.5. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{a_0} = 2\,(p_0 - 2) = 2 \cdot (94.5 - 2) = 185 \Leftrightarrow a_0 = 34'225.$$

Als nächstes verifizieren wir die hinreichenden Bedingungen: falls (a_0, p_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt folgendes:

$$\left\{\begin{array}{c} f_{aa}(a_0,p_0) > 0 \\ f_{pp}(a_0,p_0) > 0 \\ f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_{aa}(a_0,p_0) < 0 \\ f_{pp}(a_0,p_0) < 0 \\ f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 < 0 \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{aa}(a,p) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-\frac{3}{2}}\,(p-2) = -a^{-\frac{3}{2}}\,(p-2), \\ f_{pp}(a,p) &= -40, \\ f_{ap}(a,p) &= \frac{2}{\sqrt{a}} = 2\,a^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f_{aa}(a,p) < 0$, falls $a > 0$ und $p > 2$, und $f_{pp}(a,p) < 0$ für alle a und p. Überdies ist

$$f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0.$$

für $(a_0,p_0) = (34'225, 94.5)$.
Deshalb ist $(a_0,p_0) = (34'225, 94.5)$ ein Maximum von f.

(d) (7 Punkte)

In dieser Aufgabe finden wir die Schlüsselwörter "Extremum annehmen (maximal oder minimal)", welche auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hinweisen. Die Aufgabenstellung entspricht einem Optimierungsproblem, mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In dieser Aufgabe können x und y *nicht* frei gewählt werden, weil die Distanz zwischen dem Punkt (x,y) und dem Punkt $(a,0)$ stets 4 betragen muss, d.h., der Punkt (x,y) muss auf einem Kreis mit Zentrum $(a,0)$ und Radius 4 liegen (ein Bild hilft beim Veranschaulichen der Situation). Deshalb liegt ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung vor. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert/minimiert werden soll. Im Text wird beschrieben, dass die Fläche von R maximiert werden soll, und diese entspricht der Funktion:

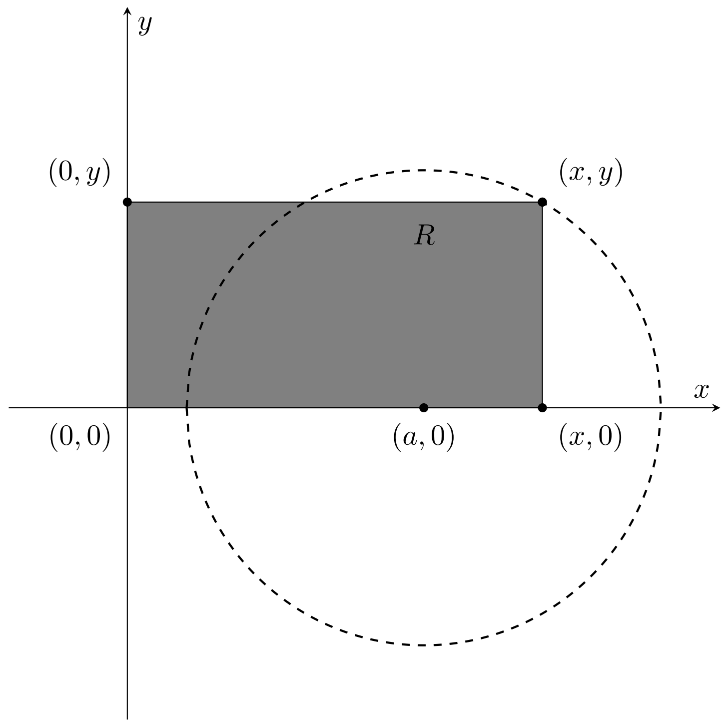
$$f(x,y) = x\,y.$$

Die Nebenbedingung kann wie folgt formuliert werden:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y) = (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0.$$

Insgesamt kann das Optimierungsproblem folgendermassen formuliert werden:

$$\max f(x,y) = x\,y \text{ so, dass } \varphi(x,y) = (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0.$$



Wir verwenden das Lagrange Verfahren, um das Problem zu lösen. Dafür definieren wir als erstes die Lagrange Funktion:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y) \\ &= x\, y + \lambda\, ((x-a)^2 + y^2 - 16). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange Bedingungen:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 2\,\lambda\,(x-a) = 0, \tag{I}$$
$$F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2\,\lambda\, y = 0, \tag{II}$$
$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) folgt

$$2\,\lambda = -\frac{y}{x-a}. \tag{IV}$$

Von (II) erhalten wir

$$2\,\lambda = -\frac{x}{y}. \tag{V}$$

Gleichungen (IV) und (V) implizieren:

$$-\frac{y}{x-a} = 2\,\lambda = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 = x\,(x-a).$$

Dieses Resultat fügen wir in Gleichung (III) ein und folgern daraus:

$$(x-a)^2 + x\,(x-a) - 16 = 0 \Leftrightarrow 2\,x^2 - 3\,a\,x + a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\,a \pm \sqrt{9\,a^2 - 8\,(a^2-16)}}{4} = \frac{3\,a \pm \sqrt{a^2+128}}{4}.$$

Weil $x = \frac{3\,a - \sqrt{a^2+128}}{4} \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ für $a \in (4, 8)$, folgt $x\,(x-a) < 0$, was wiederum im Widerspruch zu

8

$y^2 = x\,(x-a)$ steht. Deshalb muss $x = \frac{3\,a - \sqrt{a^2+128}}{4}$ ausgeschlossen werden, womit als einzige Lösung übrig bleibt:

$$x = \frac{3\,a + \sqrt{a^2+128}}{4}.$$

Damit folgt:

$$y = \sqrt{x\,(x-a)} = \sqrt{\frac{3\,a + \sqrt{a^2+128}}{4}\,\left(\frac{3\,a + \sqrt{a^2+128}}{4} - a\right)} = \sqrt{\frac{64 + a\,\sqrt{a^2+128} - a^2}{8}}.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐
Frage 9	☐	☐	☒	☐
Frage 10	☒	☐	☐	☐
Frage 11	☐	☒	☐	☐
Frage 12	☐	☐	☒	☐

F1. (d). Die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ entspricht einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,3)$ und Halbachsen $a = 6$ und $b = 4$. Folglich ist $P = (6,3)$ der Punkt auf der Ellipse mit der grössten x-Koordinate und damit ein Maximum von $f(x,y) = x$ unter der Bedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

F2. (d). Zunächst ist $(-x_0, -y_0)$ ist ein stationärer Punkt von g, da (x_0, y_0) ein stationärer Punkt von f ist. Tatsächlich gilt, dass

$$g_x(-x_0, -y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$$

und

$$g_y(-x_0, -y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ausserdem ist $(-x_0, -y_0)$ ein lokales Minimum von g, da (x_0, y_0) ein lokales Maximum von f ist. Die folgt aus

$$g_{xx}(-x_0, -y_0) = -f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$
$$g_{yy}(-x_0, -y_0) = -f_{yy}(x_0, y_0) > 0,$$

und

$$g_{xx}(-x_0, -y_0)\, g_{yy}(-x_0, -y_0) - (g_{xy}(-x_0, -y_0))^2 = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

F3. (b). Da $(x_0, y_0) = (1,2)$ ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ ist, entspricht die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1,2)$ der Steigung der Tangente an die Niveaulinie $\varphi(x,y) = 0$. Mit Hilfe des Satzes von der impliziten Funktion erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx}(1,2) = -\frac{\varphi_x(1,2)}{\varphi_y(1,2)} = -\frac{2}{3}.$$

F4. (a). Die Integralfunktion I ist eine Stammfunktion von f, d.h., $I'(x) = f(x)$.

F5. (d). Die einzige richtige Antwort ist (d), welche der Formel der Integration durch Substitution entspricht. Beachte, dass $F'(x) = f(x)$, da F eine Stammfunktion von f ist. Durch Differenzieren der Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens erhalten wir jeweils:

(a) $f(g(x)) = f(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(b) $f(g(x)) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(c) $f(g(x))\, f'(x) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(d) $f(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist offensichtlich richtig.

F6. (d). Es gilt:

(a) $(x^2 + x\, e^{x^2} + C)' = 2\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}$;

(b) $(3\,x + 2\,x\, e^{x^2} + C)' = 3 + (2 + 4\,x^2)\, e^{x^2}$;

(c) $(3\,x^2 + 2\,x\, e^{x^2} + C)' = 6\,x + (2 + 4\,x^2)\, e^{x^2}$;

(d) $(3\,x^2 + x\, e^{x^2} + C)' = 6\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}$.

Demnach ist die Funktion in (d) als einzige Stammfunktion des Integranden des gegebenen Integrals. Es folgt:

$$\int \left[6\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}\right]\, dx = 3\,x^2 + x\, e^{x^2} + C.$$

F7. (b). Eine Dichtefunktion ist eine nicht-negative Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle x, wenn $a > 0$. Ausserdem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(a\,x^2 + \frac{1}{2}\right)\, dx = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}.$$

Es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

F8. (b). Eine Dichtefunktion ist eine nicht-negative Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^8 f(x)\, dx = \int_0^8 \left(a\,x + \frac{1}{16}\right)\, dx = 32\,a + \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow 32\,a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{64}.$$

Offensichtlich gilt für $a = \frac{1}{64}$, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und folglich ist f eine Dichtefunktion. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^8 x \left(\frac{x}{64} + \frac{1}{16}\right)\, dx \\
&= \int_0^8 \left(\frac{x^2}{64} + \frac{x}{16}\right)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{192} + \frac{x^2}{32}\right]_0^8 \\
&= \frac{512}{192} + \frac{64}{32} \\
&= \frac{896}{192} \\
&= \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

F9. (c). Es gilt:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}_{=0 \text{ da orthogonal}} = ||\mathbf{a}||^2 = 9.$$

F10. (a). Eine Basis eines Vektorraums ist ein System von linear unabhängigen Vektoren, welches den gesamten Vektorraum aufspannt. Demnach können wir Antwort (d) ausschliessen, da im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren in einem System drei ist. Wir überprüfen nun Antwort (a), (b), und (c). Wir verwenden das folgende Resultat: drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definieren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn sie linear unabhängig sind, d.h., die 3×3 Matrix, deren Spalten durch die drei Vektoren gegeben sind, ist regulär, oder äquivalent, ihre Determinante ist von Null verschieden. Es gilt:

(a) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = -2 \neq 0.$

(b) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\right| = 0.$

(c) $\left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0.$

F11. (b). Die Existenz von unendlich vielen Lösungen impliziert, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 5$. In diesem Fall ist die Dimension des Lösungsraums gleich $3 = 5 - \mathrm{rg}(A)$. Folglich gilt, dass $\mathrm{rg}(A) = 2$.

F12. (c). Es gilt:

$$\begin{aligned}
B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} &= B^T\,B^T\,A^T\,(A^{-1})^T\,(B^{-1})^T\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,B^T\,\underbrace{A^T\,(A^T)^{-1}}_{=I}\,(B^T)^{-1}\,A^{-1} \\
&= B^T\,\underbrace{B^T\,(B^T)^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,A^{-1} \\
&\overset{A \text{ symmetrisch}}{=} B^T\,(A^{-1})^T \\
&= (A^{-1}\,B)^T.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

F1. (b). Da f die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X auf $[0,1]$ ist, gilt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

und

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \mathbb{E}\big[X\big].$$

Es folgt, dass

$$\int_0^1 (x+1)\,f(x) = \underbrace{\int_0^1 x\,f(x)\,dx}_{=\mathbb{E}\left[X\right]} + \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{=1} = \frac{28}{45} + 1 = \frac{73}{45}.$$

F2. (c). $\mathbf{u}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t\,(t+5) + (t-1)\,(-1) + (-6)\cdot 1 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 4\,t - 5 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad (t+5)\,(t-1) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t \in \{-5, 1\}.
\end{aligned}$$

Für $t = -5$ haben wir

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{25+36+36} = \sqrt{97}.$$

Für $t = 1$ haben wir

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

and

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37}.$$

F3. (b). Wir verwenden die Gauß Methode:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -9\,(I) \\ -7\,(I) \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \end{matrix} \\
A^\star &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 2$ und deshalb $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$.

F4. (b). Um die Inverse von A zu bestimmen verwenden wir Gauß:

$$
\begin{aligned}
(A, I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -(I) \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :(-1) \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(III) \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = (I, A^{-1}).
\end{aligned}
$$

Es folgt:

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .
$$

F5. (b). Falls λ ein Eigenwert von A mit dem Eigenvektor $\mathbf{x}$ ist, dann ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 zum selben Eigenvektor $\mathbf{x}$. Dies folgt aus

$$
A^2\,\mathbf{x} = A\,(A\,\mathbf{x}) = A(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,\mathbf{x} = \lambda\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda^2\,\mathbf{x}.
$$

Wir berechnen die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) = \lambda\,(1-\lambda)(\lambda-2).$$

Daher gilt

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0,1,2\},$$

d.h., $0,1,2$ sind die Eigenwerte von A. Es folgt, dass 0,1,4 die Eigenwerte von A^2 sind.

F6. (c). Antworten (a), (b), und (d) erfüllen nicht die Bedingung $y_0 = 2$. Für Antwort (c) gilt:

$$y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 4\,(1+a)^{k+1} - 2 - (1+a)\,(4\,(1+a)^k - 2) = 4\,(1+a)^{k+1} - 2 - 4\,(1+a)^{k+1} + 2 + 2\,a = 2\,a$$

für $a \neq 1$ und $a \neq 0$. Deshalb erfüllt (c) die Differenzengleichung.

F7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = 2\,y_k + 7.$$

Es folgt, dass $A = 2$ und $B = 7$. Weil $A > 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

F8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = \frac{1}{a+2}\,y_k - \frac{a^2-4}{a+2},$$

d.h., $A = \frac{1}{a+2}$ und $B = -\frac{a^2-4}{a+2} = 2 - a$. Da $A \neq 1$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent genau dann, wenn $0 < A < 1$. Es gilt:

$$0 < A < 1 \Leftrightarrow (a+2) > 0 \text{ und } a + 2 > 1 \Leftrightarrow a > -1.$$

Es folgt, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann monoton und konvergent ist, wenn $a > -1$. Weiterhin konvergiert die Lösung gegen null genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{2-a}{1-\frac{1}{a+2}} = -\frac{a^2-4}{a+1} = 0 \overset{a>-1}{\Longleftrightarrow} a = 2.$$

Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

6. Februar 2019

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den, im entsprechenden Kontext am hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen, und erst in einem zweiten Schritt verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem Problem, das durch einen Text beschrieben wird, in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formulierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Ausdrücke "Wert der Einlagen zum Zeitpunkt T" und "kontinuierliche Verzinsung" auf die mathematischen Hilfsmittel hin. Der Endwert entspricht der verzinsten Summe der Cash Flows oder äquivalent dem Barwert aller verzinsten Cash Flows zum Zeitpunkt $T = 20$ (Abschnitt 8.2). Weil jedoch der Cash Flow in dieser Aufgabe in kontinuierlicher Weise erfolgt, müssen wir die Summe durch ein Integral ersetzen und dabei die Exponentialfunktion für das Abdiskontieren verwenden (Abschnitt 15.2). Dies führt zu folgendem mathematischen Ausdruck für den Endwert:

$$FV(20) = e^{iT}\, PV(20) = e^{iT} \int_0^T D(t)\, e^{-i\,t}\, dt = e^{20\,i} \int_0^{20} (b\,t + 200)\, e^{-i\,t}\, dt.$$

Bevor wir das Integral berechnen, müssen wir zuerst verstehen, wonach wir überhaupt suchen. Mit der obigen Formulierung wollen wir den Parameter b so bestimmen, dass

$$FV(20) = 100,000$$

oder äquivalent

$$PV(20) = 100,000\, e^{-20\,i}.$$

Nun wird klar, wie wir vorgehen müssen: (i) Löse das Integral, um eine explizite Form für $PV(20)$ zu erhalten, (ii) benutze die Bedingung $PV(20) = 100,000\, e^{-20\,i}$, um den Parameter b zu bestimmen.
Um das Integral $\int_0^{20} (b\,t + 200)\, e^{-i\,t}\, dt$ zu lösen, verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = b\,t + 200$ und $v'(t) = e^{-i\,t}$. Es folgt, dass $u'(t) = b$ und $v(t) = -\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}$. Deshalb:

$$\begin{aligned}
\int_0^{20} \underbrace{(b\,t + 200)}_{=u(t)}\, \underbrace{e^{-i\,t}}_{=v'(t)}\, dt &= \underbrace{(b\,t + 200)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)}\Bigg|_0^{20} - \int_0^{20} \underbrace{b}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\
&\overset{i=0.05}{=} -20\, e^{-1}(20\,b + 200) + 20 \cdot 200 + 20\,b \int_0^{20} e^{-0.05\,t}\, dt \\
&= -400\, e^{-1}\, b - 4000\, e^{-1} + 4000 + 20\,b\,(-20)\, e^{-0.05\,t}\Big|_0^{20} \\
&= -400\, e^{-1}\, b + 4000\,(1 - e^{-1}) - 400\, e^{-1}\, b + 400\, b
\end{aligned}$$

$$= \quad b\,(400 - 800\,e^{-1}) + 4000\,(1 - e^{-1}).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 100,000\,e^{-20\cdot 0.05} &= b\,(400 - 800\,e^{-1}) + 4000\,(1 - e^{-1}) \\ \Rightarrow b &= \frac{100,000 - 4000\,(e-1)}{400\,e - 800} \approx 324.13. \end{aligned}$$

(b) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Schlüsselwörter "Tabelle", "Payoff zu replizieren" und "Gauß-Verfahren" auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hin. "Tabelle" weist auf das Verwenden von Matrizen hin (Abschnitt 16.1) und die Frage, ob es möglich ist, den "Payoff zu replizieren", d.h. die Spaltenvektoren einer Matrix einem vorgegebenen Vektor entspricht, bezieht sich auf das Problem, ob ein lineares Gleichungssystem eine Lösung besitzt oder nicht (Kapitel 18).

Der Payoff

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kann durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden genau dann, wenn

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m^2 - m - 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wenigstens eine Lösung $(\lambda_1^\star, \lambda_2^\star, \lambda_3^\star, \lambda_4^\star)$ besitzt.Weil lineare Gleichungssysteme entweder keine, eine oder unendliche viele Lösungen haben, müssen wir m so bestimmen, dass das lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt. Um dies zu erreichen, wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & m^2 - m - 11 & m+2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ -2\,(I) \\ -(I) \\ -(I) \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & m^2 - m - 11 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ -(II) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 - m - 12 & m+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

Um m so zu bestimmen, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden kann, müssen wir den Fall von keiner Lösungen für das lineare Gleichungssystem *ausschliessen*. Dies ist der Fall, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$, also wenn,

$$m^2 - m - 12 = (m+3)(m-4) = 0 \text{ und } m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Bemerkung:
Für $m = -3$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da $\mathrm{rg}(A) = 3 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) < n = 4$ gilt.
Für $m \notin \{-3, 4\}$ gilt $\mathrm{rg}(A) = 4 = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = n$ und das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.

Es folgt daraus, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m+2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapieren erreicht werden kann genau dann, wenn $m \neq 4$.

(c) (10 Punkte)

In dieser Aufgabe deutet das Wort "maximal" auf die zu verwendenden Hilfsmittel hin. Die Aufgabenstellung ist ein Optimierungsproblem, entweder mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In diesem Fall können jedoch die Variablen I und p frei gewählt werden, so dass ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung vorliegt. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert werden muss. Im Text wird erwähnt, dass der Gewinn maximiert werden soll. Der Gewinn entspricht der Differenz zwischen Verkaufserlösen und den Kosten. Es gilt:

Verkaufserlöse:

$$\underbrace{(1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p)}_{\text{Nachfrage}} \;\underbrace{p}_{\text{Preis}}$$

Kosten:

$$\underbrace{I}_{\text{Erstinvestition}} \quad + \underbrace{0.2 \cdot (1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p)\,p}_{\text{Unterhaltskosten}}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(I,p) &= \textbf{Gewinn} \\ &= \textbf{Verkaufserlöse} - \textbf{Kosten} \\ &= (1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p)\,p - \Big[I + 0.2 \cdot (1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p)\,p\Big] \\ &= 0.8 \cdot (1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p)\,p - I. \end{aligned}$$

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt (I_0, p_0) von f sind

$$\begin{cases} f_I(I_0, p_0) = 0 \\ f_p(I_0, p_0) = 0 \end{cases}.$$

Entsprechend berechnen wir die ersten partiellen Ableitungen von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_I(I,p) &= 0.8\,\frac{5}{2}\,I^{-\frac{1}{2}}\,p - 1, \\ f_p(I,p) &= 0.8\,(-40)\,p + 0.8\,(1000 + 5\sqrt{I} - 40\,p). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_I(I_0,p_0) = 0 \\ f_p(I_0,p_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,I_0^{-\frac{1}{2}}\,p_0 - 1 = 0 \\ -32\,p_0 + 800 + 4\sqrt{I_0} - 32\,p_0 = 0 \end{cases}.$$

Aus $2\,I_0^{-\frac{1}{2}}\,p_0 - 1 = 0$ erhalten wir

$$\sqrt{I_0} = 2\,p_0.$$

Dieses Resultat setzen wir in $-32\,p_0 + 800 + 4\sqrt{I_0} - 32\,p_0 = 0$ ein und finden:

$$\begin{aligned} -32\,p_0 + 800 + 4\sqrt{I_0} - 32\,p_0 = 0 \quad &\overset{\sqrt{I_0}=2\,p_0}{\Leftrightarrow} \quad -32\,p_0 + 800 + 8\,p_0 - 32\,p_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_0 = \frac{800}{56} = \frac{100}{7} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{I_0} = 2 \cdot \frac{100}{7} \Rightarrow I_0 = \left(\frac{200}{7}\right)^2.$$

Als nächstes prüfen wir die <u>hinreichenden Bedingungen</u>: falls (I_0,p_0) die notwendigen Bedingungen erfüllen, dann gilt das folgende:

$$\begin{cases} f_{II}(I_0,p_0) > 0 \\ f_{pp}(I_0,p_0) > 0 \\ f_{II}(I_0,p_0)\,f_{pp}(I_0,p_0) - (f_{Ip}(I_0,p_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (I_0,p_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} f_{II}(I_0,p_0) < 0 \\ f_{pp}(I_0,p_0) < 0 \\ f_{II}(I_0,p_0)\,f_{pp}(I_0,p_0) - (f_{Ip}(I_0,p_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (I_0,p_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{II}(I_0,p_0)\,f_{pp}(I_0,p_0) - (f_{Ip}(I_0,p_0))^2 < 0 \Rightarrow (I_0,p_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedigungen benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{II}(I,p) &= (-1)\,I^{-\frac{3}{2}}\,p < 0, \\ f_{pp}(I,p) &= -32 - 32 = -64 < 0, \\ f_{Ip}(I,p) &= 2\,I^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Durch einsetzen von (I_0,p_0) in die zweiten Ableitungen erhalten wir

$$\Rightarrow f_{II}\left(\left(\frac{200}{7}\right)^2, \frac{100}{7}\right) \cdot f_{pp}\left(\left(\frac{200}{7}\right)^2, \frac{100}{7}\right) - \left(f_{pI}\left(\left(\frac{200}{7}\right)^2, \frac{100}{7}\right)\right)^2$$

$$= (-1)\left(\frac{200}{7}\right)^{-3} \cdot \frac{100}{7} \cdot (-64) - \left(2 \cdot \left(\frac{200}{7}\right)^{-1}\right)^2 = \frac{49}{2500} > 0.$$

Deshalb ist $(I_0,p_0) = \left(\left(\frac{200}{7}\right)^2, \frac{100}{7}\right)$ ein Maximum von f.

(d) (7 Punkte)

In dieser Aufgabe finden wir die Schlüsselwörter "minimiert", welche auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hinweisen. Die Aufgabenstellung entspricht einem Optimierungsproblem, mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In dieser Aufgabe können h und r *nicht* frei gewählt werden, weil das Fassungsvermögen (Volumen) von einem Fass eine Funktion von seiner Höhe und seinem Radius ist und dem Wert von $128\,cm^3$ entsprechen muss. Deshalb liegt ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung vor. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert/minimiert werden soll. Im Text wird beschrieben, dass die Oberfläche der Fässer minimiert werden soll. Dies entspricht der Funktion:

$$f(r,h) = \underbrace{2\,r^2\,\pi}_{\text{Deckel und Boden}} + \underbrace{2\,r\,\pi\,h}_{\text{Mantelfläche}}.$$

Die Nebenbedingung kann wie folgt formuliert werden:

$$r^2\,\pi\,h = 128 \;\Leftrightarrow\; \varphi(x,y) = r^2\,\pi\,h - 128 = 0.$$

Insgesamt kann das Optimierungsproblem folgendermassen formuliert werden:

$$\max f(r,h) = 2\,r^2\,\pi + 2\,r\pi\,h \;\text{ such that }\; \varphi(r,h) = r^2\,\pi\,h - 128 = 0.$$

Um dieses Problem zu lösen, verwenden wir die Variablenreduktionsmethode. Das Umstellen der Nebenbedingung nach h ergibt

$$h = \frac{128}{r^2\,\pi} \qquad (*).$$

Eingefügt in die Funktion f ergibt:

$$f\left(r, \frac{128}{r^2\pi}\right) = F(r) = 2\,r^2\,\pi + 2\,r\,\pi\,\frac{128}{r^2\,\pi}.$$

Die notwendige Bedingung für ein Optimum von F entspricht

$$F'(r) = 4\,r\,\pi + (-1)\cdot 256\,r^{-2} \stackrel{!}{=} 0,$$

aus welcher folgt, dass

$$\frac{64}{\pi} = r^3 \;\Rightarrow\; r^\star = \sqrt[3]{\frac{64}{\pi}} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

Durch Verwendung von $(*)$ ist die entsprechende optimale Höhe gegeben als

$$h^\star = \frac{128}{(r^\star)^2\,\pi} = \frac{128\,\sqrt[3]{\pi^2}}{16\,\pi} = \frac{8}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

(`Nicht verlangt:` Durch Verifizierung der hinreichenden Bedingungen

$$F''(r^\star) = 4\,\pi + 512\,(r^\star)^{-3} = 12\,\pi > 0$$

kann kontrolliert werden, dass $(r^\star, h^\star)$ tatsächlich ein Minimum ist.)

Das Problem kann aber auch mit dem Lagrange-Verfahren gelöst werden. Dafür definieren wir die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} F(r,h,\lambda) &= f(r,h) + \lambda\,\varphi(r,h) \\ &= 2\,r^2\,\pi + 2\,r\,\pi\,h + \lambda\,(r^2\,\pi\,h - 128). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Optimum von f unter der Nebenbedingung $\varphi(r,h) = 0$ sind die sogenannten Langrange-Bedingungen:

$$F_r(r,h,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 4\,r\,\pi + 2\,\pi\,h + 2\,\lambda\,r\,\pi\,h = 0, \tag{I}$$

$$F_h(r,h,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,r\,\pi + \lambda\,r^2\,\pi = 0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(r,h,\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; r^2\,\pi\,h - 128 = 0. \tag{III}$$

Von (II) und $r > 0$ erhalten wir

$$r = -\frac{2}{\lambda}. \tag{IV}$$

Aus (III) folgt

$$h = \frac{128}{r^2\,\pi}. \tag{V}$$

Durch verwenden von (IV) und (V) in (I) erhalten wir:

$$-\frac{8\,\pi}{\lambda} + \frac{256\,\lambda^2}{4} - \frac{256\,\lambda^2}{2} = 0 \;\Rightarrow\; 8\,\pi = -64\,\lambda^3.$$

Daraus folgt anschliessend:

$$\begin{aligned} \lambda^\star &= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi}, \\ r^\star &= \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}, \\ h^\star &= \frac{8}{\sqrt[3]{\pi}}. \end{aligned}$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☐	☐	☒	☐
Question 2	☐	☒	☐	☐
Question 3	☐	☐	☐	☒
Question 4	☐	☒	☐	☐
Question 5	☒	☐	☐	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☒	☐	☐
Question 8	☐	☐	☒	☐
Question 9	☐	☐	☒	☐
Question 10	☒	☐	☐	☐
Question 11	☐	☒	☐	☐
Question 12	☐	☐	☒	☐

Q1. (c). Die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ beschreibt eine Ellipse mit Mittelpunkt $(2,4)$ und Halbachsen $a = 6$ und $b = 3$. Deshalb ist $P = (2,7)$ ein Punkt auf der Ellipse mit dem höchsten Wert für die zweite Koordinate. Es folgt, dass $P = (2,7)$ ein Maximum für $f(x,y) = y$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ ist.

Q2. (b). Erstens ist $(-x_0, y_0)$ ein stationärer Punkt von g, weil (x_0, y_0) ein stationärer Punkt von f ist. Dies folgt, weil

$$g_x(-x_0, y_0) = -f_x(x_0, y_0)\,(-1) = 0$$

und

$$g_y(-x_0, y_0) = -f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Zudem ist $(-x_0, y_0)$ ein lokales Minimum von g, weil (x_0, y_0) ein lokales Maximum von f ist. Dies folgt, weil

$$g_{xx}(-x_0, y_0) = -f_{xx}(x_0, y_0) > 0,$$
$$g_{yy}(-x_0, y_0) = -f_{yy}(x_0, y_0) > 0,$$

und

$$g_{xx}(-x_0, y_0)\, g_{yy}(-x_0, y_0) - (g_{xy}(-x_0, y_0))^2 = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Q3. (d). Das Anwenden des Theorem für implizite Funktionen ergibt:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(2,1)} &= -\frac{\varphi_x(2,1)}{\varphi_y(2,1)} \\ &= -\left.\frac{2\,x + 3\ln y}{3\frac{x}{y} - 7}\right|_{(x,y)=(2,1)} \\ &= -\frac{4}{-1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Q4. (b). Der Flächeninhalt der Menge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b \text{ und } (f(x) \leq y \leq g(x) \text{ oder } g(x) \leq y \leq f(x))\}$$

entspricht der Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g zwischen $x = a$ und $x = b$ und kann deshalb als folgendes Integral geschrieben werden:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Q5. (a). Durch partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{g(x)}, \quad \text{(Kettenregel)} \;\; u'(x) = -\frac{1}{[g(x)]^2} \cdot g'(x) \\ &\text{und} \\ v'(x) &= f'(x), \; v(x) = f(x), \end{aligned}$$

und damit den Ausdruck in (a).

Q6. (d). Es gilt:

$$\begin{aligned} (3x^2 + xe^{x^3} + C)' &= 6x + e^{x^3} + xe^{x^3} 3x^2 \\ &= 6x + (3x^3 + 1)e^{x^3}. \end{aligned}$$

Q7. (b). Eine Dichtefunktion ist eine nicht-negative Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. In diesem Fall ist $f(x) \geq 0$ erfüllt, für alle x, falls $a > 0$. Zudem folgt aus partieller Integration, dass

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} ax \ln(x)\, dx &= a \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \Big|_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x}\, dx \right] \\ &= a \left[\frac{1}{2} (\sqrt{e})^2 \ln(\sqrt{e}) - 0 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^{\sqrt{e}} \right] \\ &= a \left[\frac{1}{4} e - \frac{1}{4} e + \frac{1}{4} \right] \\ &= a \frac{1}{4} \\ &\stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Deshalb ist $a = 4$.

Q9. (c).

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}_{=0 \text{ (orthogonal)}} = ||\mathbf{a}||^2 = 16.$$

$$||\mathbf{a}|| = 4.$$

Q10. (a). Eine Basis eines Vektorraums ist ein System linear unabhängiger Vektoren, so dass der Vektorraum aufgespannt wird. Fall (d) können wir ausschliessen, weil in $\mathbb{R}^3$ die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren genau 3 ist. Wir prüfen nun (a), (b) und (c), und wenden folgendes Resultat an: 3 Vektoren in $\mathbb{R}^3$ ergeben eine Basis von $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn sie linear unabhängig sind, d.h.

genau dann, wenn die 3×3-Matrix mit Spalten gegeben durch die drei Vektoren regulär ist, oder äquivalent dazu, wenn ihre Determinante von null verschieden ist. Es gilt:

(a) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2 - 3 - 1 = -2 \neq 0.$

(b) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}\right| = 0.$ Es gilt $\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b} = \mathbf{d}$.

(c) $\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0.$ Es gilt $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{e}$.

Q11. (b). Die Dimension des Lösungsraums ist gleich (a) der Anzahl der freier Variablen, mit denen der Lösungsraum beschrieben wird, und gleich (b) der Anzahl Variablen (Spalten von A) minus dem Rang von A. In diesem Fall erhalten wir $2 = 5 - \mathrm{rg}(A)$. Deshalb, $\mathrm{rg}(A) = 3$.

Q12. (c). Wir verwenden folgendes Resultat für die Matrizen S und R:

$$\begin{aligned} \det(S\,R) &= \det(S)\,\det(R), \\ \det(S^T) &= \det(S), \\ \det(S^{-1}) &= \frac{1}{\det(S)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \det(B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1}) &= \det(B)\,\det(A)\,\det(B)\,\frac{1}{\det(B)}\,\frac{1}{\det(A)}\,\det(B)\,\frac{1}{\det(A)\det(B)} \\ &= \frac{\det(B)}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Question 1	☐	☒	☐	☐
Question 2	☐	☐	☐	☒
Question 3	☐	☐	☒	☐
Question 4	☐	☐	☐	☒
Question 5	☐	☐	☒	☐
Question 6	☐	☐	☒	☐
Question 7	☐	☐	☐	☒
Question 8	☐	☐	☒	☐

Q1. (b). Weil f die Dichtefunktion der Zufallsvariable X auf $[0,1]$ ist, folgt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^1 x\,f(x)\,dx = \mathbb{E}\big[X\big].$$

Es folgt, dass

$$5 = \int_0^1 (3\,x+2)\,f(x)\,dx = 3\underbrace{\int_0^1 x\,f(x)\,dx}_{=\mathbb{E}[X]} + 2\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{=1}.$$

Deshalb ist $\mathbb{E}\big[X\big] = \frac{5-2}{3} = 1$.

Q2. (c). $\mathbf{u}$ ist orthogonal zu $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\,t+5 \\ t-2 \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= 2\,t^2 + 5\,t + (t-1)(t-2) + 30 \\
&= 3\,t^2 + 2\,t + 32 \\
&\overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Weil die letzte Gleichung keine reelle Lösung besitzt, gibt es kein $t \in \mathbb{R}$ für welches die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ orthogonal zueinander sind.

Q3. (c). Wir wenden das Gauss'sche Eliminationsverfahren an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\,(I) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2\,(II) \\ \\ +3\,(II) \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \end{pmatrix} = A^{\star}.$$

Es folgt, dass $\text{rg}(A^{\star}) = 3$ (weil sie eine reguläre 3×3 Untermatrix hat) und deshalb $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^{\star}) = 3$.

Q4. (d). Die Matrix A ist regulär (singulär) genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ ($\det(A) = 0$). Das Verwenden der Regel von Sarrus ergibt

$$\det(A) = m + 6 + 3\,m - m^2 - 3 - 6 = (-1)\,(m-3)\,(m-1).$$

Deshalb ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $m \in \{1,3\}$.

Q5. (b). Falls λ ein Eigenwert von A ist mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$, dann ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{x}$. Dies kann gezeigt werden durch:

$$A^2\,\mathbf{x} = A\,(A\,\mathbf{x}) = A(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,\mathbf{x} = \lambda\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda^2\,\mathbf{x}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x} + A\mathbf{x} - 6\mathbf{x} &= \mathbf{0} \Rightarrow \;\; \lambda^2\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x} - 6\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{x}(\lambda^2 + \lambda - 6) &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}(\lambda + 3)(\lambda - 2) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\overset{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$$

Durch das Vergleichen mit den vorgeschlagenen Antworten (und weil λ_1 kein Eigenwert von A ist), erhalten wir $\lambda_2 = 2$.

Q6. (c). Antworten (a), (b) erfüllen die Bedingung $y_0 = 6$ nicht. Für Antwort (c) gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{y_{k+1} - (1+a^2)\,y_k} &= \sqrt{10\,(1+a^2)^{k+1} - 4 - (1+a^2)\,(10\,(1+a^2)^k - 4)} \\ &= \sqrt{-4 - (1+a^2)\,(-4)} \\ &= 2\,a \end{aligned}$$

für $a > 0$. Deshalb erfüllt (c) die Differenzengleichung. Dieselben Berechnungen zeigen, dass (d) die Differenzengleichung nicht erfüllt.

Q7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung ist gegeben durch

$$2\,y_{k+1} = 9\,y_k + 3 \;\Rightarrow\; y_{k+1} = \frac{9}{2}\,y_k + \frac{3}{2}.$$

Weil $\frac{9}{2} > 1$, folgt dass die generelle Lösung monoton und divergent ist.

Q8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung ist gegeben durch

$$y_{k+1} = \frac{1}{a+3}\,y_k + 2 - a,$$

d.h. $A = \frac{1}{a+3}$ und $B = 2-a$. Weil $A \neq 1$, ist die generelle Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent genau dann, wenn $0 < A < 1$. Es gilt:

$$0 < A < 1 \Leftrightarrow a + 3 > 0 \text{ und } a + 3 > 1 \Leftrightarrow a > -2.$$

Es folgt, dass die generelle Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent ist, genau dann, wenn $a > -2$. Zudem konvergiert die Folge zu 1, genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{2-a}{1-\frac{1}{a+3}} = \frac{(2-a)\,(a+3)}{a+2} = 1.$$

Durch Auflösen für a erhalten wir

$$a^2 + 2\,a - 4 = 0 \overset{a>-2}{\Longleftrightarrow} a = -1 + \sqrt{5}.$$

Frühling 2019

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Musterlösung Frühjahrssemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

24. Juni 2019

[1]Department für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den, im entsprechenden Kontext am hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen, und erst in einem zweiten Schritt verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem Problem, das durch einen Text beschrieben wird, in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formulierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (10 Punkte)
Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt darin, das richtige mathematische Konzept anzuwenden. Die Frage ist, ob das Optimierungsproblem einer Nebenbedingung unterliegt oder nicht. In diesem Fall gibt es keine Bedingungen an x und y und wir haben ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Im nächsten Schritt muss die Zielfunktion aufgestellt werden. Ziel ist es, die Einnahmen zu maximieren, welche die Summe der Erträge der zwei verschiedenen verkauften Lotterietickets sind. Erträge sind wiederum das Produkt von Preis und Menge (Nachfrage). Es gilt:

Gesamteinnahmen:

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \underbrace{x\, q_{d_1}(x,y)}_{\text{Einnahmen von Swiss Lotto}} + \underbrace{y\, q_{d_2}(x,y)}_{\text{Einnahmen von Euro Millions}} \\ &= x\,(39'500 - 1'000\,x + 400\,y) + y\,(6'500 + 300\,x - 800\,y) \\ &= -10'000\,x^2 + 39'500\,x + 700\,x\,y + 6'500\,y - 800\,y^2 \end{aligned}$$

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für einen kritischen Punkt (x_0, y_0) von R sind

$$\begin{cases} R_x(x_0,y_0) = 0 \\ R_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}.$$

Hierfür bestimmen wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Zielfunktion:

$$\begin{aligned} R_x(x,y) &= -2'000\,x_0 + 39'500 + 7'000\,y_0, \\ R_y(x,y) &= 700\,x_0 + 6'500 - 16'000\,y_0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{cases} R_x(x_0,y_0) &= 0 \\ R_y(x_0,y_0) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20\,x_0 - 7\,x_0 &= 395 & (I) \\ -7\,x_0 + 16\,x_0 &= 65 & (II) \end{cases}.$$

Zum Lösen des LGS zählen wir $7 \cdot (I)$ zu $20 \cdot (II)$ hinzu und erhalten

$$271\,y_0 = 4'065 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = 15 \quad \overset{(I)}{\Leftrightarrow} \quad x_0 = 25.$$

Damit ist der einzige Kandidat für ein Maximum gegeben durch

$$(x_0, y_0) = (25, 15).$$

Als Nächstes prüfen wir die hinreichenden Bedingungen: falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} R_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ R_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ R_{xx}(x_0, y_0)\, R_{yy}(x_0, y_0) - (R_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\begin{cases} R_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ R_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ R_{xx}(x_0, y_0)\, R_{yy}(x_0, y_0) - (R_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$R_{xx}(x_0, y_0)\, R_{yy}(x_0, y_0) - (R_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von R:

$$\begin{aligned} R_{xx}(x, y) &= -2'000 < 0 && \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2_+, \\ R_{xy}(x, y) &= 700 = R_{yx}(x, y) > 0 && \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2_+, \\ R_{yy}(x, y) &= -1'600 < 0 && \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) &:= R_{xx}(x, y)\, R_{yy}(x, y) - (R_{xy}(x, y))^2 \\ &= (-2'000)(-1'600) - 700^2 > 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2_+. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass $(x_0, y_0) = (25, 15)$ ein Maximum von R ist. Die maximalen Einnahmen betragen

$$R(25, 15) = 542'500 \ (CHF).$$

(b) (10 Punkte)

In dieser Aufgabe finden wir die Schlüsselwörter "maximale Fläche" und "Maximum", es geht also darum zu verstehen, welches Optimierungsproblem zu lösen ist. Gibt es Nebenbedingungen? Nebenbedingungen stellen Einschränkungen an die Variablen dar. In diesem konkreten Fall können x und y nicht frei gewählt werden, da der Punkt (x, y) auf einer Kurve $\varphi(x, y) = 0$ liegen muss. Geometrisch ist diese Kurve eine Ellipse mit Zentrum $(0, 0)$ und Halbachsen $a = \sqrt{\frac{2}{c}}$ und $b = \sqrt{\frac{2}{1-c}}$ (eine Skizze kann das Problem veranschaulichen).
Ausserdem stellen wir fest, dass es sich bei dem Problem um ein Maximierungsproblem handelt und die Zielfunktion die Fläche des Rechtecks, welches von den gegenüberliegenden Punkten $(0, 0)$ und (x, y) aufgespannt wird, ist. Diese Fläche ist gegeben durch Länge mal Breite, oder $(x - 0)$ mal $(y - 0)$. Dementsprechend ist die Zielfunktion

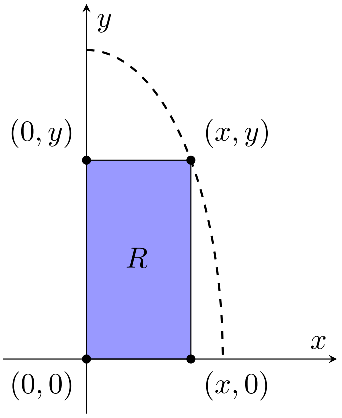
$$f(x, y) = x\, y.$$

Die Nebenbedingung ist gegeben durch

$$\varphi(x, y) = c\, x^2 + (1 - c)\, y^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{2}{c}} + \frac{y^2}{\frac{2}{1-c}} = 1.$$

Zusammengefasst ergibt sich das Optimierungsproblem mit Nebenbedingung:

$$\max f(x,y) = x\,y \text{ so, dass } \varphi(x,y) = c\,x^2 + (1-c)\,y^2 - 2 = 0.$$



Zur Lösung des Problem wählen wir die Lagrange-Methode. Wir definieren die Lagrangefunktion:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x\,y + \lambda\,(c\,x^2 + (1-c)\,y^2 - 2). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$F_x(x,y,\lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad y + 2\,\lambda\,c\,x = 0, \tag{I}$$
$$F_y(x,y,\lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad x + 2\,\lambda\,(1-c)\,y = 0, \tag{II}$$
$$F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \quad\Rightarrow\quad c\,x^2 + (1-c)\,y^2 - 2 = 0. \tag{III}$$

Aus Gleichung (I) und (II) erhalten wir

$$y = -2\,\lambda\,c\,x \qquad \text{und} \qquad x = -2\,\lambda\,(1-c)\,y.$$

Teilen wir die erste Gleichung durch die zweite erhalten wir

$$\frac{y}{x} = \frac{-2\,\lambda\,c\,x}{-2\,\lambda\,(1-c)\,y} = \frac{c\,x}{(1-c)\,y}$$

und mithilfe über Kreuz multiplizieren ergibt sich

$$y^2 = \frac{c}{1-c}x^2. \tag{IV}$$

Einsetzen in Gleichung (III) ergibt

$$c\,x^2 + c\,x^2 - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x^2 = \frac{1}{c}.$$

Da $c > 0$ ist dies wohldefiniert, und dank $x^* > 0$ erhalten wir

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Schliesslich ergibt sich mit $y^* > 0$ aus Gleichung (IV)

$$(y^*)^2 = \frac{1}{1-c} \quad\Rightarrow\quad y^* = \frac{1}{\sqrt{1-c}}.$$

(c) (5 Punkte)

Die Schlüsselwörter in dieser Aufgabe sind "Vektor" und "Linearkombination". Die Frage, ob eine eindeutige Linearkombination gefunden werden kann, um den Geburtstagsvektor von Carl Friedrich Gauß darzustellen, bezieht sich auf die Frage, ob eine Lösung zum zugrundeliegenden linearen Gleichungssystem existiert (Kapitel 18).

Genauer gesagt, ob der Vektor

$$\mathbf{g_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 1777 \end{pmatrix}$$

eindeutig durch die Vektoren $\mathbf{g_1}, \mathbf{h}$ und $\mathbf{u}$ dargestellt werden kann, ist gleichbedeutend zu der Frage, ob das LGS

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1809 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1788 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 29 \\ m \\ 1851 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 1777 \end{pmatrix}$$

eine eindeutig Lösung $(\lambda_1^\star, \lambda_2^\star, \lambda_3^\star)$ besitzt. Die Koeffizientenmatrix

$$A = [\mathbf{g_1}, \mathbf{h}, \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 15 & 8 & 29 \\ 4 & 3 & m \\ 1809 & 1788 & 1851 \end{bmatrix}$$

ist quadratisch. Damit ist eine äquivalente Bedingung, dass die Koeffizientenmatrix regulär ist, d.h. dass $\det(A) \neq 0$. Wir bestimmen

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det\left(\begin{bmatrix} 15 & 8 & 29 \\ 4 & 3 & m \\ 1809 & 1788 & 1851 \end{bmatrix}\right) \\ &= 15 \cdot 3 \cdot 1851 + 8 \cdot m \cdot 1809 + 29 \cdot 4 \cdot 1788 - 29 \cdot 3 \cdot 1809 - 15 \cdot m \cdot 1788 - 8 \cdot 4 \cdot 1851 \\ &= 74088 - 12438\, m. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 74088 - 12438\, m \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 6.$$

Da m den Monat angibt, folgt, dass der Geburtstagsvektor von Carl Friedrich Gauß nur genau dann als Linearkombination dargestellt werden kann, wenn $m \in \{1, 2, \dots 5, 7 \dots 12\}$.

(d1) (6 Punkte)

Das Schlüsselwörter in dieser Aufgabe lauten "jedes Jahr" und "konstantes Wachstum" bzw. "konstante Änderungsrate". Das Vermögen nimmt jährlich um 10% ab und wächst gleichzeitig um CHF 10'000. Das dahinterstehende mathematische Konzept ist das der Differenzengleichung. Das Vermögen von Max nach n Jahren (nach seinem 20. Geburtstag, also im Alter von 20+n) ist gegeben durch die Differenzengleichung erster Ordnung

$$V_{n+1} = V_n - \underbrace{0.1\,V_n}_{\text{Ausgaben im Jahr n}} + \underbrace{10'000}_{\text{Einkommen im Jahr n}} = \underbrace{0.9}_{A}\,V_n + \underbrace{10'000}_{B}.$$

Wir wenden die explizite Lösungsformel für die Differenzengleichung an:

$$V_n = A^n\,(V_0 - V^*) + V^*.$$

Sein Startvermögen zum Zeitpunkt $n = 0$ is gegeben durch

$$V_0 = 2 \cdot 10^6$$

und V^* kann mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$V^* = \frac{A}{1-B} = \frac{10'000}{1-0.9} = 10^5.$$

Einsetzen liefert die explizite Formel für das Vermögen nach n Jahren:

$$V_n = 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5.$$

Damit ist Max Vermögen nach 10 Jahren gegeben durch

$$V_{10} = 0.9^{10}(2 \cdot 10^6 - 10^5) + 10^5 \approx 762'489.05 \text{ (CHF)}.$$

Bemerkung:
Alternativ hätten wir die Differenzengleichung auch folgendermassen bestimmen können:

$$V_{n+1} = V_n + \underbrace{10'000}_{\text{Einkommen im Jahr n}} - \underbrace{0.1\,(\,V_n + 10'000)}_{\text{Ausgaben im Jahr n}} = \underbrace{0.9}_{A}\,V_n + \underbrace{9'000}_{B}.$$

Der Unterschied zum ersten Lösungsansatz liegt darin, dass hier angenommen wird, dass er 10% seines Vermögens ausgibt, nachdem er sein Einkommen bezogen hat. Beide Lösungen wurden akzeptiert.

Der alternative Lösungsansatz resultiert in:

$$V_n = 0.9^n(2 \cdot 10^6 - 90'000) + 90'000$$

und

$$V_{10} = 0.9^{10}(2 \cdot 10^6 - 90'000) + 90'000 \approx 755'975.80 \text{ (CHF)}.$$

(d2) (4 Punkte)

Wir übernehmen die explizite Lösungsformel aus Aufgabenteil (d1). Mathematisch ausgedrückt bedeutet die Tatsache, dass Max unendlich lange lebt, dass n gegen unendlich strebt:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} V_n &= \lim_{n\to\infty} \left(0.9^n(2\cdot 10^6 - 10^5) + 10^5\right) \\ &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} 0.9^n(2\cdot 10^6 - 10^5)}_{\to 0} + 10^5 \\ &= 10^5.\end{aligned}$$

Der erste Teil verschwindet, da die geometrische Folge $(0.9^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null geht für $n \to \infty$.

Bemerkung (I):
Wir wissen bereits, dass die Lösung zur Differenzengleichung erster Ordnung

$$V_{n+1} = A \cdot V_n + B$$

gegen

$$V^* = \frac{A}{1-B}$$

konvergiert für $n \to \infty$. Damit sind wir bereits in Aufgabenteil (d1) zur Lösung gelangt. Es gilt $V^* = 10^5$.

Im zweiten Teil der Aufgabe sind wir daran interessiert, zu welchem Zeitpunkt das Vermögen von Max unter CHF $500'000$ fällt. Wir wissen aus Aufgabenteil (d1), dass V_n sich wie eine geometrische Folge verhält (mit Parameter $q = 0.9$), d.h. das Vermögen ist eine streng monoton fallende Folge. Deshalb sind wir an der kleinsten Zahl $\bar{n} \in \mathbb{N}$ interessiert, für welche gilt:

$$V_{\bar{n}} < 500'000.$$

Wenn die Bedingung nämlich für $\bar{n}$ gilt, dann eben auch für alle $n > \bar{n}$:

$$\begin{aligned} V_n < 500'000 \quad &\Leftrightarrow \quad 0.9^n(2\cdot 10^6 - 10^5) + 10^5 < 500'000 \\ &\Leftrightarrow \quad 0.9^n < \frac{500'000 - 10^5}{(2\cdot 10^6 - 10^5)} = \frac{4}{19} \\ &\Leftrightarrow \quad n \overset{!}{>} \frac{\ln(4) - \ln(19)}{\ln(0.9)} \approx 14.7887 \qquad \text{Vorsicht: } \ln(0.9) < 0\,! \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{n} = 15, \end{aligned}$$

d.h. sein Vermögen fällt das erste Mal zwischen seinem 34. und 35. Geburtstag unter CHF $500'000$.

Bemerkung (II):
Für die alternative Lösungsmöglichkeit aus (d1) ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V^* = 90'000.$$

und

$$\begin{aligned} V_n < 500'000 \quad &\Leftrightarrow \quad n > 14.5543 \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{n} = 15. \end{aligned}$$

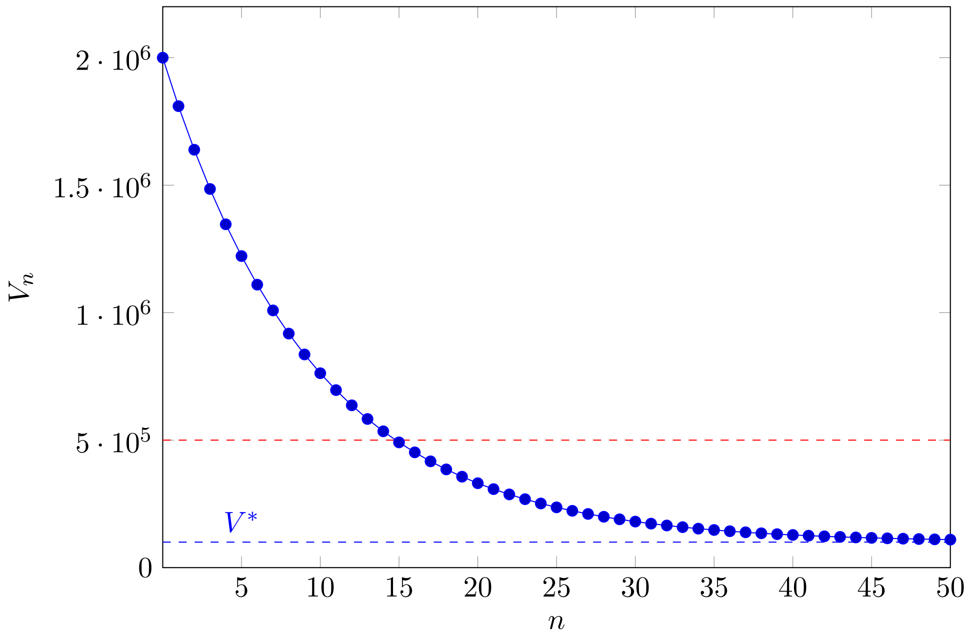
Bemerkung (III):
Für die bereitgestellte Beispiellösung gilt

$$\lim_{n\to\infty} V_n = 2.2 \cdot 10^5$$

und

$$\begin{aligned} V_n < 500'000 \quad &\Leftrightarrow \quad n > 18.6608 \\ &\Leftrightarrow \quad \bar{n} = 19. \end{aligned}$$

Bemerkung (IV):
Graphische Veranschaulichung von Max Vermögen:



Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☒	☐	☐	☐
Frage 9	☐	☒	☐	☐
Frage 10	☐	☐	☐	☒

F1. (c). Hinreichend für einen Sattelpunkt in (x_0, y_0) (gegeben dass in (x_0, y_0) ein stationärer Punkt vorliegt) ist die Bedingung

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0.$$

Die Ungleichung gilt sicher, wenn $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$. ($\Longrightarrow$ (c)).

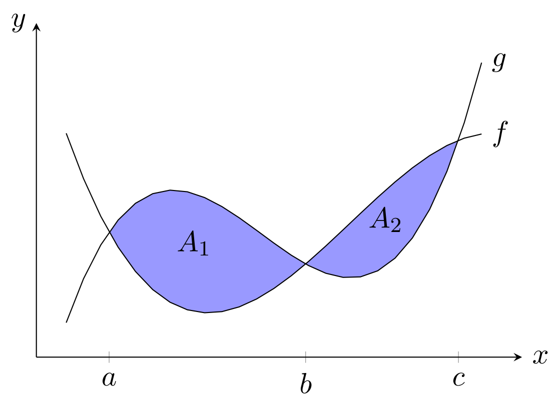
F2. (b). Wir überprüfen:

- $P = (1, 1)$ erfüllt nicht die Nebenbedingung in (a).
- $P = (0, 0)$ erfüllt nicht die Nebenbedingung in (c).
- Ein lokales Maximum ohne Nebenbedingung kann nicht zu einem lokalen Minimum mit Nebenbedingung werden für eine nicht-konstante Funktion f. Damit wird Antwort (d) ausgeschlossen.

Damit muss Antwort (b) korrekt sein. Alternativ kann auch folgendermassen argumentiert werden: Der Punkt $P = (0, 0)$ erfüllt die Nebenbedingung in (b). Auch ohne Betrachtung der Nebenbedingung ist er ein lokales Maximum von f. Daraus folgt, dass er auch mit Nebenbedingung ein lokales Maximum ist.

F3. (b). In jedem Optimum berüht die Nebendingung $\varphi(x, y) = 0$ eine Höhenlinie der Zielfunktion f. Damit können nur (b) oder (c) korrekt sein. Da der Funktionswert der gestrichelten Höhenlinie höher wird, wenn wir sie nach oben-rechts verschieben und sie die Nebenbedingung damit schneidet, ist P_2 ein Minimum.

F4. (c).



Die Fläche A, welche von f und g eingeschlossen wird, ist die Summe der Teilflächen A_1 (zwischen a und b gilt $g(x) > f(x)$) und A_2 (zwischen b und c gilt $f(x) > g(x)$). Wir bestimmen

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \int_a^b g(x) - f(x)\,dx + \int_b^c f(x) - g(x)\,dx \\ &= -\int_a^b f(x) - g(x)\,dx + \int_b^c f(x) - g(x)\,dx \\ &= \int_b^c f(x) - g(x)\,dx - \int_a^b f(x) - g(x)\,dx. \end{aligned}$$

F5. (c). Wir berechnen folgende Werte der Funktion f bei $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^{0} \left(2\,t^2 - \frac{1}{2}\,t + 3\right) dt \\ &= \frac{2}{3}\,t^3 - \frac{2}{3}\,t^2 + 3\,t\Big|_{-1}^{0} = \frac{47}{12} \neq 3 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + 3 \quad \text{(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung!)} \;\Rightarrow\; f'(0) = 3 \neq -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 4\,x - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

$$f'''(x) = 4 \neq 3.$$

F6. (a). Das Produkt zweiter Matrizen $C = B_{p\times q}\,A_{n\times m}$ existiert nur, wenn die Anzahl der Spalten von B mit der Anzahl Zeilen von A übereinstimmt, d.h. genau dann wenn $n = q$. Damit impliziert die zweite Aussage der Antwortmöglichkeit aus (a) die Wohldefiniertheit und aufgrund der Aussagenlogischen Verkettung mit "oder" impliziert (a) die Aussage. Alternativ können alle anderen Antwortmöglichkeiten mit Gegenbeispielen ausgeschlossen werden.

F7. (d). Mit Hilfe des Ausschlussverfahren ergibt sich:

- Antwortmöglichkeit (a) ist falsch, da die Nullmatrix idempotent ist mit Determinante 0.
- Antwortmöglichkeit (b) ist falsch, da die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenschaften $\det(A) = 0$ und
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 42 \end{pmatrix} \neq A,$$
besitzt, damit ist sie nicht idempotent.
- Antwortmöglichkeit (c) ist falsch. Wir können dasselbe Beispiel wie in (b) nehmen.

F8. (a). $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass der Punkt (x_0, y_0) eine lokale Extremstelle der Funktion f ist. Dies gilt genauso für Funktionen mit mehr als zwei Variablen.

F9. (b). Es gilt:

- Antwortmöglichkeit (a) ist korrekt:
$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}\right| = -14 \neq 0.$$

- Antwortmöglichkeit (b) ist falsch:

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

- Antwortmöglichkeit (c) ist korrekt, vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind stets linear abhängig.
- Antwortmöglichkeit (d) ist korrekt:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = -90 \neq 0.$$

F10. (d). Wir wissen, dass

$$[A^*, \mathbf{b}^*] = \left[\begin{array}{ccc|c} a^*_{11} & \dots & a^*_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^*_{m-k,1} & \dots & a^*_{m-k,n} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ \vdots \\ a \end{array}}\right\} m-k \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}}\right\} k \text{ Zeilen} \end{array} .$$

Wenn $k \geq 1$ und $n > m$ gilt, hat das LGS unendlich viele Lösungen, da

$$\mathbf{rg}(A^*) = \mathbf{rg}(A^*, \mathbf{b}^*) = m - k < n.$$

Der Lösungsraum hat die Dimension

$$n - (m - k) = n - m + k = n + k - m.$$

Deshalb ist Antwortmöglichkeit (d) korrekt und (c) is falsch. Ein homogenes System ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$) hat stets mindestens eine Lösung ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Antwortmöglichkeit (b) gilt nicht im Allgemeinen.

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☒	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐

F1. (c). Wir berechnen die Stammfunktion mithilfe der Substitutionsmethode. Dafür wählen wir $u = e^x + e^{-x}$, und damit $du = (e^x - e^{-x})\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx &= \int \frac{1}{u}\,du \\
&= \ln(|u|) + C \\
&= \ln(|e^x + e^{-x}|) + C \\
&= \ln(e^x + e^{-x}) + C \qquad\qquad \text{da } e^x + e^{-x} > 0 \\
&\Rightarrow f(0) = \ln(2) + C \overset{!}{=} 0 \ \Rightarrow\ C = -\ln(2) \\
&\Rightarrow f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2).
\end{aligned}$$

Damit ist Antwortmöglichkeit (c) korrekt. Alternativ mithilfe von Ausschluss:

(a) $f'(x) = \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} \neq \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad f(0) = \ln(2) + 2,$

(b) $f'(x) = \frac{2\,e^{2x}}{e^{2x}+1} + 1 = \frac{3\,e^{2x}+1}{e^{2x}+1} \neq \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad f(0) = 0,$

(c) $f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad f(0) = 0 \qquad \checkmark,$

(d) $f'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad f(0) = \ln(2) + 2.$

F2. (b). Da f eine Dichtefunktion ist, gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 a\,x + b\,x^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,a\,x^2 + \frac{1}{3}\,b\,x^3\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{3}\,b \qquad\qquad (1)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 a\,x^2 + b\,x^3\,dx \\
&= \frac{1}{3}\,a\,x^3 + \frac{1}{4}\,b\,x^4\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\,a + \frac{1}{4}\,b\Big|_0^1 = \frac{17}{24} \qquad\qquad (2)
\end{aligned}$$

Lösen des LGS, welches aus den Gleichungen (1) und (2) resultiert, ergibt

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\,a + \tfrac{1}{3}\,b &= 1 \\ \tfrac{1}{3}\,a + \tfrac{1}{4}\,b &= \tfrac{17}{24} \end{aligned}\right\} \overset{6\,(I),\,24\,(II)}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} 3\,a + 2\,b &= 6 \\ 8\,a + 6\,b &= 17 \end{aligned}\right\} \overset{3\,(I)-(II)}{\Longrightarrow} a = 1 \overset{(II)}{\Longrightarrow} b = \frac{3}{2}.$$

F3. (a). Wir berechnen den Gradienten

$$\mathbf{grad}f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{6\,x}{x^2+y^2} \\ \frac{6\,y}{x^2+y^2} + \frac{a-3}{y} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{grad}f(x_0,y_0) = \mathbf{grad}f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Länge des Gradienten im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ genau dann 5, wenn

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix} \right\| = 5 &\Leftrightarrow \sqrt{3^2 + a^2} = 5 \\ &\Leftrightarrow 3^2 + a^2 = 5^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 = 16 \\ &\Rightarrow a = \pm 4. \end{aligned}$$

F4. (b).Um den Rang von A zu bestimmen, verwenden wir Gauß:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} :2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +(I) \\ -3\,(I) \\ -4\,(I) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :4 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad\to\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2\,(II) \\ \\ -4\,(II) \\ +8\,(II) \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\mathbf{rg}(A) = 2.$$

F5. (c). Wir überprüfen:

- Antwort (a) ist falsch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq (-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

  d.h. $\mathbf{x}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 2$, **nicht** $\lambda = -2$.

- Antwort (b) ist falsch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathbf{x}$ ist kein Eigenvektor von M.

- Antwort (c) ist korrekt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \checkmark$$

d.h. $\mathbf{x}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$.

- Antwort (d) ist falsch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathbf{x}$ ist kein Eigenvektor von M.

F6. (d). Wir zeigen:

- Antwort (a) ist falsch:

$$2 \cdot (3 \cdot 2^{k+1} - 1) - (3 \cdot 2^k - 1) = 9 \cdot 2^k - 1 \neq -1.$$

- Antwort (b) ist falsch:

$$(3 \cdot 2^{k+1} - 1) + 2 \cdot (3 \cdot 2^k - 1) - 1 = 12 \cdot 2^k - 4 \neq 0.$$

- Antwort (c) ist falsch:

$$(3 \cdot 2^{k+1} - 1) + 2 \cdot (3 \cdot 2^k - 1) = 12 \cdot 2^k - 5 \neq 0.$$

- Antwort (d) ist korrekt:

$$(3 \cdot 2^{k+1} - 1) - 2 \cdot (3 \cdot 2^k - 1) = 1. \qquad \checkmark$$

F7. (a). Die Normalform der Differenzengleichung ist gegeben durch

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{23}{8\,\pi\,e}}_{A \approx 0.34}\, y_k - \frac{16}{5\,\pi\,e}.$$

Da $A > 0$ und $|A| < 1$ gilt, ist die allgemeine Lösung monotone und konvergent.

F8. (b). Die Normalform der Differenzengleichung ist gegeben durch

$$y_{k+1} = \frac{a-3}{a+1}\, y_k - \frac{8}{a+1},$$

d.h. $A = \frac{a-3}{a+1}$ und $B = -\frac{8}{a+1}$. Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung ist oszillierend und konvergent genau dann, wenn $-1 < A < 0$. Es gilt:

$$-1 < \frac{a-3}{a+1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a-1 < a-3 < 0 \;\Leftrightarrow 1 < a < 3, & \text{für } a+1 > 0 \\ -a-1 > a-3 > 0 \;\Leftrightarrow a < 1 \;\wedge\; a > 3, & \text{für } a+1 < 0 \quad \leadsto \text{unmöglich!} \end{cases}.$$

Mathematik B

Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

5. Februar 2020

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den im entsprechenden Kontext hilfreichsten mathematischen Rahmen hinweisen. Erst in einem zweiten Schritt sollte man verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem durch einen Text beschriebenen Problem in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formalisierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (9 Punkte)

Der Augenmerk in dieser Aufgabe sollte darauf liegen zu verstehen, welches mathematische Konzept angewandt werden muss. Die Schlüsselwörter "Nettogewinn...maximal" sind dafür entscheidend: Sie sagen uns, dass es sich um ein Optimierungsproblem mit oder ohne Nebenbedingungen handelt. Nebenbedingungen sind Eigenschaften, welche die freie Wahl der Variablen einschränkt. In diesem Fall sind aber die Variablen p_1 und p_2 (die Mengen von Gut 1 und 2 frei wählbar) nicht eingeschränkt. Daher handelt es sich um ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Offen bleibt die Frage, welche Funktion maximiert werden soll. Der Text erwähnt, dass der Nettogewinn maximiert werden soll. Daher haben wir:

$$\begin{aligned}
\text{Gewinn} &= \text{Umsatz} - \text{Kosten} \\
P(p_1, p_2) &= \underbrace{(100 - 5\,p_1)\,p_1 + (200 - 4\,p_2)\,p_2}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{K(100 - 5\,p_1, 200 - 4\,p_2)}_{\text{Kosten}} \\
&= (100 - 5\,p_1)\,p_1 + (200 - 4\,p_2)\,p_2 - \left((100 - 5\,p_1)^2 + (100 - 5\,p_1)\,(200 - 4\,p_2) + (200 - 4\,p_2)^2\right) \\
&= -30\,p_1^2 - 20\,p_1\,p_2 - 20\,p_2^2 + 2100\,p_1 + 2200\,p_2 - 70000.
\end{aligned}$$

Ein lokales Maximum $(p_1^\star, p_2^\star)$ der Funktion P muss die Bedingungen erster Ordnung erfüllen:

$$P_{p_1}(p_1^\star, p_2^\star) = 0 \text{ und } P_{p_2}(p_1^\star, p_2^\star) = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{cases} -60\,p_1^\star - 20\,p_2^\star + 2100 = 0 \\ -20\,p_1^\star - 40\,p_2^\star + 2200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\,p_1^\star + 2\,p_2^\star = 210 & (1) \\ 2\,p_1^\star + 4\,p_2^\star = 220 & (2) \end{cases}.$$

Multiplizieren der Gleichung (1) mit 2 und anschliessendes Subtrahieren der Gleichung (2) liefert:

$$10\,p_1^\star = 200 \Leftrightarrow p_1^\star = 20.$$

Einfügung des Resultats in Gleichung (2) liefert:

$$p_2^\star = 45.$$

Es ergibt sich ein einzelner stationärer Punkt $(p_1^\star, p_2^\star) = (20, 45)$ von P, welcher damit der einzige Kandidat für ein lokales Maximum ist.

Wir prüfen nun die hinreichenden Bedingungen erster Ordnung. Es gilt:

$$\left\{\begin{array}{c} P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star)<0 \\ P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star)<0 \\ P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star)\,P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star)-(P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star))^2>0 \end{array}\right. \Rightarrow (p_1^\star,p_2^\star) \text{ ist ein Maximum.}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star) &= -60<0, \\ P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) &= -40<0, \\ P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) &= -20<0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star)\,P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star)-(P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star))^2=(-60)\,(-40)-(-20)^2>0$$

und folglich ist

$$(p_1^\star,p_2^\star)=(20,45)$$

ein lokales Maximum von P.

(b) (9 Punkte)

Das Augenmerk in dieser Aufgabe sollten auf den Schlüsselwörtern "Kosten...minimal" liegen. Sie sagen uns, dass es sich um ein Optimierungsproblem handelt. Im Gegensatz zu Aufgabenteil a) sind in diesem Fall die Variablen x und y beschränkt durch die Bedingung, dass für die T-Shirt Produktion genau 100 Tonnen Wolle benötigt wird. Es handelt sich deshalb um ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen. Der Text erwähnt, dass die Gesamtkosten, also $K(x,y)=K_1(x)+K_2(y)$, minimiert werden sollen. Die Nebenbedingung entspricht der Bedingung an die Gesamtmenge benötigter Wolle, die sich aus den Mengen x und y des ersten bzw. zweiten Herstellers zusammensetzt, d.h. $x+y=100$. Das Optimierungsproblem ist folglich gegeben durch

$$\min K(x,y)=K_1(x)+K_2(y)=\frac{3}{4}\,x^2+400+\frac{11}{4}\,y^2+10\,y+300=\frac{3}{4}\,x^2+\frac{11}{4}\,y^2+10\,y+700$$

unter der Nebenbedingung:

$$x+y=100.$$

Um das Problem zu lösen wenden wir die Substitutionsmethode an, denn sie erlaubt es die Komplexität des Optimierungsproblems deutlich zu reduzieren. Wir schreiben daher x als Funktion von y:

$$x=100-y.$$

Wir setzen nun x in K ein und erhalten:

$$k(y)=K(100-y,y)=\frac{3}{4}\,(100-y)^2+\frac{11}{4}\,y^2+10\,y+700=\frac{7}{2}\,y^2-140\,y+8200.$$

Die Funktion k ist quadratisch mit streng positivem Koeffizienten vor dem quadratischen Term. Daher ist k streng konvex und jeder stationäre Punkt $y^\star$ ist ein globales Minimum. Wir lösen daher:

$$k'(y^\star)=0 \Leftrightarrow 7\,y^\star-140=0 \Leftrightarrow y^\star=20.$$

Es folgt, dass $y^\star = 20$ ein globales Minimum von k ist und damit

$$(x^\star, y^\star) = (100 - y^\star, y^\star) = (80, 20)$$

ein globales Minimum von K unter der Nebenbedingung $x + y = 100$. Des Weiteren sind

$$K(80, 20) = 6800$$

die minimalen Produktionskosten.

(c) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe ist eine Beschränkung der Laufzeiten für jede Maschine gegeben. Wir nennen x_i die Anzahl Einheiten von Produkt P_i, welche an einem Tag produziert werden. Dann ist

$$10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4$$

die Gesamtzahl Minuten, welche Maschine M_1 benötigt, um diese Einheiten zu produzieren. Da die Maschine 16 Stunden läuft (d.h. 960 Minuten) gilt folgende Beschränkung für M_1:

$$10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4 = 960.$$

Wir haben ähnliche Beschränkungen für die Maschinen M_2, M_3 und M_4:

$$5\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 11\,x_4 = 960,$$

$$8\,x_1 + 9\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 = 960,$$

$$10\,x_1 + m\,x_2 + 9\,x_3 + 9\,x_4 = 960,$$

Die vier Gleichungen ergeben ein lineares Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4 & = & 960 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 11\,x_4 & = & 960 \\ 8\,x_1 + 9\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 & = & 960 \\ 10\,x_1 + m\,x_2 + 9\,x_3 + 9\,x_4 & = & 960 \end{array}\right. .$$

Wir lösen es mit dem Gauss Algorithmus:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ (A, \mathbf{b}) = & \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 4 & 960 \\ 5 & 5 & 4 & 11 & 960 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 960 \\ 10 & m & 9 & 4 & 960 \end{array}\right) \begin{array}{l} :(10) \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \to & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 5 & 5 & 4 & 11 & 960 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 960 \\ 10 & m & 9 & 4 & 960 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -5\,(I) \\ -8\,(I) \\ -10\,(I) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 0 & 1.5 & 0 & 9 & 480 \\ 0 & 3.4 & -0.4 & 2.8 & 192 \\ 0 & m-7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ : (1.5) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 3.4 & -0.4 & 2.8 & 192 \\ 0 & m-7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -0.7\,(II) \\ \\ -3.4\,(II) \\ -(m-7)\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.8 & -3.8 & -128 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & -0.4 & -17.6 & -896 \\ 0 & 0 & 1 & 42-6\,m & -320\,m+2240 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ : (-0.4) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.8 & -3.8 & -128 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & 1 & 44 & 2240 \\ 0 & 0 & 1 & 42-6\,m & -320\,m+2240 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -0.8\,(III) \\ -6\,(III) \\ \\ -(III) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -39 & -1920 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & 1 & 44 & 2240 \\ 0 & 0 & 0 & -6\,m-2 & -320\,m \end{array}\right) \end{array}$$

Wenn $-6\,m - 2 = 0$, d.h. $m = -\frac{1}{3}$ dann ist $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, da $-320 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0$. In diesem Fall hat das LGS $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

Ansonsten gilt für alle $m \neq -\frac{1}{3}$, und daher für alle $m > 0$, dass das LGS genau eine Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ hat (diese kann auch Bruchteile von produzierten Einheiten beinhalten).

(d) (6 + 4 Punkte)

Von Interesse ist die Entwicklung des Betrags V_n, welchen Dora am Ende des Jahres n auf dem Sparkonto besitzt.

Der erste Schritt ist es, alle Transaktionen während eines Jahres zu identifizieren, welche das Vermögen am Ende des Jahres beeinflussen. Zuerst wächst das Vermögen am Anfang des Jahres um CHF 5′000. Mitte des Jahres werden 60% des vorhandenen Kapitals abgehoben. Hinzu kommen Zinsen, die für den Betrag bis Mitte des Jahres anfallen, sowie anschliessend auf die reduzierte Summe bis Ende Jahres. Für die Verzinsung sind zwei Lösungsmöglichkeiten zulässig:

Lösungsmöglichkeit 1

(d1) (6 Punkte)

$$\begin{aligned}
V_{n+1} &= \underbrace{(V_n + 5'000) \cdot 0.4}_{\text{Vermögensentwicklung ohne Zinsen mit Abhebung am 1. Juli}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0.0125 \cdot (V_n + 5'000)}_{\text{Zinsen aus dem ersten Halbjahr}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0.0125 \cdot 0.4 \cdot (V_n + 5'000)}_{\text{Zinsen aus dem zweiten Halbjahr}} \\
&= 0.40875\, V_n + 2'043.75
\end{aligned}$$

Des Weiteren ist $V_0 = 0$. Es resultiert also eine lineare Differenzengleichung, wobei $A = 0.40875$ und $B = 2'043.75$ ist. Für die explizite Lösung benötigen wir

$$V^* = \frac{2'043.75}{1 - 0.40875} \approx 3'456.65$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_n &= 0.40875^n\,(-V^*) + V^* \\
&= 3'456.65 \cdot (1 - 0.40875^n)
\end{aligned}$$

(d2) (4 Punkte)

Für den Aufgabenteil 2 ergibt sich mit Aufgabenteil 1 ein langfristiges Vermögen (d.h. $\lim_{n\to\infty} V_n$) von $3'456.65$. Für die Frage, wann das Vermögen zum ersten Mal $3'400$ übersteigt, lösen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
& V_n &\geq\ & 3400 \\
\Leftrightarrow\ & V^*(1 - 0.40875^n) &\geq\ & 3400 \\
\Leftrightarrow\ & 1 - 0.40875^n &\geq\ & \frac{3400}{V^*} \\
\Leftrightarrow\ & n &\geq\ & \frac{\ln(1 - \frac{3400}{V^*})}{\ln(0.40875)} \approx 4.595.
\end{aligned}$$

D.h. mindestens 5 Jahre.

Lösungsmöglichkeit 2

Hier ist der Gedanke, die Vermögensentwicklung zunächst nur bis Ende Juni zu betrachten. Daraus ergibt sich (inklusive Verzinsung bis Anfang Juli) folgende Vorschrift:

$$(V_n + 5000) + (V_n + 5000)\,\frac{1}{2} \cdot 1.25\% = (V_n + 5000) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right).$$

Anschliessend wird, ausgehend vom Zeitpunkt 1. Jul,i 60% abgehoben, d.h. 40% verbleiben auf dem

Bankkonto, welche nochmals für ein halbes Jahr verzinst werden. Daraus ergibt sich am Ende des vollen Jahres $(n+1)$ das Vermögen:

$$V_{n+1} = 40\% \cdot (V_n + 5000) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right) = 0.4\,(V_n + 5000)\,\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right)^2.$$

Wir verwenden

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\% = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{400} = 1 + \frac{5}{800} = 1 + \frac{1}{160} = \frac{161}{160},$$

Daraus folgt:

$$V_{n+1} = \underbrace{0.4\left(\frac{161}{160}\right)^2}_{=A} V_n + \underbrace{0.4 \cdot 5000\left(\frac{161}{160}\right)^2}_{=B} \approx 0.4050156 \cdot V_n + 2025.078.$$

Damit erhalten wir die lineare Differenzengleichung erster Ordnung $\{V_n\}_{n\geq 0}$ mit $V_0 = 0$.

$$V_n = A^n\,(V_0 - V^\star) + V^\star = (1 - A^n)\,V^\star$$

wobei

$$V^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{2025.078}{1 - 0.4050156} \approx 3403.582.$$

Es gilt:

$$V_n = 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n)\,.$$

(d2) (4 Punkte)

Analog zu Lösungsmöglichkeit 1 ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n) = 3403.582.$$

Sowie

$$\begin{aligned} V_n \geq 3400 \quad &\Leftrightarrow \quad 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n) \geq 3400 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - 0.4050156^n \geq \frac{3400}{3403.582} \\ &\Leftrightarrow \quad 0.4050156^n \leq 1 - \frac{3400}{3403.582} \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(1 - \frac{3400}{3403.582}\right)}{\ln(0.4050156)} \approx 7.586233. \end{aligned}$$

Damit wird der Betrag von CHF $3'400$ erst nach 8 Jahren erreicht.

Wurden die Zahlen aus der Hilfestellung verwendet, ergibt sich ein langfristiges Vermögen von CHF $3'440$ *und eine Dauer von mindestens 7 Jahren, bis CHF* $3'400$ *erreicht werden.*

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☒	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒
Frage 9	☐	☐	☒	☐
Frage 10	☐	☒	☐	☐

F1. Die korrekte Antwort ist (a). Der Punkt (x_0, y_0) ist stationär, wenn er die folgenden Bedienungen erfüllt: $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$. Der Punkt (x_0, y_0) ist eine lokale Extremstelle, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Es gilt, dass $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, weshalb diese Bedingung äquivalent zur Bedingung in (a) ist.

F2. Die korrekte Antwort ist (d). Aufgrund von $x + y = 0$, folgt $y = -x$ und $f(x, y) = f(x, -x) = x^2 \cdot x = x^3$. Deshalb, gegeben die Nebenbedingung $x + y = 0$, ist die Zielfunktion die kubische Funktion $x \mapsto x^3$. Diese hat keine Extremstellen, weshalb Antwort (d) korrekt ist.

F3. Die korrekte Antwort ist (a). Unter den gegebenen Nebenbedingungen ist P_1 eine Extremstelle, da die Tangenten an die Niveaulinien $\varphi(x, y) = 0$, respektive $f(x, y) = 4 + \ln(2)$, in P_1 identisch sind. P_1 ist ausserdem ein Maximum, da der Wert von f sinkt, wenn man sich von P_1 entlang der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ wegbewegt.

F4. Die korrekte Antwort ist (d). Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, x = \frac{-1}{\mu} \int_b^a \mu\, f(x)\, dx = -\frac{k_1}{\mu}$$

und

$$\int_a^b g(x)\, dx = \frac{1}{\rho} \int_a^b \rho\, g(x)\, dx = \frac{k_2}{\rho}.$$

Daraus folgt:

$$\int_a^b \left(g(x) + f(x)\right)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx = \frac{k_2}{\rho} - \frac{k_1}{\mu}.$$

F5. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$f(x) = \int_x^4 (3\,t^2 - t + 1)\, dt = -\int_4^x (3\,t^2 - t + 1)\, dt.$$

Daraus folgt:

$$f(0) = \int_0^4 (3\,t^2 - t + 1)\, dt = \left[t^3 - \frac{1}{2}\,t^2 + t\right]_0^4 = 60.$$

Zudem gilt:

$$f'(x) = -(3\,x^2 - x + 1),$$
$$f''(x) = -6\,x + 1,$$
$$f'''(x) = -6.$$

Daraus folgt: $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$ und $f'''(0) = -6$.

F6. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$(A+B)^2 = (A+B)\,(A+B) = A\,A+A\,B+B\,A+B\,B = A^2+A\,B+B\,A+B^2 = A\,B+B^2+A^2+B\,A.$$

F7. Die korrekte Antwort ist (a). Wenn M idempotent ist, dann gilt

$$M^2 = M$$

Da M auch invertierbar ist, können wir die letzte Gleichung mit M^{-1} multiplizieren und bekommen:

$$M^{-1}\,M^2 = \underbrace{M^{-1}\,M}_{=I} \Leftrightarrow \underbrace{M^{-1}\,M}_{=I}\,M = I \Leftrightarrow I\,M = I \Leftrightarrow M = I.$$

Es folgt, dass die Einheitsmatrix I die einzige invertierbare Matrix ist, die auch idempotent ist. Deshalb sind die Antworten (b)-(d) korrekt und (a) ist falsch.

F8. Die korrekte Antwort ist (d). Der Gradient von f an einem gegebenen Punkt ist orthogonal zu der Niveaulinie von f in diesem Punkt. Nur der Vektor $\mathbf{x}_4$ erfüllt diese Bedingung.

F9. Die korrekte Antwort ist (c). Die Aussagen (a), (b) und (d) sind richtig. Die Aussage (c) ist nicht allgemein gültig, weil A ein linear abhängiges System sein könnte, auch wenn $\mathbf{a}_k$ linear unabhängig von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ ist.

F10. Die korrekte Antwort ist (b). Aus $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$ folgt dass $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entweder eine oder unendlich viele Lösungen hat. Das System hat unendlich viele Lösungen, da $\mathrm{rg}(A) = 4 < 7 = n$. Der Lösungsraum hat hat die Dimension $n - \mathrm{rg}(A) = 7 - 4 = 3$.

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. Die korrekte Antwort ist (a). Wir lösen das Integral mithilfe der Substitutionsregel. Wir definieren $y = \cos(n\,x)$, woraus folgt, dass $\frac{dy}{dx} = -n\,\sin(n\,x)$. Es folgt:

$$\int \sin(n\,x)\,e^{\cos(n\,x)}\,dx = \int -\frac{1}{n}\,e^y\,dy = -\frac{1}{n}\,e^y + C = -\frac{1}{n}\,e^{\cos(n\,x)} + C.$$

Wir bekommen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(n\,x)\,e^{\cos(n\,x)}\,dx = -\frac{1}{n}\left[e^{\cos(n\,x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} = -\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\,e = \frac{1}{n}\,(e-1).$$

F2. Die korrekte Antwort ist (b). f ist eine Dichtefunktion genau dann, wenn $f(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. In diesem Fall ist $f(x) \geq 0$ für alle x genau dann, wenn $c \geq 1$. Zudem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_c^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\ln(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_c^{\infty} = \frac{\ln(c)}{c} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

F3. Die korrekte Antwort ist (b). Die Richtung der stärksten Zunahmen von f vom Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch den Gradienten von f im Punkt (x_0, y_0). Es folgt:

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} x_0^{-0.75}\,y_0^{0.75} \\ 3\,x_0^{0.25}\,y_0^{-0.25} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 48 \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda > 0$. Es folgt, dass:

$$\frac{3\,x_0^{0.25}\,y_0^{-0.25}}{x_0^{-0.75}\,y_0^{0.75}} = \frac{48}{1} \Leftrightarrow \frac{x_0}{y_0} = 16 \Leftrightarrow x_0 = 16\,y_0.$$

Wir setzen diese Formel in $f(x_0, y_0) = 8$ ein und erhalten

$$4\,(16\,y_0)^{\frac{1}{4}}\,y_0^{\frac{3}{4}} = 8 \Leftrightarrow 8\,y_0 = 8 \Leftrightarrow y_0 = 1.$$

Es folgt, dass $x_0 = 16$ und $y_0 = 1$.

F4. Die korrekte Antwort ist (c). Wir wenden den Gauss-Algorithmus an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -(II) \\ \\ +(II) \\ -(II) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} +(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} = A^\star.$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 4$ (da $A^\star$ eine reguläre 4×4 Untermatrix hat) und deshalb gilt $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 4$.

F5. Die korrekte Antwort ist (c). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 45 + 6 \\ &\quad +5(1-\lambda) - 6(2-\lambda) + 9(-4-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Deshalb gilt: $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 1, 0\}$.

F6. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$y_{k+1} = 3 + 2^{k+1} = 3 + 2 \cdot 2^k = 3 + 2(y_k - 3) = 3 + 2y_k - 6 = 2y_k - 3.$$

Daraus folgt, dass $A = 2$ und $B = -3$.

F7. Die korrekte Antwort ist (d). Es gilt:

$$y_{k+1} = \underbrace{-\frac{e^2}{\pi}}_{=A} y_k + \frac{\pi - e}{\pi}.$$

Die Lösung zur obigen Differenzengleichung erster Ordnung ist oszillierend und divergent, da $A \approx -2.352$.

F8. (a). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = \frac{a}{a-2} y_k + \frac{4}{(a-2)^2},$$

also gilt $A = \frac{a}{a-2}$ und $B = \frac{4}{(a-2)^2}$. Das heisst, $A \neq 1$. Die generelle Lösung der Differenzengleichung ist deshalb monoton und konvergent genau dann, wenn $0 < A < 1$. Es gilt:

$$0 < A < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{a-2} < 1.$$

Für $a - 2 > 0$ folgt, dass $0 < a < a - 2$, und dies ist nie erfüllt.

Für $a - 2 < 0$ folgt, dass $0 > a > a - 2$, und dies ist immer erfüllt falls $a < 0$.

Frühling 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B / Deutscher Track
Musterlösung Frühjahrssemester 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

22 June 2020

[1]Fakultät für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den im entsprechenden Kontext hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen. Erst in einem zweiten Schritt verifiziert man, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text, der die Wörter "Maximierung" oder "Minimierung" beinhaltet, auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem in Textform beschriebenen Problem in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formalisierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (14 Punkte)

Die Aufgabe beschäftigt sich mit der zeitlichen Veränderung von Temperatur und weisst (in Teilaufgabe (a1)) direkt auf das anzuwendende mathematische Konzept hin: Differenzengleichungen. In der Vorlesung wurden ausschliesslich lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelt. Diese können wir in ihrer allgemeinen Form immer schreiben als

$$y_{k+1} = A\, y_k + B, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. (Die Gleichung liegt so in der sogenannten *Normalform* vor.) Unser erster Schritt ist demnach, die Informationen aus dem Aufgabentext so in mathematische Ausdrücke und Objekte zu "übersetzen", dass wir die gefragte lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten herleiten können.

(a1) Sei y_k die Temperatur zum Zeitpunkt k. Der Text spricht davon, dass die *Änderung* der Temperatur des Körpers zwischen den Zeitpunkten k und $k+1$, d.h., $y_{k+1} - y_k$, *proportional* zur *Differenz* zwischen der Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt k und der konstanten Raumtemperatur T ist, d.h. zu, $y_k - T$. Damit erhalten wir die Gleichung:

$$y_{k+1} - y_k = \text{“Proportionalitätskonstante”} \cdot (y_k - T), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Die Proportionalitätskonstante ist im Text durch λ gegeben, also schreiben wir:

$$y_{k+1} - y_k = \lambda\, (y_k - T), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Zur weiteren Berechnung bringen wir die Gleichung in Normalform:

$$y_{k+1} = y_k + \lambda\, (y_k - T) = (1 + \lambda)\, y_k - \lambda\, T, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

d.h. wir erhalten $A = 1 + \lambda$ und $B = -\lambda\, T$.

(a2) Wir betrachten wieder die Normalform $y_{k+1} = A\, y_k + B, \quad k = 0, 1, \ldots,$ einer allgemeinen linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Für $A = 1$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch:

$$y_k = k\, B + y_0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Für $A \neq 1$ erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$y_k = A^k (y_0 - y^\star) + y^\star, \quad k = 0, 1, \ldots$$

wobei $y^\star = \frac{B}{1-A}$. Im vorliegenden Fall erhalten wir, wegen $A = 1 + \lambda$ und $B = -\lambda T$, für $\lambda = 0$, dass

$$y_k = y_0, \quad k = 0, 1, \ldots \ ,$$

also dass die Temperatur über die Zeit konstant bleibt. Im Gegensatz dazu erhalten wir für $\lambda \neq 0$, also $A \neq 1$, dass

$$y^\star = \frac{-\lambda T}{1 - (1 + \lambda)} = T$$

und

$$y_k = (1 + \lambda)^k (y_0 - T) + T, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(a3) Da $y_0 - T = 100 - 20 = 80 > 0$ gilt, ist die allgemeine Lösung *streng monoton fallend* genau dann, wenn $A \in (0, 1)$ ($\Leftrightarrow \lambda \in (-1, 0)$). Zudem konvergiert die Temperatur in diesem Fall gegen $y^\star = T = 20(°\text{C}) < 30(°\text{C})$. Für $A = 1$ ($\Leftrightarrow \lambda = 0$) gilt $y_{k+1} = y_0 = 100(°\text{C})$ für alle k, für $A < 0$ ($\Leftrightarrow \lambda < -1$) ist der Temperaturverlauf nicht monoton, und für $A > 1$ ($\Leftrightarrow \lambda > 0$) steigt die Temperatur streng monoton (und divergiert zu ∞). (Die letzten Fälle sind physikalisch nicht plausibel.)

Daraus können wir schlussfolgern, dass die Temperatur genau dann auf lange Sicht unter 30(°C) fällt, wenn $\lambda \in (-1, 0)$ gilt.

(a4) Wir schreiben die Differenzengleichung für den Zeitpunkt $k = 10$ um und setzen $y_0 = 16.6(°\text{C})$, $\lambda = -0.2$ sowie $T = 25(°\text{C})$. Die gefragte Bedingung ist damit $y_k \geq 20(°\text{C})$. Wegen $A = 1 + \lambda = 1 - 0.2 = 0.8$ folgt:

$$y_k = (1 - 0.2)^k (16.6 - 25) + 25 \geq 20 \Leftrightarrow 0.8^k \leq \frac{20 - 25}{16.6 - 25} \Leftrightarrow k \geq \frac{\ln\left(\frac{20-25}{16.6-25}\right)}{\ln(0.8)} \approx 2.3.$$

Es dauert also, beginnend von Zeitpunkt 10, 3 Zeitperioden bis die Temperatur wieder über 20(°C) gestiegen ist.

(b) (10 Punkte)

Die Aufgabe beschreibt ein Modell für die zeitliche Entwicklung eines Arbeitsmarktes. Das Model beinhaltet die drei Variablen x_t, y_t, und z_t, und mittels der schon im Text verwendeten Vektornotation

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

können wir die Entwicklung dieser Variablen über die Zeit, also von Zeitpunkt t zu Zeitpunkt $t+1$, wie folgt beschreiben:

$$\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t.$$

Dabei wird die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & m \\ 0 & 0.1 & 1-m \end{pmatrix}$$

aus den Koeffizienten der gegebenen linearen (Differenzen-)Gleichungen gebildet. Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ ist demnach äquivalent zu

$$\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t,$$

d.h., in jedem Gleichgewicht ist λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{u}_t$ der zugehörige Eigenvektor.

Das Überprüfen, ob ein Gleichgewicht mit $\lambda = 1$ existiert, läuft folglich darauf hinaus zu bestimmen, ob $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist, d.h., ob die charakteristische Gleichung

$$\det(A - 1\cdot I) = 0$$

erfüllt ist. Es gilt:

$$\det(A - 1\cdot I) = 0 \Leftrightarrow -0.02\,m + 0.01\,m + 0.01\,m = 0 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Demnach ist die charakteristische Gleichung $\det(A - 1\cdot I) = 0$ immer erfüllt, d.h., für alle $m \in \mathbb{R}$, also existiert auch ein Gleichgewicht mit $\lambda = 1$ für alle $m \in \mathbb{R}$.
Als Nächstes müssen wir alle möglichen Gleichgewichtsvektoren in Gleichgewichten mit $\lambda = 1$ bestimmen. Dies wiederum ist äquivalent zur Berechnung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$. Dafür lösen wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$(A - I)\,\mathbf{u}_t = \mathbf{0}.$$

Wir verwenden den Gauß'schen Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} & \\ (A - I, \mathbf{0}) = & \left(\begin{array}{ccc|c} -0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & m & 0 \\ 0 & 0.1 & -m & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} :(-0.1) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.2 & m & 0 \\ 0 & 0.1 & -m & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -0.1\,(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & m & 0 \\ 0 & 0.1 & -m & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ :(-0.1) \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -10\,m & 0 \\ 0 & 0.1 & -m & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ +(II) \\ \\ -0.1\,(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10\,m & 0 \\ 0 & 1 & -10\,m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Wir verwenden z_t als freie Variable und erhalten

$$x_t = 10\,m\,z_t$$

und

$$y_t = 10\,m\,z_t.$$

Wir erhalten die Eigenvektoren

$$\mathbf{u}_t = z_t \begin{pmatrix} 10\,m \\ 10\,m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Variablen jeweils die Anzahl Erwerbstätiger bzw. Erwerbsloser darstellen, muss $z_t > 0$ und $m > 0$ gelten. Demnach erhalten wir die möglichen Gleichgewichtsvektoren

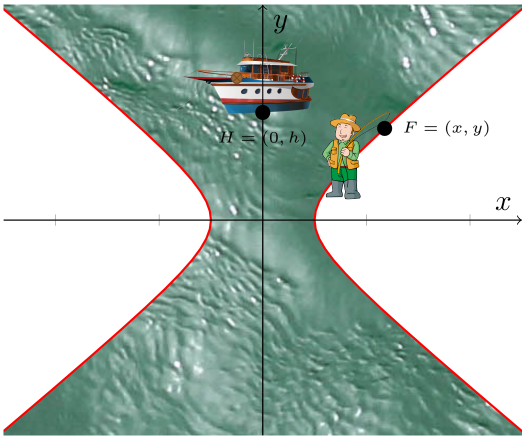
$$\mathbf{u}_t = z_t \begin{pmatrix} 10\,m \\ 10\,m \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_t > 0, \quad m > 0\,.$$

Die Arbeitslosenquote für diese Gleichgewichte berechnet sich als

$$\frac{z_t}{x_t + y_t + z_t} = \frac{z_t}{10\,m\,z_t + 10\,m\,z_t + z_1} = \frac{1}{20\,m + 1}\,.$$

(c) (10 Punkte)

Die folgende Grafik stellt die im Text beschriebene Situation dar:



Der Fischer befindet sich im Punkt $F = (x, y)$ am Flussufer. Die Koordinaten von F müssen demnach folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Das Ziel des Fischers besteht darin, die Entfernung zwischen F und H zu minimieren. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras (siehe auch Übungen und alte Prüfungsaufgaben) lässt sich die Entfernung wie folgt berechnen:

$$d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-h)^2} = \sqrt{x^2 + (y-h)^2}.$$

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, können wir anstelle von $d(x, y)$ äquivalent auch $f(x, y) = x^2 + (y-h)^2$ minimieren, d.h. wir lösen das folgende Optimierungsproblem:

$$\min_{x,y} f(x, y) = x^2 + (y-h)^2 \text{ so, dass } \varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Wir verwenden die Lagrange-Methode und definieren die Lagrange-Funktion:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y) = x^2 + (y-h)^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Wir erhalten und lösen die folgenden Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && 2\,x + \frac{2\,\lambda}{a^2}\,x = 0,\\
&\text{(II)} && \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && 2\,(y-h) - \frac{2\,\lambda}{b^2}\,y = 0,\\
&\text{(III)} && \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Da $x \neq 0$ gilt (ansonsten wäre (III) verletzt), können wir (I) durch $2\,x$ teilen und erhalten:

$$\lambda = -a^2.$$

Einsetzen in (II) liefert:

$$2\,(y-h) + \frac{2\,a^2}{b^2}\,y = 0 \Leftrightarrow y - h + \frac{a^2}{b^2}\,y = 0 \Leftrightarrow y \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) = h \Leftrightarrow y = \frac{h}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{h\,b^2}{a^2 + b^2}.$$

Zuletzt setzen wir dieses Ergebnis in (III) ein und erhalten:

$$x = \pm\sqrt{a^2 + \frac{a^2\,y^2}{b^2}} = \pm\sqrt{a^2 + \frac{a^2\,h^2\,b^4}{b^2\,(a^2+b^2)^2}} = \pm|a|\,\sqrt{1 + \frac{h^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2}}.$$

Das Ergebnis bestätigt die Intuition aus der Grafik, dass der optimale Punkt F aufgrund der Symmetrie des Flusses bezüglich der y-Achse und der Tatsache, dass sich das Boot auf der y-Achse befindet, an zwei Stellen sein kann, d.h. bei

$$F_1 = \left(|a|\,\sqrt{1 + \frac{h^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2}}, \frac{h\,b^2}{a^2+b^2}\right)$$

oder bei

$$F_2 = \left(-|a|\,\sqrt{1 + \frac{h^2\,b^2}{(a^2+b^2)^2}}, \frac{h\,b^2}{a^2+b^2}\right).$$

(d) (6 Punkte)
Diese Aufgabe beschäftigt sich mit Zufallsvariablen und deren Verteilung. Genauer gesagt wird im Aufgabentext unterstellt, dass die Änderung des individuellen, jährlichen Sparbetrags durch eine stetige Zufallsvariable D mit U-quadratischer Verteilung beschrieben werden kann.

(d1) Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit, dass sich der Sparbetrag um mindestens 200 CHF erhöht. Wir leiten in der folgenden Lösung den allgemeinen Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit her, d.h. in Abhängigkeit allgemeiner Parameter a und b. Dies war allerdings nicht gefordert. Lösungen, in denen die Werte für a und b von Anfang an eingesetzt wurden, um den Ausdruck ($\star$) und das finale Ergebnis zu bestimmen, werden genauso als vollständig erachtet. Wir berechnen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[D \geq 200\big] &= \int_{200}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{200}^{b} \frac{12}{(b-a)^3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{3}\frac{12}{(b-a)^3}\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3\right]_{200}^{b} \\
&= \frac{4}{(b-a)^3}\left[\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^3\right]_{200}^{b} \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{4}{(b-a)^3}\left[\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^3 - \left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{4}{(b-a)^3}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{4}{(b-a)^3}\left[\frac{(b-a)^3}{8} - \left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{(b-a)^3}\left(200 - \frac{b+a}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4\left(\frac{200}{b-a} - \frac{b+a}{2\,(b-a)}\right)^3 \\
&\overset{a=-500, b=1000}{=} \frac{1}{2} - 4\left(\frac{200}{1500} - \frac{500}{2 \cdot 1500}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4\left(\frac{200}{1500} - \frac{500}{2 \cdot 1500}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4\left(\frac{2}{15} - \frac{1}{6}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4\left(\frac{8}{60} - \frac{10}{60}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} - 4\left(\frac{-2}{60}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot 8}{60^3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{32}{60^3} \\
&\approx 0.5001481.
\end{aligned}
$$

Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Sparbetrag um mindestens 200 CHF erhöht, etwa 50.01%.

(d2) Der erwartete Anstieg des (durchschnittlichen) Sparbetrags berechnet sich als:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[D] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_a^b x\, \frac{12}{(b-a)^3} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b x \left(x^2 - (b+a)\, x + \frac{(b+a)^2}{4}\right) dx \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \int_a^b \left(x^3 - (b+a)\, x^2 + \frac{(b+a)^2}{4}\, x\right) dx \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}(b+a)\, x^3 + \frac{1}{2}\, \frac{(b+a)^2}{4}\, x^2\right]_a^b \\
&\overset{(\star)}{=} \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{b^4-a^4}{4} - \frac{1}{3}(b+a)(b^3-a^3) + \frac{1}{2}\, \frac{(b+a)^2}{4}(b^2-a^2)\right] \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{(b^2+a^2)(b^2-a^2)}{4} - \frac{1}{3}(b+a)(b^3-a^3) + \frac{1}{2}\, \frac{(b^2+a^2+2\,a\,b)}{4}(b^2-a^2)\right] \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{2}(b^2-a^2)\left(\frac{2\,b^2+2\,a^2}{4} + \frac{b^2+a^2+2\,a\,b}{4}\right) - \frac{1}{3}(b+a)(b^3-a^3)\right] \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{8}(b^2-a^2)\left(3\,b^2+3\,a^2+2\,a\,b\right) - \frac{1}{3}(b+a)(b^3-a^3)\right] \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \left[\frac{1}{8}(3\,b^4+2\,a\,b^3-3\,a^4-2\,a^3\,b) - \frac{1}{3}(b^4-a^3\,b+a\,b^3-a^4)\right] \\
&= \frac{12}{(b-a)^3} \cdot \frac{1}{24}(b^4-2\,a\,b^3-a^4+2\,a^3\,b) \\
&= \frac{12}{(b-a)^3}\, \frac{1}{24}(b+a)(b-a)^3 \\
&= \frac{1}{2}(b+a) \\
&\overset{a=-500,b=1000}{=} \frac{1}{2}(1000-500) \\
&= 250.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1: Es ist natürlich auch möglich, die Werte für a und b von Anfang an oder in den Ausdruck $(\star)$ einzusetzen, um den Erwartungswert zu berechnen.

Bemerkung 2: Bezug nehmend auf die Tatsache, dass f symmetrisch bezüglich $\frac{b+a}{2}$ ist, hätte man direkt argumentieren können, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[D]$ in der Mitte des Intervals $[a, b]$ liegen muss, also bei $\frac{b+a}{2}$.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Frage 1	☒	☐	☐	☐	☐	
Frage 2	☒	☐	☐	☐		
Frage 3	☐	☒	☐	☐		
Frage 4	☐	☐	☐	☒	☐	
Frage 5	☐	☐	☐	☐	☒	
Frage 6	☒	☐	☐	☐		
Frage 7	☐	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☐	☒	
Frage 9	☐	☐	☒	☐		
Frage 10	☐	☐	☐	☒		

F1. (a). Antwort (c) erfüllt die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ nicht und kann folglich ausgeschlossen werden, die Antworten (a), (b) und (d) hingegen schon. Zudem hängt die Funktion f nicht von y ab und wächst linear in x. Nachdem der Punkt $P = (0,3)$ der Punkt mit der kleinsten x-Koordinate auf der durch $\varphi(x,y) = 0$ beschriebenen Ellipse ist, nimmt f dort ein Minimum unter Nebenbedingung an und Antwort (a) ist korrekt.

F2. (a). *Kurzform:* Die Funktion $f(x,y)$ hat ein lokales Minimum in (x_0,y_0) genau dann, wenn die Funktion $-f(-x,-y)$ ein lokales Maximum in $(-x_0,-y_0)$ hat. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, stimmen die lokalen Extrema der Funktion g und der Funktion $-f(-x,-y)$ überein. Demnach hat die Funktion g in $(-x_0,-y_0)$ genau dann ein lokales Maximum, wenn die Funktion $f(x,y)$ ein lokales Minimum in (x_0,y_0) hat, und Antwort (a) ist korrekt.

Ausführlich: Die partiellen Ableitungen der Funktion $g(x,y) = e^{-f(-x,-y)}$ sind gegeben durch

$$g_x(x,y) = f_x(-x,-y)e^{-f(-x,-y)}, \qquad g_y(x,y) = f_y(-x,-y)e^{-f(-x,-y)},$$

folglich ist $(-x_0,-y_0)$ eine lokale Extremstelle von g genau dann, wenn (x_0,y_0) eine lokale Extremstelle von f ist. Demnach können die Antworten (c) und (d) ausgeschlossen werden. Zudem berechnen sich die zweiten partiellen Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
g_{xx}(x,y) &= \left(f_x(-x,-y)^2 - f_{xx}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)},\\
g_{yy}(x,y) &= \left(f_y(-x,-y)^2 - f_{yy}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)},\\
g_{xy}(x,y) &= g_{yx}(x,y) = \left(f_x(-x,-y)\, f_y(-x,-y) - f_{xy}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)}
\end{aligned}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Also gilt $g_{xx}(-x_0,-y_0)g_{yy}(-x_0,-y_0) - g_{xy}(-x_0,-y_0)^2 > 0$ bei einer lokalen Extremstelle $(-x_0,-y_0)$ von g genau dann, wenn $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2 > 0$ bei einer lokalen Extremstelle (x_0,y_0) von f gilt. Dabei nützen wir, dass dort $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ gilt. Da (x_0,y_0) ein lokales Minimum von f ist, folgt $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ und $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$, was wiederum $g_{xx}(-x_0,-y_0) < 0$ und $g_{yy}(-x_0,-y_0) < 0$ impliziert. Also ist $(-x_0,-y_0)$ ein lokales Maximum von g und damit Antwort (a) korrekt.

F3. (b). Wie in der Vorlesung können wir die Summe nach oben wie folgt abschätzen:

$$a(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^4} = m\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right) < m\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx\right) = m\left(1 + \left[-\frac{1}{3\,x^3}\right]_1^{\infty}\right) = \frac{4}{3}m.$$

F4. (d). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist g eine Stammfunktion von f bzw. f die Ableitung von g nach x. Da zudem $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ die Ableitung von g als Grenzwert des Differenzenquotienten darstellt, ist Antwort (d) korrekt.

F5. (e). Wir integrieren die Funktion f in Abhängigkeit des Parameters $c \in \mathbb{R}$ und setzen das Ergebnis gleich 1:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{2x^3}dx + 2c\int_1^{\infty} xe^{-cx^2}dx = -\frac{1}{4x^2}\bigg|_1^{\infty} - e^{-cx^2}\bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{4} + e^{-c} = 1.$$

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss demnach $c = \ln(4/3)$ gewählt werden. Als Summe positiver Terme ist f für dieses c positiv, so dass f eine Dichtefunktion und damit Antwort (e) korrekt ist.

F6. (a). Für eine $(n \times m)$ Matrix A und eine $(p \times q)$ Matrix B muss gelten, dass $m = p$ und $q = n$, damit die Produkte $C = B\,A$, eine $(p \times m)$ Matrix, und $D = A\,B$, eine $(n \times q)$ Matrix, existieren. Damit $C = D$ gelten kann, müssen insbesondere die Dimensionen der Matrizen C und D übereinstimmen, d.h. $p = n$ und $m = q$. Insgesamt ergibt dies $n = p = m = q$ und folglich ist Antwort (a) korrekt.

F7. (b). Da die (4×5) Matrix A Rang 3 hat, hat sie genau 3 linear unabhängige Zeilen. Da die (8×5) Matrix B aus genau den gleichen Zeilen besteht wie Matrix A, einzelne Zeilen nur doppelt vorkommen, ändert sich die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen im Vergleich zur Matrix A nicht. Insbesondere gilt $\mathrm{rg}(B) = 3$ und Antwort (b) ist korrekt.

F8. (e). Der Ausdruck in Antwort (c) ist für $m \neq 3$ nicht definiert. In Antwort (b) ist der Vektor $\mathbf{b}$ linear unabhängig von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ für $m = 4$. In Antwort (a), kann $\mathbf{b}$ linear unabhängig von den Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ sein, wenn mindestens einer der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ linear von den beiden anderen abhängt. Die Bedingung

$$\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$$

ist sowohl hinreichend als auch notwendig dafür, dass der Vektor $\mathbf{b}$ eine Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ ist, die Bedingung $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 3$ jedoch nicht. Demnach können wir die Antworten (a), (b), (c) und (d) ausschliessen, während Antwort (e) wahr ist.

F9. (c). Die Antworten (a) und (d) sind per Definition wahr. Antwort (b) gibt eine äquivalente Charakterisierung dafür, dass eine quadratische Matrix singulär ist und ist demnach ebenso wahr. Dagegen ist jede Matrix, deren Eigenwerte alle ungleich Null sind, regulär, weil die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist. Folglich ist die Aussage in Antwort (c) falsch.

F10. (d). Antwort (a) ist falsch, da die Folge $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ welche $y_{k+1} = Ay_k + B$, mit $A \in (0, 1)$ und $B \in \mathbb{R}$ erfüllt, gegen den Grenzwert $y^* = \frac{B}{1-A}$ konvergiert. Die Antworten (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, da wir beispielsweise $A = 0.5$ und $B = 0$ wählen können, sodass $y_k = \frac{y_0}{2^k}$ und $y^* = 0$ gilt. In diesem Fall ist z.B. für $y_0 = -1$ Antwort (b) falsch und für $y_0 = 1$ Antwort (c). Demnach ist nur Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Frage 1	☐	☐	☐	☒	☐
Frage 2	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 3	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐	

F1. (d). Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}$ als

$$f_x(x,y) = \left(1-x^2\right) e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}, \qquad f_y(x,y) = 2\,y\,e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2},$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demnach sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Kandidaten für lokale Extrema von f, der Ursprung $(0,0)$ jedoch nicht. Wir können folglich Antwort (c) ausschliessen. Die zweiten partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \left(\left(1-x^2\right)^2 - 2x\right) e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2\left(1-x^2\right) y\, e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}, \\ f_{yy}(x,y) &= \left(4y^2+2\right) e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}, \end{aligned}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Einsetzen ergibt $f_{xx}(-1,0)f_{yy}(-1,0) - f_{xy}(-1,0)^2 = 4\,\exp(-4/3) > 0$ und gleichermassen $f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) - f_{xy}(1,0)^2 = -4\,\exp(4/3) < 0$, d.h. wir können die Antworten (a) und (b) ausschliessen. Zudem gilt $f_{xx}(-1,0) = f_{yy}(-1,0) = 2\,\exp(-2/3) > 0$, also ist $(-1,0)$ ein lokales Minimum von f und Antwort (d) ist korrekt.

Kürzer: Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, stimmen die lokalen Extrema der Funktion f und der Funktion $-\frac{1}{3}\,x^3 + x + y^2$ überein. Es reicht also, letztere Funktion, nennen wir sie g, auf Extrema zu untersuchen. Es gilt:

$$\begin{aligned} &g_x(x,y) = 1 - x^2, \qquad g_y(x,y) = 2\,y, \\ &g_{xx}(x,y) = -2\,x, \qquad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = 0, \qquad g_{yy}(x,y) = 2. \end{aligned}$$

Gemäss der ersten Zeile sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Kandidaten für lokale Extrema von g. Zudem gilt:

$$\begin{aligned} g_{xx}(1,0) &= -2 < 0, \qquad g_{yy}(1,0) = 2 > 0\,, \\ g_{xx}(-1,0) &= g_{yy}(-1,0) = 2 > 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $(1,0)$ ein Sattelpunkt und $(-1,0)$ ein lokales Minimum, also Antwort (d) korrekt.

F2. (a). Antwort (a) is korrekt, da für f aus Antwort (a) gilt $f'(x) = \big(\ln(e^{2x}+1)\big)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$ und $f(0) = \ln(2)$.

Alternativ: Mit Hilfe der Substitution $u = e^{2x}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx\\ &= \int \frac{1}{u+1}\,du\\ &= \ln\left(|u+1|\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}\\ &\overset{u\geq 0}{=} \ln(u+1) + C, \qquad C \in \mathbb{R}\\ &= \ln\left(e^{2x}+1\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aus $f(0) = \ln(2)$ folgt schliesslich $C = 0$ und damit Antwort (a).

F3. (a). Da f eine Dichtefunktion ist, muss das Integral über ihren Definitionsbereich den Wert 1 ergeben:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = a\int_0^1 x^2dx + b\int_0^1 x^3dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + b\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 1.$$

Nachdem andererseits der Erwartungswert der Zufallsvariable X mit Dichte f gleich 0.75 ist, muss gelten, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = a\int_0^1 x^3dx + b\int_0^1 x^4dx = a\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + b\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{3}{4}.$$

Diese beiden Bedingungen ergeben das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

mit der eindeutigen Lösungen $a = 3$ und $b = 0$. Demnach ist Antwort (a) korrekt.

F4. (b). Wir berechnen den Gradienten der Funktion $f(x,y) = 2\ln\left(x^2+y^2\right) + (3-a)\ln\left(y^2\right)$ als

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \left(\frac{4x}{x^2+y^2}, \frac{4y}{x^2+y^2} + \frac{6-2a}{y}\right)^\top,$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demnach ist der Gradient bei $(1,1)$ gegeben durch den Vektor $\mathbf{grad}\, f(1,1) = (4, 8-2a)^\top$, der wiederum dann orthogonal zum Vektor $(2,1)^\top$ ist, wenn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8-2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 + 8 - 2a = 0$$

gilt, d.h. für $a = 6$. Folglich ist Antwort (b) korrekt.

F5. (c). Hier sind verschiedene Lösungsansätze denkbar. Man erkennt beispielsweise, dass es möglich ist, die vierte Zeile zu erzeugen, indem man die dritte Zeile von der Summe aus erster und zweiter Zeile abzieht. Daher ist der Rang von A höchstens 3. Da keine weiteren linearen Abhängigkeiten zwischen den ersten drei Zeilen bestehen, ist der Rang von A tatsächlich gleich 3. Folglich ist Antwort (c) korrekt. Alternativ hätte man die Matrix A mittels des Gauß'schen Algorithmus in Dreiecksgestalt bringen können, um den Rang zu bestimmen.

F6. (e). Wir berechnen das Produkt der parametrisierten Matrix A und ihrer gegebenen Inversen A^{-1}, das gleich der (3×3)-Einheitsmatrix sein muss:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{pmatrix} = I.$$

Daher muss $m = 2$ gelten und Antwort (e) ist korrekt.

F7. (b). Für einen Eigenwert λ der Matrix A ist λ^3 ein Eigenwert der Matrix $B = A^3$:

$$B\mathbf{x} = A^3\mathbf{x} = A^2\left(A\mathbf{x}\right) = \lambda A^2\mathbf{x} = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}.$$

Umgekehrt ist für einen Eigenwert μ von B $\sqrt[3]{\mu}$ ein Eigenwert von A.
Die Matrix A hat die Eigenwerte 3 und 6, also hat die Matrix $B = A^3$ die Eigenwerte 3^3 und 6^3.
Demnach ist Antwort (b) korrekt.

F8. (a). Wir schreiben die Differenzengleichung der Folge $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ in Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{28}{81}}_{=A} y_k - \frac{8}{3}.$$

Wegen $0 < A < 1$ ist $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ monoton und konvergent. Also ist Antwort (a) korrekt.

Mathematatik B / Englischer Track
Musterlösung Frühjahrssemester 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

22 June 2020

[1]Fakultät für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den im entsprechenden Kontext hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen. Erst in einem zweiten Schritt verifiziert man, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text, der die Wörter "Maximierung" oder "Minimierung" beinhaltet, auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem in Textform beschriebenen Problem in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formalisierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (14 Punkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der zeitlichen Dynamik der Anzahl infizierten Personen in einer Bevölkerung. Die Formulierung der Aufgabe (in Teil (a1)) schlägt bereits den mathematischen Rahmen zum Lösen der Antwort vor, weil explizit Differenzengleichungen erwähnt wird. In der Vorlesung wurden nur lineare Differenzengleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelt, die immer geschrieben werden können als

$$y_{k+1} = A\,y_k + B, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wobei $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ (die sogenannte *Normalform*). Deshalb besteht der erste Schritt darin, die Aufgabenschilderung in einen mathematischen Ausdruck "umzuwandeln", um eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu erhalten.

(a1) Sei y_k die Anzahl infinzierter Personen in Periode k. Der Text erwähnt, dass 20% der infizierten Personen nach Periode k sich vollständig bis Periode $k+1$ erholen, so dass 80% von y_k immer noch infiziert sind in Periode $k+1$. Zusätzlich gibt der Anteil p an, wie viele der $1,000,000 - y_k$ Personen in Periode k anschliessend in Periode $k+1$ Symptome zeigen. D.h. $p\,(1,000,000 - y_k)$ Personen sind die neu infizierten Personen in Periode $k+1$. Das führt zu:

$$\underbrace{y_{k+1}}_{\text{infiziert in } k+1} = \underbrace{0.8\,y_k}_{\text{noch nicht erholt in } k} + \underbrace{p\,(1,000,000 - y_k)}_{\text{neu infiziert in } k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Wir bringen diese Gleichung in Normalform und erhalten:

$$y_{k+1} = (0.8 - p)\,y_k + 1,000,000\,p, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

so dass $A = 0.8 - p$ und $B = 1,000,000\,p$.

(a2) Wir betrachten nochmals die Normalform $y_{k+1} = A\,y_k + B, \quad k = 0, 1, \ldots,$ einer linearen Differenzengleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Falls $A = 1$, ist die generelle Lösung der Gleichung gegeben durch:

$$y_k = k\,B + y_0, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Falls $A \neq 1$, dann ist die generelle Lösung gegeben durch:

$$y_k = A^k (y_0 - y^\star) + y^\star, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

wobei $y^\star = \frac{B}{1-A}$. Weil in unserem Fall $A = 0.8 - p \neq 1$ und $B = 1,000,000\,p$, folgern wir, dass

$$y^\star = \frac{1,000,000\,p}{1-(0.8-p)} = \frac{1,000,000\,p}{0.2+p}$$

und

$$y_k = (0.8-p)^k \left(y_0 - \frac{1,000,000\,p}{0.2+p} \right) + \frac{1,000,000\,p}{0.2+p}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

(a3) Zuerst stellen wir fest, dass die generelle Lösung monoton ist, genau dann wenn $A = 0.8 - p > 0$, d.h. $p \in [0, 0.8)$. Zweitens sehen wir aufgrund von $A = 0.8 - p \leq 0.8 < 1$, für $p \in [0, 0.8)$, dass die generelle Lösung streng monoton fallend ist, genau dann wenn $y_0 - y^\star > 0$, d.h.

$$y_0 - \frac{1,000,000\,p}{0.2+p} > 0 \Leftrightarrow p < \frac{200}{1,000,000 - y_0} = \frac{200}{1,000,000 - 1,000} \approx 0.0002002002.$$

Weil letztlich $A \in (0,1)$ stellen wir fest, dass die generelle Lösung zu $y^\star$ konvergiert. Deshalb gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star \leq 0.01\% \cdot 1,000,000 = 100 \Leftrightarrow \frac{1,000,000\,p}{0.2+p} \leq 100 \Leftrightarrow 999,900\,p \leq 20.$$

Es folgt, dass der Prozentsatz der infizierten Personen abnimmt unter 0.01% der gegebenen Stichprobe, genau dann wenn:

$$p \in \left(0, \frac{20}{999,900}\right).$$

(a4) Für die Periode $k = 5$ können wir die Differenzengleichung umschreiben, indem wir $y_0 = 33,000$ und $p = 0.001\% = 0.00001$ setzen. Deshalb ist die Bedingung gegeben durch $y_k \leq 100$. Es folgt:

$$y^\star = \frac{1,000,000 \cdot 0.00001}{0.2 + 0.00001} = 4.99975$$

und

$$\begin{aligned} y_k &= (0.8 - 0.00001)^k (33,000 - 4.99975) + 4.99975 \leq 100 \\ \Leftrightarrow \quad & (0.8-0.00001)^k \leq \frac{100 - 4.99975}{33,000 - 4.99975} \\ \Leftrightarrow \quad & k \geq \frac{\ln\left(\frac{100-4.99975}{33,000-4.99975}\right)}{\ln(0.8-0.00001)} \approx 26.216. \end{aligned}$$

Deshalb braucht es 26 Perioden mehr nach den 5 Perioden, damit die Anzahl infizierter Personen in der Bevölkerung unter 100 Einheiten fällt.

(b) (10 Punkte)

Diese Aufgabe beschreibt ein Modell, dass die Dynamiken dreier ökonomischen Variablen x_t, y_t und z_t beschreibt, während die Vektornotation

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

im Aufgabentext als

$$\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$$

ausgedrückt werden kann, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist die Bedingung für ein Equilibrium $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ äquivalent zu

$$\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t = \lambda\,\mathbf{u}_t,$$

d.h. in einem Equilibrium ist λ ein Eigenwert von A und $\mathbf{u}_t$ ist der zugehörige Eigenvektor.

Es folgt durch Überprüfen, dass ein Equilibrium mit $\lambda = 1.1$ existiert, falls $\lambda = 1.1$ ein Eigenwert von A ist, d.h. wenn die charakteristische Gleichung

$$\det(A - 1.1 \cdot I) = 0$$

erfüllt ist. Es gilt:

$$\det(A - 1.1 \cdot I) = 0 \Leftrightarrow (0.9)^3 + m - 0.9 - 0.9 = 0 \Leftrightarrow m = 1.8 - (0.9)^2 = 1.8 - 0.729 = 1.071.$$

Deshalb folgt, dass die charakteristische Gleichung $\det(A - 1.1 \cdot I) = 0$ erfüllt ist, genau dann wenn $m = 1.071$, so dass ein Equilibrium mit $\lambda = 1.1$ existiert für $m = 1.071$. Als nächstes müssen wir alle möglichen Equilibria als Vektoren berechnen, die zum Equilibrium mit $\lambda = 1.1$ dazugehören. Dies ist äquivalent zur Berechnung der Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1.1$. Deshalb müssen wir das System

$$(A - 1.1 \cdot I)\,\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$$

mit dem Gauß'schen Algorithmus lösen:

$$(A - 1.1 \cdot I, \mathbf{0}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0.9 & 1 & 1.071 & 0 \\ 1 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} :(0.9) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{10}{9} & 1.19 & 0 \\ 1 & 0.9 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -(I) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{10}{9} & 1.19 & 0 \\ 0 & -\frac{19}{90} & -0.19 & :\left(-\frac{19}{90}\right) \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{10}{9} & 1.19 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -\frac{10}{9}\,(II) \\ \\ -(II) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_t & y_t & z_t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0.19 & 0 \\ 0 & 1 & 0.9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Sei z_t eine freie Variable, dann erhalten wir:

$$x_t = -0.19\, z_t$$

und

$$y_t = -0.9\, z_t.$$

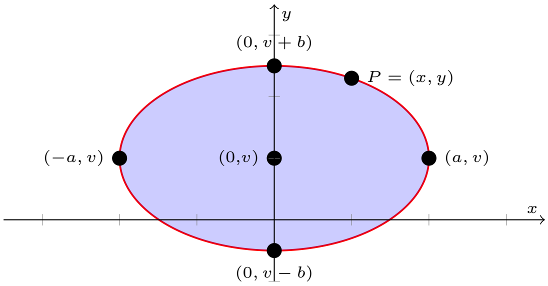
Deshalb

$$\mathbf{u}_t = z_t \begin{pmatrix} -0.19 \\ 0.9 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mit $z_t \in \mathbb{R}$.

(c) (10 Punkte)

Die folgende Grafik zeigt die Situation, die im Aufgabentext beschrieben wird:



Die Aufgabe fragt nach Punkten $P = (x, y)$ auf der Ellipse mit Zentrum $(0, v)$ und Halbachsen $a, b \in \mathbb{R}_{++}$, so dass das Produkt der Koordinaten, also $f(x, y) = x\,y$, extremal ist. Jeder Punkt $P(x, y)$ auf der Ellipse mit Zentrum $(0, v)$ und Halbachsen $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ erfüllt die folgende Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1.$$

Deshalb müssen wir folgendes Problem lösen:

$$\min_{x,y} \text{ oder } \max_{x,y} f(x, y) = x\,y \text{ so dass } \varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Wir wenden die Methode von Lagrange an und definieren die Lagrange Funktion als

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\,\varphi(x, y) = x\,y + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 \right),$$

wobei wir die Lagrange Bedingungen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && y + \frac{2\,\lambda}{a^2}\,x = 0,\\
&\text{(II)} && \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && x + \frac{2\,\lambda}{b^2}\,(y - v) = 0,\\
&\text{(III)} && \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 0 && \Leftrightarrow && \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass $x, y \neq 0$, weil im Falle von $x = 0$ oder $y = 0$ sehen, dass $f(x, y) = x\,y = 0$. Weil die Ellipse symmetrisch um die y-Achse ist, kann 0 weder ein Maximum noch ein Minimum von f sein.

Als nächstes sehen wir, dass (I) den Zusammenhang $y = -\frac{2\,\lambda}{a^2}\,x$ impliziert, während aus (II) die Relation $x = -\frac{2\,\lambda}{b^2}\,(y - v)$ folgt. Deshalb:

$$\frac{y}{x} = \frac{-\frac{2\,\lambda}{a^2}\,x}{-\frac{2\,\lambda}{b^2}\,(y - v)} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y - v}.$$

Es folgt:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y\,(y - v)}{b^2}.$$

Die letzte Gleichung stellt also die Bedingung, dass entweder $y > 0$ und $y > v$ oder $y < 0$ und $y < v$. Wir setzen dieses Resultat in (III) ein und erhalten:

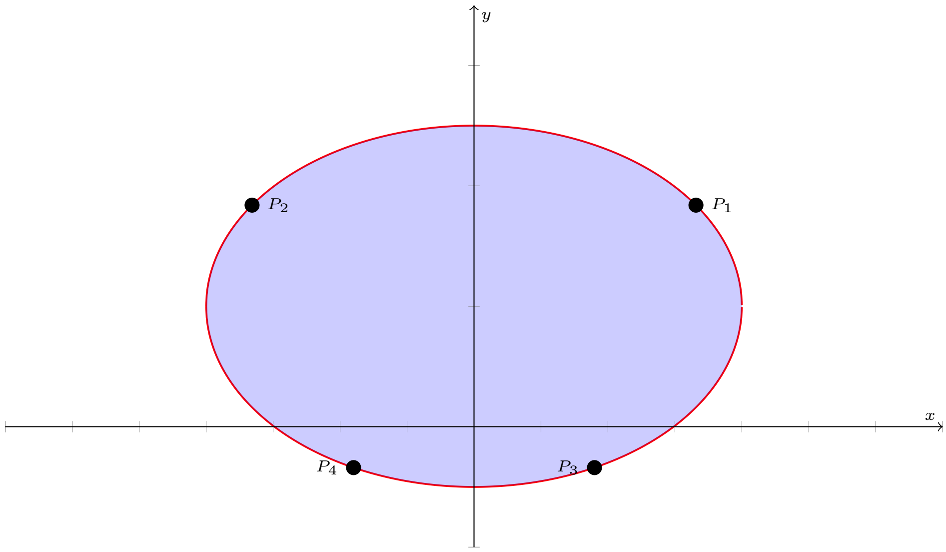
$$\frac{y\,(y - v)}{b^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\,y^2 - 3\,v\,y + (v^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3\,v \pm \sqrt{v^2 + 8\,b^2}}{4}.$$

Durch das Zurückeinsetzen in $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y\,(y-v)}{b^2}$ und etwas Aufpassen, dass die rechte Seite strikt positiv bleibt, erhalten wir die Kandidaten für die Extrempunkte von f (dieser letzte Schritt war nicht gefordert; es genügte, auf $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y\,(y-v)}{b^2}$ zu verweisen und zu sagen, wie der Wert von x hätte erhalten werden können).

Zum Beispiel für $v = 2$, $a = 4$ und $b = 3$; $y = \frac{3\cdot 2 \pm \sqrt{2^2 + 8\cdot 3^2}}{4} = \frac{6\pm\sqrt{76}}{4}$. Deshalb $y_1 = 3.679449$ oder $y_2 = -0.6794495$. Dies sind beides Kandidaten, weil $y_1 > 0$ und $y_1 > v = 2$, sowie $y_2 < 0$ und $y_2 < v = 2$. Deshalb erhalten wir die folgenden vier Punkte:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (3.314466, 3.679449)\\
P_2 &= (-3.314466, 3.679449)\\
P_3 &= (1.799037, -0.6794495)\\
P_4 &= (-1.799037, -0.6794495)\,.
\end{aligned}
$$

Die folgende Grafik zeigt die vier Lösungen:



(d) (6 Punkte)
Diese Aufgabe behandelt stetige Zufallsvariablen und deren Verteilung. Im Speziellen wird angenommen, dass die Lebensdauer des Produkts einer stetigen Zufallsvariable T mit Exponentialverteilung folgt, wie es im Text beschrieben wird.

(d1) In dieser Frage müssen wir den Parameter c finden, so dass $\mathbb{P}[T \geq 2] = 75\% = 0.75$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[T \geq 2] &= \int_2^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \int_2^{\infty} c\,e^{-c\,x}\,dx \\ &= \left[-e^{-c\,x}\right]_2^{\infty} \\ &= e^{-2\,c}.\end{aligned}$$

Deshalb,

$$\mathbb{P}[T \geq 2] = 0.75 \Leftrightarrow e^{-2\,c} = 0.75 \Leftrightarrow -2\,c = \ln(0.75) \Leftrightarrow c = -\frac{\ln(0.75)}{2} \approx 0.143841.$$

(d2) Die erwartete Lebensdaur ist:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \\ &= \int_0^{\infty} x\,c\,e^{-c\,x}\,dx \\ &= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{=u(x)}\,\underbrace{c\,e^{-c\,x}}_{v'(x)}\,dx \\ &= \left[-x\,e^{-c\,x}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \underbrace{1}_{=u'(x)}\,\underbrace{-e^{-c\,x}}_{v(x)}\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{c}\,e^{-c\,x}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{c}.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{-\frac{\ln(0.75)}{2}} = -\frac{2}{\ln(0.75)} \approx 6.952121.$$

Bemerkung: Man hätte direkt $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{c}$ anwenden können, weil dies eine bekannte Eigenschaft der Exponentialverteilung ist.

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
Frage 1	☐	☐	☐	☒	☐	
Frage 2	☒	☐	☐	☐		
Frage 3	☐	☐	☒	☐		
Frage 4	☐	☐	☒	☐	☐	
Frage 5	☐	☐	☐	☐	☒	
Frage 6	☐	☐	☐	☒		
Frage 7	☐	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒	☐	
Frage 9	☐	☒	☐	☐		
Frage 10	☐	☐	☐	☒		

F1. (d). Antwort (c) erfüllt die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ nicht und kann folglich ausgeschlossen werden, die Antworten (a), (b) und (d) hingegen schon. Zudem hängt die Funktion f nicht von x ab und wächst linear in y. Nachdem der Punkt $P = (4,-4)$ der Punkt mit der kleinsten y-Koordinate auf der durch $\varphi(x,y) = 0$ beschriebenen Ellipse ist, nimmt f dort ein Minimum unter Nebenbedingung an und Antwort (d) ist korrekt.

F2. (a). *Kurzform:* Die Funktion $f(x,y)$ hat ein lokales Maximum in (x_0,y_0) genau dann, wenn die Funktion $-f(-x,-y)$ ein lokales Minimum in $(-x_0,-y_0)$ hat. Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, stimmen die lokalen Extrema der Funktion g und der Funktion $-f(-x,-y)$ überein. Demnach hat die Funktion g in $(-x_0,-y_0)$ genau dann ein lokales Minimum, wenn die Funktion $f(x,y)$ ein lokales Maximum in (x_0,y_0) hat, und Antwort (a) ist korrekt.

Ausführlich: Die partiellen Ableitungen der Funktion $g(x,y) = e^{-f(-x,-y)}$ sind gegeben durch

$$g_x(x,y) = f_x(-x,-y)e^{-f(-x,-y)}, \qquad g_y(x,y) = f_y(-x,-y)e^{-f(-x,-y)},$$

folglich ist $(-x_0,-y_0)$ eine lokale Extremstelle von g genau dann, wenn (x_0,y_0) eine lokale Extremstelle von f ist. Demnach können die Antworten (c) und (d) ausgeschlossen werden. Zudem berechnen sich die zweiten partiellen Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
g_{xx}(x,y) &= \left(f_x(-x,-y)^2 - f_{xx}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)},\\
g_{yy}(x,y) &= \left(f_y(-x,-y)^2 - f_{yy}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)},\\
g_{xy}(x,y) &= g_{yx}(x,y) = \left(f_x(-x,-y)\, f_y(-x,-y) - f_{xy}(-x,-y)\right) e^{-f(-x,-y)}
\end{aligned}$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Also gilt $g_{xx}(-x_0,-y_0)g_{yy}(-x_0,-y_0) - g_{xy}(-x_0,-y_0)^2 > 0$ bei einer lokalen Extremstelle $(-x_0,-y_0)$ von g genau dann, wenn $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}(x_0,y_0)^2 > 0$ bei einer lokalen Extremstelle (x_0,y_0) von f gilt. Dabei nützen wir, dass dort $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ gilt. Da (x_0,y_0) ein lokales Maximum von f ist, folgt $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ und $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$, was wiederum $g_{xx}(-x_0,-y_0) > 0$ und $g_{yy}(-x_0,-y_0) > 0$ impliziert. Also ist $(-x_0,-y_0)$ ein lokales Minimum von g und damit Antwort (a) korrekt.

F3. (c). Wie in der Vorlesung können wir die Summe nach oben wie folgt abschätzen:

$$a(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^3} = m\left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right) < m\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx\right) = m\left(1 + \left[-\frac{1}{2\,x^2}\right]_1^{\infty}\right) = \frac{3}{2}m.$$

F4. (c).Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist g eine Stammfunktion von f bzw. f die Ableitung von g nach x. Da zudem $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ die Ableitung von g als Grenzwert des Differenzenquotienten darstellt, ist Antwort (c) korrekt.

F5. (e). Wir integrieren die Funktion f in Abhängigkeit des Parameters $c \in \mathbb{R}$ und setzen das Ergebnis gleich 1:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx + 2c\int_1^{\infty} xe^{-cx^2}dx = -\frac{1}{2x^2}\bigg|_1^{\infty} - e^{-cx^2}\bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{2} + e^{-c} = 1.$$

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss demnach $c = \ln(2)$ gewählt werden. Als Summe positiver Terme ist f für dieses c positiv, so dass f eine Dichtefunktion und damit Antwort (e) korrekt ist.

F6. (d). Für eine $(n \times m)$ Matrix A und eine $(p \times q)$ Matrix B muss gelten, dass $m = p$ und $q = n$, damit die Produkte $C = B\,A$, eine $(p \times m)$ Matrix, und $D = A\,B$, eine $(n \times q)$ Matrix, existieren. Damit $C = D$ gelten kann, müssen insbesondere die Dimensionen der Matrizen C und D übereinstimmen, d.h. $p = n$ und $m = q$. Insgesamt ergibt dies $n = p = m = q$ und folglich ist Antwort (d) korrekt.

F7. (b). Da die (4×3) Matrix A Rang 2 hat, hat sie genau 2 linear unabhängige Spalten. Da die (8×5) Matrix B aus genau den gleichen Spalten besteht wie Matrix A, einzelne Spalten nur doppelt vorkommen, ändert sich die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten im Vergleich zur Matrix A nicht. Insbesondere gilt $\mathrm{rg}(B) = 2$ und Antwort (b) ist korrekt.

F8. (e). Der Ausdruck in Antwort (c) ist für $m \neq 3$ nicht definiert. In Antwort (b) ist der Vektor $\mathbf{b}$ linear unabhängig von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ für $m = 4$. In Antwort (a), kann $\mathbf{b}$ linear unabhängig von den Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ sein, wenn mindestens einer der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ linear von den beiden anderen abhängt. Die Bedingung

$$\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$$

ist sowohl hinreichend als auch notwendig dafür, dass der Vektor $\mathbf{b}$ eine Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ ist, die Bedingung $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 3$ jedoch nicht. Demnach können wir die Antworten (a), (b), (c) und (d) ausschliessen, während Antwort (e) wahr ist.

F9. (b). Die Antworten (a) und (c) sind per Definition wahr. Antwort (d) gibt eine äquivalente Charakterisierung dafür, dass eine quadratische Matrix singulär ist und ist demnach ebenso wahr. Dagegen ist jede Matrix, deren Eigenwerte alle ungleich Null sind, regulär, weil die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwerte ist. Folglich ist die Aussage in Antwort (b) falsch.

F10. (d). Antwort (a) ist falsch, da die Folge $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ welche $y_{k+1} = Ay_k + B$, mit $A \in (0,1)$ und $B \in \mathbb{R}$ erfüllt, gegen den Grenzwert $y^* = \frac{B}{1-A}$ konvergiert. Die Antworten (b) und (c) sind im Allgemeinen falsch, da wir beispielsweise $A = 0.5$ und $B = 0$ wählen können, sodass $y_k = \frac{y_0}{2^k}$ und $y^* = 0$ gilt. In diesem Fall ist z.B. für $y_0 = -1$ Antwort (b) falsch und für $y_0 = 1$ Antwort (c). Demnach ist nur Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Frage 1	☐	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 3	☒	☐	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐	

F1. (e). Wir berechnen die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x,y) = e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2}$ als

$$f_x(x,y) = \left(x^2-1\right) e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2}, \qquad f_y(x,y) = -2\,y\,e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2},$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demnach sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Kandidaten für lokale Extrema von f, der Ursprung $(0,0)$ jedoch nicht. Wir können folglich Antwort (c) ausschliessen. Die zweiten partiellen Ableitungen von f sind gegeben durch

$$f_{xx}(x,y) = \left(\left(x^2-1\right)^2 + 2x\right) e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2}, \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2\left(x^2-1\right) y\, e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2},$$
$$f_{yy}(x,y) = \left(4y^2-2\right) e^{\frac{1}{3}x^3-x-y^2},$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Einsetzen ergibt $f_{xx}(-1,0)f_{yy}(-1,0) - f_{xy}(-1,0)^2 = 4\exp(4/3) > 0$ und gleichermassen $f_{xx}(1,0)f_{yy}(1,0) - f_{xy}(1,0)^2 = -4\exp(4/3) < 0$, d.h. wir können die Antworten (a) und (b) ausschliessen. Zudem gilt $f_{xx}(-1,0) = f_{yy}(-1,0) = -2\exp(-2/3) < 0$, also ist $(-1,0)$ ein lokales Maximum von f und Antwort (e) ist korrekt.

Kürzer: Da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist, stimmen die lokalen Extrema der Funktion f und der Funktion $\frac{1}{3}x^3 - x - y^2$ überein. Es reicht also, letztere Funktion, nennen wir sie g, auf Extrema zu untersuchen. Es gilt:

$$g_x(x,y) = x^2 - 1, \qquad g_y(x,y) = -2\,y,$$
$$g_{xx}(x,y) = 2\,x, \qquad g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = 0, \qquad g_{yy}(x,y) = -2.$$

Gemäss der ersten Zeile sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Kandidaten für lokale Extrema von g. Zudem gilt:

$$g_{xx}(1,0) = 2 > 0, \qquad g_{yy}(1,0) = -2 < 0\,,$$
$$g_{xx}(-1,0) = g_{yy}(-1,0) = -2 < 0.$$

Demnach ist $(1,0)$ ein Sattelpunkt und $(-1,0)$ ein lokales Maximum, also Antwort (e) korrekt.

F2. (a). Antwort (a) is korrekt, da für f aus Antwort (a) gilt $f'(x) = \big(\ln(e^{2x}+1)\big)' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$ und $f(0) = \ln(2)$.

Alternativ: Mit Hilfe der Substitution $u = e^{2x}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}\int f'(x)\,dx &= \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u+1}\,du \\ &= \ln(|u+1|) + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ &\overset{u\geq 0}{=} \ln(u+1) + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ &= \ln\left(e^{2x}+1\right) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aus $f(0) = \ln(2)$ folgt schliesslich $C = 0$ und damit Antwort (a).

F3. (a). Da f eine Dichtefunktion ist, muss das Integral über ihren Definitionsbereich den Wert 1 ergeben:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = a\int_0^1 x^2dx + b\int_0^1 x^3dx = a\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + b\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 1.$$

Nachdem andererseits der Erwartungswert der Zufallsvariable X mit Dichte f gleich 0.75 ist, muss gelten, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = a\int_0^1 x^3dx + b\int_0^1 x^4dx = a\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + b\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{4}{5}.$$

Diese beiden Bedingungen ergeben das folgende System linearer Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \end{pmatrix},$$

mit der eindeutigen Lösungen $a = 0$ und $b = 4$. Demnach ist Antwort (a) korrekt.

F4. (c). Wir berechnen den Gradienten der Funktion $f(x,y) = 4\ln\left(x^2+y^2\right) + (3-a)\ln\left(y^2\right)$ als

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \left(\frac{8x}{x^2+y^2}, \frac{8y}{x^2+y^2} + \frac{6-2a}{y}\right)^\top,$$

für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Demnach ist der Gradient bei $(1,1)$ gegeben durch den Vektor $\mathbf{grad}\, f(1,1) = (4, 10-2a)^\top$, der wiederum dann orthogonal zum Vektor $(2,1)^\top$ ist, wenn

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 10-2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 + 10 - 2a = 0$$

gilt, d.h. für $a = 9$. Folglich ist Antwort (c) korrekt.

F5. (d). Hier sind verschiedene Lösungsansätze denkbar. Der einfachste Weg ist die Determinante der Matrix zu bestimmen, indem man nach Zeilen oder Spalten entwickelt. Damit folgt, dass $\det(A) = 140 \neq 0$, so dass A vollen Rank hat, also $\mathrm{rg}(A) = 4$. Dementsprechend ist Antwort (d) richtig. Alternativ hätte man die Matrix A mittels des Gauß'schen Algorithmus in Dreiecksgestalt bringen können, um den Rang zu bestimmen.

F6. (d). Wir berechnen das Produkt der parametrisierten Matrix A und ihrer gegebenen Inversen A^{-1}, das gleich der (3×3)-Einheitsmatrix sein muss:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m/2 \end{pmatrix} = I.$$

Daher muss $m = 2$ gelten und Antwort (d) ist korrekt.

F7. (c). Für einen Eigenwert λ der Matrix A ist λ^3 ein Eigenwert der Matrix $B = A^3$:

$$B\mathbf{x} = A^3\mathbf{x} = A^2\left(A\mathbf{x}\right) = \lambda A^2\mathbf{x} = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}.$$

Umgekehrt ist für einen Eigenwert μ von B $\sqrt[3]{\mu}$ ein Eigenwert von A.
Die Matrix A hat die Eigenwerte 2 und 5, also hat die Matrix $B = A^3$ die Eigenwerte 2^3 und 5^3. Demnach ist Antwort (c) korrekt.

F8. (b). Wir schreiben die Differenzengleichung der Folge $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ in Normalform:

$$y_{k+1} = \underbrace{\frac{364}{81}}_{=A} y_k - \frac{8}{3}.$$

Wegen $A > 1$ ist $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ monoton und divergent. Also ist Antwort (b) korrekt.