Aufgaben

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (5 Punkte)

Sei $q(x) = \frac{5x+2}{3x-10}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{10}{3}\}$.

Für welche Werte von x konvergiert die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \cdot q(x)^k$?

(b) (7 Punkte)

Eine Kreditnehmerin leiht sich $P = 2'500'000$ CHF, um ihr Haus zu finanzieren. Sie kann jährliche Zahlungen in Höhe von $C = 50'000$ CHF aufbringen. Der jährliche Zinssatz liegt bei $i = 1\%$. Wie lange benötigt die Kundin, um das Darlehen zurückzuzahlen, wenn die Zahlungen zum Ende des Jahres stattfinden?

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3x+6}.$$

(d1) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4x+4)}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4x+4)}.$$

Ist f monoton(Beweis)?

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Verwenden Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert von $f(0,01)$ zu bestimmen.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \frac{1}{1+x}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq x^4.$$

(b) (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \quad D_f \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 3e^{2ax+by+5}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) (8 Punkte)

Die Kurve C in der xy-Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$C \ : \ x^2 + 5xy + 12y - a = 0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P = (c, c)$ zur Kurve gehört und die Steigung der Tangente an C in P -1 beträgt.

(d1) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = (aK^{0{,}25} + A^{0{,}75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Bestimmen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

(d2) (2 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = (aK^{0{,}25} + A^{0{,}75})^4,$$

wobei $a > 0$.

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 16)$ gleich $-\frac{4}{3}$?

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = \text{„}\frac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“}$$
$$B(x) = \text{„}x \text{ ist eine gerade Zahl“.}$$

Welche der Aussagen ist wahr:

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

(d) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind konvergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - (-1)^n\, b_n$.

Dann sind:

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $a_n > 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \ln(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(d) Keine der vorangegangenen Antworten ist richtig.

Frage 4 (2 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und zahlt $1'000'000$ CHF in 10 Jahren, $1'500'000$ CHF in 20 Jahren sowie $1'000'000$ CHF in 40 Jahren aus. Das Projekt besitzt den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\%$.

(b) $i = 3.45\%$.

(c) $i = 4.65\%$.

(d) $i = 5.05\%$.

Frage 5 (4 Punkte)

Die Gleichung

$$\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}\right) + \ln(x) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von a ist die Funktion stetig?

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a = \pi$.

Frage 7 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem kompletten Definitionsbereich *konvex*?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $x^3 + 3\ x + 4$.

(d) Keine der obigen Funktionen ist in ihrem ganzen Definitionsbereich konvex.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{x^2+3x+2}$

(a) hat ein lokales Maximum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(b) hat ein lokales Minimum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(c) hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Elastizität der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei $\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x$. Es folgt, dass die relative Änderungsrate von f gegeben ist durch:

(a) $\rho_f(x) = x + 3$.

(b) $\rho_f(x) = x^2 + 3$.

(c) $\rho_f(x) = x^3 + 3x^2$.

(d) Es ist unmöglich, mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die relative Änderungsrate $\rho_f(x)$ herzuleiten.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y = \ln(6 + cx - x^2),$$

wobei c ein reellwertiger Parameter ist, für den $D_f \neq \emptyset$ gilt. f hat ein globales Maximum bei $x_0 = 1$

(a) für $c = 3$.

(b) für $c = 2$.

(c) für $c \in \{0, 1\}$.

(d) $D_f = \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)

Das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$ in $x_0 = 0$ gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}x^2 + \frac{21}{64}x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{21}{64}x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3$.

(d) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{128}x^3$.

Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, \; (x, y) \mapsto z = \ln(-9x^2 - y^2 + 4y + 5) + \sqrt{4x^2 + 2y - 4}.$$

Welches der Bilder in der Aufgabenstellung entspricht dem Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

Frage 5 (3 Punkte)

Eine homogene Funktion vom Grad 2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$ gleich $5x + 1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x, y) = \sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{x^{1.6}y^{0.7}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist homogen vom Grad 0.7.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x, y) = x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + x^a y^{2a}$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.2$.

(c) $a = 1.4$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen vom Grad 2. Die Funktion h ist definiert durch $h(x,y) = f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right)$. Dann gilt

(a) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 3$.

(b) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 6$.

(c) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$.

(d) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 18$.

Lösungen

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = „\frac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“}$$
$$B(x) = „x \text{ ist eine gerade Zahl“}.$$

Welche der Aussagen ist wahr:

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

(d) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Aussagen du von vornerein ausschließen kannst. Es reicht ein Gegenbeispiel für eine Aussage zu finden, um sie zu widerlegen.
2. Zur Übung beweisen wir die richtige Aussage.

1. Überlege dir, welche Aussagen du von vornerein ausschließen kannst

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$
Wir machen mit 1 einen Versuch. Es gilt

$$1 = \frac{4}{4},$$

womit $x = 4$ und gerade ist. Vermutlich ist dies die korrekte Aussage.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$
Wir erinnern uns, dass

$$A(x) \Leftrightarrow B(x)$$

dasselbe wie

$$A(x) \Rightarrow B(x) \text{ und } A(x) \Leftarrow B(x)$$

bedeutet. Das heißt: Beide Bedingungen müssen gleichzeitig erfüllt sein. Wir nehmen die einfachste gerade Zahl $x = 2$. Dann gilt

$$\frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

wodurch wir ein Gegenbeispiel gefunden haben.

(c) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$
Das Symbol $\neg$ ist die Negation oder Umkehrung einer Aussage. Wir haben also

$$\neg A(x) = \text{„}\frac{x}{4} \text{ ist keine positve ganze Zahl“}$$

als Aussage. Die Zahl $3/4 = 0.75$ ist keine ganze Zahl, aber die 3 ist nicht gerade. Dementsprechend kann diese Aussage nicht stimmen.

(d) $A(x) \Rightarrow\neq B(x)$
Wenn $x/4$ eine positive ganze Zahl ist, ist x durch 4 teilbar. Somit ist x auch durch 2 teilbar. Womit nicht ungerade sein kann.

Wir haben gesehen, dass (b),(c) und (d) falsch sind. Also muss (a) korrekt sein.

2. Zur Übung beweisen wir die richtige Aussage Eine Aussage der Form

$$A(x) \Rightarrow B(x)$$

beweist man, indem man $A(x)$ als gegeben ansieht und $B(x)$. Sei also $x/4$ eine positive ganze Zahl. Damit ist x durch 4 teilbar. Wir wissen also

$$x = 4 \cdot y = 2 \cdot 2 \cdot y$$

mit $y \in \mathbb{N}$. Damit ist x gerade, da durch 2 teilbar.

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind konvergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - (-1)^n\, b_n$.

Dann sind:

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir zunächst, welche Eigenschaften $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sicher besitzt.
2. Überprüfe die Eigenschaften und finde gegebenenfalls Gegenbeispiele.

1. Überlege dir zunächst, welche Eigenschaften $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sicher besitzt

Wir wissen, dass a_n und b_n konvergent sind. Demnach sind beide Folgen beschränkt. Eine Folge heißt beschränkt, falls sie eine obere und untere Schranke besitzt. Insbesondere bleibt eine beschränkte Folge beschränkt, wenn man sie mit dem Faktor $(-1)^n$ ergänzt. Die Summe zweier beschränkten Folgen ist wiederum beschränkt. Damit wissen wir, dass c_n beschränkt ist. Wir betrachten $(-1)^n$ als Beispielfolge. Diese Folge ist durch -1 nach unten und durch 1 nach oben beschränkt. Aber leider ist diese Folge divergent, da sie zwischen -1 und 1 hin und herspringt.

2. Überprüfe die Eigenschaften und finde gegebenenfalls Gegenbeispiele

(a) Wähle $a_n = 0$, $b_n = 1$. Dann ist durch
$$c_n = a_n - (-1)^n\, b_n = -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$
ein Gegenbespiel gefunden, da c_n zwischen -1 und 1 hin und her springt.

(b) Wähle $a_n = 1$, $b_n = 0$. Dann ist durch
$$c_n = a_n - (-1)^n\, b_n = 1 - (-1)^n \cdot 0 = 1$$
ein Gegenbeispiel gefunden, da konstante Folgen konvergent sind.

(c) Diese Antwort ist richtig. Wir betrachten
$$c_n = a_n - (-1)^n\, b_n$$
genauer. Der einzige Term an dem die Konvergenz scheitern kann ist b_n. Da b_n konvergent ist, können wir
$$(-1)^n\, b_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \lim n \to \infty b_n = 0$$
als Hilfsmittel verwenden. Wenn $b_n \to a \neq 0$ gilt, dann springt $(-1)^n\, b_n$ zwischen $-a$ und a hin und her. Also sehen wir, dass die Konvergenz von der Wahl von b_n abhängt.

(d) Vergleiche mit (b).

Frage 3 (3 Punkte)

Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $a_n > 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \ln(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(d) Keine der vorangegangenen Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, wie man eine Folge konstruiert, welche allen Eigenschaften widerspricht.

1. Überlege dir, wie man eine Folge konstruiert, welche allen Eigenschaften widerspricht
Wir wählen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{falls } n = 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \geq 2 \end{cases}$$

als Folge. Diese ist Folge ist nicht monoton, weil

$$a_1 < a_2 \text{ und } a_1 > a_4$$

ist. Damit kann

$$b_n = \ln(a_n)$$

aufgrund der strengen Monotonie des Logarithmus auch nicht monoton sein. Nun zeigen wir noch das b_n unbeschränkt ist. Mit

$$b_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n) \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$$

erhalten wir die Unbeschränktheit. Damit haben wir eine Folge gefunden, sodass keine der Eigenschaften erfüllt ist. Also ist (d) die richtige Antwort.

Frage 4 (2 Punkte)

Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von 2′000′000 CHF und zahlt 1′000′000 CHF in 10 Jahren, 1′500′000 CHF in 20 Jahren sowie 1′000′000 CHF in 40 Jahren aus. Das Projekt besitzt den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\%$.

(b) $i = 3.45\%$.

(c) $i = 4.65\%$.

(d) $i = 5.05\%$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir die Formel des Nettobarwerts in Erinnerung.
2. Untersuche die Auswirkung des Zinssatzes.

1. Rufe dir die Formel des Nettobarwerts in Erinnerung

Allgemein lässt sich der Nettobarwert durch

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+i)^t}$$

berechnen, wobei bei uns nur C_{10}, C_{20} und C_{40} ungleich null sind.

2. Untersuche die Auswirkung des Zinsatzes

Eingesetzt erhalten wir

$$NPV(i) = -2'000'000 + \frac{1'000'000}{(1+i)^{10}} + \frac{1'500'000}{(1+i)^{20}} + \frac{1'000'000}{(1+i)^{40}}$$

und erkennen das der Wert größer wird, wenn die Nenner kleiner werden. Aus diesem Grund muss (a) die richtige Antwort sein.

Frage 5 (4 Punkte)

Die Gleichung

$$\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}\right) + \ln(x) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme die Gleichung um und lese die Lösung ab.

1. Forme die Gleichung um und lese die Lösung ab

Durch Umformen erhalten wir

$$\ln(x^3) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}x\right) + \ln(x) = \ln(5) \Leftrightarrow \ln(x^3 \cdot x) - \ln\left(\frac{5-4x}{5}\right) = \ln(5) \Leftrightarrow \ln\left(x^4 \cdot \frac{5}{5-4x}\right) = \ln(5),$$

wodurch wir mit

$$x^4 \frac{5}{5-4x} = 5 \Leftrightarrow \frac{x^4}{5-4x} = 1 \Leftrightarrow x^4 = 5 - 4x \Leftrightarrow x^4 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

auf die korrekte Lösungsmenge kommen. Damit ist (b) die korrekte Antwort.

Frage 6 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & , \ x \neq 0 \\ a & , \ x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von a ist die Funktion stetig?

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a = \pi$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet.
2. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

und leite davon die richtige Antwort ab.

1. Rufe dir in Erinnerung, was Stetigkeit bedeutet

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in x_0, falls

$$x \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \to f(x_0)$$

gilt. Das heißt: Wenn x gegen x_0 geht, muss $f(x)$ gegen $f(x_0)$ gehen. Wir müsssen also

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

um das passende a für die Stetigkeit in $x_0 = 0$ zu erhalten. In allen anderen Punkten ist f bereits stetig.

2. Bestimme den Grenzwert

Um den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

wenden wir die Regel von l'Hospital an. Da wir „0/0“ gegeben haben, können wir mit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

direkt l'Hospital anwenden. Es gilt also

$$x \to 0 \ \Rightarrow \ f(x) \to 1 = f(0),$$

wenn $a = 1$ ist. Damit ist die Antwort (b) richtig.

Frage 7 (4 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem kompletten Definitionsbereich *konvex*?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2x+1}\right)$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $x^3 + 3\ x + 4$.

(d) Keine der obigen Funktionen ist in ihrem ganzen Definitionsbereich konvex.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Welche Aussage können wir mithilfe von Ableitungen über die Konvexität treffen?
2. Bestimme die entsprechenden Ableitungen.
3. Bestimme die konvexe Funktion.

1. Welche Aussage können wir mithilfe von Ableitungen über die Konvexität treffen?
Eine Funktion $f\ :\ D_f \to \mathbb{R}$ heißt auf ihrem ganzen Definitionsbereich konvex, falls

$$f''(x) \geq 0$$

für alle $x \in D_f$ gilt.

2. Bestimme die entsprechenden Ableitungen
Wir bestimmen durch

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{\frac{1}{2x+1}} \cdot 2 = 4x + 2 \\
f_1''(x) &= 4 \\
f_2'(x) &= \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \cdot (2x + 2) = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} \\
f_2''(x) &= \frac{-2}{(x+1)^2} \\
f_3'(x) &= 3x^2 + 3 \\
f_3''(x) &= 6x
\end{aligned}$$

die Ableitungen.

3. Bestimme die konvexe Funktion

(a) Wir sehen, dass

$$f''(x) = 4 > 0$$

für alle $x \in D_f = (-\frac{1}{2}, \infty)$ gilt. Damit haben wir mit (a) die richtige Antwort gefunden. Die Funktion f_1 ist auf D_f sogar strikt konvex.

(b) Wir sehen durch

$$f_2''(x) = \frac{2}{x+1},$$

dass durch den Nenner ein Vorzeichenwechsel in der zweiten Ableitung vorliegt. Damit ist f_2 nicht konvex.

(c) Wir sehen wie in (d), dass ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

Frage 8 (2 Punkte)

Die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{x^2+3x+2}$

(a) hat ein lokales Maximum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(b) hat ein lokales Minimum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(c) hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Eigenschaften die Exponentialfunktion besitzt und was wir aus diesem Grund untersuchen müssen.
2. Bestimme die x-Koordinate des Scheitelpunkts von $x^2 + 3x + 2$.
3. Löse diese Aufgabe noch mit Ableitungen.

1. Überlege dir, welche Eigenschaften die Exponentialfunktion besitzt

Die Exponentialfunktion

$$\exp \ : \ \mathbb{R} \to (0, \infty), \ x \mapsto e^x$$

ist streng monoton wachsend und immer positiv. Wir haben mit

$$x^2 + 3x + 2$$

eine nach oben geöffnete Parabel gegeben. Deswegen erreicht f an deren Scheitelpunkt ein Minimum.

2. Bestimme die x-Koordinate des Scheitelpunkts von $x^2 + 3x + 2$

Den Scheitelpunkt können wir mithilfe quadratischer Ergänzung bestimmen. Durch

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + 2 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$$

erhalten wir die Scheitelpunktform. Der Scheitelpunkt besitzt die x-Koordinate $x_0 = -\frac{3}{2}$. Damit besitzt f in x_0 ein Minimum. Die Antwort (b) ist korrekt.

3. Löse diese Aufgabe noch mit Ableitung

Die Ableitung von f ist durch

$$f'(x) = (2x + 3) \cdot e^{x^2+3x+2}$$

gegeben. Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2},$$

womit $x_0 = -\frac{3}{2}$ ein kritischer Punkt ist. Die Ableitung f' hat in diesem Punkt ein Vorzeichenwechsel von negativ zu positiv. Damit besitzt f in x_0 ein Minimum.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Elastizität der Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei $\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x$. Es folgt, dass die relative Änderungsrate von f gegeben ist durch:

(a) $\rho_f(x) = x + 3$.

(b) $\rho_f(x) = x^2 + 3$.

(c) $\rho_f(x) = x^3 + 3x^2$.

(d) Es ist unmöglich, mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die relative Änderungsrate $\rho_f(x)$ herzuleiten.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rufe dir den Zusammenhang von ε_f und ρ_f in Erinnerung.
2. Bestimme die richtige Antwort.

1. Rufe dir den Zusammenhang von ε_f und ρ_f in Erinnerung

Der gesuchte Zusammenhang ist durch

$$\varepsilon_f(x) = x \cdot \rho_f(x)$$

gegeben.

2. Bestimme die richtige Antwort

Für die Elastizität gilt

$$\varepsilon_f(x) = x^2 + 3x = x \cdot (x + 3),$$

wodurch (a) die korrekte Antwort ist.

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \ln(6 + cx - x^2),$$

wobei c ein reellwertiger Parameter ist, für den $D_f \neq \emptyset$ gilt. f hat ein globales Maximum bei $x_0 = 1$

(a) für $c = 3$.

(b) für $c = 2$.

(c) für $c \in \{0, 1\}$.

(d) $D_f = \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Definitionsbereich $D_{f,c}$ von f abhängig von c.
2. Bestimme die Ableitung von f und suche nach den Nullstellen.

1. Bestimme den Definitionsbereich $D_{f,c}$ von f abhängig von c

Die Parabel $6 + cx - x^2$ ist nach unten geöffnet und wir erhalten durch

$$-x^2 + cx + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - cx - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4 \cdot 6}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2} \cdot (c - \sqrt{c^2 + 24}), \quad x_2 = \frac{1}{2} \cdot (c + \sqrt{c^2 + 24})$$

die Nullstellen. Damit ist der Defintionsbereich abhängig von c

$$D_{f,c} = \left(\frac{1}{2} \cdot (c - \sqrt{c^2 + 24}), \frac{1}{2} \cdot (c + \sqrt{c^2 + 24}) \right)$$

immer nicht-leer. Damit ist Antwort (d) ausgeschlossen.

2. Bestimme die Ableitung von f und suche nach den Nullstellen

Die Ableitung ist mit der Kettenregel durch

$$f'(x) = \frac{1}{-x^2 + cx + 6} \cdot (-2x + c) = \frac{-2x + c}{-x^2 + cx + 6}$$

gegeben. Die Nullstellen finden wir durch

$$-2x + c = 0 \Leftrightarrow 2x = c \Leftrightarrow x = \frac{c}{2},$$

womit $c = 2$ folgt, wenn $x_0 = 1$ sein soll. Da die Ableitung in x_0 von positiv zu negativ wechselt haben wir ein Maximum. Damit ist Antwort (b) korrekt. Aufgrund der strengen Monotonie hätte es ausgereicht den Scheitelpunkt der Parabel zu bestimmen. Vergleiche hierfür mit Aufgabe 3, Frage 8.

Frage 3 (3 Punkte)

Das Taylorpolynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}}$ in $x_0 = 0$ gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}x^2 + \frac{21}{64}x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}x^2 - \frac{21}{64}x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3$.

(d) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 - \frac{7}{128}x^3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die nötigen Ableitungen von f und setze diese in die Taylorformel ein.

1. Bestimme die nötigen Ableitungen von f und setze diese in die Taylorformel ein

Die Ableitungen von f sind durch

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot (1+x)^{-\frac{3}{4}} \\
f''(x) &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)(1+x)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{16} \cdot (1+x)^{-\frac{7}{4}} \\
f'''(x) &= -\frac{3}{16} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{11}{4}} = \frac{21}{64} \cdot (1+x)^{-\frac{11}{4}}
\end{aligned}
$$

gegeben. Durch Einsetzen von

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \frac{1}{4} \\
f''(x_0) &= -\frac{3}{16} \\
f'''(x_0) &= \frac{21}{64}
\end{aligned}
$$

in die Formel für das dritte Taylorpolynom in $x_0 = 0$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot x + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot x^3 \\
&= 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{21}{64 \cdot 6}x^3 \\
&= 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3
\end{aligned}
$$

als Antwort. Damit ist (d) die richtige Antwort.

Frage 4 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto z = \ln(-9x^2 - y^2 + 4y + 5) + \sqrt{4x^2 + 2y - 4}.$$

Welches der Bilder in der Aufgabenstellung entspricht dem Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Bedingungen für den Definitionsbereich gelten müssen.
2. Wir verwenden das Ausschlußverfahren um die Antwort zu bekommen.

1. Überlege dir, welche Bedingungen für den Definitionsbereich gelten müssen

Der Definitionsbereich des Logarithmus und der Wurzel liefern

$$-9x^2 - y^2 + 4y + 5 > 0 \text{ und } 4x^2 + 2y - 4 \geq 0$$

als Bedingungen. Die zweite Bedingung ist leichter handhabbar, weswegen wir uns zunächst auf diese stürzen. Mit

$$4x^2 + 2y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2y \geq -4x^2 + 4 \Leftrightarrow y \geq -2x^2 + 2$$

erhalten wir eine „Funktionsvorschrift“ für die zweite Bedingung. Das bedeutet: Die zweite Bedingung liefert uns alle Punkte in der xy-Ebene, welche über oder auf dem Graphen von $-2x^2 + 2$ liegen. Wir ignorieren nun die erste Bedingung und fahren mit 2. fort.

2. Wir verwenden das Ausschlußverfahren um die Antwort zu bekommen

Das Wissen um die zweite Bedingung lässt uns nun direkt die Antworten (a), (b) und (d) auschließen. Wir finden in allen Schaubildern, welche unterhalb des Graphen von $-2x^2 + 2$ liegen. Damit ist (c) die richtige Antwort.

Frage 5 (3 Punkte)

Eine homogene Funktion vom Grad 2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$ gleich $5x + 1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -5x + 2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 5x + 1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt.
2. Verwende dies um die richtige Antwort zu finden.

1. Überlege dir, was laut Euler für homogene Funktionen vom Grad k gilt

Wir wissen, dass der Zusammenhang

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = k$$

für homogene Funktionen vom Grad k laut Euler gilt.

2. Verwende dies um die richtige Antwort zu finden

Durch Umformen und Einsetzen erhalten wir mit

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = k - \varepsilon_{f,x}(x, y) = 2 - (5x + 1) = 2 - 5x - 1 = -5x + 1$$

(a) als korrekte Antwort.

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{x^{1.6}y^{0.7}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist homogen vom Grad 0.7.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Mache dir klar, wann eine Funktion homogen ist.
2. Zeige allgemein, ob die Funktion homogen oder nicht homogen ist.

1. Mache dir klar, wann eine Funktion homogen ist

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad n, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n \cdot f(x,y)$$

für alle $x \in D_f$ und $\lambda > 0$ gilt.

2. Zeige allgemein, ob die Funktion homogen oder nicht homogen is

Wir wählen ein beliebiges $\lambda > 0$. Für $\lambda = 0$ erhalten wir die Gleichung $0 = 0$, wodurch wir diesen Fall direkt auschließen können. Nun ist f wegen

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= \sqrt[5]{(\lambda x)^{3.4}(\lambda y)^{0.6}} + \sqrt{(\lambda x)^{0.8}(\lambda y)^{0.8}} + \sqrt[3]{(\lambda x)^{1.6}(\lambda y)^{1.6}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^{3.4}x^{3.4}\lambda^{0.6}y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{0.8}x^{0.8}\lambda^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{\lambda^{1.6}x^{1.6}\lambda^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \sqrt[5]{\lambda^{4}x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{\lambda^{1.6}x^{0.8}y^{0.8}} + \sqrt[3]{\lambda^{3.2}x^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \lambda^{0.8}\sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \lambda^{0.8}\sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \lambda^{\frac{3.2}{3}}\sqrt[3]{x^{1.6}y^{1.6}} \\
&= \lambda^{0.8}\left(\sqrt[5]{x^{3.4}y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}y^{0.8}} + \lambda^{\frac{3.2}{3}-0.8}\sqrt[3]{x^{1.6}y^{1.6}}\right)
\end{aligned}$$

nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x, y) = x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + x^a y^{2a}$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.
Für welchen Wert von a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.2$.

(c) $a = 1.4$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rechne die Definition der Homogenität nach.

1. Rechne die Definition der Homogenität nach
Wir wählen ein beliebiges $\lambda > 0$. Dann erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^{3.1}\sqrt{\lambda y} + 6(\lambda y)^{3.5}\sqrt{5(\lambda x)^{0.2}} + (\lambda x)^a(\lambda y)^{2a} \\
&= \lambda^{3.1}x^{3.1}\lambda^{0.5}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.5}y^{3.5}\sqrt{5\lambda^{0.2}x^{0.2}} + \lambda^a x^a \lambda^{2a} y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}x^{3.1}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.5}y^{3.5}\lambda^{0.1}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a}x^a y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}x^{3.1}\sqrt{y} + 6\lambda^{3.6}y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a}x^a y^{2a} \\
&= \lambda^{3.6}\left(x^{3.1}\sqrt{y} + 6y^{3.5}\sqrt{5x^{0.2}} + \lambda^{3a-3.6}x^a y^{2a}\right)
\end{aligned}$$

die Bedingung $3a - 3.6 = 0$ für die Homogenität. Mit

$$3a - 3.6 = 0 \Leftrightarrow 3a = 3.6 \Leftrightarrow a = 1.2$$

erhalten wir noch das dazu passende a. Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 5 (2 Punkte)

Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen vom Grad 2. Die Funktion h ist definiert durch $h(x,y) = f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right)$. Dann gilt

(a) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 3$.

(b) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 6$.

(c) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$.

(d) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 18$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende die Voraussetzung der Homogenität auf h an.

1. Wende die Voraussetzung der Homogenität auf h an

Wir wählen ein beliebiges $\lambda > 0$. Dann erhalten wir mit

$$\begin{aligned} h(\lambda x, \lambda y) &= f\left((g(\lambda x, \lambda y))^2, (g(\lambda x, \lambda y))^2\right) \\ &= f\left((\lambda^2 g(x,y))^2, (\lambda^2 g(x,y))^2\right) \\ &= f\left(\lambda^4 (g(x,y))^2, \lambda^4 (g(x,y))^2\right) \\ &= \left(\lambda^4\right)^3 f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right) \\ &= \lambda^{12} f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right) \\ &= \lambda^{12} h(x,y) \end{aligned}$$

die Homogenität vom Grad 12 von h. Es folgt

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$$

mit der Relation von Euler. Damit ist Antwort (c) korrekt.