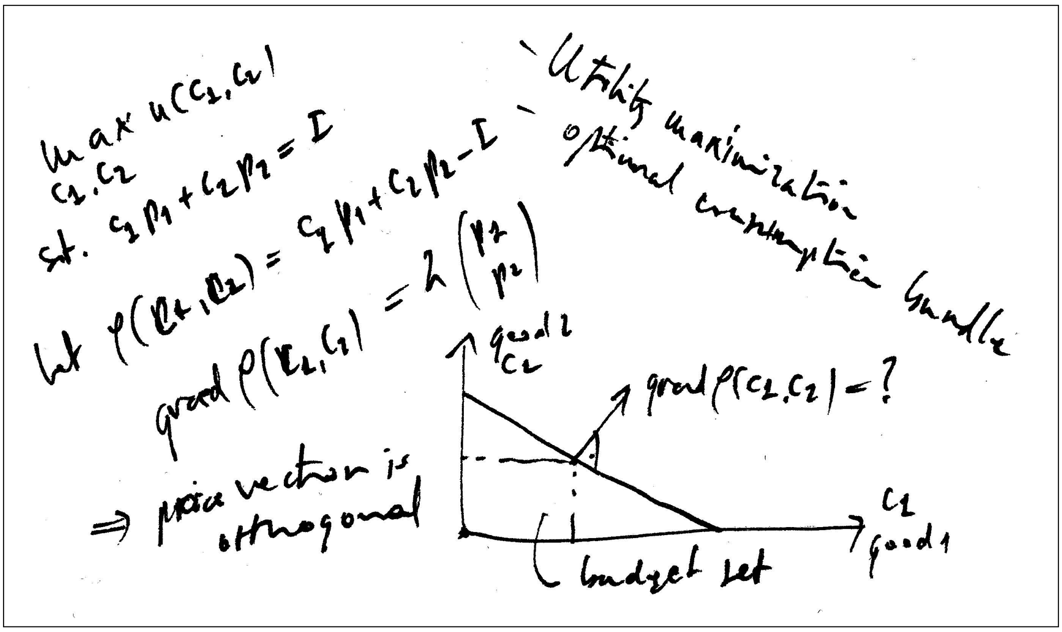
Enrico G. De Giorgi

Mathematik B
Alte Prüfungen 2010-2019

Frühjahrssemester 2021



Lehrstuhl für Mathematik
Universität St.Gallen

Diese Version: 3. Dezember 2020.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses PDF beinhaltet eine Sammlung alter Prüfungenn aus dem Zeitraum vom Frühjahrssemester 2010 bis zum Frühjahrssemester 2020. Im begleitenden PDF "Alte Musterlösungen 2010-2020" sind die zugehörigen Musterlösungen zu finden. Beginnend mit dem Frühjahrssemester 2010 werden zudem auch die Nachholprüfungen veröffentlicht. Des Weiteren stehen seit dem Frühjahrssemester 2010 vollständige und ausführliche Lösungen für alle Prüfungen zur Verfügung. Diese neueren Lösungen zeigen beispielhaft auf, wie Prüfungsaufgaben generell beantwortet und Argumentationsketten präsentiert werden sollten. Dazu gehört insbesondere die korrekte Verwendung mathematischer Notation. Es wird erwartet, dass die Studenten ihre Lösungen unter Verwendung der mathematischen Notation logisch strukturiert präsentieren. Diese Aspekte der Bearbeitung gehen in die Bewertung der Prüfungsleistung mit ein. Seit dem Frühjahrssemester 2013 beinhalten die Prüfungen auch Multiple-Choice Fragen.

Im Frühjahrssemester 2018 gab es eine weitere Anpassung des Prüfungsformats. Insbesondere machen seitdem offene Fragen etwa ein Drittel der Prüfung aus. Die verbleibenden zwei Drittel bestehen aus Multiple-Choice-Fragen. Die offenen Fragen zielen in erster Linie darauf ab zu überprüfen, ob die Studenten die gestellten Probleme mathematisch formalisieren können, um sie im Anschluss unter Anwendung der relevanten mathematischen Techniken zu lösen.

Frühling 2010

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

28. Juni 2010

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email:enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (30 Punkte)

(a) (12 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2\,y + \frac{3}{2}\,\ln(x) + \frac{1}{2}\,x\,y^2, \quad x > 0,\, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (7 Punkte) Die Funktion

$$f(x,y) = 2\,e^x + 4\,e^y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 4\,x + 8\,y - 12 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^2 x^3\, ln(x)\, dx.$$

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\,(ln(x))^n}\,dx, \quad \text{wobei} \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Aufgabe 2 (21 Punkte)

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (2 Punkte). Berechnen Sie $A^T\,B$.

(a2) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $A\,B^T$ regulär?

(b) (5 Punkte). Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ seien regulär. $B_{n\times n}$ ist auch symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$B^{-1}\,(A^T\,B)^T\,(B\,A)^T\,B^{-1} = A\,A^T.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1,x_2) = 3\,x_1^2 + x_1\,\ln(x_2) + e^{a\,x_1}, \quad x_1 \geq 0, x_2 > 0,\, a \in \mathbb{R}.$$

(c1) (4 Punkte). Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\, f(x_1,x_2).$$

(c2) (6 Punkte). Zeigen Sie, dass ein Punkt $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$ existiert, so dass der Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal zur Tangente an die Niveaulinie $f(x_1,x_2) = 1$ in $\hat{\mathbf{x}}$ ist.

Aufgabe 3 (25 Punkten)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\, s \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a2) **(4 Punkten).** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\{\mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$ paarweise orthogonal?

(b) **(5 Punkte).** Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2\,x_4 = 0,\, 3\,x_1 + x_2 = 0\}.$$

(c) **(12 Punkte).** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & m \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 1 \\ m\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 4 (30 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a1) **(6 Punkte).** Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(a2) **(5 Punkte).** Zeigen Sie, dass für $\hat{\mathbf{x}} = (1, 0, -1)^T$

$$A^{100}\,\hat{\mathbf{x}} = 2^{100}\,\hat{\mathbf{x}}$$

gilt.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a^2\,y_{k+1} - (a+2)\,y_k = a + 1 \quad ,k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\, a \neq 2$$

(b1) (4 Punkte). Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) (3 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton.

(b3) (8 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent.

(b4) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = 1.$$

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2010

Prof. Dr. Enrico G. De Giorgi*

9. Februar 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email:enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (32 Punkte)

(a) (12 Punkte). Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2\,(x-1)\,e^{x-1} + y^2 - 2\,x\,y, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (7 Punkte). Die Funktion

$$f(x,y) = x^2\,y^3, \quad x > 0,\, y > 0$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 8 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (6 Punkte). Berechnen Sie

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x^2}\,\ln(x^2)\,dx.$$

(d) (7 Punkte). Berechnen Sie

$$\int_1^4 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Aufgabe 2 (18 Punkte)

(a) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (2 Punkte). Berechnen Sie $A^T\,B$.

(a2) (5 Punkte). Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt $A\,B^T = (A\,B^T)^{-1}$?

(b) (5 Punkte). Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x_1,x_2) = 3\,e^{x_1+x_2-6} + a\,x_1, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}.$$

(c1) (2 Punkte). Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\, f(x_1, x_2).$$

(c2) (4 Punkte). Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x_1, x_2)^T = (4, 2)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (21 Punkten)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} r \\ 3 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}.$$

(a1) (4 Punkte). Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ und $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ orthogonal?

(a2) (4 Punkte). Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) (5 Punkte). Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + 2\,x_2 = 0,\ 3\,x_2 + 4\,x_5 = 0,\ 3\,x_3 + 2\,x_5 = 0,\ x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_5 = 0\}.$$

(c) (8 Punkte). Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & x_2 & + & 4\,x_3 & = & 1 \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & (m^2 - 12)\,x_3 & = & m - 2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung?

Aufgabe 4 (29 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a1) (6 Punkte). Zeigen Sie, dass $\lambda = 6$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor.

(a2) (5 Punkte). Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a^2 - 2)\, y_k = b + 1 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -1, a \neq 0,\ a \neq 2, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b1) (4 Punkte). Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) (4 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

(b3) (6 Punkte). Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

(b4) (4 Punkte). Zeigen Sie, dass mit $a = \frac{3}{2}$ und $b = \frac{1}{4}$ für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots,$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 1.$$

Frühling 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2011

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email:enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) **(8 Punkte)** Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{y} - \frac{1}{3}\,y, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) **(9 Punkte)** Die Funktion

$$f(x,y) = x^2\,y + 2\,y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) **(5 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^5}\,dx.$$

(d) **(5 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_{4/3}^{3} e^{x^2+\sqrt{3\,x}}\left(2\,x + \frac{3}{\sqrt{12\,x}}\right)dx.$$

Aufgabe 2

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\det(A\,A^T) = \det(B\,B^T)$?

(a2) **(4 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $A\,B^T = B\,A^T$?

(b) **(4 Punkte)** Die quadratischen Matrizen $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ seien regulär. $A_{n\times n}$ ist auch symmetrisch. Zeigen Sie, dass gilt

$$(B\,B^T)\,(A\,B^{-1})^T\,(B\,A)^{-1}\,(B\,A^T) = B\,A.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 3\,x^2\,y + 4\,\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2\,\sqrt{x\,y}, \quad x > 0,\, y > 0.$$

(c1) **(3 Punkte)** Berechnen Sie

$$\mathbf{grad}\,f(x,y).$$

(c2) **(6 Punkte)** Geben Sie die Gleichung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ durch den Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$, so dass die Richtung der stärksten Zunahme der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ orthogonal zur Gerade ist. Geben Sie die Interpretation dieser Geraden in Bezug auf die Niveaulinien von f.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2\,t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a2) **(4 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die zwei Vektoren $t\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ und $\mathbf{d}$ orthogonal?

(b) **(5 Punkte)** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & 6\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

(c) **(12 Punkte)** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (a^2 - a - 11)\,x_4 & = & a + 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist und berechnen Sie den dazu zugehörigen Eigenvektor.

(a2) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass für $\mathbf{u} = (4, 3, -7)^T$ und $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)^T$

$$(A^{100}\,\mathbf{u})^T\,(A^{100}\,\mathbf{v}) = -11\,(-2)^{100}$$

gilt.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} + (4-a)\,y_k = a^2 + 3 \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -2,\ a \neq 4.$$

(b1) (4 Punkte) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

(b3) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

(b4) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 2?$$

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

18. Februar 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email:enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) (8 Punkte) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3 + x - y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (9 Punkte) Die Funktion

$$f(x,y) = 200\, x^{\frac{1}{2}}\, y^{\frac{1}{4}}$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 50\,x + 100\,y - 150 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^4 x^2 \ln(4\,x)\, dx.$$

(d) (5 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_1^e e^{e^x + \ln(x)} \left(e^x + \frac{1}{x}\right) dx.$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Inverse $(A^T\, B)^{-1}$ nicht existiert.

(a2) (4 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $rg(A\,B^T) = 2$?

(b) (5 Punkte). Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{-a\,x^3 + 2\,x - \frac{a^2}{2}\,y^2}, \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

(c1) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \lambda \begin{pmatrix} -3\,a+2 \\ -a^2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c2) **(4 Punkte)** Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Richtung der stärksten Funktionszunahmeim Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3\,t \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(5 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bildet das Vektorsystem $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

(a2) **(3 Punkte)** Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die zwei Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ ortho-gonal?

(b) **(5 Punkte)** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

(c) **(12 Punkte)** Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcc} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & m \\ 3\,x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3\,x_2 & + & m^2\,x_3 & = & m+1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ ein Eigenwert von A ist und berechnen Sie den dazugehörigen Eigenraum.

(a2) **(6 Punkte)** Zeigen Sie, dass für $\mathbf{u} = (-3, 4, 0, 1)^T$ und $n = 1, 2, \ldots$

$$A^n\,\mathbf{u} = 3^n\,\mathbf{u}$$

gilt.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+5)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k = a^2 + \frac{31}{4} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \neq -5,\, a \neq 3.$$

(b1) **(4 Punkte)** Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

(b3) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

(b4) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 1?$$

Frühling 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

25. Juni 2012

*Faculty for Mathematics and Statistics, University of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) **(8 Punkte)** Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = -x^4 - y^4 + 4\,x\,y, \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) **(7 Punkte)** Die Funktion

$$f(x, y) = 2\,x^3\,y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) **(7 Punkte)** Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1/2 \\ c\,\ln(2\,x)/x^2, & \text{für } 1/2 \leq x \leq e/2 \\ 0, & \text{für } x > e/2 \end{cases}, \quad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

(d) **(5 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_1^e \sqrt{\sqrt{2\,x} + \ln(x)} \left(\frac{2 + \sqrt{2\,x}}{2\,x} \right) dx.$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(4 Punkte)** Für welche Werte von a ist die Matrix $A\,A^T$ regulär?

(a2) **(5 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Matrix $A^T\,A$ für alle Werte von a singulär ist.

(b) **(5 Punkte).** Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(x^{a^3 + 2\,a^2 + 1}\,y^{a^2 + 12\,a + 1}\right), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad a > 0.$$

(c1) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{grad}\, f(1,1) = \begin{pmatrix} a^3 + 2\,a^2 + 1 \\ a^2 + 12\,a + 1 \end{pmatrix}.$$

(c2) (4 Punkte) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahmeim Punkt $(x, y)^T = (1, 1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3\,d \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

(a1) (4 Punkte) Für welche Werte von d sind die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear unabhängig?

(a2) (5 Punkte) Sei A eine 3×3-Matrix mit Kolonnenvektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Zeigen Sie, dass $rg(A) \geq 2$ für alle $d \in \mathbb{R}$.

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & 2\,x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 10\,x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & & - & 8\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie die Dimension von W.

(c) (11 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,a\,x_2 & + & x_3 & = & b \\ x_1 & & & + & a\,x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & b\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a1) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie denzugehörigen Eigenvektor mit Länge $\sqrt{2}$.

(a2) (6 Punkte) Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(2\,a+1)\,y_{k+1}-(a+5)\,y_k = b-1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{-5, -1/2, 4\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

(b1) (4 Punkte) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

(b3) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

(b4) (3 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k\to\infty} y_k = b - 1?$$

Mathematik II: Nachholprüfung Frühjahrssemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) **(6 Punkte)** Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 2\,y^2 + 2\,x\,y + 2), \quad x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R},$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) **(7 Punkte)** Die Funktion

$$f(x,y) = 60\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{5}{6}}$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 20\,x + 50\,y - 100 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) **(8 Punkte)** Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ 3\,c\,x^2\,\ln(4\,x), & \text{für } 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{für } x > 4 \end{cases}, \quad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

(d) **(6 Punkte)** Berechnen Sie

$$\int_e^{e^2} \ln\left(x^2 + \sqrt{\ln(x)}\right)\left(2\,x + \frac{1}{2\,x\,\sqrt{\ln(x)}}\right)\,dx.$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a1) **(5 Punkte)** Für welche Werte von a ist die Matrix $A^2 = A\,A$ regulär?

(a2) **(4 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Matrix $A^4 = A\,A\,A\,A$ symmetrisch ist.

(b) **(5 Punkte).** Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(x^{2\,a^3+a^2+1}\,y^{a^3+12\,a+1}\right), \quad x > 0, \quad y > 0, \quad a > 0.$$

(c1) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle $c > 0$

$$\mathbf{grad}\, f(c,c) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 2\,a^3 + a^2 + 1 \\ a^3 + 12\,a + 1 \end{pmatrix}.$$

(c2) (5 Punkte) Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahmeim Punkt $(x,y)^T = (c,c)^T$ für alle $c > 0$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Aufgabe 3 (23 Punkte)

(a) Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a1) (3 Punkte) Für welche Werte von t sind die Vektoren $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ linear unabhängig?

(a2) (3 Punkte) Für welche Werte von t sind die zwei Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal?

(b) (5 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & + & 6\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2\,x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

mit Lösungsraum W. Ermitteln Sie eine Basis von W.

(c) (12 Punkte) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & (m-1)\,x_3 & = & m^2 - 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & 3\,x_2 & + & m^2\,x_3 & = & m + 2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

(i) genau eine Lösung,

(ii) unendlich viele Lösungen,

(iii) keine Lösung.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a1) **(3 Punkte)** Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

(a2) **(8 Punkte)** Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren von A, die zu verschiedenen Eigenwerten gehöhren, orthogonal sind.

(b) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a+7)\,y_{k+1} - (a+4)\,y_k = 3\,a^2 + 6\,a - 9, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -4\}.$$

(b1) **(4 Punkte)** Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

(b2) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

(b3) **(3 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

(b4) **(5 Punkte)** Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 0?$$

Frühling 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

24. Juni 2013

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Multiple-Choice Fragen (23 Punkte)

Allgemeine Hinweise für Multiple-Choice Fragen:

(i) Die Lösungen sind in der Multiple Choice-Lösungsbogen einzutragen. Es werden ausschliesslich nur die Antworten auf dem Multiple Choice-Lösungsbogen bewertet. Der Platz unter der Aufgabenstellung ist nur für Entwürfe gedacht und wird nicht korrigiert.

(ii) Pro Aufgabe ist nur eine Antwortmöglichkeit richtig. Somit darf Pro Aufgage nur eine Antwortmöglichkeit angekreuzt werden.

(iii) Wenn zwei oder mehr Antwortmöglichkeiten angekreuzt werden, wird dies als 0Punkte gewertet, selbst wenn die richtige Antwort unter den angekreuzten Möglichkeiten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch.

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion f erfüllt $f(x) \geq -2$ für alle $x \in [5, 8]$ und $\int_5^8 f(x)\, dx = 5$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion?

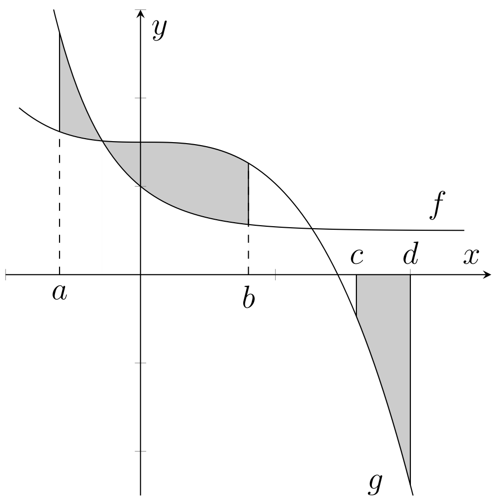
(a) $g_1(x) = f(x) + 2$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{5} f(x)$.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{5} f(x) + 2$.

(d) $g_4(x) = \frac{1}{11} f(x) + \frac{2}{11}$.

Frage 2 (3 Punkte)



Der Wert der grauschraffierten Fläche ist:

(a) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^d |g(x)|\, dx$.

(b) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \int_c^d |g(x)|\, dx$.

(c) $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^d g(x)\, dx$.

(d) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx + \int_c^d g(x)\, dx$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die Matrix $A = (a_{ij})$ hat Dimension 5×4. Die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist regulär. Die Matrix A

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3 oder 4.

(c) hat Rang 5.

(d) ist regulär.

Frage 4 (2 Punkte)
A ist eine $(m \times n)$ Matrix, wobei $m > n$. Dann

(a) $\text{rg}(A) > \text{rg}(A^T)$.

(b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$.

(c) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A^T)$.

(d) alle Fälle ($>, <$ und $=$) sind möglich.

Frage 5 (3 Punkte)
Für das Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt $\text{rg}(A) = 3$ und $\text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$, wobei A eine (4×5) Matrix ist.

(a) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 1.

(d) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 2.

Frage 6 (2 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hat Rang

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Frage 7 (4 Punkte)
W ist ein Vektorraum des $\mathbb{R}^5$ und hat Dimension 3. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in W$ und $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ die Matrix mit Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Dann

(a) $\text{rg}(A) \leq 3$

(b) $\text{rg}(A) = 3$.

(c) $\text{rg}(A) = 2$.

(d) $\text{rg}(A) = 5$.

Frage 8 (3 Punkte)
Die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\, y_{k+1} - 2\, y_k + 3 = 0$$

ist

(a) monoton, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -3$.

(b) monoton, explosiv.

(c) oszillierend, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -3$.

(d) oszillierend, explosiv.

Teil II: Offene Aufgaben

Allgemeine Hinweise für offene Fragen:

(i) Provisorische Berechnungen und Skizzen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind, gut gekennzeichnet als Entwurf, ebenfalls abzugeben.

(ii) Die Lösung zu einer Teilaufgabe darf nur in den unmittelbar auf die Teilaufgabe folgenden Lösungsplatz geschrieben werden. Sollte dieser Platz ausnahmsweise nicht ausreichen, so benützen Sie die entsprechende Rückseite oder zusätzlich ein separates Blatt. In jedem Fall ist auf die Rückseite oder auf das zusätzliche Blatt zu verweisen. Separate Blätter sind ausserdem mit dem Namen zu versehen.

(iii) Die definitive Lösung darf von jeder Teilaufgabe nur eine Version enthalten. Dabei müssen alle Rechenschritte klar ersichtlich sein.

(iv) Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den obenerwähnten Punktzahlen.

(v) Es werden nur Lösungen bewertet, welche in den dafür vorgesehenen Lösungsplatz geschrieben wurden oder auf der entsprechenden Rückseite bzw. auf separaten Blättern mit entsprechenden Verweisen stehen.

Aufgabe 1

Frage 1 (a) (8 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 2\,x^2 - 2\,x\,y + 2\,(y-1)\,e^{y-3}$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Frage 1 (b) (8 Punkte)
Die Funktion

$$f(x,y) = 16\,\ln(x) - 9\,\ln(y)$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 - 4 = 0$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Frage 1 (c) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ c\,e^{2\sqrt{x}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{für } 1 \le x \le 4 \\ 0, & \text{für } x > 4 \end{cases}, \qquad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Frage 1 (d) (5 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_1^2 \frac{4}{3}\, x^5 \, \ln\left(\frac{1}{x}\right) \, dx.$$

Aufgabe 2

Frage 2 (a) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a und b ist die Matrix $A\,A^T$ singulär? .

Frage 2 (b) (7 Punkte)
Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 2 (c) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = e^{a\,x^2\,y + a^2\,y^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x, y)^T = (0.5, 1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Frage 2 (d) (10 Punkte)
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,m\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & m \\ x_1 & & & + & 3\,m\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem *keine* Lösung?

Aufgabe 3

Frage 3 (a1) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = 2$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie denzugehörigen Eigenvektor mit Länge 4.

Frage 3 (a2) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\, y_{k+1} - (2\,a-2)\, y_k = a\,b - (a-b) - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Frage 3 (b2) (3 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\, y_{k+1} - (2\,a-2)\, y_k = a\,b - (a-b) - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Frage 3 (b3) (3 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\, y_{k+1} - (2\,a-2)\, y_k = a\,b - (a-b) - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Frage 3 (b4) (4 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$(a^2-1)\, y_{k+1} - (2\,a-2)\, y_k = a\,b - (a-b) - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ gilt für die allgemeine Lösung y_k, $k = 0, 1, \dots$

$$\lim_{k \to \infty} y_k = 1?$$

Mathematik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

5. Februar 2014

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Aufgaben

Allgemeine Hinweise für offene Fragen:

(i) Provisorische Berechnungen und Skizzen sind auf separaten Blättern auszuführen. Diese Blätter sind, gut gekennzeichnet als Entwurf, ebenfalls abzugeben.

(ii) Die Lösung zu einer Teilaufgabe darf nur in den unmittelbar auf die Teilaufgabe folgenden Lösungsplatz geschrieben werden. Sollte dieser Platz ausnahmsweise nicht ausreichen, so benützen Sie die entsprechende Rückseite oder zusätzlich ein separates Blatt. In jedem Fall ist auf die Rückseite oder auf das zusätzliche Blatt zu verweisen. Separate Blätter sind ausserdem mit dem Namen zu versehen.

(iii) Die definitive Lösung darf von jeder Teilaufgabe nur eine Version enthalten. Dabei müssen alle Rechenschritte klar ersichtlich sein.

(iv) Die Bewertung der Teilaufgaben erfolgt gemäss den obenerwähnten Punktzahlen.

(v) Es werden nur Lösungen bewertet, welche in den dafür vorgesehenen Lösungsplatz geschrieben wurden oder auf der entsprechenden Rückseite bzw. auf separaten Blättern mit entsprechenden Verweisen stehen.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

Frage 1 (a) (8 Punkte)
Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x,y) = 10\,\ln(x) - 2\,x\,y - 8\,x + y^2, \quad x > 0,$$

auf Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Frage 1 (b) (8 Punkte)
Die Funktion

$$f(x,y) = 12\,x + 20\,y$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = 0.6\,\ln(x) + \ln(y) - r = 0, \quad x > 0,\, y > 0,\, r \in \mathbb{R},$$

zu optimieren. Untersuchen Sie das Optimierungsproblem auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

Frage 1 (c) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \sqrt{2\,\ln(2)} \\ c^2\,x\,e^{\frac{1}{2}x^2}, & \text{für } \sqrt{2\,\ln(2)} \le x \le \sqrt{2\,\ln(4)} \\ \frac{c}{3}\,x^3, & \text{für } \sqrt{2\,\ln(4)} < x \le 2 \\ 0, & \text{für } x > 2 \end{cases}, \quad c > 0.$$

Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion?

Frage 1 (d) (5 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_1^e x^4 \ln\left(\frac{1}{x^{20}}\right) dx.$$

Aufgabe 2 (28 Punkte)

Frage 2 (a) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist die Matrix $A^T A$ regulär?

Frage 2 (b) (7 Punkte)
Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 2 (c) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(a\,x^2\,y + a^2\,y^2), \quad x > 0,\, y > 0, \quad a > 0.$$

Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0.5\,\sqrt{e} \\ \sqrt{e} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Frage 2 (d) (10 Punkte)
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2\,m\,x_2 & + & 2\,x_3 & = & m \\ x_1 & & & + & 3\,m\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & 2 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem *genau eine* Lösung?

Aufgabe 3 (23 Punkte)

Frage 3 (a1) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = 0$ Eigenwert von A ist und berechnen Sie denzugehörigen Eigenvektor mit Länge 12.

Frage 3 (a2) (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte von A.

Frage 3 (b1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung.

Frage 3 (b2) (3 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung monoton?

Frage 3 (b3) (3 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung konvergent?

Frage 3 (b4) (4 Punkte) Gegeben ist die Differenzengleichung

$$a\, y_{k+1} - (a+3)\, y_k = 2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Differenzengleichung eine Lösung y_k, $k = 0, 1, \ldots$ mit $y_5 = 5$ und $y_7 = 7$?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (23 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf multiple-choice Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Wenn Sie sich bei einer Antwort umentscheiden, **füllen Sie das falsche Kästchen komplett aus** und kreuzen das richtige an. Beispiel:

(a)	(b)	(c)	(d)
☐	■	☐	☒

(v) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktionen f und g sind Dichtefunktionen auf $\mathbb{R}$. Dann ist

(a) $f + g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{3}\,f + \frac{4}{3}\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(c) $f\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

(d) $\frac{1}{3}\,f + \frac{2}{3}\,g$ eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$.

Frage 2 (3 Punkte)
Das bestimmte Integral $\int_0^{4\pi} \cos(x)\,dx$ ist

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Frage 3 (3 Punkte)
B und C sind $(n \times n)$ Matrizen und $A = B\,C$ ist regulär. Dann

(a) ist B regulär und C ist singulär.

(b) ist B singulär und C ist regulär.

(c) sind B und C singulär.

(d) sind B und C regulär.

Frage 4 (2 Punkte)
A ist eine $(m \times n)$ Matrix und $B = A\,A^T$ ist regulär. Dann

(a) ist $\mathrm{rg}(B) > \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(b) ist $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(c) ist $\mathrm{rg}(B) < \mathrm{rg}(B^{-1})$.

(d) sind alle Fälle ($>, <$ und $=$) sind möglich.

Frage 5 (3 Punkte)
Für das Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt $\mathrm{rg}(A) = 3$ und $\mathrm{rg}(A;\mathbf{b}) = 4$, wobei A eine (4×5) Matrix ist.

(a) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 1.

(d) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und die Lösungsmenge hat Dimension 2.

Frage 6 (2 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

hat Rang

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

Frage 7 (4 Punkte)
W ist ein Vektorraum des $\mathbb{R}^5$ und hat Dimension 4. Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e} \in W$ und $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}]$ die 5×5 Matrix mit Kolonnenvektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}$. Dann

(a) ist $\mathrm{rg}(A) = 3$.

(b) ist $\mathrm{rg}(A) = 4$.

(c) ist $\mathrm{rg}(A) = 5$.

(d) ist A singulär.

Frage 8 (3 Punkte)
Die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 2\,y_k + 1 = 0$$

ist

(a) monoton, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{1}{7}$.

(b) monoton, explosiv.

(c) oszillierend, gedämpft mit $\lim_{k\to\infty} y_k = -\frac{1}{7}$.

(d) oszillierend, explosiv.

Frühling 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I
Prüfung Frühlingssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

23. Juni 2014

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (8 Punkte)
Sei $f\,:\,\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x,y) = x + 2\,y + \frac{a^4}{x\,y^2},$$

wobei $a>0$ ein reeller Parameter ist.
Untersuchen Sie die Funktion f auf Extremalstellen, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (8 Punkte)
Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) = x + \ln(y^2) \to \text{min! oder max!} \\ & \quad \text{so dass } \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.**Bemerkung:**
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 1 \\ c + \frac{\sin(\ln(x))}{x}, & \text{für } 1 \leq x \leq e \\ 0, & \text{für } x > e \end{cases},$$

wobei c ein reeller Parameter ist.
Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion auf $[1, e]$?

(d) (5 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^n \ln\left(\frac{1}{x^m}\right) dx,$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) (4 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} b \\ a+1 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a und b ist das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ linear abhängig?

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist eine 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 2\,a \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A?

(c) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + a\,y^2 + 3\,x + 8\,y\right), \quad x, y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein strikt positiver reeller Parameter ist.
Bestimmen Sie a so, dass die Richtung der stärksten Funktionszunahme von f im Punkt $(x,y)^T = (1, 0.5)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \pi \\ 2\,\pi \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(d) (10 Punkte)
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & m\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & m^2 \\ & & x_2 & + & m\,x_3 & = & m+1 \\ x_1 & & & + & 2\,m\,x_3 & = & 3 \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$.

(a) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(b) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

(c) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(d) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein lokales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktion f erfüllt $f(x) \geq -3$ für alle $x \in [0, 10]$ und $\int_0^{10} f(x)\,dx = 5$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion auf $[0, 10]$?

(a) $g_1(x) = f(x) + 3$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{35}\,f(x) + 3$.

(c) $g_3(x) = \frac{1}{35}\,f(x) + \frac{3}{35}$.

(d) $g_4(x) = f(x) + \frac{3}{35}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die Matrix $A = (a_{ij})$ hat die Dimension 6×3. Die Untermatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist regulär. Die Matrix A

(a) hat den Rang 2.

(b) hat den Rang 3.

(c) hat den Rang 5.

(d) ist regulär.

Frage 4 (2 Punkte)
Die Determinante der quadratischen Matrix A ist gleich 1. In diesem Fall

(a) ist A singulär.

(b) ist A nicht invertierbar.

(c) ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = -1$.

(d) ist A invertierbar und $\det(A^{-1}) = 1$.

Frage 5 (2 Punkte)
Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear unabhängig.

(a) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear unabhängig für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear abhängig für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(c) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(d) Das Vektorsystem $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3+\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Frage 6 (3 Punkte)
Für das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist bekannt, dass $\mathrm{rg}(A) = 5$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 5$, wobei A eine 6×10 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 5.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 6.

Frage 7 (5 Punkte)
Sei $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem. Mit dem Gaußschen Eliminiationsverfarhren erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} \quad\quad\quad\quad\quad\; x_1 \quad\; x_3 \quad\; x_2 \quad\quad \\ (A^\star, \mathbf{b}^\star) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^\star & b_1^\star \\ 0 & 1 & 0 & b_2^\star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

wobei $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star \in \mathbb{R}$. Es folgt, dass

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat.

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, abhängig von den Parametern $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star \in \mathbb{R}$.

Frage 8 (4 Punkte)
$\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert der quadratischen Matrix A und $\mathbf{x} \neq 0$ eine dazugehöriger Eigenvektor.

(a) $3\,\lambda$ ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(b) λ^3 ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(c) λ ist ein Eigenwert von A^3 und $3\,\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(d) $3\,\lambda^3$ ist ein Eigenwert von A^3 und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Sei $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Die marginalen Kosten entsprechen $K'(x) = 1 + x + x^2 + \sin(x)$ und die Fixkosten sind $K(0) = 20$. Welche der folgenden Funktionen ist die Kostenfunktion?

(a) $K(x) = x + x^2 + x^3 - \sin(x) + 20$.

(b) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + 20$.

(c) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \sin(x) + 21$.

(d) $K(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cos(x) + 21$.

Frage 2 (2 Punkte)
Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$, sind genau dann orthogonal, wenn:

(a) $t = 5$.

(b) $t \in \{-5, 5\}$.

(c) $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$.

(d) $t = 0$.

Frage 3 (5 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) hat den Rang 2.

(b) hat den Rang 3.

(c) hat den Rang 4.

(d) hat den Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Das reguläre lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 3\,x_3 & = & 0 \end{array}$$

hat

(a) keine Lösung.

(b) unendlich viele Lösungen.

(c) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(d) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Zahlen ist ein Eigenwert der Matrix A?

(a) -1.

(b) 0.

(c) 4.

(d) 5.

Frage 6 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,y_{k+1} - 2\,y_k + 5 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 2\,y_k - 12 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) divergiert.

(b) konvergiert monoton gegen 2.

(c) oszillierend konvergiert gegen 2.

(d) konvergiert monoton gegen 3.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+2)\,y_{k+1} - y_k + (a^2 - 4) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert genau dann monoton gegen 0, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Mathematatik II
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2014

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

4. Februar 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Switzerland, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (8 Punkte)
Sei $f\,:\,\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x,y) = 2\,x + 4\,y + \frac{2\,b^4}{x\,y^2},$$

wobei $b>0$ ein reeller Parameter ist.
Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (8 Punkte)
Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z \;&=\; f(x,y) = \ln(x^4) + 2\,y \to \text{min! oder max!} \\ &\quad\;\text{so dass } \varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0. \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.**Bemerkung:**

Eine Spezifizierung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \ln(0.5) + \ln(\pi) \\ c\,\sin\left(e^x\right)\, e^x, & \text{für } \ln(0.5) + \ln(\pi) \leq x \leq \ln(\pi) \\ 0, & \text{für } x > \ln(\pi) \end{cases},$$

wobei c ein reeller Parameter ist.
Für welche Werte von c ist f eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$?

(d) (5 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x^n \left[\ln\left(x^m\right) - \ln\left(x^{m+2}\right)\right]\, dx,$$

wobei $n, m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2\,b \\ 2\,a+2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a und b ist die Matrix $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ singulär?

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2\,a \\ a+3 & a \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von a ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A^5?

(c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{3\,a\,x^2 + a^2\,x\,y + \frac{1}{2}\,a\,y^2 + 3\,x + 8\,y}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie a so, dass die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x,y)^T = (1,1)^T$ durch den Vektor

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \ln(2\,\pi) \\ \ln(2) + \ln(\pi) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(d) (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & & & & = & m^2 \\ & & -x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & (m^2 - m - 1)\,x_4 & = & m \end{array}$$

Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$. In diesem Fall gilt:

(a) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(b) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

(c) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $2\,x + y = 0$.

(d) Der Punkt $P = (0, 1)$ ist ein globales Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktionen f_1 und f_2 sind Dichtefunktionen auf $\mathbb{R}$. Welche Funktion ist eine Dichtefunktion auf $\mathbb{R}$?

(a) $g_1(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

(b) $g_2(x) = \frac{1}{2}\, f_1(x) + \frac{2}{3}\, f_2(x)$.

(c) $g_3(x) = -\frac{1}{2}\, f_1(x) + f_2(x)$.

(d) $g_4(x) = \frac{4}{5}\, f_1(x) + \frac{1}{5}\, f_2(x)$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die 6×3 Matrix $A = (a_{ij})$ hat Rang 3.Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) A^T hat Rang 6.

(b) A ist regulär.

(c) A ist singulär.

(d) A hat eine 3×3 reguläre Teilmatrix.

Frage 4 (2 Punkte)
Es sei $\det(A) = 1$ und $\det(B) = 0$. Dann gilt:

(a) $A\,B$ ist singulär.

(b) $A\,B$ ist invertierbar.

(c) $A\,B$ ist regulär.

(d) $\det(A\,B) \geq 1$.

Frage 5 (2 Punkte)
Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a_3}\}$ ist linear unabhängig. Für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

(a) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ keine Lösung.

(b) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ genau eine Lösung.

(c) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ genau drei Lösungen.

(d) hat die Vektorgleichung $x\,\mathbf{a}_1 + y\,\mathbf{a_2} + z\,\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen.

Frage 6 (3 Punkte)
Für das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist bekannt, dass $\mathrm{rg}(A) = 5$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 6$, wobei A eine 6×10 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 5.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 6.

Frage 7 (5 Punkte)
Sei $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ein lineares Gleichungssystem. Mit dem Gaussschen Eliminationsverfahren erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ (A^\star, \mathbf{b}^\star) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a_{13}^\star & b_1^\star \\ 0 & 1 & 0 & b_2^\star \\ 0 & 0 & 0 & b_3^\star \end{array}\right) \end{array}$$

wobei $a_{13}^\star, b_1^\star, b_2^\star, b_3^\star \in \mathbb{R}$ und $b_3^\star \neq 0$. Es folgt, dass:

(a) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.

(b) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genau eine Lösung hat.

(c) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

(d) $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung, genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat, abhängig von den Parametern $a_{13}^{\star}, b_1^{\star}, b_2^{\star}, b_3^{\star}$.

Frage 8 (4 Punkte)
$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist ein Eigenwert der quadratischen Matrix A und $\mathbf{x} \neq 0$ ein dazugehöriger Eigenvektor.$\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ ist Eigenwert der quadratischen Matrix B und $\mathbf{x} \neq 0$ ein dazugehöriger Eigenvektor. Es folgt:

(a) λ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(b) ξ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

(c) $\xi\,\lambda$ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

(d) $\frac{\lambda}{\xi}$ ist ein Eigenwert von $A\,B$ und $\mathbf{x}$ in dazugehöriger Eigenvektor.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Sei $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine Kostenfunktion. Die marginalen Kosten entsprechen $K'(x) = 1 + x^2 + e^x$ und die Fixkosten sind $K(0) = 50$. Welche der folgenden Funktionen ist die Kostenfunktion?

(a) $K(x) = x + x^3 + e^x + 50.$

(b) $K(x) = x + x^3 + \frac{1}{3}\,e^x + 50.$

(c) $K(x) = x + \frac{x^3}{3} + e^x + 50.$

(d) $K(x) = x + \frac{x^3}{3} + e^x + 49.$

Frage 2 (2 Punkte)
Der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$, hat die Länge 6 genau dann, wenn:

(a) $t = 7.$

(b) $t \in \{-1, 1\}.$

(c) $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$

(d) $t = 3.$

Frage 3 (5 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Das reguläre lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2\,x_2 & & & = & 1 \\ & + & 3\,x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & 3\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

hat

(a) keine Lösung.

(b) unendlich viele Lösungen.

(c) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(d) die eindeutige Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Zahlen ist ein Eigenwert der Matrix A?

(a) -1.

(b) 0.

(c) 1.

(d) 2.

Frage 6 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 4\,y_k + 2 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 3\,y_k - 28 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) divergiert.

(b) konvergiert monoton gegen 4.

(c) konvergiert oszillierend gegen 4.

(d) konvergiert monoton gegen 3.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$a\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k - 6 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, ist genau dann oszillierend und konvergent, wenn

(a) $0 < a < 3$.

(b) $a > 3$.

(c) $a > \frac{3}{2}$.

(d) $\frac{3}{2} < a < 3$.

Frühling 2015

Dr. Reto Schuppli

Mathematik II
Prüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli*

22. Juni 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times (-4, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y + 14\,\ln(y + 4).$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (8 Punkte)
Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z \;=\; & f(x, y) = 5\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{\frac{2}{3}} \;\; (x > 0,\, y > 0) \quad \to \text{min! oder max!} \\ & \text{so dass } \varphi(x, y) = 2\,x^{\frac{1}{3}} + 2\,y^{\frac{2}{3}} - 16 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (6 Punkte)
Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^2\, e^{-6\,x}\, dx.$$

(d) (4 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\,\ln(x)}\,dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von t ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear unabhängig?

(b1) (5 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -4\,a & 3 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass A den Eigenwert $\lambda = -1$ hat und berechnen Sie die weiteren Eigenwerte.

(b2) (4 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 8 & -4\,a & 3 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

(c) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 5\,\ln(x^2 + y^3) - (4 - a)\,\ln(y) + 7\,x, \quad x, y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ beträgt die Länge des Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ 15?

(d) (9 Punkte)
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & = & 5 \\ 3\,x_1 & + & a\,x_2 & + & 10\,x_3 & = & 12 \\ & & x_2 & + & a\,x_3 & = & -3 \end{array}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

(i) *genau eine* Lösung?

(ii) *keine* Lösung?

(iii) *unendlich viele* Lösungen?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = x\,y - 2\,x^2$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x - 2y = 0$ hat

(a) ein Minimum im Punkt $(0,0)$.

(b) ein Maximum im Punkt $(0,0)$.

(c) einen Sattelpunkt im Punkt $(0,0)$.

(d) einen Sattelpunkt im Punkt $(2,1)$.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-cx}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

(a) f ist eine Dichtefunktion für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) Nur für $c = e$ ist f eine Dichtefunktion.

(c) f ist eine Dichtefunktion für alle $c > 0$.

(d) Nur für $c = 1$ ist f eine Dichtefunktion.

Frage 3 (2 Punkte)
$A = (a_{ij})$ sei eine 4×5 Matrix mit dem Rang 4.Dann gilt:

(a) A^T ist eine 4×5 Matrix vom Rang 4.

(b) A^T ist eine 4×5 Matrix vom Rang 5.

(c) A^T ist eine 5×4 Matrix vom Rang 4.

(d) A^T ist eine 5×4 Matrix vom Rang 5.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 1$.
Die Matrix $C = A^{-1}\, B^2\, A\, B^{-1}$ hat die Determinante

(a) 25.

(b) 5.

(c) 1.

(d) $\frac{1}{5}$.

Frage 5 (3 Punkte)
Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sei linear *abhängig*.Weiter sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.Wir betrachten die Vektorgleichung

$$x_1\, \mathbf{u}_1 + x_2\, \mathbf{u}_2 + x_3\, \mathbf{u}_3 = \mathbf{b}.$$

(a) Die Gleichung hat keine Lösung.

(b) Die Gleichung hat genau eine Lösung.

(c) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

(d) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung ist abhängig von $\mathbf{b}$.

Frage 6 (2 Punkte)
Für das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 3$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 1.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2.

Frage 7 (3 Punkte)
Das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\,\pi} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\, dx$$

hat den Wert

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Frage 8 (3 Punkte)
Die Matrix A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., λ_n.Dann hat die Matrix $B = 5\,A$

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $5\lambda_1$, $5\lambda_2$, ..., $5\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $\frac{1}{5}\lambda_1$, $\frac{1}{5}\lambda_2$, ..., $\frac{1}{5}\lambda_n$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral von

$$\int x\, e^{5x^2+1}\, dx$$

ist

(a) $x\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{1}{5}\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(c) $\frac{1}{10}\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(d) $\ln(5)\, x\, e^{5x^2+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Frage 2 (4 Punkte)
Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat **a** die Länge

(a) 6.

(b) $\sqrt{34}$.

(c) $\sqrt{39}$.

(d) **a** steht für kein $t \in \mathbb{R}$ senkrecht auf **b**.

Frage 3 (5 Punkte)
Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(d) A hat keine Inverse.

Frage 5 (3 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Frage 6 (3 Punkte)
Die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = \left(\frac{1}{4}\right)^k + 1$$

löst die Differenzengleichung

(a) $3\, y_{k+1} - y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) $4\,y_{k+1} - y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(c) $8\,y_{k+1} - 2y_k = 3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,y_{k+1} - 7\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(2-a)\,y_{k+1} + (a+3)\,y_k - a = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, divergiert genau dann oszillierend, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $-\frac{1}{2} \leq a < 2$.

(c) $a \leq -\frac{1}{2}$ oder $a > 2$.

(d) Es gibt kein $a \in \mathbb{R}$, so dass die allgemeine Lösung oszillierend divergiert.

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2015

Dr. Reto Schuppli*

10. Februar 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)
Sei $f\,:\,(4,\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen, definiert durch

$$f(x,y) = 3\,x\,y + \frac{45}{2}\,\ln(x-4) + y^2.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte, d.h. Maxima, Minima und Sattelpunkte.

(b) (8 Punkte)
Untersuchen Sie folgendes Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} z \;\;=\;\; & f(x,y) = 7\,x^{\frac{1}{4}}\,y^{\frac{3}{4}} \;\;(x>0,\,y>0) \;\;\to \text{min! oder max!} \\ & \text{so dass } \varphi(x,y) = 2\,x^{\frac{1}{4}} + 2\,y^{\frac{3}{4}} - 32 = 0 \end{aligned}$$

auf mögliche Extremalstellen.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um Maxima oder Minima handelt, wird nicht verlangt.

(c) (6 Punkte)
Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)\, dx.$$

(d) (4 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{3[\ln(\ln(x))]^2}{x \ln(x)}\, dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} t \\ -0.8 \\ t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von t ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear abhängig?

(b1) (5 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 8 & 16\,a & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass A den Eigenwert $\lambda = -2$ hat, und berechnen Sie die weiteren Eigenwerte.

(b2) (4 Punkte)
Gegeben ist die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ 8 & 16\,a & 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a \in \mathbb{R}$.
Berechnen Sie den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -2$.

(c) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{(x^3 + y^2)^4}{x^{10-a}}\right) + 3\,y, \quad x, y \in \mathbb{R}_{++},$$

wobei a ein reeller Parameter ist.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ beträgt die Länge des Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ 25?

(d) (9 Punkte)
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & x_2 & + & a\,x_3 & = & 2 \\ 2\,x_1 & + & a\,x_2 & + & 5\,x_3 & = & 0 \end{array}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

(i) *genau eine* Lösung?

(ii) *keine* Lösung?

(iii) *unendlich viele* Lösungen?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = x\,y^2 - 2\,x^3$ unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x - 2y = 0$ hat

(a) ein Minimum im Punkt $(0,0)$.

(b) ein Maximum im Punkt $(0,0)$.

(c) einen Sattelpunkt im Punkt $(0,0)$.

(d) einen Sattelpunkt im Punkt $(2,1)$.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} c\,x\,e^{-x^2}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

(a) f ist eine Dichtefunktion für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) Nur für $c = 1$ ist f eine Dichtefunktion.

(c) Nur für $c = 2$ ist f eine Dichtefunktion.

(d) f ist eine Dichtefunktion für alle $c > 0$.

Frage 3 (2 Punkte)
$A = (a_{ij})$ sei eine 5×4 Matrix mit dem Rang 3.Welche der folgenden Behauptungen ist *richtig*?

(a) A^T hat den Rang 5.

(b) A ist singulär.

(c) A hat eine reguläre Teilmatrix vom Rang 3.

(d) $\det(A) \neq 0$.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = \frac{1}{2}$.
Die Matrix $C = (A\,B^{-1})^2\,A^{-1}\,B$ hat die Determinante

(a) $\frac{1}{4}$.

(b) $\frac{1}{2}$.

(c) 1.

(d) 2.

Frage 5 (3 Punkte)
Das System aus 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sei linear *unabhängig*.Weiter sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.Wir betrachten die Vektorgleichung

$$x_1\,\mathbf{u}_1 + x_2\,\mathbf{u}_2 = x_3\,\mathbf{u}_3 + \mathbf{b}.$$

(a) Die Gleichung hat keine Lösung.

(b) Die Gleichung hat genau eine Lösung.

(c) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen.

(d) Die Anzahl der Lösungen der Gleichung ist abhängig von $\mathbf{b}$.

Frage 6 (2 Punkte)
Für das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 4$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 1.

(d) Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2.

Frage 7 (3 Punkte)
Das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\,\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx$$

hat den Wert

(a) 2.

(b) 4.

(c) 0.

(d) -2.

Frage 8 (3 Punkte)
Die Matrix A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., λ_n.Dann hat die Matrix $B = 2\,A^2$

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, ..., $2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $2\lambda_1^2$, $2\lambda_2^2$, ..., $2\lambda_n^2$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral von

$$\int (3\,x^3 + 1)\, e^{x^3}\, dx$$

ist

(a) $e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $x^2\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $x^3\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 2 (4 Punkte)
Der Vektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ t \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann hat $\mathbf{a}$ die Länge

(a) 5.

(b) $\sqrt{60}$.

(c) $\sqrt{62}$.

(d) $\mathbf{a}$ steht für kein $t \in \mathbb{R}$ senkrecht auf $\mathbf{b}$.

Frage 3 (5 Punkte)
Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(d) A hat keine Inverse.

Frage 5 (3 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 27 & 1 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Frage 6 (3 Punkte)
Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3$$

löst die Differenzengleichung

(a) $3\,y_{k+1} - y_k = 5, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(b) $4\,y_{k+1} - y_k = 8, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(c) $6\,y_{k+1} - 2\,y_k = 12, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4\,y_{k+1} + 7\,y_k = -3, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+3)\,y_{k+1} + (2-a)\,y_k + a = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$, konvergiert genau dann oszillierend, wenn

(a) $a < 2$.

(b) $a < -\frac{1}{2}$ oder $a > 2$.

(c) $-\frac{1}{2} < a < 2$.

(d) Es gibt kein $a \in \mathbb{R}$, so dass die allgemeine Lösung oszillierend konvergiert.

Frühling 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

27. Juni 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)
Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u : \mathbb{R}_+ \times R_+ \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = c_1^{0.6}\, c_2^{0.4}$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$.Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.
Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.
Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

(b) (9 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times (-5, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) = x^2 + 3\,x\,y + 16\,\ln(y + 5).$$

Sei $g : R_f \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion einer reellen Variablen mit $g'(x) > 0$ für alle $x \in R_f$, wobei R_f der Wertebereich von f ist. Schliesslich sei die Komposition h gegeben als

$$h : D_f \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto h(x, y) = g(f(x, y)),$$

D_f ist dabei das Definitionsgebiet von f.
Untersuchen Sie die Funktion h auf *stationäre Punkte*, d.h., Maxima, Minima, und Sattelpunkte.
Hinweis:
Dank der Eigenschaften von g ist es möglich, das Problem in eine handhabbare Form zu bringen.

(c) (6 Punkte)
Ein Investment Fonds generiert innerhalb der Zeitspanne von $t = 0$ zu $T = 12$ einen stetigen Cashflow von $B(t) = 10\,t + 5$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$.
Bestimmen Sie den Nettobarwert $PV(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $T = 12$ generiert.

(d) (4 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\sin(\ln(x))\ \cos(\ln(x))}{x}\, dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von t ist der Rang von A gleich 3?

(b) (6 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1.5	3
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2
Rezession	1.5	0.5

Ermitteln Sie, ob das folgende Auszahlungsschema für den Investor möglich ist, wenn er nur in die Aktien 1 und 2 investiert:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	1'500
wirtschaftliche Stabilität	2'000
Rezession	1'000

(c) (6 Punkte)

Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A.

(d) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f \,:\, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x, y) = e^{2\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung (allgemeine Form) einer Ebene β so, dass der Vektor $\mathbf{u} = (x_0, y_0, z_0)^T$ orthogonal zu β ist, wobei $(x_0, y_0)^T = \mathbf{grad} f(0, 0)$ und $z_0 = f(0, 0)$ gilt.

(e) (6 Punkte)

Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um die Lösungsmenge des folgenden linearen Glei-chungssystems zu bestimmen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & + & 6\,x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & 8\,x_4 & = & 7 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & + & 4\,x_4 & = & -1 \end{array} .$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$. Dann gilt:

(a) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(b) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 5\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(c) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 4\,x + 2\,y - 1 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Frage 2 (4 Punkte)
Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ für $x \in [0, 1]$, und

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$.

Dann gilt:

(a) $g_1 = \frac{1}{3}\,f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(b) $g_2 = f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(c) $g_3 = \frac{1}{6}\,f + 3$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

(d) $g_4 = \frac{1}{6}\,f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$.

Frage 3 (2 Punkte)
$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 4.Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 4×4 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 4×4 Untermatrix von A.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 1$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A^{-1} B^2 A^2 B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A und B unendlich viele Lösungen, keine Lösung, oder eine eindeutig Lösung.

Frage 5 (3 Punkte)
Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear *abhängig*.Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Frage 6 (2 Punkte)
Für das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 4$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

Frage 7 (3 Punkte)
A ist ein quadratische Matrix und $\lambda = 0$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) Da aus $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgt, dass $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hat A keinen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Frage 8 (3 Punkte)
Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^T \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $t = 0, 1, \ldots$
Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 2$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]\,dx$$

ist

(a) $x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3\,x + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3\,x^2 + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\,x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 2 (3 Punkte)
Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A\,\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1.$

(b) $t \in \{1, -2\}.$

(c) $t = -2.$

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A\,\mathbf{x}$ ist.

Frage 3 (5 Punkte)
Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) A ist singulär.

Frage 5 (5 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Dann gilt:

(a) $\lambda_1 \, \lambda_2 = 0$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

(c) $\mathbf{v}_1^T \, \mathbf{v}_2 = 0$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Frage 6 (2 Punkte)
Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 4 - \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$4\, y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 4$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$5\,y_{k+1} + 6\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$m\,y_{k+1} + y_k = m^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

8. Februar 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte)
Ein Konsument *maximiert* seine Nutzenfunktion $u(c_1, c_2)$ in den Einheiten c_1 und c_2 der Güter 1 und 2 definiert durch:

$$u : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad (c_1, c_2) \mapsto u(c_1, c_2) = a \ln(c_1) + b \ln(c_2),$$

über die Wahl des Konsumbündels $(c_1^\star, c_2^\star)$, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{++}$ reellwertige Parameter sind.
Die Preise der Güter 1 und 2 sind $p_1 = 3$ beziehungsweise $p_2 = 4$, und das Budget, welches *vollständig* genutzt wird, beträgt $e = 15$.
Bestimmen Sie die stationären Punkte des Maximierungsproblems des Konsumenten, d.h., Kandidaten für das optimale Konsumbündel $(c_1^\star, c_2^\star)$.
Hinweis:
Eine Abklärung, ob es sich bei den stationären Punkten tatsächlich um Maxima handelt, wird nicht verlangt.

(b) (9 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times (-6, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$f(x, y) = 2\,x^2 + 3\,x\,y + 12\,\ln(y + 6).$$

Sei $h : D_f \to \mathbb{R}$, wobei D_f das Definitionsgebiet von f ist, eine Funktion zweier reeller Variablen definiert durch:

$$h(x, y) = e^{(f(x,y))^3 + f(x,y)}.$$

Untersuchen Sie die Funktion h auf *stationäre Punkte*. Für jeden stationären Punkt ist abzuklären, ob ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt vorliegt.
Hinweis:
Die Funktion h ist so definiert, dass sich das Problem in eine handhabbarere Form bringen lässt.

(c) (6 Punkte)
Die Funktion $B(t) = a\,t + 6$ mit $a > 0$ sei der durch einen Investment Fonds zum Zeitpunkt t generierte stetige Cashflow, wobei $t \in [0, 12]$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zu einem jährlichen Zinssatz von $i = 0,05$.
Bestimmen Sie den Parameter $a > 0$ so, dass für den Nettobarwert zum Zeitpunkt $t = 0$ *aller* Zahlungsströme, die der Investment Fonds zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 12$ generiert, gilt, dass $PV(0) = 100$.

(d) (4 Punkte)
Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int \sin(e^x)\, \cos(e^x)\, e^x\, dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (3 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 1 \\ 2 & t & 0 \\ -1 & t & 2\,t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.
Für welche Werte von t ist die Matrix A singulär?

(b) (6 Punkte)
Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs zweier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2
Expansion	1,5	3
wirtschaftliche Stabilität	1,5	2
Rezession	1,5	0,5

Die Bank führt ein neues Investmentprodukt (Wertpapier) ein, mit jährlichem Payoff wie folgt:

Konjunktur	Payoff
Expansion	1,5
wirtschaftliche Stabilität	2,0
Rezession	1,0

Untersuchen Sie, ob die drei Wertpapiere linear unabhängig sind, oder ob sich der Payoff eines der Wertpapiere durch eine Kombination der zwei anderen Wertpapiere erzielen lässt.

(c) (6 Punkte)
Gegeben sei die 4×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4\,s & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$.
Ermitteln Sie s so, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von A ist. Berechnen Sie weiterhin für diesen Fall die Eigenvektoren von A zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(d) (4 Punkte)
Gegeben sei die Funktion zweier reeller Variablen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$f(x, y) = e^{a\,x^2 + y^3 + 3\,x + 3\,y}.$$

Bestimmen Sie alle Werte von a, sodass die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ durch den Vektor $\mathbf{n} = (1, 1)^T$ gegeben ist.

(e) (6 Punkte)
Der Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soll mit Hilfe der Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ und } \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear kombiniert werden.
Verwenden Sie das *Gauss Verfahren*, um alle möglichen Lösungen dieses Problems zu bestimmen.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (22 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion f zweier reeller Variablen unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$. Die Funktion einer reeller Variablen g genüge der Bedingung $D_g = R_f$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in D_g$. Sei $h = g \circ f$. Dann gilt:

(a) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$.

(b) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Maximum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = g(3\,x + 2\,y - 2) = 0$.

(c) der Punkt $P = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$ ist ein Minimum der Funktion h unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 3\,x + 2\,y - 2 = 0$.

(d) keine der obigen Antworten ist im Allgemeinen richtig.

Frage 2 (4 Punkte)
Die Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(i) $f(x) \geq -3$ for $x \in [0, 1]$,

(ii) $\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, und

(iii) $\int_0^1 x\,f(x)\,dx = 2$.

Dann gilt:

(a) $g = \frac{1}{3}\,f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{7}{12}$.

(b) $g = \frac{1}{3}\,f$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{1}{3}$.

(c) $g = \frac{1}{6}\, f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{7}{12}$.

(d) $g = \frac{1}{6}\, f + \frac{1}{2}$ ist eine Dichtefunktion auf $[0, 1]$ und der Erwartungswert einer Zufallsvariablen mit Dichtefunktion g ist $\mu = \frac{1}{3}$.

Frage 3 (2 Punkte)
$A = (a_{ij})$ ist eine 4×5-Matrix vom Rang 3.Dann gilt:

(a) alle 3×3 Untermatrizen von A sind regulär.

(b) alle 3×3 Untermatrizen von A sind singulär.

(c) alle 2×2 Untermatrizen von A sind regulär.

(d) es existiert mindestens eine reguläre 2×2 Untermatrix von A.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B sind quadratische 4×4 Matrizen mit $\det(A) = 0$ und $\det(B) = -1$. Sei C die Matrix definiert durch $C = A\, B^2\, A^2\, B^{-1}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$.

(a) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(b) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(c) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat eine eindeutige Lösung.

(d) Das System von linearen Gleichungen $C\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat abhängig von A, B und $\mathbf{b}$ keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Frage 5 (3 Punkte)
Das System von 3-dimensionalen Vektoren $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ist linear *unabhängig*.Sei $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, und $\mathbf{u}_3$.

(a) A^n ist regulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) A^n ist singulär für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) A^n ist regulär für n ungerade und singulär für n gerade.

(d) A^n ist singulär für n ungerade und regulär für n gerade.

Frage 6 (2 Punkte)
Für das System von linearen Gleichungen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = 4$ und $\mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, wobei A eine 5×6 Matrix ist.

(a) Das System hat keine Lösung.

(b) Das System hat genau eine Lösung.

(c) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 2.

(d) Das System hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat Dimension 1.

Frage 7 (3 Punkte)
A ist eine quadratische Matrix und $\lambda = 1$ einer ihrer Eigenwerte.

(a) A hat keine zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörende Eigenvektoren.

(b) A hat einen eindeutigen zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörenden Eigenvektor.

(c) A hat unendlich viele zum Eigenwert $\lambda = 1$ gehörende Eigenvektoren.

(d) Wie viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 1$ existieren, hängt von der Matrix A ab.

Frage 8 (3 Punkte)
Ein dynamisches Model für die Variablen $\mathbf{u}_t = (x_t, y_t)^T \neq \mathbf{0}$ erfüllt die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} = A\,\mathbf{u}_t$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und $t = 0, 1, \ldots$
Die Gleichung $\mathbf{u}_{t+1} - \lambda\,\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$ für alle $t = 0, 1, \ldots$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 0$.

(b) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 1$.

(c) kann nur erfüllt sein für $\lambda = 3$.

(d) kann nie erfüllt sein.

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral

$$\int 2\left[3\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]\,dx$$

ist

(a) $x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3\,x + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3\,x^2 + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\,x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 2 (3 Punkte)
Der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist ein Eigenvektor der 5×5 Matrix A zum Eigenwert $\lambda \neq 0$, wobei $t \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal zum Vektor $A^5\,\mathbf{x}$ für

(a) $t = 1.$

(b) $t \in \{1, -2\}.$

(c) $t = -\frac{3}{2}.$

(d) Es gibt kein $t \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{y}$ orthogonal zu $A^5\,\mathbf{x}$ ist.

Frage 3 (5 Punkte)
Die 5×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) A ist singulär.

Frage 5 (5 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

hat reellwertige Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Es gilt:

(a) $\lambda_1 - \lambda_2 = -4$.

(b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 2$.

(c) $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

(d) $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Frage 6 (2 Punkte)
Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$y_k = 2\,a - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

mit $a \neq 0$ löst das Anfangswertproblem

$$3\,y_{k+1} - y_k = 12 \text{ und } y_0 = 3$$

für

(a) $a = 1$.

(b) $a = 2$.

(c) $a = 3$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$6\,y_{k+1} - 7\,y_k = 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$-m\,y_{k+1} + y_k = m^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

wobei $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist monoton und konvergent genau dann, wenn

(a) $m \in [-1, 0)$.

(b) $m \in (0, 1]$.

(c) $m < -1$.

(d) $m > 1$.

Frühling 2017

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2017

Dr. Reto Schuppli*

26. Juni 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x,y) = (x+y+a)\,e^x - e^y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(b) (7 Punkte)
Die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass in $(1,1)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um eine Extremstelle handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum), wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} x \, \sin(x^2) \, \big(\cos(x^2)\big)^3 \, dx.$$

(d) (6 Punkte)
Berechnen Sie

$$\int_0^e |\ln(x)| \, dx.$$

Bemerkung: Sie dürfen das in Mathematik A bewiesene Resultat, dass gilt:

$$\lim_{x \searrow 0} x \, \ln(x) = 0,$$

voraussetzen.

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)
Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär, A sei ausserdem symmetrisch.
Beweisen Sie:

$$B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1} = (A^{-1}B)^T.$$

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = a\,\ln(x-2) + x\,y^2 + 8\,y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (8,2)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (8,2)$ in der Richtung$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ am stärksten zunimmt?

(c) (3 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ t \end{pmatrix},\ \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b_1},\ \mathbf{b_2},\ \mathbf{b_3}\}$ *keine* Basis des dreidimensinalen Raumes $\mathbb{R}^3$?

(d) (6 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -3a & 5a \end{pmatrix}, \text{ where } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

Berechnen Sie den Vektor $M^n\,\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(e) (8 Punkte)
Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.
Für den Unterraum

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \wedge 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4-x_5 = 0 \wedge x_1+2x_2+4x_3-x_4+2x_5 = 0\}$$

ist eine Basis anzugeben.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x, y) = y$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ihr Minimum in

(a) $P = (-5, 0)$.

(b) $P = (0, 3)$.

(c) $P = (0, 0)$.

(d) $P = (0, -3)$.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Frage 3 (2 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion.

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) Wenn das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert, dann ist f stetig auf $[a, b]$.

(b) Wenn f nicht stetig ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmt Integral von f über $[a, b]$ nicht.

(c) Wenn f differenzierbar ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmt Integral von f über $[a, b]$.

(d) Das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert immer.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 2$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^{-1}\, B\, A$.

(a) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 1$.

(b) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 2^n$.

(c) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 2^n \cdot 5^n$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Frage 6 (2 Punkte)
A ist eine 6×5 Matrix, das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2. Dann gilt:

(a) $rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 4$.

(c) $rg(A) < rg(A; \mathbf{b}) = 4$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)
Das unbestimmte Integral von

$$\int \ln(x\, e^x)\, dx\,,\ (x > 0)$$

ist

(a) $x\ \ln(x) + x^2 - x + C$.

(b) $x\ \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C$.

(c) $x\ \ln(x) + x^2 + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix},\ \text{wobei } a \neq 0.$$

(a) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene relle Eigenwerte.

(b) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ genau einen rellen Eigenwert.

(c) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ keinen rellen Eigenwert.

(d) Die Matrix A hat abhängig von $a \neq 0$ keinen, einen oder zwei reelle Eigenwerte.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx$$

hat den Wert

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) Keines der obigen Resultate ist korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)
Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 9 \end{pmatrix}$ orthogonal?

(a) $t = 5$.

(b) $t = 5$ oder $t = -5$.

(c) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

(d) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

Frage 3 (4 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gesucht ist eine Matrix X, sodass

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Es gibt keine Matrix X, die die Gleichung erfüllt.

Frage 5 (2 Punkte)
Die $n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Dann hat die Matrix A^2

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1, 2\lambda_2, ..., 2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, ..., \lambda_n^2$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)\, y_k = a, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = 2\,(1+a)^k$.

(b) $y_k = 3\,(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4\,(1+a)^k - 1$.

(d) $y_k = 5\,(1+a)^k - 2$.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,(y_k - y_{k+1}) + 3 = 2\,y_k - 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2+c)\,y_{k+1} + (1-c)\,y_k = 5,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist, ist genau dann monoton und divergent, wenn

(a) $c < -2$.

(b) $c \in (-2, 0)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ monoton und divergent.

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2017

Dr. Reto Schuppli*

07. Februar 2018

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = a\, y^2 + 2axy + x^4 \quad (a \in \mathbb{R}_{++}).$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

(b) (7 Punkte)
Die Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 - axy + by^2 + 15 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass im Punkt $(1, 2)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.
Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei $(1, 2)$ tatsächlich um eine Extremstelle (und nicht um einen Sattelpunkt) handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum), wird nicht verlangt.

(c) (5 Punkte)
Berechnen Sie
$$\int_1^e x^2 \, \ln(\sqrt{x}) \, dx.$$

(d) (6 Punkte)
Berechnen Sie
$$\int_1^\infty \frac{e^x + x\, e^x}{(x\, e^x)^3} \, dx.$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)
Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär.
Beweisen Sie:Die Matrix $C = B^{-1}\, A\, A^T\, (B^T)^{-1}$ ist symmetrisch.

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x\,\sin(y) + a\,\ln(x+2) + \frac{x\,y}{\pi}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$ in der Richtung des Vektors$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ am stärksten *abnimmt*?

(c) (3 Punkte)
Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$V = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 0 \,\wedge\, x_1 + 5\,x_2 - 2\,x_3 = 0 \,\wedge\, x_1 - x_3 + x_5 = 0 \,\}.$$

(d) (6 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5\,a & 5 & 4 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Weisen Sie nach, dass M den Eigenwert $\lambda = 3$ besitzt.

Berechnen Sie den zum Eigenwert $\lambda = 3$ gehörenden Eigenraum.
Berechnen Sie die anderen Eigenwerte der Matrix M.

(e) (8 Punkte)
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & = & 8 \\ 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & + & 8\,x_3 & = & 36 + 4r \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & = & s \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 9 - 2r + s \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} .$$

Für welche Werte der Parameter $r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar?

Wie lautet die zugehörige Lösung des Gleichungssystems?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = -x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$ ihr Minimum in

(a) $P = (-2, 0)$.

(b) $P = (0, 5)$.

(c) $P = (2, 0)$.

(d) $P = (3, 1)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,(x-2)^2 - 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{9}{8}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{8}{9}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Frage 3 (3 Punkte)
$A = (a_{ij})$ sei eine 6×4 Matrix. Dann gilt:

(a) Der Rang von A^T ist mindestens 4.

(b) Der Rang von A^T ist kleiner als 5.

(c) Der Rang von A^T ist höchstens 6.

(d) Die Matrix A^T hat mindestens eine reguläre 4×4-Untermatrix.

Frage 4 (2 Punkte)
A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -3$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^2 + 3\,B$. Dann gilt:

(a) $\det(C) = 13$.

(b) $\det(C) = -5$.

(c) $\det(C) = -36$.

(d) Man kann im Allgemeinen keine Aussage über $\det(C)$ machen.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Frage 6 (2 Punkte)
A ist eine 5×4 Matrix und $rg(A; \mathbf{b}) = 4$. Dann gilt:

(a) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat sicher keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine oder eine eindeutige Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Frage 7 (4 Punkte)
Das unbestimmte Integral von

$$\int \frac{x}{5\,x+2}\,dx,\ (x>0)$$

ist

(a) $\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\,\ln(5\,x+2) + C$.

(b) $\frac{\frac{1}{2}\,x^2}{\frac{5}{2}\,x^2+2\,x} + C$.

(c) $\frac{1}{2}\,x^2\,\ln(5\,x+2) + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix A und der Vektor **b**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^n\,\mathbf{b} = \mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $A^n\,\mathbf{b} = 2^n\,\mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $A^n\,\mathbf{b} = 3^n\,\mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Keine der vorausgehenden Aussagen ist richtig.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x+1}\,dx$$

hat den Wert

(a) e^2.

(b) $\frac{e^3}{2}$.

(c) $\frac{e^4}{5}$.

(d) Das uneigentliche Integral existiert nicht.

Frage 2 (3 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = x^2 - \ln(y).$$

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}_{++}$ ist der Gradient von f im Punkt (t, t) senkrecht zum Vektor$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $t = \sqrt{0.5}$ und $t = -\sqrt{0.5}$.

(b) $t = \frac{1}{2}$.

(c) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\mathbf{b}$ und $\mathbf{grad} f(t, t)$ sind für kein $t \in \mathbb{R}_{++}$ orthogonal.

Frage 3 (4 Punkte)
Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 9 & 5 & -10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 5 (2 Punkte)
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$

(b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$

(c) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}.$

(d) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{l} (1-a)\, y_{k+1} + a\, y_k - 1 = 0, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0 \\ y_0 = 2 \end{array}.$$

Für welchen Wert des Parameters a gilt $y_1 = \frac{5}{3}$?

(a) $a = 2$.

(b) $a = -2$.

(c) $a = \frac{1}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 7 (2 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,(y_k - 2\,y_{k+1}) = 6 - 7\,y_k$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2 - c)\,y_{k+1} + (1 + c)\,y_k = 2,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ist, ist genau dann oszillierend und divergent, wenn

(a) $c > 2$.

(b) $c \in [\frac{1}{2}, 2)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ oszillierend und divergent.

Frühling 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. De Giorgi*

25. Juni 2018

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (8 Punkte)
Ein Investment generiert zum Zeitpunkt t, für $t \in [0, 10]$, den stetigen Cashflow $B(t) = a\,t + 10$, wobei $a > 0$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Barwert des Investments $1'000$ CHF beträgt.

(b) (8 Punkte)
Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs dreier Wertpapiere zu identischemAusgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2	Aktie 3
Expansion	1.5	3	m
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2	0.5
Rezession	1.5	0.5	1.5

Ein Investor möchte die drei Wertpapiere linear zu folgendem Auszahlungsschema kombinieren:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	$2\,m$
wirtschaftliche Stabilität	1.0
Rezession	0.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des *Gauss Verfahrens* alle möglichen Parameterwerte m, für die das gewünschte Auszahlungsschema durch eine Kombination der drei Aktien möglich ist.

(c) (10 Punkte)
Die (fixen) Entwicklungskosten für ein neues Produkt betragen $20'000$ (CHF). Jede Einheit des Produkts kann zu einem Preis von p (CHF) verkauft werden, die Produktionskosten pro Einheit betragen 2 (CHF). Sie entscheiden sich dazu, Ihr Produkt mit einer Marketingkampagne zu bewerben. Der Erfolg der Kampagne hängt von dem Betrag a (CHF), der für die Werbung ausgegeben wird, sowie dem Preis p (CHF) Ihres Produktes ab. In der Tat bestimmen Sie, dass Sie, bei einem Werbeaufwand von a (CHF) und einem Verkaufspreis von p (CHF),

$$3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p$$

Einheiten Ihres Produktes verkaufen.
Bestimmen Sie a und p so, dass Ihr Gewinn (d.h. Verkaufserlöse abzüglich Kosten, inklusive der Kosten für Werbung) maximal wird.

(d) (10 Punkte)
Ein Rechteck R habe seine Ecken in den Punkten $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$, und (x,y), mit $x, y > 0$. Ausserdem sei die Distanz zwischen dem Punkt (x,y) und dem Punkt $(a,0)$ gleich 4, wobei $a \in (4,8)$.
Bestimmen Sie mögliche Punkte (x,y), sodass die Fläche von R ein Extremum annimmt (also maximal oder minimal wird).
Bemerkungen:

(1) Es ist nicht nötig zu überprüfen, ob die gefundenen potentiellen Kandidaten für ein Extremum tatsächlich einen maximalen oder minimalen Flächeninhalt von R erzeugen.

(2) Die Distanz zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ entspricht $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Demnach gilt: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

(3) Für diese Aufgabe müssen Sie die Terme der Lösung(en) nicht vereinfachen.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ ihr Maximum im Punkt

(a) $P = (-6, 3)$.

(b) $P = (5, -3)$.

(c) $P = (0, 7)$.

(d) $P = (6, 3)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Eine zweimal differenzierbare Funktion f hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert durch $g(x,y) = -f(-x,-y)$ und $D_g = D_f$. Dann gilt:

(a) g hat ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

(b) g hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

(c) g hat ein lokales Maximum in $(-x_0, -y_0)$.

(d) g hat ein lokales Minimum in $(-x_0, -y_0)$.

Frage 3 (4 Punkte)
Die Funktion f in zwei Variablen hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x^2 + 3\,y - 7 = 0$ ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ hat den Wert:

(a) $-\frac{3}{2}$.

(b) $-\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{3}{2}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

Frage 4 (2 Punkte)
Für eine stetige Funktion f und $a, x \in D_f$ mit $a \leq x$ ist die Integralfunktion I definiert als $I(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Es gilt:

(a) I ist eine Stammfunktion von f.

(b) $f'(x) = I(x)$.

(c) $I'(x) = f(x) - f(a)$.

(d) I ist nicht differenzierbar.

Frage 5 (2 Punkte)
Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Es folgt:

(a) $\int f(g(x))\, dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(b) $\int f(g(x))\, dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(c) $\int f(g(x))\, f'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(d) $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Frage 6 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\,x + (2\,x^2 + 1)\, e^{x^2}\right] dx$$

ist

(a) $x^2 + x\, e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(b) $3\,x + 2\,x\, e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(c) $3\,x^2 + 2\,x\, e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(d) $3\,x^2 + x\, e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist eine Dichtefunktion für

(a) $a = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = \frac{5}{2}$.

(d) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Frage 8 (4 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + \frac{1}{16} & \text{für } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Der Parameter a wird so gewählt, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist.Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X ist:

(a) $\mathbb{E}[X] = \frac{25}{16}$.

(b) $\mathbb{E}[X] = \frac{14}{3}$.

(c) $\mathbb{E}[X] = -\frac{5}{3}$.

(d) $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{3}\,a$.

Frage 9 (2 Punkte)
Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien orthogonal und $\mathbf{a}$ habe die Länge $\|\mathbf{a}\| = 3$. Dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$.

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3$.

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 9$.

(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ kann ohne Wissen über die Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht bestimmt werden.

Frage 10 (2 Punkte)
Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welches der folgenden Systeme ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

(c) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$.

(d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Frage 11 (2 Punkte)
A sei eine 7×5 Matrix. Das System von linearen Gleichungen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum habe die Dimension 3. Dann gilt:

(a) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(c) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(d) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

Frage 12 (2 Punkte)
A und B seien reguläre Matrizen. Ausserdem sei A symmetrisch. Der Ausdruck

$$B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1}$$

entspricht:

(a) $(A^T\,B^T)^{-1}$.

(b) $(B^{-1}\,A)^T$.

(c) $(A^{-1}\,B)^T$.

(d) Keinem der obigen Terme.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,x + \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Erwartungswert

$$\mathbb{E}\,[X] = \frac{28}{45}.$$

Dann hat das Integral $\int_0^1 (x+1)\,f(x)\,dx$ den Wert:

(a) $\frac{28}{45}$.

(b) $\frac{73}{45}$.

(c) $\frac{12}{45}$.

(d) $\frac{52}{45}$.

Frage 2 (4 Punkte)
Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal und die Länge von $\mathbf{u}$ gleich $\sqrt{37}$?

(a) $t = -5$.

(b) $t = 0$.

(c) $t = 1$.

(d) Für kein $t \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 1.

(b) hat Rang 2.

(c) hat Rang 3.

(d) hat Rang 4.

Frage 4 (5 Punkte)
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(d) A ist singulär.

Frage 5 (4 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A^2 hat den Eigenwert:

(a) 2.

(b) 4.

(c) 6.

(d) 8.

Frage 6 (4 Punkte)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 2\,a, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = -4\,(1+a)^k$.

(b) $y_k = 2(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4\,(1+a)^k - 2$.

(d) $y_k = 8\,(1+a)^k - 3$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$3\,(y_{k+1} - y_k) + 5 = 2\,y_{k+1} - y_k + 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (5 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2\,(a+2)\,y_{k+1} - 2\,y_k + 2\,(a^2 - 4) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert monoton gegen 0 genau dann, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. De Giorgi*

06. Februar 2019

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (8 Punkte)
Ein Investor legt zum Zeitpunkt t, für $t \in [0, 20]$, den Betrag $D(t) = b\,t + 200$ an, wobei $b > 0$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$. Bestimmen Sie den Parameter b so, dass der Wert der Einlagen zum Zeitpunkt $T = 20$ $100'000$ CHF beträgt.

(b) (8 Punkte)
Ein perfekter Hedge (eine perfekte Gegendeckung) für ein bestehendes Anlageprodukt ist eine Anlagestrategie, die es einem Investor erlaubt, den Payoff des Produktes exakt zu replizieren. Eine Bank verkauft ein Finanzprodukt, dass abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage folgende Auszahlungen generiert:

Szenario	Payoff
Tiefe Rezession	1
Stagnation	0
Aufschwung	$m + 2$
Boom	1

wobei $m \in \mathbb{R}$ ein reellwertiger Parameter ist. Die Bank verwendet vier Wertpapiere, um einen perfekten Hedge für das Finanzprodukt zu konstruieren. Die Payoffs der Wertpapiere, abhängig von der konjunkturellen Lage, sind in der folgenden Tabelle aufgeführt:

Szenario	Wertpapier 1	Wertpapier 2	Wertpapier 3	Wertpapier 4
Tiefe Rezession	1	1	0	0
Stagnation	2	1	1	1
Aufschwung	1	0	1	$m^2 - m - 11$
Boom	1	1	1	0

Bestimmen Sie mit Hilfe des *Gauß-Verfahrens* alle möglichen Parameterwerte m, für die eine perfekte Hedging-Stratgie für das Finanzprodukt durch eine Kombination der vier Wert-papiere möglich ist.

(c) (10 Punkte)
Ein Unternehmen entwickelt eine neue App, mit der Nutzer verschiedene Lebensversicherungsprodukte vergleichen können. Nach einer anfänglichen Investition von I (CHF) in die Entwicklung der App verlangt es von jedem Nutzer eine einmalige Gebühr in Höhe von p (CHF). Der investierte Betrag beeinflusst die Qualität der App erheblich und damit auch die Zahl der Nutzer. Natürlich hängt die Zahl der Nutzer auch von der Höhe des Nutzungsentgeltes ab. Eine Marketing-Umfrage ergibt, dass die Anzahl der Nutzer

$$1'000 + 5\sqrt{I} - 40\,p$$

entsprechen wird, gegeben, dass das Unternehmen I (CHF) für die Entwicklung der App investiert und p (CHF) an (einmaliger) Nutzungsgebühr verlangt. Das Unternehmen weiss zudem, dass 20% der Erlöse zur Deckung der Unterhaltskosten benötigt werden.
Bestimmen Sie I und p so, dass der Gewinn des Unternehmens (d.h. Erlöse aus Nutzungsentgelten abzüglich der Anfangsinvestition und Kosten) maximal wird.

(d) (10 Punkte)
Ein Unternehmen produziert und vertreibt Motorenöl. Die dazu verwendeten Fässer haben zylindrische Form mit Höhe $h > 0$ und Radius $r > 0$. Sie sollen ein Fassungsvermögen von 128 cm^3 aufweisen. Um die Materialkosten bei der Produktion der Fässer zu minimieren, baut das Unternehmen diese derart, dass die Oberfläche der Fässer minimiert wird.
Bestimmen Sie die für das Unternehmen optimale Kombination (h, r).
Bemerkungen:

(1) Es ist nicht nötig zu überprüfen, ob die gefundenen potentiellen Kandidaten für ein Extremum tatsächlich eine maximale oder minimale Oberfläche der Fässer erzeugen.

(2) Die Fläche eines Kreises mit Radius $r > 0$ ist gegeben durch $r^2\,\pi$, sein Umfang durch $2\,r\,\pi$.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (36 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x, y) = y$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ ihr Maximum bei

(a) $P = (2, 1)$.

(b) $P = (8, 4)$.

(c) $P = (2, 7)$.

(d) $P = (-2, 7)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Eine zweimal differenzierbare Funktion f hat ihr lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert durch $g(x, y) = -f(-x, y)$ und $D_g = D_f$. Dann gilt:

(a) g hat ein lokales Maximum in $(x_0, -y_0)$.

(b) g hat ein lokales Minimum in $(-x_0, y_0)$.

(c) g hat ein lokales Maximum in $(-x_0, -y_0)$.

(d) g hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

Frage 3 (3 Punkte)
Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie $\varphi(x, y) = x^2 + 3\,x\,\ln(y) - 7\,y + 3 = 0$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$ entspricht:

(a) -4.

(b) -2.

(c) 2.

(d) 4.

Frage 4 (3 Punkte)
Seien f und g zwei Funktionen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$, wobei $a < b$ und $[a, b] \subseteq D_f \cap D_g$. Die Fläche im kartesischen Koordinatensystem definiert durch

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b \text{ und } (f(x) \leq y \leq g(x) \text{ oder } g(x) \leq y \leq f(x))\right\}$$

entspricht:

(a) $\left|\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx\right|$.

(b) $\int_a^b |f(x) - g(x)|\; dx$.

(c) $\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$.

(d) $\int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx$.

Frage 5 (3 Punkte)
Welcher der folgenden Ausdrücke ist richtig für differenzierbare Funktionen f und g, wobei die Funktion g auf ihrem Definitionsbereich verschieden von 0 ist?

(a) $\int \frac{f'(x)}{g(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \int \frac{f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}\, dx$.

(b) $\int \frac{f'(x)}{g(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \int \frac{g'(x)}{(g(x))^2}\, dx$.

(c) $\int \frac{f'(x)}{g(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \int \frac{f(x)}{(g(x))^2}\, dx$.

(d) $\int \frac{f'(x)}{g(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + \int \frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)}\, dx$.

Frage 6 (3 Punkte)
Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\, x + (3\, x^3 + 1)\, e^{x^3}\right]\, dx$$

ist

(a) $x^2 + x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(b) $3\, x + 2\, x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(c) $3\, x^2 + x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

(d) $3\, x^2 + 2\, x\, e^{x^3} + C, \quad C \in \mathbb{R}$.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} a\,x\,\ln(x) & \text{für } 1 \leq x \leq \sqrt{e} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist eine Dichtefunktion, wenn:

(a) $a = 2$.

(b) $a = 4$.

(c) $a = 6$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Frage 9 (3 Punkte)
Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ sind orthogonal und $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 16$. Daraus folgt:

(a) $\|\mathbf{a}\| = 0$.

(b) $\|\mathbf{a}\| = 3$.

(c) $\|\mathbf{a}\| = 4$.

(d) $\|\mathbf{a}\|$ kann ohne Kenntnis der Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht bestimmt werden.

Frage 10 (3 Punkte)
Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welches der folgenden Systeme ist linear unabhängig?

(a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

(c) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$.

(d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Frage 11 (3 Punkte)
Sei A eine 7×5 Matrix. Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat die Lösungsmenge

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,:\, \mathbf{x} = \mathbf{u} + t\,\mathbf{v} + s\,\mathbf{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}\}$$

wobei $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5$ und das System von Vektoren $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ linear unabhängig ist.
Es gilt:

(a) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(c) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(d) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

Frage 12 (3 Punkte)
A und B sind reguläre Matrizen. Überdies ist A symmetrisch. Die Determinante von

$$B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1}$$

entspricht:

(a) $\frac{1}{\det(A)\,\det(B)}$.

(b) $\det(A)\,\det(B)$.

(c) $\frac{\det(B)}{\det(A)}$.

(d) $\frac{\det(A)}{\det(B)}$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
X sei eine stetige Zufallsvariable mit Werten in $[0,1]$ und Dichtefunktion f. Es gilt:

$$\int_0^1 (3x+2)\, f(x)dx = 5.$$

Es folgt, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X gegeben ist durch

(a) 0.5.

(b) 1.

(c) 1.5.

(d) 2.

Frage 2 (4 Punkte)
Seien $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren in $\mathbb{R}^3$. Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ orthogonal?

(a) $t = -1$.

(b) $t = 0$.

(c) $t = 1$.

(d) Für kein $t \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 1.

(b) hat Rang 2.

(c) hat Rang 3.

(d) hat Rang 4.

Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 3 & m & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

wobei $m \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) A ist regulär für alle $m \in \mathbb{R}$.

(b) A ist singulär für alle $m \in \mathbb{R}$.

(c) A ist regulär genau dann, wenn $m \in \{1, 3\}$.

(d) A ist singulär genau dann, wenn $m \in \{1, 3\}$.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und es gelte:

$$A^2\mathbf{x} + A\mathbf{x} - 6\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Es folgt, dass:

(a) $\lambda = 0$.

(b) $\lambda = 1$.

(c) $\lambda = 2$.

(d) Kein Eigenwert von A existiert, sodass die Gleichung erfüllbar wäre.

Frage 6 (4 Punkte)
Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &\sqrt{y_{k+1} - (1 + a^2)\, y_k} = 2\,a, \text{ wobei } a > 0, \\ &y_0 = 6 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = -10\,(1 + a^2)^k - 4$.

(b) $y_k = -2\,(1 + a^2)^k + 4$.

(c) $y_k = 10\,(1 + a^2)^k - 4$.

(d) $y_k = 2\,(1 + a^2)^k + 4$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$5\,(y_{k+1} - 3\,y_k) + 7 = 3\,y_{k+1} - 6\,y_k + 10$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (4 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2\,(a+3)\,y_{k+1} - 2\,y_k + 2\,(a+3)\,(a-2) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$, konvergiert monoton gegen 1 genau dann, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a < -4$.

(c) $a = -1 + \sqrt{5}$.

(d) $a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{41}\right)$.

Frühling 2019

Dr. Reto Schuppli

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2019

Dr. Reto Schuppli*

24. Juni 2019

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (35 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (35 Punkte)

(a) (10 Punkte)
Swisslos ist in der deutschsprachigen Schweiz staatlicher Monopolist im Bereich Zahlenlottos und Sportwetten und bietet unter anderem die Produkte Swiss Lotto und Euro Millions an. Bei einem Verkaufspreis x pro Los der Sorte (1) Swiss Lotto und einem Verkaufspreis y pro Los der Sorte (2) Euro Millions lauten dieNachfragefunktionen:

$$\begin{aligned} \text{Nachfrage nach Swiss Lotto:} \quad q_{d_1}(x,y) &= \quad 39'500 - 1'000\,x + 400\,y, \\ \text{Nachfrage nach Euro Millions:} \quad q_{d_2}(x,y) &= \qquad 6'500 + 300\,x - 800\,y. \end{aligned}$$

Gesucht sind die Preise x und y, bei denen der Gesamtumsatz maximal ist.
Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Nachfragemengen auch abgesetzt werden.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt und berechnen Sie auch den maximalen Umsatz.

(b) (10 Punkte)
Gesucht ist der Punkt $P = (x^*, y^*)$ mit $x^* > 0$ und $y^* > 0$ auf der Kurve

$$\varphi(x,y) = c\,x^2 + (1-c)\,y^2 - 2 = 0, \text{ wobei } c \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < c < 1,$$

sodass das Rechteck mit achsenparallelen Seiten, einer Ecke im Punkt $(0,0)$ und dergegenüberliegenden Ecke in $P = (x^*, y^*)$ maximale Fläche hat.

Ermitteln Sie Kandidaten (x^*, y^*) für mögliche Maxima in Abhängigkeit des Parameters c.

Wichtige Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei den potentiellen Kandidaten um Extremstellen handelt und von welcher Art (Maxima oder Minima) sie sind, wird **nicht** verlangt.

(c) (5 Punkte)

Für eine Person, die am t.m.j geboren ist, sei der „Geburtstagsvektor“ $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} t \\ m \\ j \end{pmatrix}$.

Zum Beispiel ist der Geburtstagsvektor von Leonhard Euler, der am 15. April 1707 geboren wurde, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1707 \end{pmatrix}$.

Gegeben sind die Geburtstagsvektoren von

$$\text{Hermann Grassmann } \mathbf{g}_1 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 1809 \end{pmatrix},$$
$$\text{William Hamilton } \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1788 \end{pmatrix},$$
$$\text{„Unbekannt“}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 29 \\ m \\ 1851 \end{pmatrix} \text{ und}$$
$$\text{Carl Friedrich Gauß } \mathbf{g}_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 4 \\ 1777 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $m \in \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ ist es möglich, den Geburtstagsvektorvon Carl Friedrich Gauß als eindeutige Linearkombination der Geburtstagsvektoren vonHermann Grassmann,William Hamilton und „Unbekannt“ zu schreiben?

(d1) (6 Punkte)
Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe.Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch gelegentliche Arbeiten nur $10'000$ Franken verdient.Er beschliesst, jedes Jahr $10\,\%$ seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

Wie gross ist sein Vermögen V_n n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20 + n)$-ten Geburtstag?

Wie gross ist also sein Vermögen V_{10} am 30. Geburtstag?

(d2) (4 Punkte)
Max bekommt von seinen Eltern zum 20. Geburtstag einen grosszügigen Vorschuss in Höhe von 2 Millionen Franken auf sein Erbe.Max lebt einen extravaganten Lebensstil, obwohl er bis zu seinem 20. Lebensjahr keine eigenen Ersparnisse anlegen konnte und selbst pro Jahr durch

gelegentliche Arbeiten nur 10'000 Franken verdient.Er beschliesst, jedes Jahr 10 % seines jeweiligen Vermögens auszugeben.

V_n bezeichnet sein Vermögen n Jahre nach seinem 20. Geburtstag, also am $(20+n)$-ten Geburtstag $(n = 0, 1, 2, ...)$.

(*Wichtige Bemerkung:* Wenn Sie Aufgabe **(d1)** nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $V_n = 2 \cdot 10^6 \cdot 0.9^n + 2.2 \cdot 10^5$.)

Welchem Wert würde sich V_n nähern, wenn Max unendlich lange leben würde?

Wann würde sein Vermögen die Grenze von 500'000 Franken unterschreiten?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (65 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (33 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y)$ habe in (x_0,y_0) einen stationären Punkt, d.h. $f_x(x_0,y_0)=0$ und $f_y(x_0,y_0)=0$.
Hinreichend dafür, dass f in (x_0,y_0) einen *Sattelpunkt* hat, ist

(a) $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ und $f_{yy}(x_0,y_0)>0$.

(b) $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ und $f_{yy}(x_0,y_0)<0$.

(c) $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ und $f_{yy}(x_0,y_0)<0$.

(d) Keine der vorangehenden Bedingungen ist hinreichend für einen Sattelpunkt in (x_0,y_0).

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktion

$$f(x,y)=x^2\,(e^y-2)-y^2$$

hat ein lokales Maximum in $P=(0,0)$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

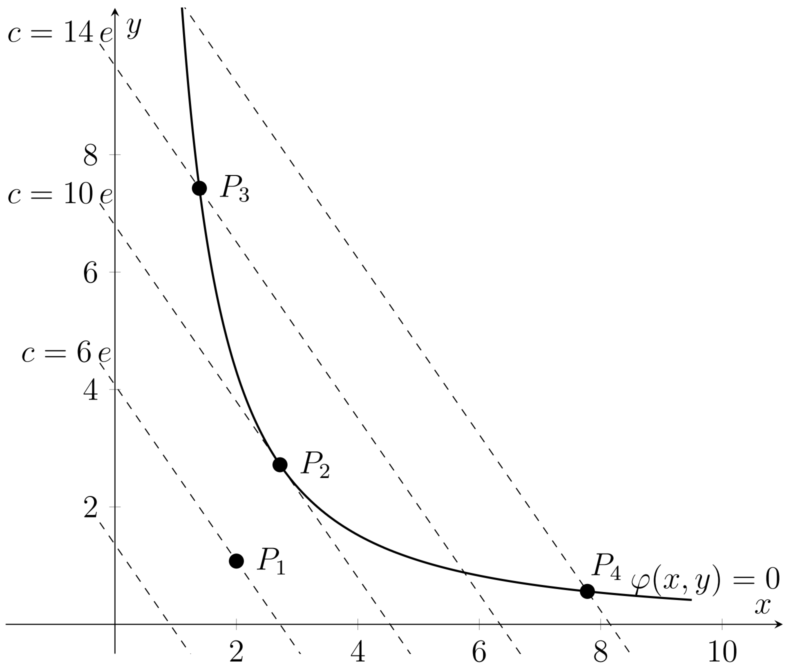
(a) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=x^3+2\,y^4-4\,x\,y=0$ ein lokales Minimum in $P=(1,1)$.

(b) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=x^3+2\,y^4-4\,x\,y=0$ ein lokales Maximum in $P=(0,0)$.

(c) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y)=x^3+2\,y^4-4\,x\,y+1=0$ ein lokales Maximum in $P=(0,0)$.

(d) Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^3 + 2\,y^4 - 4\,x\,y = 0$ ein lokales Minimum in $P = (0, 0)$.

Frage 3 (4 Punkte)
Die folgende Abbildung zeigt die Niveaulinien der Funktion $f(x, y) = 6\,x + 4\,y$ zu verschiedenen Niveaus c und die Kurve $\varphi(x, y) = \frac{3}{5}\ln(x) + \frac{2}{5}\ln(y) - 1 = 0$.



Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ an der Stelle

(a) P_1 ein Minimum.

(b) P_2 ein Minimum.

(c) P_2 ein Maximum.

(d) P_4 ein Maximum.

Frage 4 (3 Punkte)
Die Funktionen f und g schneiden sich bei a, b und c, wobei $a < b < c$.Zwischen a und b verläuft der Graph von g über dem Graphen von f, zwischen b und c verläuft der Graph von g unterhalb des Graphen von f.

Der Inhalt der von f und g zwischen a und c eingeschlossenen Fläche ist gleich

(a) $\int_a^c (g(x) - f(x))\,dx$.

(b) $\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx - \int_b^c |g(x) - f(x)|\,dx$.

(c) $\int_b^c (f(x) - g(x))\,dx - \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \left(2\,t^2 - \frac{1}{2}\,t + 3 \right)\, dt.$$

Dann folgt

(a) $f(0) = 3$.

(b) $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

(c) $f''(0) = -\frac{1}{2}$.

(d) $f'''(0) = 3$.

Frage 6 (3 Punkte)
A sei eine $(n \times m)$-Matrix, B sei eine $(p \times q)$-Matrix.
Wenn die Matrix $C = B\,A$ existiert, folgt:

(a) $n = q$ oder $m = p$.

(b) $m = p$ und $q = n$.

(c) $n = p$ und $m = q$.

(d) $n = m = p = q$.

Frage 7 (4 Punkte)
Eine Matrix M heisst *idempotent*, falls $M^2 = M$ ist.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn M idempotent ist, dann folgt $\det(M) = 1$.

(b) M ist genau dann idempotent, wenn $\det(M) = 0$ oder $\det(M) = 1$ gilt.

(c) Wenn $\det(M) = 0$ ist, dann ist M idempotent.

(d) Keine der vorangehenden Aussagen ist richtig.

Frage 8 (3 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist richtig für eine reellwertige Funktion f?

(a) Der Gradient von f in einem lokalen Extremum ist immer der Nullvektor.

(b) Der Gradient von f im Punkt (x_0, y_0) ist immer parallel zur Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0) .

(c) Der Vektor, der die Richtung des steilsten Abstiegs des Graphen von f im Punkt (x_0, y_0) angibt, ist parallel zur Tangenten an die Niveaulinie von f im Punkt (x_0, y_0).

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 9 (3 Punkte)
Welche der folgenden Behauptungen ist **nicht wahr**?

(a) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(b) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

(c) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig.

(d) Das System $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabhängig.

Frage 10 (4 Punkte)
Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit m Gleichungen und n Unbekannten und $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
Nachdem man den Gaußschen Algorithmus angewendet hat, bekommt man aus der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A, \mathbf{b})$ die neue Matrix $(A^*, \mathbf{b}^*)$, die genau k Zeilen mit lauter Nullen hat.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Wenn $k \geq 1$ ist, dann hat das System keine Lösung.

(b) Wenn $k = 1$ ist, dann hat das System genau eine Lösung.

(c) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension$k$.

(d) Wenn $k \geq 1$ ist und $n > m$ ist, dann hat das System unendlich viele Lösungen, der Lösungsraum hat die Dimension$n + k - m$.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Gegeben ist eine Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{und} \qquad f(0) = 0.$$

Dann muss gelten:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + 2.$

(b) $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + x - \ln(2).$

(c) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(2).$

(d) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) + 2.$

Frage 2 (5 Punkte)
Die stetige Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + b\,x^2 & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}\big[X\big] = \frac{17}{24}$.

Dann gilt:

(a) $a = 6,\ b = -6.$

(b) $a = 1,\ b = \frac{3}{2}.$

(c) $a = 6,\ b = -5.$

(d) $a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{2}.$

Frage 3 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 3\ln(x^2 + y^2) - (3 - a)\ln(y).$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Länge des Gradienten an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 1)$ gleich 5?

(a) $a = \pm 4.$

(b) $a = \pm 2.$

(c) $a = \pm\sqrt{2}.$

(d) Es gibt kein solches $a \in \mathbb{R}$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 10 & 13 & 20 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) den Rang 1.

(b) den Rang 2.

(c) den Rang 3.

(d) den Rang 4.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -2$.

(b) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 2$.

(c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = 1$.

(d) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda = -1$.

Frage 6 (3 Punkte)
Die Folge $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $y_k = 3 \cdot 2^k - 1$ löst die Differenzengleichung

(a) $2\,y_{k+1} - y_k = -1$.

(b) $y_{k+1} + 2\,y_k - 1 = 0$.

(c) $y_{k+1} + 2\,y_k - 2 = 0$.

(d) $y_{k+1} - 2\,y_k = 1$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{3}{4}\,y_k - \pi\,e\,y_{k+1} + \frac{1}{8}\,y_k - 3.2 = -2\,y_k \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (5 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$(a+1)\,y_{k+1} + (3-a)\,y_k + 8 = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$,ist genau dann oszillierend und konvergent, wenn

(a) $-1 < a < 1$.

(b) $1 < a < 3$.

(c) $a < -1$ oder $a > 3$.

(d) Die allgemeine Lösung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ oszillierend und konvergent.

Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2019

Dr. Reto Schuppli*

5. Februar 2020

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (9 Punkte)

Ein Produzent stellt zwei Güter her.p_1 bezeichne den Preis pro Mengeneinheit von Gut 1 undp_2 den Preis pro Mengeneinheit von Gut 2.Die Nachfragemengen nach den Gütern in Abhängigkeit des jeweiligen Preises sind:

$$\begin{aligned} &\text{Nachfrage nach Gut 1:} \quad & x &= 100 - 5\,p_1, \\ &\text{Nachfrage nach Gut 2:} \quad & y &= 200 - 4\,p_2. \end{aligned}$$

Die Herstellungskosten betragen

$$K(x,y) = x^2 + x\,y + y^2.$$

Gesucht sind die Preise p_1^* und p_2^*, bei denen der Reingewinn, d.h. Erträge minus Kosten, maximal ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass die gesamten Nachfragemengen hergestellt werden können.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Maximum handeltund berechnen Sie auch den maximalen Reingewinn.

(b) (9 Punkte)

Ein Textilfabrikant bezieht für seine T-Shirt Produktion Baumwolle von zwei verschiedenen Herstellern.Er bezieht x Tonnen Baumwolle des ersten Herstellers und y Tonnen des zweiten Herstellers.Die dadurch entstehenden Beschaffungskosten sind:

$$\begin{aligned} &\text{Kosten für Baumwolle des ersten Herstellers:} \quad & K_1(x) &= \tfrac{3}{4}\,x^2 + 400, \\ &\text{Kosten für Baumwolle des zweiten Herstellers:} \quad & K_2(y) &= \tfrac{11}{4}\,y^2 + 10\,y + 300. \end{aligned}$$

Der Textilfabrikant verfolgt als Unternehmensziel die kostenminimale Produktion einergewissen Anzahl von T-Shirts, für die er insgesamt 100 Tonnen Baumwolle benötigt.

Gesucht sind die Bezugsmengen x^* und y^*, bei denen die Gesamtmenge an benötigter Baumwolle am wenigsten kostet.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt und berechnen Sie die minimalen Rohstoffkosten.

(c) (8 Punkte)
Für die Fertigung der Produkte P_1, P_2, P_3 und P_4 werden jeweils die vier Maschinen M_1, M_2, M_3 und M_4 benötigt.Die Fertigungszeiten (pro Einheit des Produktes in Minuten) sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	10	7	8	4
M_2	5	5	4	11
M_3	8	9	6	6
M_4	10	m	9	4

Jede der Maschinen sei 16 Stunden pro Tag in Betrieb.

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Fertigungszeiten, der Laufzeit der Maschinen pro Tag und den pro Tag gefertigten Einheiten der Produkte in einem Gleichungssystem.

Für welche positive $m > 0$ ist es nicht möglich zu bestimmen, wie viele Einheiten dereinzelnen Produkte pro Tag auf den Maschinen gefertigt werden können?

(d1) (6 Punkte)
Die Eltern von Dora haben für ihre Tochter ein Sparkonto eingerichtet, damit Dora jeweilsihre Sommerferien finanzieren kann.Zu Jahresanfang zahlen die Eltern CHF $5'000$ auf das Konto ein. Dora hebt immer am 1. Juli jeweils 60 % des vorhandenen Kapitals ab.Die Verzinsung erfolgt am Jahresende anteilsmässig mit $i = 1.25$ % p.a.Ansonsten gibt es keine Kontobewegungen.

Bestimmen Sie eine explizite Formel für den Kontostand V_n am Ende des n-ten Jahres nach Eröffnung des Kontos.

Hinweis:
Anteilsmässig bedeutet, dass ein Betrag, der nur einen Bruchteil x des Jahres auf dem Konto ist, nur den Bruchteil x der jährlichen Zinsen abwirft.

(d2) (4 Punkte)
Die Eltern von Dora haben für ihre Tochter ein Sparkonto eingerichtet, damit Dora jeweilsihre Sommerferien finanzieren kann.Zu Jahresanfang zahlen die Eltern CHF $5'000$ auf das Konto ein. Dora hebt immer am 1. Juli jeweils 60 % des vorhandenen Kapitals ab.Die Verzinsung erfolgt am Jahresende anteilsmässig mit $i = 1.25$ % p.a.Ansonsten gibt es keine Kontobewegungen.

(*Wichtige Bemerkung:* Wenn Sie Aufgabe **(d1)** nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $V_n = 3440\,(1 - 0.4825^n)$.)

Welchem Wert würde sich V_n nähern, wenn die Eltern und Dora unendlich lange leben würden?

Am Ende welchen Jahres würde der Kontostand V_n CHF $3'400$ erstmals übersteigen?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen und die Anweisungen auf dem Multiple-Choice-Antwortbogen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y)$ habe in (x_0,y_0) einen stationären Punkt, d.h. $f_x(x_0,y_0)=0$ und $f_y(x_0,y_0)=0$. Hinreichend dafür, dass f in (x_0,y_0) ein *lokales Extremum* hat, ist

(a) $f_{xy}(x_0,y_0)f_{yx}(x_0,y_0)-f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)<0$.

(b) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-\left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2=0$.

(c) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-\left(f_{xy}(x_0,y_0)\right)^2<0$.

(d) Keine der vorangehenden Bedingungen ist hinreichend für eine lokale Extremstelle in (x_0,y_0).

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktion

$$f(x,y)=x^2\,y$$

hat unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y)=x+y=0$$

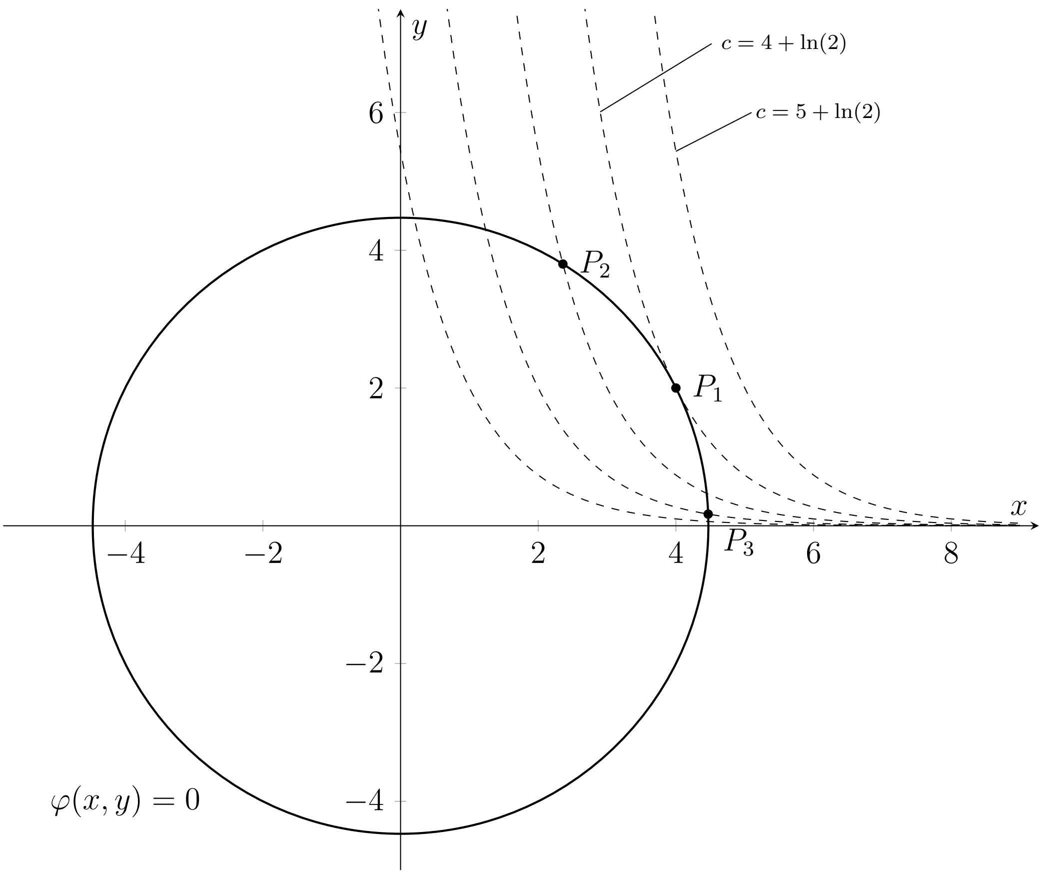
(a) ein Maximum im Punkt P = (0,0).

(b) ein Minimum im Punkt P = (0,0).

(c) ein Minimum im Punkt P = (1,-1).

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 3 (3 Punkte)
Die folgende Abbildung zeigt die Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = x + \ln(y)$ zu verschiedenen Niveaus c und die Kurve $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 20 = 0$.



Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ an der Stelle

(a) P_1 ein Maximum.

(b) P_1 ein Minimum.

(c) P_2 ein Maximum.

(d) P_3 ein Minimum.

Frage 4 (3 Punkte)
Für die Funktionen f und g gilt:

$$\int_b^a \mu\, f(x)\, dx = k_1 \text{ und } \int_a^b \rho\, g(x)\, dx = k_2,$$

wobei $\mu, \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.
Dann folgt:

(a) $\int_a^b \left(g(x) + f(x)\right)\, dx = \mu\, k_1 + \rho\, k_2$.

(b) $\int_a^b \left(g(x) + f(x)\right)\, dx = \frac{k_1}{\rho} - \frac{k_2}{\mu}$.

(c) $\int_a^b \left(g(x) + f(x)\right)\, dx = \frac{k_1}{\mu} + \frac{k_2}{\rho}$.

(d) $\int_a^b \left(g(x) + f(x)\right)\, dx = \frac{k_2}{\rho} - \frac{k_1}{\mu}$.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_x^4 \left(3\,t^2 - t + 1\right)\,dt.$$

Dann folgt

(a) $f(0) = 1$.

(b) $f'(0) = -1$.

(c) $f''(0) = -1$.

(d) $f'''(0) = 0$.

Frage 6 (3 Punkte)
A und B seien $(n \times n)$-Matrizen.

Dann folgt:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(b) $(A+B)^2 = AB + B^2 + A^2 + BA$.

(c) $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$.

(d) $(A+B)^2 = 2\,A + 2\,B$.

Frage 7 (4 Punkte)
Eine Matrix M heisst *idempotent*, falls $M^2 = M$ ist.

M sei eine invertierbare, idempotente $(n \times n)$-Matrix.

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $\det(\lambda\,M) = \lambda\,\det(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

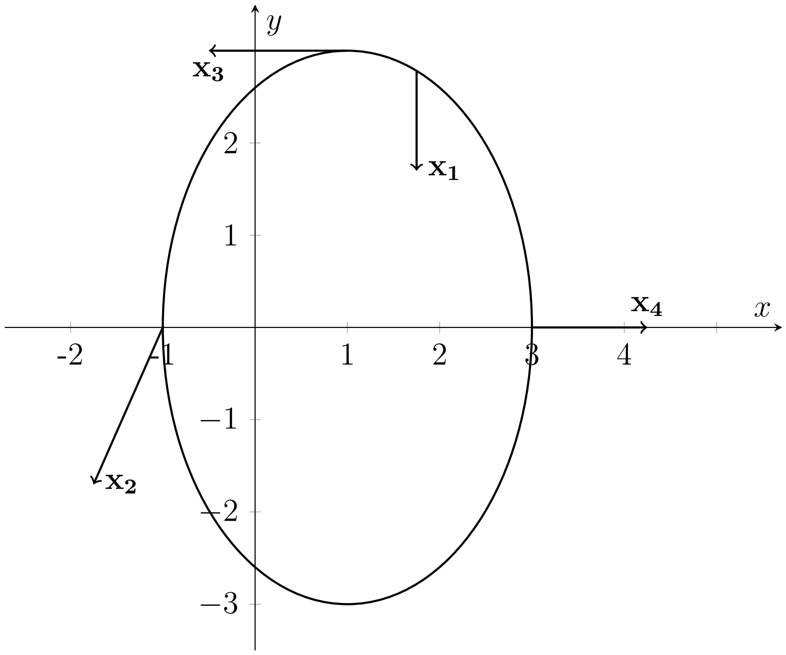
(b) $\det(M) = 1$.

(c) $\det(M) = \det(M^{-1})$.

(d) $\det(M) = \det(M^T)$.

Frage 8 (3 Punkte)
Wir betrachten die Niveaulinie $f(x, y) = 1$ der Funktion

$$f(x, y) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$



Welcher der folgenden Vektoren zeigt in die Richtung des Gradienten von f in einem Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$?

(a) $\mathbf{x_1}$.

(b) $\mathbf{x_2}$.

(c) $\mathbf{x_3}$.

(d) $\mathbf{x_4}$.

Frage 9 (3 Punkte)
Sei $A = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, ..., \mathbf{a_k}\}$ ein System von n-dimensionalen Vektoren.
Welche der folgenden Behauptungen ist **falsch**?

(a) Falls $\mathbf{a_j} = \mathbf{a_i}$ für gewisse $j \neq i$, dann ist A linear abhängig.

(b) Falls A linear unabhängig ist, dann ist auch jedes Teilsystem von A linear unabhängig.

(c) Falls A linear abhängig ist, dann gilt

$$\mathbf{a_k} = \lambda_1 \, \mathbf{a_1} + \lambda_2 \, \mathbf{a_2} + ... + \lambda_{k-1} \, \mathbf{a_{k-1}}$$

für gewisse $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, ..., k-1)$.

(d) Falls $k < n$ und A linear unabhängig ist, dann gibt es einen n-dimensionalen Vektor$\mathbf{a_{k+1}}$, sodass $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, ..., \mathbf{a_k}, \mathbf{a_{k+1}}\}$auch linear unabhängig ist.

Frage 10 (4 Punkte)
Für das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ haben wir $\mathrm{rg}(A) = 4$, wobei A eine (4×7)-Matrix ist.
Dann gilt:

(a) Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(b) Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraumhat die Dimension 3.

(c) Das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraumhat die Dimension 4.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(n\,x)\, e^{\cos(n\,x)}\, dx,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, hat den Wert

(a) $\frac{1}{n}\,(e-1)$.

(b) $\frac{1}{n}\, e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}$.

(c) $\frac{1}{n} - 1$.

(d) Keiner der obigen Werte ist korrekt.

Frage 2 (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\ln(x) & \text{für } x \geq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}_+$ ist f eine Dichtefunktion?

(a) $c = 0$.

(b) $c = 1$.

(c) $c = \ln(2)$.

(d) $c = e$.

Frage 3 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4\,x^{0.25}\,y^{0.75}.$$

In welchem Punkt (x_0, y_0) der Niveaulinie $f(x,y) = 8$ ist die Richtung der stärksten Funktionszunahme durch den Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 48 \end{pmatrix}$ gegeben?

(a) $(x_0, y_0) = (1, 2\sqrt[3]{2})$.

(b) $(x_0, y_0) = (16, 1)$.

(c) $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

(d) $(x_0, y_0) = (4, \sqrt[3]{4})$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) den Rang 2.

(b) den Rang 3.

(c) den Rang 4.

(d) den Rang 5.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

M hat die Eigenwerte

(a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(b) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

(c) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$.

(d) $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 2$.

Frage 6 (3 Punkte)
Für welche reellen Werte A und B stellt die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = 3 + 2^k\,, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

eine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+1} = A\,y_k + B\,, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

dar?

(a) $A = 2$ und $B = 3$.

(b) $A = 2$ und $B = -3$.

(c) $A = -2$ und $B = 3$.

(d) $A = -2$ und $B = -3$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$-\pi\, y_{k+1} - e^2\, y_k + (\pi - e) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Frage 8 (5 Punkte)
Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$a\,(a-2)\,y_k - (a-2)^2\,y_{k+1} + 4 = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$,ist genau dann monoton und konvergent, wenn

(a) $a < 0$.

(b) $0 < a < 1$.

(c) $a > 2$

(d) Die allgemeine Lösung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ monoton und konvergent.

Frühling 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

22. Juni 2020

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

(a) (14 Punkte)
Das Newton'sche Abkühlungsgesetz beschreibt, wie sich die Temperatur eines Körpers, der sich in einem Raum mit konstanter Temperatur T befindet, mit der Zeit verändert (das Gesetz beschreibt Abkühlung und Erwärmung gleichermassen). Im Detail besagt das Abkühlungsgesetz, dass die Änderung der Temperatur eines Körpers zwischen Zeitpunkt k und $k+1$ proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zum Zeitpunkt k und der Umgebungstemperatur T ist. Die Proportionalitätskonstante hängt von der Beschaffenheit des Körpers ab und sei durch den Parameter $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegeben.

(a1) Die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt k sei y_k. Leiten Sie eine Differenzen-gleichung her, die die Entwicklung der Temperatur y_k für $k = 1, 2, \ldots$ abhängig von der anfänglichen Temperatur y_0 und der Raumtemperatur T beschreibt.

(a2) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung aus **(a1)**.

(a3) Für welche Werte λ sinkt die Temperatur des Objekts auf lange Sicht (d.h., für $k \to \infty$) unter 30 (°C), gegeben dass $y_0 = 100$ (°C) und $T = 20$ (°C)? Welche dieser Werte wiederum sind auch physikalisch plausibel?

(a4) Sei $y_0 = 30$ (°C) und $T = 15$ (°C). Bestimmen Sie den Parameter λ so, dass die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $k = 10$ noch 16.6 (°C) beträgt. Runden Sie auf eine Dezimalstelle. Wie viel Zeit vergeht, bis y_k wieder über 20 (°C) steigt, wenn zum Zeitpunkt $k = 10$ die Raumtemperatur auf $T = 25$ (°C) erhöht wird?

(b) (10 Punkte)
Das folgende Modell soll die Entwicklung des Arbeitsmarktes eines bestimmten Landes abbilden. Die Variablen x_t und y_t beschreiben die Anzahl Erwerbstätiger zum Zeitpunkt t für zwei unterschiedliche Segmente des Arbeitsmarktes, die Variable z_t die Anzahl Erwerbsloser zum Zeitpunkt t. Es wird unterstellt, dass

$$\begin{array}{rclclcl} x_{t+1} & = & 0.9\,x_t & + & 0.1\,y_t & & \\ y_{t+1} & = & 0.1\,x_t & + & 0.8\,y_t & + & m\,z_t \\ z_{t+1} & = & & & 0.1\,y_t & + & (1-m)\,z_t \end{array}$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $m \in [0, 1]$.
Für

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

sagen wir, dass der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht ist, wenn

$$\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, d.h., wenn das Verhältnis der Gruppengrössen über die Zeit konstant bleibt.Für welche Werte m ist der Arbeitsmarkt im Gleichgewicht mit $\lambda = 1$?

Verwenden Sie das Gauß-Verfahren, um alle (möglichen) Gleichgewichtsvektoren $\mathbf{u}_t$ zu bestimmen. Berechnen Sie abschliessend die Arbeitslosenquote im implizierten Gleichgewicht.

(c) (10 Punkte)
Ein Fischer befindet sich am Flussufer und möchte zu seinem Boot, welches unter den Koordinaten $H = (0, h)$ auf dem Fluss vor Anker liegt. Der Verlauf des Flussufers lässt sich gut durch eine nach links und rechts offene Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschreiben, wobei $a, b \in \mathbb{R}_{++}$. Bestimmen Sie diejenigen Punkte am Flussufer, von denen aus der Fischer die geringste Distanz zu seinem Boot schwimmen muss.
Tipp: Veranschaulichen Sie sich das Problem zunächst graphisch, um eine Intuition für die

Situation und den Lösungsansatz zu bekommen.

(d) (6 Punkte)
Die private Altersvorsorge gewinnt durch das Altern der Bevölkerung mehr und mehr an Bedeutung. Eine neue Gesetzesinitiative soll Anreize für eine Änderung des Sparverhaltens schaffen. Der (stochastische) Einfluss der Initiative auf den jährlichen Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts soll nun modelliert werden. Es wird unterstellt, dass diese Änderung des Sparbetrags

durch eine stetige Zufallsvariable D mit U-quadratischer Verteilung modelliert werden kann. Die Dichte von D sei gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12}{(b-a)^3} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(d1) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Sparbetrag eines durchschnittlichen Haushalts um mindestens CHF 200 erhöht wird.

(d2) Berechnen Sie für $a = -500$ und $b = 1000$ den erwarteten Anstieg des (durchschnittlichen) Sparbetrags $\mathbb{E}[D]$.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} - 1 = 0$ hat die Funktion $f(x,y) = 2\,x + 1$ ein Minimum in welchem Punkt?

(a) $P = (0,3)$.

(b) $P = (4,10)$.

(c) $P = (-5,3)$.

(d) $P = (4,-4)$.

(e) Keiner der oben gegebenen Punkte ist ein Minimum der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktion f hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert als $g(x,y) = e^{-f(-x,-y)}$ mit Definitionsgebiet $D_g = D_f$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) g hat ein lokales Maximum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(b) g hat ein lokales Minimum im Punkt $(-x_0, -y_0)$.

(c) g hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0).

(d) g hat ein lokales Minimum im Punkt (x_0, y_0).

Frage 3 (4 Punkte)
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^4}$, wobei $m > 0$, konvergiert gegen $a(m) \in \mathbb{R}$, wobei $a(m)$ von dem Parameter m abhängt.
Es gilt:

(a) $a(m) > \frac{4\,m}{3}$ für alle $m \geq 1$.

(b) $a(m) < \frac{4\,m}{3}$ für alle m.

(c) $a(m) < m$ für alle m.

(d) $a(m) < \frac{m}{2}$ für alle m.

Frage 4 (2 Punkte)
Sei f eine stetige Funktion und $a, x \in D_f$ mit $a < x$. Sei g definiert als $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $f'(x) = g(x)$.

(b) $g'(x) = f(x) - f(a)$.

(c) $g \circ f$ ist eine Stammfunktion von f.

(d) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f(x)$.

(e) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\,x^3} + 2\,x\,c\,e^{-c\,x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases} .$$

Dann ist f eine Dichtefunktion

(a) für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) für kein $c \in \mathbb{R}$.

(c) für alle $c > 0$.

(d) für $c = \ln(0.75)$.

(e) für $c = \ln(\frac{4}{3})$.

Frage 6 (3 Punkte)
Sei A eine $(n \times m)$-dimensionale Matrix, und sei B eine $(p \times q)$-dimensionale Matrix.
Wenn die Matrizen $C = B\,A$ und $D = A\,B$ existieren und es gilt $C = D$, dann folgt daraus:

(a) $n = m = p = q$.

(b) $n = q$ und $m = p$ und $m \neq q$.

(c) $m = p$ und $q = n$ und $n \neq p$.

(d) $n = p$ und $m = q$ und $n \neq m$.

Frage 7 (2 Punkte)
Eine (4×5)-dimensionale Matrix A hat den Rang 3. B ist eine (8×5)-dimensionale Matrix, in welcher jede Zeile von A genau zweimal vorkommt. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(B) = 1$.

(b) $\text{rg}(B) = 3$.

(c) $\text{rg}(B) = 4$.

(d) $\text{rg}(B) = 5$.

(e) $\text{rg}(B) = 6$.

(f) $\text{rg}(B) = 8$.

Frage 8 (3 Punkte)
Seien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, und $\mathbf{b}$ m-dimensionale Vektoren und $m \geq 2$. Der Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, und $\mathbf{a}_3$ genau dann, wenn gilt:

(a) $\text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = 3$.

(b) $\text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = m$.

(c) $\det([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 0$.

(d) $\text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 3$.

(e) $\text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \text{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$.

Frage 9 (3 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist **nicht wahr**?

(a) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn sie nicht regulär ist.

(b) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn das System ihrer Zeilenvektoren linear abhängig ist.

(c) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von ihr ist.

(d) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

Frage 10 (4 Punkte)
Sei $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ eine Folge, welche die Differenzengleichung

$$y_{k+1} = A\, y_k + B,$$

mit $A \in (0,1), B \in \mathbb{R}$ erfüllt. Sei $y^\star = \frac{B}{1-A}$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ divergiert.

(b) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ konvergiert und $y_k > y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ konvergiert und $y_k < y^\star$ für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(d) Keine der oben gegebenen Antwortmöglichkeiten ist im Allgemeinen korrekt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = e^{-\frac{1}{3}x^3+x+y^2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $P = (1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(b) $P = (1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

(c) $P = (0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.

(d) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(e) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{2\,e^{2\,x}}{e^{2\,x}+1} \qquad \text{mit} \qquad f(0) = \ln(2).$$

Es folgt:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x}+1)$.

(b) $f(x) = \ln(e^{2x}+1) + \ln(2)$.

(c) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x})$.

(d) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x}) + \ln(2)$.

(e) $f(x) = 2\ln(e^{2x}+1) - \ln(2)$.

Frage 3 (4 Punkte)
Die stetige Zufallsvariable X habe die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x^3 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}\big[X\big] = 0.75$.

Es folgt:

(a) $a = 3$, $b = 0$.

(b) $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$.

(c) $a = -1$, $b = 4$.

(d) $a = 0$, $b = 2$.

(e) $a = \frac{12}{5}$, $b = \frac{3}{4}$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2\ \ln(x^2 + y^2) + (3 - a)\ \ln(y^2), \qquad x, y > 0.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist der Gradient der Funktion f an der Stelle $(1, 1)$ orthogonal zum Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $a = 3$.

(b) $a = 6$.

(c) $a = 9$.

(d) $a = 12$.

(e) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) Rang 1.

(b) Rang 2.

(c) Rang 3.

(d) Rang 4.

(e) Rang 5.

Frage 6 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

(a) A ist singulär für alle $m \in \mathbb{R}$.

(b) $m = -1$.

(c) $m = 0$.

(d) $m = 1$.

(e) $m = 2$.

Frage 7 (4 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $B = A^3$ hat den Eigenwert

(a) 64.

(b) 27.

(c) 8.

(d) 5.

(e) 1.

Frage 8 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{1}{3}\,y_k - \frac{3}{4}\,y_{k+1} + \frac{1}{27}\,y_k = \frac{1}{9}\,y_k + 2 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Mathematik B / Englischer Track
Prüfung Frühjahrssemester 2020

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

22. Juni 2020

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

(a) (14 Punkte)
Im Zuge der Untersuchung des Infektionsgeschehens einer bestimmten Krankheit in der Bevölkerung analysiert ein Team von Epidemiologen eine Stichprobe von $1'000'000$ Personen. Sie stellen fest, dass 20% der zum Zeitpunkt k Infizierten bis zum Zeitpunkt $k+1$ vollständig genesen sind, während ein Anteil $p \in [0, 1]$ der zum Zeitpunkt k gesunden Personen zum Zeitpunkt $k+1$ Symptome der Krankheit zeigen.

(a1) Sei y_k die Anzahl der zum Zeitpunkt k infizierten Personen. Leiten Sie eine Differenzengleichung her, die die Entwicklung von y_k für $k = 1, 2, \ldots$ bei gegebener Zahl an anfänglich Infizierten y_0 beschreibt.

(a2) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung aus **(a1)**.

(a3) Für welche Werte p sinkt der Anteil infizierter Personen in der Stichprobe auf lange Sicht (d.h., für $k \to \infty$) auf unter 0.01%, gegeben dass $y_0 = 1'000$?

(a4) Sei $y_0 = 100$ und $p = 1\%$. In diesem Fall steigt die Anzahl an infizierten Personen bis Zeitpunkt 5 auf $y_5 \approx 33'000$. Wir nehmen nun an, dass zum Zeitpunkt 5 der Anteil p auf $\tilde{p} = 0.001\%$ sinkt. Wie viel Zeit vergeht nach dem Zeitpunkt 5, bis y_k wieder unter 100 Personen sinkt?

(b) (10 Punkte)
Ein ökonomisches Modell beschreibt die gleichzeitige Entwicklung dreier wirtschaftlicher Grössen x_t, y_t, und z_t. Es wird unterstellt, dass

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_{t+1} & = & 2\,x_t & + & y_t & + & m\,z_t \\ y_{t+1} & = & x_t & + & 2\,y_t & + & z_t \\ z_{t+1} & = & & & y_t & + & 2\,z_t \end{array}$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$, wobei $m \in \mathbb{R}$.
Definieren wir

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$, so ist ein ökonomisches Gleichgewicht genau dann gegeben, wenn

$$\mathbf{u}_{t+1} = \lambda\,\mathbf{u}_t$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ und einen festen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Die Gleichgewichtsbedingung besagt, dass

$$\frac{x_{t+1}}{x_t} = \frac{y_{t+1}}{y_t} = \frac{z_{t+1}}{z_t} = \lambda$$

für alle $t = 0, 1, 2, \ldots$ Für welche Werte m besitzt das System ein Gleichgewicht mit $\lambda = 1.1$?

Verwenden Sie für diesen Fall das Gauß'sche Verfahren, um alle Gleichgewichtsvektoren $\mathbf{u}_t$ zu bestimmen.

(c) (10 Punkte)
Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}_{++}$, $v \in \mathbb{R}$ alle möglichen Punkte auf der Ellipse mit Mittelpunkt $(0, v)$ und Halbachsen a und b, sodass das Produkt ihrer Koordinaten ein Maximum oder Minimum annimmt.
Tipp: Veranschaulichen Sie sich das Problem zunächst graphisch für $v = 0$, um eine Intuition

für die Situation und den Lösungsansatz zu bekommen.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Funktion $f(x,y) = 2\,y + 1$ nimmt unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{49} - 1 = 0$ ihr Minimum an der folgenden Stelle an:

(a) $P = (4, 10)$.

(b) $P = (0, 3)$.

(c) $P = (3, -5)$.

(d) $P = (4, -4)$.

(e) Keiner der obigen Punkte ist ein Minimum von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$.

Frage 2 (3 Punkte)
Die Funktion f habe ein lokales Maximum an (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert als $g(x,y) = e^{-f(-x,-y)}$ und $D_g = D_f$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) g hat ein lokales Minimum bei $(-x_0, -y_0)$.

(b) g hat ein lokales Maximum bei $(-x_0, -y_0)$.

(c) g hat ein lokales Minimum bei (x_0, y_0).

(d) g hat ein lokales Maximum bei (x_0, y_0).

Frage 3 (4 Punkte)
Für einen Parameter $m > 0$ konvergiere die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{k^3}$ gegen $a(m) \in \mathbb{R}$, wobei $a(m)$ vom m abhängt.
Dann folgt:

(a) $a(m) < m$, für alle m.

(b) $a(m) < \frac{m}{2}$, für alle m.

(c) $a(m) < \frac{3\,m}{2}$, für alle m.

(d) $a(m) > \frac{3\,m}{2}$, für alle $m \geq 1$.

Frage 4 (2 Punkte)
Sei f eine Funktion und $a, x \in D_f$, wobei $a < x$. Wir definieren die Funktion g als $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $f'(x) = g(x)$.

(b) $g'(x) = f(x) - f(a)$.

(c) $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f(x)$.

(d) $g \circ f$ ist eine Stammfunktion von f.

(e) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} + 2\,x\,c\,e^{-c\,x^2} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}.$$

f ist eine Dichtefunktion:

(a) Für alle $c \in \mathbb{R}$.

(b) Für kein $c \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $c > 0$.

(d) Für $c = \ln(0.5)$.

(e) Für $c = \ln(2)$.

Frage 6 (3 Punkte)
Sei A eine $(n \times m)$-dimensional Matrix, und sei B eine $(p \times q)$-dimensionale Matrix.
Falls die Matrizen $C = B\,A$ und $D = A\,B$ existieren, und zusätzlich $C = D$ gilt, folgt:

(a) $n = q$ und $m = p$ und $m \neq q$.

(b) $m = p$ und $q = n$ und $n \neq p$.

(c) $n = p$ und $m = q$ und $n \neq m$.

(d) $n = m = p = q$.

Frage 7 (2 Punkte)
Eine (4×3)-dimensionale Matrix A habe Rang 2. Die Matrix B sei eine (4×6)-dimensionale Matrix, in der jede Spalte von A genau zweimal auftaucht. Dann gilt:

(a) $\mathrm{rg}(B) = 1$.

(b) $\mathrm{rg}(B) = 2$.

(c) $\mathrm{rg}(B) = 3$.

(d) $\mathrm{rg}(B) = 4$.

(e) $\mathrm{rg}(B) = 5$.

(f) $\mathrm{rg}(B) = 6$.

Frage 8 (3 Punkte)
Seien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{b}$ m-dimensionale Vektoren, wobei $m \geq 2$. Vektor $\mathbf{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ genau dann, wenn:

(a) $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = 3$.

(b) $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = m$.

(c) $\det([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 0$.

(d) $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = 3$.

(e) $\mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}]) = \mathrm{rg}([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3])$.

Frage 9 (3 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist **nicht wahr**?

(a) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn sie nicht regulär ist.

(b) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\lambda = 0$ keiner ihrer Eigenwerte ist.

(c) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn $\det(A) = 0$.

(d) Eine quadratische Matrix A ist singulär genau dann, wenn einige Zeilen linear abhängig sind.

Frage 10 (4 Punkte)
Sei $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ eine Folge, welche die Differenzengleichung erster Ordnung

$$y_{k+1} = A\,y_k + B,$$

erfüllt, wobei $A \in (0,1), B \in \mathbb{R}$. Sei $y^\star = \frac{B}{1-A}$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ divergiert.

(b) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ konvergiert und $y_k > y^\star$, für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(c) $\{y_k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ konvergiert und $y_k < y^\star$, für alle $k = 0, 1, 2, \ldots$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Betrachte die Funktion $f(x,y) = e^{\frac{1}{3}x^3 - x - y^2}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $P = (1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(b) $P = (1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

(c) $P = (0,0)$ ist ein Sattelpunkt von f.

(d) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Minimum von f.

(e) $P = (-1,0)$ ist ein lokales Maximum von f.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f mit

$$f'(x) = \frac{2\,e^{2\,x}}{e^{2\,x}+1} \qquad \text{und} \qquad f(0) = \ln(2).$$

Dann folgt:

(a) $f(x) = \ln(e^{2x}+1)$.

(b) $f(x) = \ln(e^{2x}+1) + \ln(2)$.

(c) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x})$.

(d) $f(x) = \ln(e^{x}+e^{-x}) + \ln(2)$.

(e) $f(x) = 2\ln(e^{2x}+1) - \ln(2)$.

Frage 3 (4 Punkte)
Die stetige Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + b\,x^3 & \text{falls } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und den Erwartungswert $\mathbb{E}\big[X\big] = 0.8$.

Dann folgt:

(a) $a = 0$, $b = 4$.

(b) $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$.

(c) $a = -1$, $b = 4$.

(d) $a = 0$, $b = 2$.

(e) $a = \frac{12}{5}$, $b = 1$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 4\,\ln(x^2+y^2) + (3-a)\,\ln(y^2), \qquad x,y>0.$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist der Gradient von f an der Stelle $(1,1)$ orthogonal zum Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $a = 3$.

(b) $a = 6$.

(c) $a = 9$.

(d) $a = 12$.

(e) Es gibt kein solches $a \in \mathbb{R}$.

Frage 5 (4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) Rang 1.

(b) Rang 2.

(c) Rang 3.

(d) Rang 4.

(e) Rang 5.

Frage 6 (4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

und ihre Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt:

(a) $m = -1$.

(b) $m = 0$.

(c) $m = 1$.

(d) $m = 2$.

(e) A hat für kein $m \in \mathbb{R}$ eine Inverse.

Frage 7 (4 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $B = A^3$ hat den Eigenwert

(a) 1.

(b) 5.

(c) 8.

(d) 27.

(e) 64.

Frage 8 (3 Punkte)
Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\frac{1}{3}\, y_k - \frac{3}{4}\, y_{k+1} + \frac{1}{27}\, y_k = -3\, y_k + 2 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.