Teil I: Offene Aufgaben (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Logarithmusterme.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng konkav (Beweis)?

<

(a3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

(b) (6 Punkte)

Um seine Geschäftsidee zu finanzieren, nimmt ein Start-up einen Kredit in Höhe von 1′000′000 CHF auf. Die Bank stimmt einem niedrigeren jährlichen Zinssatz von 0.5% während der ersten 5 Jahre zu, in denen das Start-up am Ende jeden Jahres 10′000 CHF zurückzahlen muss. Danach steigt der Zinssatz auf 2% p.a. und es werden konstante Zahlungen in Höhe von C^I CHF vereinbart, die wieder am Ende jeden Jahres fällig sind. Der Plan sieht vor, dass der Kredit in 15 Jahren zurückgezahlt ist.

Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass der Plan des Start-ups umsetzbar ist?

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(d) (6 Punkte)

Eine professionelle Langstreckenläuferin läuft in der ersten Stunde 20 Kilometer. Danach nimmt ihre Leistung in jeder weiteren Stunde des Laufens um einen Faktor $a \in (0, 1]$ ab, dass heisst beispielsweise in der zweiten Stunde läuft sie noch $20 \cdot (1 - a)$ Kilometer. Für welche Werte $a \in (0, 1]$ und $b \geq 20$ wird die Läuferin einen Wettkampf der Länge von b Kilometern bewältigen können, gegeben dass sie beliebig lange laufen kann?

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, ...$

Verwenden Sie das Taylorpolynom P_2 zweiter Ordnung der Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x).$$

R_2 bezeichne das Restglied zweiter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \frac{1}{21}.$$

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\ln(9 - 9x^2 - y^2)}{(x-y)\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Nutzenfunktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}$$

für $\alpha \in (0,1)$, wobei c_1, c_2 die konsumierten Mengen der Güter 1 und 2 sind, und die Budgetrestriktion

$$C \;:\; p_1 c_1 + p_2 c_2 = 10$$

für Preise $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$.

Für welche Werte der Parameter α, p_1, p_2 berührt die Niveaulinie (Indifferenzkurve) $u(c_1, c_2) = \sqrt{2}$ die Budgetlinie C im Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1, 2)$?

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Außerdem ist die Funktion f homogen vom Grad r und die Funktion g homogen vom Grad $r-2$.
Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$
$$h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}x^{0.5}y^{0.5}$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{xy - \frac{1}{2}x^{0.5}y^{1.5}}{xy - x^{0.5}y^{1.5}}$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Seien A und B zwei Aussagen. Die zusammengesetzte Aussage $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu

(a) A.

(b) B.

(c) $A \vee B$.

(d) $A \wedge B$.

Frage 2 (3 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 3 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f und einen Punkt $x_0 \in D_f$ ist wahr ?

(a) Wenn f in x_0 stetig ist, dann ist f in x_0 differenzierbar.

(b) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

(c) f ist in x_0 stetig genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

(d) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 unstetig.

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:
Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von CHF $100'000$ und zahlt CHF $50'000$ in 6 Monaten sowie CHF $60'000$ in 1 Jahr aus.
Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von CHF $100'000$ und zahlt in 1 Jahr CHF $110'000$ aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Frage 5 (3 Punkte)

Ein Finanzberater schlägt seinem Kunden zwei Optionen für die Rückzahlung eines Hypothekenkredits vor: Option 1 sieht die Rückzahlung des Kredits mit konstanten Zahlungen C^D vor, welche über n^D Jahre am Jahresanfang erfolgen. Bei Option 2 dagegen wird derselbe Kredit mit konstanten Zahlungen C^l am Jahresende über n^I Jahre zurückgezahlt.

Unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz strikt positiv ist, folgt

(a) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(b) $C^I > C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(c) $C^I < C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(d) $C^I > C^D$ genau dann, wenn $n^I > n^D$.

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{a(x-\pi)} & \text{für } x \neq \pi \\ a & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist f überall stetig?

(a) $a = 1$.

(b) $a = -1$.

(c) $a \in \{-1, 1\}$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ überall stetig.

Frage 7 (3 Punkte)

Sei $f(x) = 1 + 3x - 4x^4$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0 = 1$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0 = 1$ ist wahr?

(a) $R_4(x) > 0$ für alle x.

(b) $R_4(x) < 0$ für alle x.

(c) $R_4(x) = 0$ für alle x.

(d) Jeder der Fälle $R_4(x) > 0$, $R_4(x) < 0$ und $R_4(x) = 0$ ist für entsprechende $x \in \mathbb{R}$ möglich.

Frage 8 (3 Punkte)

Für eine Funktion f ist die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x\ \ln(x) + e^{3\ x}.$$

Sei g die Funktion definiert durch $g(x) = f(a\ x)$ für $a > 0$.

Dann gilt:

(a) $\varepsilon_g(x) = x\ \ln(x) + e^{3\ x}$.

(b) $\varepsilon_g(x) = a\ x\ \ln(x) + a\ e^{3\ x}$.

(c) $\varepsilon_g(x) = \frac{x}{a}\ \ln(x) + \frac{x}{a} e^{3\ x}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Geben ist die Funktion

$$f \; : \; \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2_{++}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 + 2\; x\; y + y^2)e^{x+y}.$$

Ihre partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ genügen der Ungleichung

(a) $\varepsilon_{f,x} > \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(b) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(c) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x > y$.

(d) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x < y$.

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\; e^{x^2} + 1$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

P_3 und P_4 seien die Taylorpolynome dritter und vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Dann gilt:

(a) $P_3(x) > P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_3(x) < P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_3(x) = P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(d) Jeder der Fälle $P_3(x) > P_4(x)$, $P_3(x) < P_4(x)$ oder $P_3(x) = P_4(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ möglich.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$$

und

$$g(x, y) = \ln(2x - x^2 - y^2 + 8)$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.

Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Frage 5 (3 Punkte)

Sei $f(x) = \sin(x)$ und P_3 das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Welche der folgenden Aussagen bezüglich des Restglieds dritter Ordnung R_3 von f in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{128}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{64}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{32}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{16}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Frage 6 (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\,\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3x} + \sqrt{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^2} \quad (x > 0, y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(ax, ay),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\,a$.

(d) g ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^{a+1}\sqrt{y^{4a+4}} + (xy)^{\frac{3a+3}{2}} \quad (x > 0, y > 0),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, mit partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.

Für welchen Wert von a gilt

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3?$$

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 3$.

Lösungen

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Logarithmusterme.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Forme den Ausdruck mithilfe der Logarithmusgesetze um.
2. Bestimme den Definitionsbereich D_f.
3. Bestimme den Wertebereich W_f.

1. Forme den Ausdruck mithilfe der Logarithmusgesetze um

Wir benötigen das Logarithmusgesetz

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

und die dritte binomische Formel

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Damit erhalten wir mit

$$f(x) = \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4) = \ln((\sqrt{x-2}-4)\cdot(\sqrt{x-2}+4)) = \ln(x-2-16) = \ln(x-18)$$

einen vereinfachten Ausdruck.

2. Bestimme den Definitionsbereich D_f

Der Logarithmus $\ln(x)$ ist definiert, falls der Ausdruck im Logarithmus größer null ist. Also erkennen wir an unserem vereinfachten Ausdruck, dass die Funktion definiert ist, falls

$$x - 18 > 0 \ \Leftrightarrow \ x > 18$$

gilt. Damit ist der Definitionsbereich $D_f = (18, \infty)$.

3. Bestimme den Wertebereich W_f

Wir erinnern uns, dass der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion ist $\mathbb{R}$. Dieser entspricht dem Wertebereich des ln, da beide Funktionen zueinander Umkehrfunktionen sind. Der Wertebereich von

$$x - 18$$

ist $(0, \infty)$ für $x > 18$. Dementsprechend verwenden wir den kompletten Definitionsbereich der ln Funktion. Damit gilt $W_f = \mathbb{R}$.

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng konkav (Beweis)?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Definiere die Bedingung für Konkavität.
2. Berechne die erste und zweite Ableitung und löse die Aufgabe.

1. Definiere die Bedingung für Konkavität

Eine Funktion $f \ D_f \to \mathbb{R}$ heisst streng konkav, falls

$$f''(x) < 0$$

für alle $x \in D_f$ gilt. Wir müssen also die zweite Ableitung bestimmen.

2. Berechne die erste und zweite Ableitung und löse die Aufgabe

Wir verwenden

$$f(x) = \ln(x-18)$$

aus der ersten Aufgabe. Damit erhalten wir:

$$f'(x) = \frac{1}{x-18} = (x-18)^{-1}$$
$$f''(x) = -1 \cdot (x-18)^{-2} = \frac{-1}{(x-18)^2}$$

Wegen $(x-18)^2 > 0$ für $x > 18$ gilt

$$f''(x) < 0$$

für $x \in D_f = (18, \infty)$. Damit ist f streng konkav.

(a3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(\sqrt{x-2}-4) + \ln(\sqrt{x-2}+4).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Umkehrfunktion.

1. Bestimme die Umkehrfunktion

Um die Umkehrfunktion zu bestimmen, müssen wir

$$y = \ln(x-18)$$

nach x umformen. Wichtig ist hier, dass die Exponentialfunktion die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion ist, d.h. es gilt:

$$x = e^{\ln(x)} = \ln(e^x).$$

Es gilt

$$y = \ln(x-18) \ \Leftrightarrow \ e^y = x - 18 \ \Leftrightarrow \ x = e^y + 18$$

und durch Vertauschen von x und y erhalten wir

$$f^{-1}(x) = e^x + 18$$

als Umkehrfunktion.

(b) (6 Punkte)

Um seine Geschäftsidee zu finanzieren, nimmt ein Start-up einen Kredit in Höhe von $1'000'000$ CHF auf. Die Bank stimmt einem niedrigeren jährlichen Zinssatz von 0.5% während der ersten 5 Jahre zu, in denen das Start-up am Ende jeden Jahres $10'000$ CHF zurückzahlen muss. Danach steigt der Zinssatz auf 2% p.a. und es werden konstante Zahlungen in Höhe von C^I CHF vereinbart, die wieder am Ende jeden Jahres fällig sind. Der Plan sieht vor, dass der Kredit in 15 Jahren zurückgezahlt ist.

Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass der Plan des Start-ups umsetzbar ist?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Endwert für die Jahre 1-5.
2. Bestimme den Endwert für die Jahre 6-15.
3. Bestimme die jährlichen Zahlungen C^I.

1. Bestimme den Endwert für die Jahre 1-5

Da am Ende jeden Jahres 10'000 CHF zurückgezahlt werden, erhalten wir eine 5-jährige nachschüssige Rente. Durch den jährlichen Zinssatz von 0.5% ist deren Endwert durch

$$A_5 = 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \approx 50'502.50 \text{ CHF}$$

gegeben.

2. Bestimme den Endwert für die Jahre 6-15

Durch die Zahlungen C^I CHF ist für die darauffolgenden 10 Jahre eine nachschüssige 10-jährige Rente gegeben. Aufgrund des Zinssatzes von 2% ist deren Endwert durch

$$A_{10} = C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}$$

gegeben.

3. Bestimme die jährlichen Zahlungen C^I

Um C^I zu bestimmen, muss der Barwert $1'000'000$ und der Barwert der Renten identisch sein. Dies führt auf die Gleichung:

$$1'000'000 = \frac{A_5}{(1+0.5\%)^5} + \frac{A_{10}}{(1+0.5\%)^5(1+2.0\%)^{10}}$$

Unser Ziel ist nun nach der in A_{10} steckenden Konstante umzuformen. Hierfür betrachten wir

$$\begin{aligned}
1'000'000 &= \frac{1}{(1+0.5\%)^5} \cdot 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} + \frac{1}{(1+0.5\%)^5(1+2\%)^{10}} \cdot C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow 1'000'000(1+0.5\%)^5 = 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} + \frac{1}{(1+2\%)^{10}} \cdot C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow 1'000'000(1+0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} = \frac{1}{(1+2\%)^{10}} \cdot C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow (1+2\%)^{10} \left(1'000'000(1+0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%}\right) = C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow \frac{2.0\%}{(1+2.0\%)^{10} - 1}(1+2\%)^{10} \left(1'000'000(1+0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%}\right) = C^I
\end{aligned}$$

und erhalten gerundet die jährlichen Zahlungen

$$C^I \approx 108'515.40 \text{ CHF}.$$

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bringe den Ausdruck in eine Form, um de l'Hôpital anzuwenden.
2. Alternativer Lösungsweg.

1. Bringe den Ausdruck in eine Form, um de l'Hôpital anzuwenden und bestimme den Grenzwert

Wir substituieren

$$y = \frac{1}{x^2}$$

und erhalten

$$\frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = 2y^2 \cdot e^{-y} = 2\frac{y^2}{e^y}.$$

Wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

gilt $y \to \infty$. Damit erhalten wir mithilfe der Regel von de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} 2\frac{y^2}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{4y}{e^y} = \lim_{y\to\infty} \frac{4}{e^y} = 0$$

2. Alternativer Lösungsweg

Es gilt

$$\frac{2}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}}$$

und wegen

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

können wir die Regel von l'Hôpital anwenden. Es gelten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-2} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}$$

und durch die Regel von l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0$$

als Grenzwert.

(d) (6 Punkte)

Eine professionelle Langstreckenläuferin läuft in der ersten Stunde 20 Kilometer. Danach nimmt ihre Leistung in jeder weiteren Stunde des Laufens um einen Faktor $a \in (0, 1]$ ab, dass heisst beispielsweise in der zweiten Stunde läuft sie noch $20 \cdot (1 - a)$ Kilometer. Für welche Werte $a \in (0, 1]$ und $b \geq 20$ wird die Läuferin einen Wettkampf der Länge von b Kilometern bewältigen können, gegeben dass sie beliebig lange laufen kann?

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die in der Stunde gelaufene Strecke mithilfe einer geometrischen Folge dar.
2. Verwende die geometrische Reihe, um die Lösungsmenge graphisch darzustellen.

1. Stelle die in der Stunde gelaufene Strecke mithilfe einer geometrischen Folge dar

In der ersten Stunden wird $a_1 = 20$ gelaufen. Aufgrund der natürlichen Erschöpfung erhalten wir in der zweiten Stunde $a_2 = a_1(1 - a)$. Allgemein erhalten wir den den rekursiven Zusammenhang (d.h. das nachfolgende Folgenglied wird aus dem vorherigen Folgenglied berechnet)

$$\begin{aligned} a_1 &= 20 \\ a_n &= a_{n-1}(1 - a), \quad n = 2, 3, ... \end{aligned}$$

Aus dem rekursiven Zusammenhang erhalten wir mit

$$a_n = a_1(1 - a)^{n-1}$$

eine explizite Formel für das n-te Folgenglied.

2. Verwende die geometrische Reihe, um die Lösungsmenge graphisch darzustellen

Unsere Folge liefert uns die in n-ten Stunde gelaufene Strecke. Die Läuferin kann beliebig lange laufen, daher ist die gelaufene Strecke durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1(1 - a)^{n-1} = a_1 \sum_{n=1}^{\infty}(1 - a)^{n-1} = a_1 \sum_{n=0}^{\infty}(1 - a)^n$$

gegeben. Eine Summe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ bezeichnet man als geometrische Reihe. Diese besitzt den den Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q},$$

falls $|q| < 1$ erfüllt ist. In unserem Fall gilt

$$a_1 \sum_{n=0}^{\infty}(1 - a)^n = a_1 \cdot \frac{1}{1 - (1 - a)} = \frac{a_1}{a} = \frac{20}{a},$$

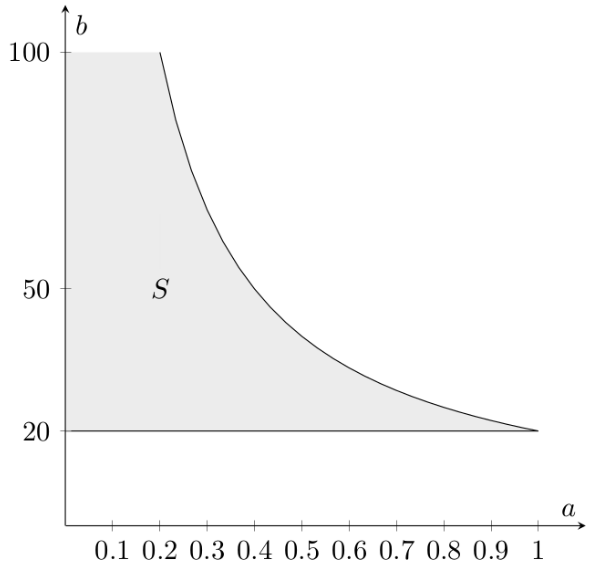
da $|1 - a| < 1$ für $a \in (0, 1]$ erfüllt ist. Da die Läuferin mindestens $b \geq 20$ Kilometer laufen muss, sollte nun

$$\frac{20}{a} \geq b$$

erfüllt sein. Wir erhalten also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} := \left\{ (a,b) \in (0,1] \times [20,\infty) \ : \ b \leq \frac{20}{a} \right\}$$

und die zugehörige Skizze:



Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, ...$

Verwenden Sie das Taylorpolynom P_2 zweiter Ordnung der Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme allgemein das Taylorpolynom zweiter Ordnung an P_2.
2. Berechne P_2.
3. Approximiere die Reihe.

1. Bestimme allgemein das Taylorpolynom P_2 zweiter Ordnung an

Im Allgemeinen berechnen wir das n-te Taylorpolynom im Entwicklungspunkt x_0 durch

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Allgemein müssen wir in unserem Fall wegen $x_0 = 0$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

berechnen.

2. Berechne P_2

Wir bestimmen zunächst mithilfe der Kettenregel die Ableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot (1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2} \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= -1 \end{aligned}$$

folgt. Damit erhalten wir

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

3. Approximiere die Reihe

Nun ist P_2 eine Approximation unserer Funktion f, daher gilt

$$a_k = \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \approx P_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Unter Verwendung der geometrischen Reihe erhalten wir eine Approximation der Reihe:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2\cdot 4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8}\frac{4}{3} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \;:\; D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x).$$

R_2 bezeichne das Restglied zweiter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \frac{1}{21}.$$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die allgemeine Formel für das Restglied an.
2. Forme das Restglied um.
3. Zeige die Ungleichung.

1. Gebe die allgemeine Formel für das Restglied an

Das Restglied n-ter Ordnung für f im Punkt x_0 ist durch

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

für $\xi \in [x_0, x]$ gegeben. Für unseren Fall ergibt sich also

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3$$

für $\xi \in [0, x]$.

2. Forme das Restglied um

Aus der letzten Aufgabe erhalten wir

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \;\Rightarrow\; f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

und damit gilt

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 = \frac{1}{6}\frac{2}{(1+\xi)^3}x^3 = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3 \Rightarrow R_2(x) = \frac{1}{3}\underbrace{\frac{1}{(1+\xi)^3}}_{\leq 1}x^3 \leq \frac{x^3}{3}$$

für $x \in [0, 1]$.

3. Zeige die Ungleichung

Mit unseren Überlegungen erhalten wir durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{3\cdot 8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{24}\cdot\frac{8}{7} = \frac{1}{21}$$

die gesuchte Ungleichung.

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\ln(9 - 9x^2 - y^2)}{(x-y)\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, für welche Werte die Funktion definiert ist.
2. Gebe den Definitionsbereich graphisch an.

1. Überlege dir, für welche Werte die Funktion definiert ist

Wir betrachten zunächst den Zähler $\ln(9 - 9x^2 - y^2)$. Dieser ist definiert, falls der Ausdruck im Logarithmus größer Null ist. Daher muss

$$9 - 9x^2 - y^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; 9 > 9x^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; 1 > x^2 + \frac{y^2}{9} = x^2 + \frac{y^2}{3^2}$$

gelten. Die Gleichung

$$x^2 + \frac{y^2}{3^2} < 1$$

beschreibt die Fläche innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und den Halbachsen $a = 1$ und $b = 3$. Nun betrachten wir den Nenner $(x-y)\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Zunächst muss $x \neq y$ gelten. Für die Wurzel muss noch

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 < 4 = 2^2$$

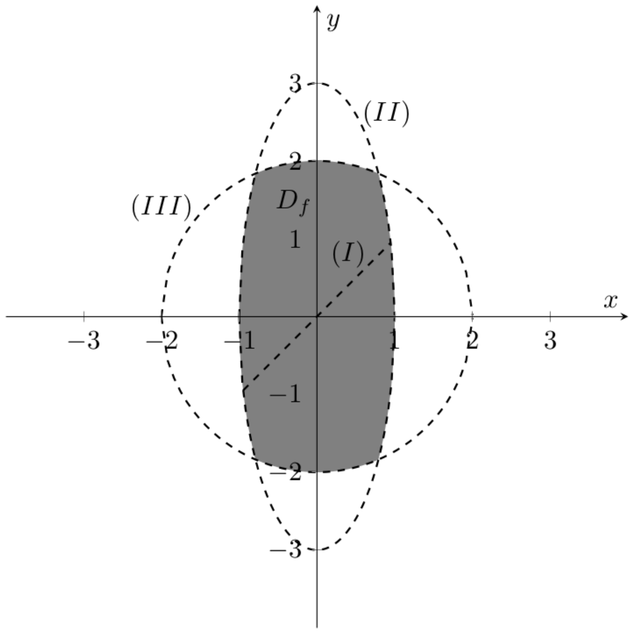
erfüllt sein. Beachte, dass die Wurzelfunktion definiert ist, falls der enthaltene Ausdruck größer gleich Null ist. Da die Wurzel im Nenner steht, müssen wir den gleich Null Fall ausschließen. Hierdurch wird eine Kreisfläche mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2 beschrieben.

2. Gebe den Definitionsbereich graphisch an

Zusammengefasst erhalten wir die drei Bedingungen

$$x \in D_f \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \neq y \\ x^2 + \frac{y^2}{3^2} < 1 \\ x^2 + y^2 < 2^2. \end{cases}$$

Diese lassen sich durch die Skizze



veranschaulichen.

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Nutzenfunktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}$$

für $\alpha \in (0,1)$, wobei c_1, c_2 die konsumierten Mengen der Güter 1 und 2 sind, und die Budgetrestriktion

$$C \;:\; p_1 c_1 + p_2 c_2 = 10$$

für Preise $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$.

Für welche Werte der Parameter α, p_1, p_2 berührt die Niveaulinie (Indifferenzkurve) $u(c_1, c_2) = \sqrt{2}$ die Budgetlinie C im Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$?

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die mathematische Formulierung des Problems an.
2. Wende das Theorem für implizite Funktionen an, um das Problem zu lösen.

1. Gebe die mathematische Formulierung des Problems an

Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ eingesetzt in die Budgetrestriktion ergibt die Budgetgerade

$$p_1 + 2p_2 = 10 \;\Leftrightarrow\; p_1 = 10 - 2p_2.$$

Weiter muss wegen

$$u(1,2) = 1^{\alpha} 2^{1-\alpha} = \sqrt{2}$$

$\alpha = 0.5$ gelten. Die letzte Bedingung ist, dass sich die beiden Kurven

$$\begin{aligned} u(c_1, c_2) = \sqrt{2} \;&\Leftrightarrow\; f(c_1, c_2) := u(c_1, c_2) - \sqrt{2} = c_1^{0.5} c_2^{0.5} - \sqrt{2} = 0 \\ p_1 c_1 + p_2 c_2 = 10 \;&\Leftrightarrow\; \varphi(c_1, c_2) := p_1 c_1 + p_2 c_2 - 10 = 0 \end{aligned}$$

in $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ berühren.

2. Wende das Theorem für implizite Funktionen an, um das Problem zu lösen

Das Theorem für implizite Funktionen liefert uns den Zusammenhang

$$-\frac{f_{c_1}(1,2)}{f_{c_2}(1,2)} = -\frac{\varphi_{c_1}(1,2)}{\varphi_{c_2}(1,2)}$$

und es gelten

$$\begin{aligned} f_{c_1}(c_1, c_2) = 0.5 c_1^{-0.5} c_2^{0.5} &\Rightarrow f_{c_1}(1,2) = 0.5\sqrt{2} \\ f_{c_2}(c_1, c_2) = 0.5 c_1^{0.5} c_2^{-0.5} &\Rightarrow f_{c_1}(1,2) = 0.5\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \varphi_{c_1}(1,2) = p_1, \qquad &\varphi_{c_2}(1,2) = p_2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Gleichung

$$-\frac{0.5\sqrt{2}}{0.5\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{p_1}{p_2} \;\Leftrightarrow\; 2p_2 = p_1$$

und mit $p_1 = 10 - 2p_2$ folgt

$$2p_2 = 10 - 2p_2 \;\Leftrightarrow\; 4p_2 = 10 \;\Leftrightarrow\; p_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5.$$

Wegen $p_1 = 2p_2$ gilt dann auch $p_2 = 2 \cdot 2.5 = 5$. Das Endresultat ist also durch

$$\alpha = 0.5,\; p_1 = 5,\; p_2 = \frac{5}{2}$$

gegeben.

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Außerdem ist die Funktion f homogen vom Grad r und die Funktion g homogen vom Grad $r-2$.
Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$
$$h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}x^{0.5}y^{0.5}$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{xy - \frac{1}{2}x^{0.5}y^{1.5}}{xy - x^{0.5}y^{1.5}}$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was du aus der Homogenität von f und g schließen kannst.
2. Verwende das Resultat, um die Aufgabe zu lösen.

1. Überlege dir, was du aus der Homogenität von f und g schließen kannst

Nach Voraussetzung ist f homogen vom Grad r und g homogen vom Grad $r-2$, d.h.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r f(x,y)$$
$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{r-2} g(x,y).$$

Dies liefert uns mit

$$h(\lambda x, \lambda y) = \frac{f(\lambda x, \lambda y)}{g(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^r f(x,y)}{\lambda^{r-2} g(x,y)} = \lambda^2 \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda^2 h(x,y)$$

die Homogenität vom Grad 2 für h. Wir betrachten die partielle Elastizität

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = x\frac{h_x(x,y)}{h(x,y)} \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_{h,x}(x,y)h(x,y) = xh_x(x,y)$$

und die eulerschen Relation

$$xh_x(x,y) + yh_y(x,y) = 2h(x,y).$$

Die Kombination beider Aussagen liefert

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{h,x}(x,y)h(x,y) + yh_y(x,y) = 2h(x,y) \\
\Leftrightarrow\ & yh_y(x,y) = 2h(x,y) - \varepsilon_{h,x}(x,y)h(x,y) = h(x,y)(2 - \varepsilon_{h,x}(x,y)) \\
\Leftrightarrow\ & h(x,y) = \frac{yh_y(x,y)}{2 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}
\end{aligned}$$

wodurch wir eine Darstellung für h gefunden haben. Durch Einsetzen von h_y und $\varepsilon_{h,x}$ erhalten wir nun die Lösung.

2. Verwende das Resultat, um die Aufgabe zu lösen

Es gilt

$$\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{y h_y(x,y)}{2-\varepsilon_{h,x}(x,y)} = \frac{y\left(x-\frac{3}{2}x^{0.5}y^{0.5}\right)}{2-\frac{xy-\frac{1}{2}x^{0.5}y^{1.5}}{xy-x^{0.5}y^{1.5}}} = \frac{y\left(x-\frac{3}{2}x^{0.5}y^{0.5}\right)}{\frac{2(xy-x^{0.5}y^{1.5})}{xy-x^{0.5}y^{1.5}}-\frac{xy-\frac{1}{2}x^{0.5}y^{1.5}}{xy-x^{0.5}y^{1.5}}} \\
&= \frac{y\left(x-\frac{3}{2}x^{0.5}y^{0.5}\right)}{2(xy-x^{0.5}y^{1.5})-xy+\frac{1}{2}x^{0.5}y^{1.5}}(xy-x^{0.5}y^{1.5}) = \frac{xy-\frac{3}{2}x^{0.5}y^{1.5}}{xy-\frac{3}{2}x^{0.5}y^{1.5}}(xy-x^{0.5}y^{1.5}) \\
&= xy-x^{0.5}y^{1.5},
\end{aligned}$$

womit

$$h(x,y) = xy - x^{0.5}y^{1.5}$$

folgt.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Seien A und B zwei Aussagen. Die zusammengesetzte Aussage $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu

(a) A.

(b) B.

(c) $A \vee B$.

(d) $A \wedge B$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstafel.
2. Alternative Lösung I.
3. Alternative Lösung II.

1. Löse die Aufgabe mithilfe einer Wahrheitstafel

Eine Aussage kann nur die Wahrheitswerte wahr (W) oder falsch (F) annehmen. Dementsprechend gibt es bei zwei Aussagen A, B genau vier Kombinationsmöglichkeiten der Wahrheitswerte. Aus diesen Kombinationen ergeben sich dann die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen. Zwei Verknüpfungen heißen äquivalent, falls deren Wahrheitswerte bei jeder möglichen Kombination übereinstimmen.

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg A$	F	F	W	W
$A \vee B$	W	W	W	F
$A \wedge B$	W	F	F	F
$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
$\neg A \Rightarrow B$	W	W	W	F

In dem ersten Abschnitt der Tabelle sind alle möglichen Kombinationen der Aussagen A und B aufgelistet. In dem zweiten Abschnitt die grundlegenden Verknüpfungen und im letzten Abschnitt die gewünschte Aussage.

Die Aussagen $\neg A \Rightarrow B$ und $A \vee B$ sind äquivalent, da diese bei jeder Kombination von A und B denselben Wahrheitswert besitzen.

Damit ist Antwort (c) korrekt.

2. Alternative Lösung I

Die Implikation ist durch

$$A \Rightarrow B \;:\Leftrightarrow\; \neg A \vee B$$

definiert. Mit

$$A \vee (\neg A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \vee (\neg(\neg A)) \vee B) \;\Leftrightarrow\; A \vee (A \vee B) \;\Leftrightarrow\; A \vee B$$

ist Antwort (c) korrekt.

3. Alternative Lösung II

Mit

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg A \Rightarrow B$	W	W	W	F
$A \vee B$	W	W	W	F

erhalten wir die Äquivalenz von $\neg A \Rightarrow B$ und $A \vee B$. Demnach gilt:

$$A \vee (\neg A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \vee (A \vee B) \;\Leftrightarrow\; A \vee B$$

Somit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir zu den Aussagen (a) - (c) passende Gegenbeispiele.

1. Überlege dir zu den Aussagen (a) - (c) passende Gegenbeispiele

Wir betrachten die Funktion

$$f\ :\ ]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \to \frac{1}{x}.$$

und eine Folge $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \to 0$. Wegen

$$f(a_n) = \frac{1}{a_n} \to \infty$$

ist Aussage (a) falsch. Ein konkretes Beispiel ist hier durch

$$a_n = \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to \infty$$

gegeben.

Für die zweite Aussage betrachten wir eine beliebige stetige Funktion mit $D_f = \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a_n \to a_0 \ \Rightarrow\ f(a_n) \to f(a_0)$$

für alle $a_0 \in \mathbb{R}$. Konkret könnte man dies am einfachsten mit einer konstanten Funktion begründen. Wir betrachten

$$f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0,$$

womit sogar für jede Folge $f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Für die nächste Aussage werden wir ein konkretes Gegenbeispiel angeben. Wir definieren die Funktion

$$f(x) = \sin\left(\pi\frac{1}{x}\right)$$

und die monotone Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Dann erhalten wir durch

$$f(a_n) = \sin\left(\pi\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = \sin(\pi n) = (-1)^n$$

eine nicht monotone Folge.

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 3 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f und einen Punkt $x_0 \in D_f$ ist wahr ?

(a) Wenn f in x_0 stetig ist, dann ist f in x_0 differenzierbar.

(b) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

(c) f ist in x_0 stetig genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

(d) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 unstetig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Kenne die die Definition von Stetigkeit & Differenzierbarkeit.
2. Zusatz: Weise die korrekte Antwort nach.

1. Kenne die die Definition von Stetigkeit & Differenzierbarkeit

Ist die Funktion f differenzierbar in $x_0 \in D_f$, dann ist sie auch stetig in $x_0 \in D_f$. Somit ist Antwort (b) richtig und (d) falsch. Durch die Betragsfunktion

$$f \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto |x|$$

erhalten wir ein direktes Gegenbeispiel zur Antwort (a). Die Ableitung repräsentiert die Steigung in einem Punkt. Links von $x_0 = 0$ ist die Steigung -1 und rechts davon 1. Um dies genauer zu untersuchen, betrachten wir die Definition der Differenzierbarkeit. Eine Funktion f heißt differenzierbar in x_0, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

existiert. Für die Betragsfunktion gelten nun

$$\lim_{x \to 0, x<0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x<0} \frac{-x}{x} = -1$$
$$\lim_{x \to 0, x>0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0, x>0} \frac{x}{x} = 1,$$

wodurch der Grenzwert nicht existiert. Damit ist Antwort (a) falsch. Da (c) eine Kombination von (a) und (b) ist, ist (c) auch falsch.

Somit ist Antwort (b) korrekt.

2. Zusatz: Weise die korrekte Antwort nach

Sei f in x_0 differenzierbar. Wir wollen zeigen, dass $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$ folgt. Dann ist f stetig. Wir erhalten

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; f(x) \to f(x_0)$$

für $x \to x_0$. Damit ist f stetig und Antwort (d) falsch.

Somit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:
Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100′000 und zahlt CHF 50′000 in 6 Monaten sowie CHF 60′000 in 1 Jahr aus.
Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100′000 und zahlt in 1 Jahr CHF 110′000 aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe den Barwerte beider Projekte an und finde eine Bedingung für die richtige Wahl.
2. Finde die korrekte Antwort.
3. Alternativer Lösungsweg.

1. Gebe den Barwerte beider Projekte an und finde eine Bedingung für die richtige Wahl
Der Barwert von Projekt I ist durch

$$-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$$

gegeben. Den Barwert von Projekt II erhalten wir durch

$$-100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2}.$$

Falls

$$-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2} > -100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2}$$

gilt, ist Projekt I dem Projekt II vorzuziehen.

2. Finde die korrekte Antwort
Wir formen die gefundene Bedingung um:

$$\begin{aligned} & -100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2} > -100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2} \\ \Leftrightarrow\ & -100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} > -100'000 + \frac{50'000}{(1+i)^2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{50'000}{(1+i)} > \frac{50'000}{(1+i)^2} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{(1+i)} > \frac{1}{(1+i)^2} \ \Leftrightarrow\ (1+i)^2 > (1+i) \end{aligned}$$

Dies ist für jeden positives Zinssatz $i > 0$ erfüllt.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

3. Alternativer Lösungsweg

Wir können die Aufgabe auch lösen, ohne zu rechnen. Die beiden Auszahlungen sind in Summe identisch, d.h. $50'000 + 60'000$ oder $110'000$. Bei Projekt I werden die $50'000$ nach 6 Monaten zu einem Zinssatz von $(1 + i)$ angelegt. Folglich ist wegen

$$(50'000) \cdot \underbrace{(1+i)^{\frac{1}{2}}}_{>1} + 60'000 > 110'000,$$

das Projekt I vorzuziehen.

Somit ist Antwort (a) korrekt.

Frage 5 (3 Punkte)

Ein Finanzberater schlägt seinem Kunden zwei Optionen für die Rückzahlung eines Hypothekenkredits vor: Option 1 sieht die Rückzahlung des Kredits mit konstanten Zahlungen C^D vor, welche über n^D Jahre am Jahresanfang erfolgen. Bei Option 2 dagegen wird derselbe Kredit mit konstanten Zahlungen C^l am Jahresende über n^I Jahre zurückgezahlt.

Unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz strikt positiv ist, folgt

(a) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(b) $C^I > C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(c) $C^I < C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(d) $C^I > C^D$ genau dann, wenn $n^I > n^D$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, welche Antworten du ausschließen kannst.
2. Finde die korrekte Antwort.

1. Überlege dir, welche Antworten du ausschließen kannst

Wenn die Anzahl der Jahre n^I und n^D verschieden sind, können wir im Allgemeinen nicht entscheiden ob $C^I > C^D$, $C^I = C^D$ oder $C^I < C^D$ erfüllt sind. Also können wir Antwort (d) ausschließen.

2. Finde die korrekte Antwort

Wenn wir davon ausgehen, dass die Anzahl der Jahre identisch sind, dann muss $C^I > C^D$ gelten ,da die Bank die jeweilige Zahlung ein Jahr später erhält und so nicht mehr anlegen kann.

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{a(x-\pi)} & \text{für } x \neq \pi \\ a & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist f überall stetig?

(a) $a = 1$.

(b) $a = -1$.

(c) $a \in \{-1, 1\}$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ überall stetig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was für die Stetigkeit von f gelten muss.
2. Bestimme die richtige Antwort.

1. Überlege dir, was für die Stetigkeit von f gelten muss

Eine Funktion f ist stetig in x_0, falls

$$x \to x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \to f(x_0)$$

erfüllt ist. Wir müssen also

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{a(x-\pi)}$$

berechnen, um die Aufgabe zu lösen.

2. Bestimme die richtige Antwort

Unsere Funktion ist für $x_0 \neq \pi$ stetig. Deswegen müssen wir nur $x_0 = \pi$ untersuchen. Wegen

$$\lim_{x\to\pi} \sin(x) = 0$$
$$\lim_{x\to\pi} a(x-\pi) = 0$$

können wir die Regel von de l'Hôpital anwenden. Es gilt

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{a(x-\pi)} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{ax - a\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{a} = -\frac{1}{a},$$

wodurch

$$-\frac{1}{a} = a \ \Leftrightarrow \ a^2 = -1$$

erfüllt sein muss. Diese Gleichung besitzt jedoch keine reelle Lösung, wodurch f für kein $a \in \mathbb{R}$ überall stetig ist.

Damit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Sei $f(x) = 1 + 3x - 4x^4$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0 = 1$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0 = 1$ ist wahr?

(a) $R_4(x) > 0$ für alle x.

(b) $R_4(x) < 0$ für alle x.

(c) $R_4(x) = 0$ für alle x.

(d) Jeder der Fälle $R_4(x) > 0$, $R_4(x) < 0$ und $R_4(x) = 0$ ist für entsprechende $x \in \mathbb{R}$ möglich.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was du über das Restglied von f sagen kannst und bestimme die Antwort.

1. Überlege dir, was du über das Restglied von f sagen kannst und bestimme die Antwort

Das Restglied n-ter Ordnung für f im Punkt x_0 ist durch

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

für $\xi \in [x_0, x]$ gegeben. $R_4(x)$ enthält also die fünfte Ableitung $f^{(5)}$. Nun gilt

$$f'(x) = 16x^3 + 3 \;\Rightarrow\; f''(x) = 48x^2 \;\Rightarrow\; f^3(x) = 96x \;\Rightarrow\; f^4(x) = 96 \;\Rightarrow\; f^{(5)}(x) = 0,$$

wodurch $R_4(x) = 0$ für alle x gilt.

Frage 8 (3 Punkte)

Für eine Funktion f ist die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x \ \ln(x) + e^{3\ x}.$$

Sei g die Funktion definiert durch $g(x) = f(a\ x)$ für $a > 0$.

Dann gilt:

(a) $\varepsilon_g(x) = x \ \ln(x) + e^{3\ x}$.

(b) $\varepsilon_g(x) = a\ x \ \ln(x) + a\ e^{3\ x}$.

(c) $\varepsilon_g(x) = \frac{x}{a} \ \ln(x) + \frac{x}{a} e^{3\ x}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne mithilfe der Definition der Elastizität die korrekte Antwort.

1. Finde mithilfe der Definition der Elastizität die korrekte Antwort

Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_g(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} x \\ &= \frac{f'(ax)}{f(ax)} ax \\ &= ax \frac{f'(ax)}{f(ax)} \\ &= (a \cdot x) \frac{f'(ax)}{f(ax)} \\ &= \varepsilon_f(ax) = ax \ln(ax)) + e^{3ax}\end{aligned}$$

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Geben ist die Funktion

$$f\ :\ \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2_{++},\quad (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 + 2\ x\ y + y^2)e^{x+y}.$$

Ihre partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ genügen der Ungleichung

(a) $\varepsilon_{f,x} > \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(b) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(c) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x > y$.

(d) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x < y$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Berechne die partiellen Ableitungen von f.
2. Finde die korrekte Antwort.

1. Berechne die partiellen Ableitungen von f

Zuerst verwenden wir die erste binomische Formel und erhalten

$$f(x,y) = (x^2 + 2xy + y^2)e^{x+y} = (x+y)^2 e^{x+y}.$$

Mit der Produktregel & Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2(x+y)e^{x+y} + (x+y)^2 e^{x+y} = (2(x+y) + (x+y)^2)e^{x+y} \\ f_y(x,y) &= 2(x+y)e^{x+y} + (x+y)^2 e^{x+y} = (2(x+y) + (x+y)^2)e^{x+y}, \end{aligned}$$

dass $f_x(x,y) = f_y(x,y)$ gilt. Durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_{f,x} &= x\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} \\ \varepsilon_{f,y} &= y\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} \end{aligned}$$

können wir die Antworten (a) und (b) direkt ausschließen.

2. Finde die korrekte Antwort

Wir wissen bereits, dass $f_x(x,y) = f_y(x,y)$ gilt und f strikt positiv ist. Damit folgt

$$f_x(x,y) = f_y(x,y)\ \Rightarrow\ \frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} = \frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}$$

und falls $x < y$ ist, erhalten wir

$$x\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} < y\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}.$$

Damit gilt $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x < y$.

Die Antwort (d) ist korrekt.

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 \ e^{x^2} + 1$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir argumentativ, welche Antwort korrekt ist.
2. Alternativer Lösungsweg.

1. Überlege dir argumentativ, welche Antwort korrekt ist

Die Funktion f setzt sich aus x^2 und e^{x^2} zusammen. Die Verschiebung um 1 auf der y-Achse spielt keine Rolle bei Extrempunkten. Der Term x^2 besitzt ein Minimum in $x_0 = 0$. Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend, d.h. es gilt

$$x < y \ \Rightarrow \ e^x < e^y.$$

Dementsprechend nimmt auch der Term e^{x^2} sein Minimum in $x_0 = 0$ an. Also ist Antwort (b) korrekt.

2. Alternativer Lösungsweg

Es gilt

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2} = 2xe^{x^2}(1 + x^2)$$

mithilfe der Produkt & Kettenregel. Wegen $e^{x^2}(1 + x^2) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erhalten wir durch

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 2xe^{x^2}(1 + x^2) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$$

den stationären Punkt $x_0 = 0$. Es handelt sich um ein Minimum, da $f''(0) > 0$ gilt. Dies werden wir nun durch Ermittlung der zweiten Ableitung nachweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(2xe^{x^2}(x + x^3) + 2e^{x^2}(1 + 3x^2)) = 2(2e^{x^2}(x^2 + x^4) + 2e^{x^2}(1 + 3x^2)) \\ &= 2e^{x^2}(2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1) \ \Rightarrow \ f''(0) = 2 \cdot 1 > 0 \end{aligned}$$

mithilfe der Produkt & Kettenregel. Damit besitzt f in $x_0 = 0$ ein Minimum.

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \; : \; D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

P_3 und P_4 seien die Taylorpolynome dritter und vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Dann gilt:

(a) $P_3(x) > P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_3(x) < P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_3(x) = P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(d) Jeder der Fälle $P_3(x) > P_4(x)$, $P_3(x) < P_4(x)$ oder $P_3(x) = P_4(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ möglich.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle das vierte Taylorpolynom mithilfe von P_3 dar und überlege, was du hieraus schließen kannst.

1. Stelle das vierte Taylorpolynom mithilfe von P_3 dar und überlege, was du hieraus schließen kannst

Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

gilt. Wegen $x^4 > 0$ für $x \in D_f \setminus \{x_0\}$, ist die korrekte Antwort abhängig vom Vorzeichen von $f^{(4)}(0)$. Dies können wir durch

$$\begin{aligned}
P_3(x) = P_4(x) \; &\Leftrightarrow \; \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 = 0 \; \Leftrightarrow \; f^{(4)}(0) = 0 \\
P_3(x) < P_4(x) \; &\Leftrightarrow \; \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 > 0 \; \Leftrightarrow \; f^{(4)}(0) > 0 \\
P_3(x) > P_4(x) \; &\Leftrightarrow \; \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 < 0 \; \Leftrightarrow \; f^{(4)}(0) < 0
\end{aligned}$$

formalisieren. Da $f^{(4)}(0)$ konstant ist, können wir Antwort (d) bereits ausschließen. Des Weiteren liefert uns die Struktur der Ableitungen von f, dass $f^{(4)}(0)$ positiv ist. Dies sehen wir daran, dass gerade Ableitungen in $x_0 = 0$ immer positiv sind. Damit können wir hier schon sagen, dass Antwort (b) korrekt ist. Dies wollen wir aber noch durch

$$f'(x) = -1(x+1)^{-2} = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f''(x) = (-1)\cdot(-2)\cdot(x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = 2\cdot(-3)(x+1)^{-4} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = (-4)\cdot(-6)\cdot(x+1)^{-5} = \frac{24}{(x+1)^5} \;\Rightarrow\; f^{(4)}(0) = 24 > 0$$

untermauern. Damit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x, y) = \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$$

und

$$g(x, y) = \ln(2x - x^2 - y^2 + 8)$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.

Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle die Definitionsbereiche von f und g durch geometrische Objekte dar.

1. Stelle die Definitionsbereiche von f und g durch geometrische Objekte dar

Für den Definitionsbereich von f muss die Gleichung

$$1 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 + y^2 \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1^2} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; x \in D_f$$

erfüllt sein. Hierdurch wird eine Ellipsenfläche mit den Halbachsen $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ und dem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschrieben.

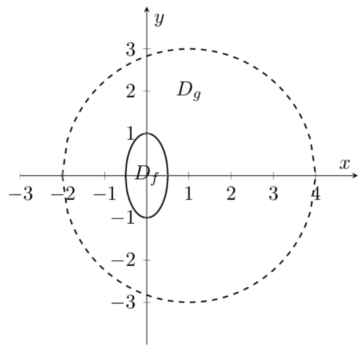
Für den Definitionsbereich von g muss die Gleichung

$$2x - x^2 - y^2 + 8 > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + y^2 < 8 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 < 8$$
$$\Leftrightarrow\; (x - 1)^2 + y^2 < 9 = 3^2 \;\Leftrightarrow\; x \in D_g$$

erfüllt sein. Hierdurch wird eine Kreisfläche mit Mittelpunkt $(1, 0)$ und dem Radius 3 dargestellt. Insgesamt erhalten wir mit

$$(x \in D_f \;\Rightarrow\; x \in D_g) \;\Leftrightarrow\; (D_f \subseteq D_g)$$

die korrekte Antwort (b). Dies können wir auch durch folgende Grafik veranschaulichen:



Frage 5 (3 Punkte)

Sei $f(x) = \sin(x)$ und P_3 das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Welche der folgenden Aussagen bezüglich des Restglieds dritter Ordnung R_3 von f in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{128}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{64}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{32}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{16}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Betrachte die Definition des Restglieds dritter Ordnung in $x_0 = 0$ von f und leite die korrekte Antwort her.
2. Alternativer Lösungsweg.

1. Betrachte die Definition des Restglieds dritter Ordnung in $x_0 = 0$ von $f$und leite die korrekte Antwort her

Das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$ ist durch

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$$

definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \;\Rightarrow\; |f^{(4)}(x)| \leq 1, \end{aligned}$$

wodurch wegen

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(x)|}{4!}|x|^4 \leq \frac{1}{24}|x|^4 \leq \frac{1}{16}|x|^4$$

die Antwort (d) korrekt ist.

2. Alternativer Lösungsweg

Wir wissen, dass

$$\frac{1}{128} \leq \frac{1}{64} \leq \frac{1}{32} \leq \frac{1}{16}$$

gilt und nur eine Antwort korrekt sein kann. Wenn (a) wahr wäre, müssten (b)-(d) zwangsläufig wegen obiger Ungleichung wahr sein. Dasselbe Kettenargument lässt sich auch für (b) und (c) durchführen. Demnach muss (d) korrekt sein.

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 6 (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3x} + \sqrt{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe die Bedingung für Homogenität an und rechne diese nach.

1. Gebe die Bedingung für Homogenität an und rechne diese nach

Eine Funktion f heißt homogen vom Grad k, falls

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$$

gilt. Diese Bedingung wollen wir nun nachrechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 8\left(\frac{1}{\lambda x} + \frac{1}{5\lambda y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\lambda x} + \sqrt{\lambda y} = 8\frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda x} + \frac{1}{5\lambda y}\right)^{0.5}} + \lambda^{0.5}\sqrt{3x} + \lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= 8\frac{1}{\frac{1}{\lambda^{0.5}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5y}\right)^{0.5}} + \lambda^{0.5}\sqrt{3x} + \lambda^{0.5}\sqrt{y} = 8\frac{\lambda^{0.5}}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5y}\right)^{0.5}} + \lambda^{0.5}\sqrt{3x} + \lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= \lambda^{0.5}\left(8\frac{1}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5y}\right)^{0.5}} + \sqrt{3x} + \sqrt{y}\right) = \lambda^{0.5} f(x,y) \end{aligned}$$

Damit ist f homogen vom Grad 0.5 und die Antwort (c) ist korrekt.

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\ y^2} \quad (x > 0, y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(ax, ay),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\ a$.

(d) g ist nicht homogen.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Rechne nach, ob g homogen sein kann.

1. Rechne nach, ob g homogen sein kann

Angenommen g sei homogen vom Grad k. Wegen

$$g(\lambda x, \lambda y) = f(\lambda a x, \lambda a y) = \lambda^k f(ax, bx) = \lambda^k g(x,y)$$

muss dann auch f homogen vom Grad k sein. Dementsprechend reicht zunächst aus, f zu überprüfen. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= \frac{\lambda^2 x^2}{\lambda y} + 1 + \sqrt{\lambda^2 x^2 + 5\lambda^2 y^2} = \frac{\lambda x^2}{y} + 1 + \lambda\sqrt{x^2 + 5y^2} = \lambda\left(\frac{x^2}{y} + \frac{1}{\lambda} + \sqrt{x^2 + 5y^2}\right) \\ &= \lambda\left(\frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5y^2} + \frac{1}{\lambda} - 1\right) = \lambda\left(\frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5y^2}\right) + 1 - \lambda \\ &= \lambda f(x,y) + 1 - \lambda \end{aligned}$$

Damit ist f nicht homogen und g kann damit auch nicht homogen sein.

Somit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 8 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^{a+1}\sqrt{y^{4a+4}} + (xy)^{\frac{3a+3}{2}} \quad (x > 0, y > 0),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, mit partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.

Für welchen Wert von a gilt

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3?$$

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme den Grad der Homogenität von f.
2. Verwende die eulersche Relation, um die korrekte Antwort zu finden.

1. Bestimme den Grad der Homogenität von f

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^{a+1}\sqrt{(\lambda y)^{4a+4}} + (\lambda x \lambda y)^{\frac{3a+3}{2}} = (\lambda x)^{a+1}\sqrt{(\lambda y)^{2(2a+2)}} + (\lambda^2 xy)^{\frac{3a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}x^{a+1}\lambda^{2a+2}\sqrt{y^{2(2a+2)}} + \lambda^{3a+3}(xy)^{\frac{3a+3}{2}} = \lambda^{3a+3}x^{a+1}\sqrt{y^{2(2a+2)}} + \lambda^{3a+3}(xy)^{\frac{3a+3}{2}} \\ &= \lambda^{3a+3}\left(x^{a+1}\sqrt{y^{2(2a+2)}} + (xy)^{\frac{3a+3}{2}}\right) = \lambda^{3a+3}f(x,y) \end{aligned}$$

Damit ist f homogen vom Grad $3a + 3$.

2. Verwende die eulersche Relation, um die korrekte Antwort zu finden

Nach der eulerschen Relation gilt nun

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3a + 3.$$

Damit muss $a = 0$ sein.

Somit ist Antwort (a) korrekt.