Teil I: Offene Aufgaben (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgaben

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (8 Punkte)

Ein Investment generiert zum Zeitpunkt t, für $t \in [0, 10]$, den stetigen Cashflow $B(t) = a\,t + 10$, wobei $a > 0$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Barwert des Investments $1'000$ CHF beträgt.

(b) (8 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs dreier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2	Aktie 3
Expansion	1.5	3	m
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2	0.5
Rezession	1.5	0.5	1.5

Ein Investor möchte die drei Wertpapiere linear zu folgendem Auszahlungsschema kombinieren:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	$2m$
wirtschaftliche Stabilität	1.0
Rezession	0.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des *Gauss Verfahrens* alle möglichen Parameterwerte m, für die das gewünschte Auszahlungsschema durch eine Kombination der drei Aktien möglich ist.

(c) (10 Punkte)

Die (fixen) Entwicklungskosten für ein neues Produkt betragen $20'000$ (CHF). Jede Einheit des Produkts kann zu einem Preis von p (CHF) verkauft werden, die Produktionskosten pro Einheit betragen 2 (CHF). Sie entscheiden sich dazu, Ihr Produkt mit einer Marketingkampagne zu bewerben. Der Erfolg der Kampagne hängt von dem Betrag a (CHF), der für die Werbung ausgegeben wird, sowie dem Preis p (CHF) Ihres Produkts ab. In der Tat bestimmen Sie , dass Sie, bei einem Werbeaufwand von a (CHF) und einem Verkaufspreis von p (CHF),

$$3'000 + 4\sqrt{a} - 20p$$

Einheiten Ihres Produktes verkaufen.
Bestimmen Sie a und p so, dass Ihr Gewinn (d.h. Verkaufserlöse abzüglich Kosten, inklusive der Kosten für Werbung) maximal wird.

(d) (10 Punkte)

Ein Rechteck R habe seine Ecken in den Punkten $(0,0), (x,0), (0,y)$, und (x,y), mit $x, y > 0$. Außerdem sei die Distanz zwischen dem Punkt (x,y) und dem Punkt $(a,0)$ gleich 4, wobei $a \in (4,8)$. Bestimmen Sie mögliche Punkte (x,y), sodass die Fläche von R ein Extremum annimmt (also maximal oder minimal wird).

Bemerkung:

(1) Es ist nicht nötig zu überprüfen, ob die gefundenen potentiellen Kandidaten für ein Extremum tatsächlich einen maximalen oder minimalen Flächeninhalt von R erzeugen.

(2) Die Distanz zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ entspricht $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Demnach gilt: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

(3) Für diese Aufgabe müssen Sie die Terme der Lösung(en) nicht vereinfachen.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen ein- getragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ ihr Maximum im Punkt

(a) $P = (-6, 3)$.

(b) $P = (5, -3)$.

(c) $P = (0, 7)$.

(d) $P = (6, 3)$.

Frage 2 (3 Punkte)

Eine zweimal differenzierbare Funktion f hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert durch $g(x,y) = -f(-x,-y)$ und $D_g = D_f$. Dann gilt:

(a) g hat ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

(b) g hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

(c) g hat ein lokales Maximum in $(-x_0, -y_0)$.

(d) g hat ein lokales Minimum in $(-x_0, -y_0)$.

Frage 3 (4 Punkte)

Die Funktion f in zwei Variablen hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x^2 + 3y - 7 = 0$ ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ hat den Wert:

(a) $-\frac{3}{2}$.

(b) $-\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{3}{2}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

Frage 4 (2 Punkte)

Für eine stetige Funktion f und $a, x \in D_f$ mit $a \leq x$ ist die Integralfunktion I definiert als $I(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Es gilt:

(a) I ist eine Stammfunktion von f.

(b) $f'(x) = I(x)$.

(c) $I'(x) = f(x) - f(a)$.

(d) I ist nicht differenzierbar

Frage 5 (2 Punkte)

Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Es folgt:

(a) $\int f(g(x))dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\int f(g(x))dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\int f(g(x))f'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 6 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6x + (2x^2 + 1)e^{x^2}\right] dx$$

ist

(a) $x^2 + x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3x + 2x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3x^2 + 2x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3x^2 + x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist eine Dichtefunktion für

(a) $a = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = \frac{5}{2}$.

(d) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{16} & \text{für } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Der Parameter a wird so gewählt, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist. Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X ist:

(a) $\mathbb{E}[X] = \frac{25}{16}$.

(b) $\mathbb{E}[X] = \frac{14}{3}$.

(c) $\mathbb{E}[X] = \frac{-5}{3}$.

(d) $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{3}a$.

Frage 9 (2 Punkte)

Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien orthogonal und $\mathbf{a}$ habe die Länge $\|\mathbf{a}\| = 3$. Dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$.

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3$.

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 9$.

(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ kann ohne Wissen über die Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht bestimmt werden.

Frage 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welches der folgenden Systeme ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

(c) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$.

(d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Frage 11 (2 Punkte)

A sei eine 7×5 Matrix. Das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe unendliche viele Lösungen und der Lösungsraum habe die Dimension 3. Dann gilt:

(a) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(c) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(d) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

Frage 12 (2 Punkte)

A und B seien reguläre Matrizen. Ausserdem sei A symmetrisch. Der Ausdruck

$$B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1}$$

entspricht:

(a) $(A^\top B^\top)^{-1}$.

(b) $(B^{-1}A)^\top$.

(c) $(A^{-1}B)^\top$

(d) Keinem der obigen Terme.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \frac{28}{45}.$$

Dann hat das Integral $\int_0^1 (x+1)f(x)\; dx$ den Wert:

(a) $\frac{28}{45}$.

(b) $\frac{73}{45}$.

(c) $\frac{12}{45}$.

(d) $\frac{52}{45}$.

Frage 2 (4 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal und die Länge von $\mathbf{u}$ gleich $\sqrt{37}$?

(a) $t = -5$.

(b) $t = 0$.

(c) $t = 1$.

(d) Für kein $t \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)

Die 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 1.

(b) hat Rang 2.

(c) hat Rang 3.

(d) hat Rang 4.

Frage 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) A ist singulär.

Frage 5 (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A^2 hat den Eigenwert:

(a) 2.

(b) 4.

(c) 6.

(d) 8.

Frage 6 (4 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)y_k = 2a, \text{ wobei } a \neq -1, a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = -4(1+a)^k$.

(b) $y_k = 2(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4(1+a)^k - 2$.

(d) $y_k = 8(1+a)^k - 3$.

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$3(y_{k+1} - y_k) + 5 = 2y_{k+1} - y_k + 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2(a+2)y_{k+1} - 2y_k + 2(a^2-4) = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert monoton gegen 0 genau dann, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Lösungen

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (8 Punkte)

Ein Investment generiert zum Zeitpunkt t, für $t \in [0, 10]$, den stetigen Cashflow $B(t) = a\,t + 10$, wobei $a > 0$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Barwert des Investments $1'000$ CHF beträgt.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Formuliere das mathematische Problem.
2. Berechne den Barwert in Abhängigkeit von a.
3. Bestimme das passende a.

1. Formuliere das mathematische Problem

Der Barwert ist durch die diskontierte Summe der zukünftigen Cash Flows gegeben. Der Cashflow B ist stetig. Deswegen ersetzen wir die Summe durch ein Integral und für das Diskontieren verwenden wir die Exponentialfunktion mit negativem Exponenten. Damit erhalten wir für den Barwert

$$PV(10) = \int_0^{10} B(t)e^{-it}\,dt = \int_0^{10} (at+10)e^{-it}\,dt.$$

Da der Barwert des Investments 1000 CHF betragen soll, muss die von a abhängige Gleichung

$$PV(10) = 1000$$

gelöst werden.

2. Berechne den Barwert in Abhängigkeit von a

Wir verwenden partielle Integration um den Barwert zu berechnen. Mit

$$u(t) = B(t) = at + 10 \;\Rightarrow\; u'(t) = a$$
$$v'(t) = e^{-it} \;\Rightarrow\; v(t) = -\frac{1}{i}e^{-it}$$

erhalten wir durch

$$PV(10) = \int_0^{10} \underbrace{(at+10)}_{u(t)}\underbrace{e^{-it}}_{v'(t)}\,dt = \left[\underbrace{-\frac{at+10}{i}e^{it}}_{u(t)\cdot v(t)}\right]_0^{10} - \int_0^{10} \underbrace{-\frac{a}{i}e^{-it}}_{u'(t)\cdot v(t)}\,dt$$

$$= -\frac{10a+10}{i}e^{-i10} - \left(-\frac{a\cdot 0+10}{i}e^{i0}\right) + \frac{a}{i}\int_0^{10} e^{-it}\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{10a+10}{i}e^{-i10} + \frac{10}{i} + \frac{a}{i}\left[-\frac{1}{i}e^{-it}\right]_0^{10} \\
&= -\frac{10a+10}{i}e^{-i10} + \frac{10}{i} + \frac{a}{i}\left(-\frac{1}{i}e^{-i10} - \left(-\frac{1}{i}e^{-i0}\right)\right) \\
&= -\frac{10a+10}{i}e^{-i10} + \frac{10}{i} - \frac{a}{i^2}e^{-i10} + \frac{a}{i^2} \\
&= -\frac{10a}{i}e^{-i10} - \frac{10}{i}e^{-i10} + \frac{10}{i} - \frac{a}{i^2}e^{-i10} + \frac{a}{i^2} \\
&= a\left(-\frac{10}{i}e^{-i10} - \frac{1}{i^2}e^{-i10} + \frac{1}{i^2}\right) - \frac{10}{i}e^{-i10} + \frac{10}{i} \\
&= a\left(\frac{1}{i^2}(1-e^{-i10}) - \frac{10}{i}e^{-i10}\right) + \frac{10}{i}(1-e^{-i10})
\end{aligned}
$$

eine explizite Darstellung des Barwerts in Abhängigkeit von a.

3. Bestimme das passende a

Das passende a erhalten wir durch:

$$
\begin{aligned}
PV(10) = a\left(\frac{1}{i^2}(1-e^{-i10}) - \frac{10}{i}e^{-i10}\right) + \frac{10}{i}(1-e^{-i10}) &= 1000 \\
\Leftrightarrow\ a\left(\frac{1}{i^2}(1-e^{-i10}) - \frac{10}{i}e^{-i10}\right) &= 1000 - \frac{10}{i}(1-e^{-i10}) \\
\Leftrightarrow\ a = \frac{1000 - \frac{10}{i}(1-e^{-i10})}{\left(\frac{1}{i^2}(1-e^{-i10}) - \frac{10}{i}e^{-i10}\right)} &\overset{i=0.05}{\approx} 25.534.
\end{aligned}
$$

Der Barwert des Investments beträgt 1000 CHF genau dann, wenn $a \approx 25.534$ gilt.

(b) (8 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs dreier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2	Aktie 3
Expansion	1.5	3	m
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2	0.5
Rezession	1.5	0.5	1.5

Ein Investor möchte die drei Wertpapiere linear zu folgendem Auszahlungsschema kombinieren:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	$2m$
wirtschaftliche Stabilität	1.0
Rezession	0.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des *Gauss Verfahrens* alle möglichen Parameterwerte m, für die das gewünschte Auszahlungsschema durch eine Kombination der drei Aktien möglich ist.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Beschreibe das Problem mathematisch.
2. Wende das Gauß-Verfahren an.

1. Beschreibe das Problem mathematisch

Wir bezeichnen mit

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

den Payoffvektor und mit

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} m \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

die zu den Aktien 1 bis 3 gehörenden Vektoren. Der Payoffvektor $\mathbf{p}$ lässt sich aus den Aktienvektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ genau dann kombinieren, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{p} \;\Leftrightarrow\; 2(\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \lambda_3\mathbf{a}_3) = \lambda_1 2\mathbf{a}_1 + \lambda_2 2\mathbf{a}_2 + \lambda_3 2\mathbf{a}_3 = 2\mathbf{p}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2m \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mindestens eine Lösung $(\lambda_1^\star, \lambda_2^\star, \lambda_3^\star)$ besitzt. Die Umformungen an dem Gleichungssystem waren nicht notwendig. Jedoch reduziert die Elimination der Dezimalbrüche die Fehleranfälligkeit. Ein lineares Gleichungssystem besitzt mindestens eine Lösung, falls

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|\mathbf{b})$$

gilt. Das heißt, dass A denselben Rang wie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ besitzt. In unseren Fall ist $\mathbf{b} = 2\mathbf{p}$ und $A = 2 \cdot (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$.

2. Wende das Gauß-Verfahren an

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist durch

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 2m & 4m \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

gegeben. Die Anwendung des Gauß-Verfahrens liefert:

$$\begin{aligned}
(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 2m & 4m \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ \qquad\quad + \end{array} &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 2m & 4m \\ 0 & -2 & 1-2m & 2-4m \\ 0 & -5 & 3-2m & 1-4m \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ | \cdot (-2) \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 2m & 4m \\ 0 & -2 & 1-2m & 2-4m \\ 0 & 10 & -6+4m & -2+8m \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ \cdot 3 \quad \cdot 5 \\ \qquad + \end{array} \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3-4m & 6-8m \\ 0 & -2 & 1-2m & 2-4m \\ 0 & 0 & -1-6m & 8-12m \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem hat genau dann keine Lösung, falls

$$-1 - 6m = 0 \quad \wedge \quad 8 - 12m \neq 0,$$

d.h. $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A|\mathbf{b})$, gilt. Mit

$$-1 - 6m = 0 \;\Leftrightarrow\; 6m = -1 \;\Leftrightarrow\; m = -\frac{1}{6}$$

und

$$8 - 12 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 8 - (-2) = 10 \neq 0$$

hat das lineare Gleichungssystem für $a = -\frac{1}{6}$ keine Lösung.
Damit lässt der Payoffvektor $\mathbf{p}$ genau dann aus $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ kombinieren, wenn $m \neq -\frac{1}{6}$ gilt.

Bemerkung:
Mit den selben elementaren Zeilenoperationen erhalten wir durch

$$\det(A) = C \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3-4m \\ 0 & -2 & 1-2m \\ 0 & 0 & -1-6m \end{pmatrix} = C \cdot 3 \cdot (-2) \cdot (-1 - 6m) = 0 \;\Leftrightarrow\; m = -\frac{1}{6}$$

das selbe Resultat, den A ist für $m \neq -\frac{1}{6}$ regulär. Damit besitzt das LGS eine eindeutige Lösung für $m \neq -\frac{1}{6}$. Durch die Multiplikation einzelner Zeilen mit einem Faktor ungleich null erhalten wir die Konstante $C \neq 0$.

(c) (10 Punkte)

Die (fixen) Entwicklungskosten für ein neues Produkt betragen 20′000 (CHF). Jede Einheit des Produkts kann zu einem Preis von p (CHF) verkauft werden, die Produktionskosten pro Einheit betragen 2 (CHF). Sie entscheiden sich dazu, Ihr Produkt mit einer Marketingkampagne zu bewerben. Der Erfolg der Kampagne hängt von dem Betrag a (CHF), der für die Werbung ausgegeben wird, sowie dem Preis p (CHF) Ihres Produkts ab. In der Tat bestimmen Sie , dass Sie, bei einem Werbeaufwand von a (CHF) und einem Verkaufspreis von p (CHF),

$$3'000 + 4\sqrt{a} - 20p$$

Einheiten Ihres Produktes verkaufen.
Bestimmen Sie a und p so, dass Ihr Gewinn (d.h. Verkaufserlöse abzüglich Kosten, inklusive der Kosten für Werbung) maximal wird.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Stelle eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit von a und p auf.
2. Bestimme das Maximum.

1. Stelle eine Gewinnfunktion in Abhängigkeit von a und p auf

Der Gewinn entspricht der Differenz der Einnahmen und Kosten. Damit ist die Gewinnfunktion von der Form

$$f(a,p) = \underbrace{E(a,p)}_{\text{Einnahmen}} - \underbrace{K(a,p)}_{\text{Kosten}},$$

wobei a die Kosten für die Werbung und p der Verkaufspreis des Produkts ist. Die Einnahmen sind durch

$$E(a,p) = \underbrace{(3000 + 4\sqrt{a} - 20p)}_{\text{Nachfrage}} \underbrace{p}_{\text{Preis}}$$

und die Kosten mit

$$K(a,p) = \underbrace{20000}_{\text{Fixkosten}} + \underbrace{2 \cdot (3000 + 4\sqrt{a} - 20p)}_{\text{Produktionskosten}} + \underbrace{a}_{\text{Werbung}}$$

gegeben. Damit ergibt sich für die Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} f(a,p) &= E(a,p) - K(a,p) \\ &= (3000 + 4\sqrt{a} - 20p)p - \big(20000 + 2 \cdot (3000 + 4\sqrt{a} - 20p) + a\big) \\ &= (3000 + 4\sqrt{a} - 20p)p - 2(3000 + 4\sqrt{a} - 20p) - 2000 - a \\ &= (3000 + 4\sqrt{a} - 20p)(p - 2) - 20000 - a. \end{aligned}$$

2. Bestimme das Maximum

Die notwendige Bedingung für einen Extrempunkt (a_0, p_0) von f ist, dass die partiellen Ableitungen von f in (a_0, p_0) verschwinden. Das heißt

$$f_a(a_0, p_0) = 0$$
$$f_p(a_0, p_0) = 0$$

muss erfüllt sein. Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$f_a(a, p) = \frac{4}{2\sqrt{a}} \cdot (p-2) - 1 = \frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1$$
$$f_p(a, p) = -20(p-2) + (3000 + 4\sqrt{a} - 20p) = -40p + 40 + 3000 + 4\sqrt{a} = -40p + 4\sqrt{a} + 3040.$$

Für einen Extrempunkt muss das Gleichungssystem

$$f_a(a, p) = \frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1 = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$f_p(a, p) = -40p + 4\sqrt{a} + 3040 = 0 \ \text{(II)}$$

erfüllt sein. Für die Gleichung (I) gilt:

$$\frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} = 1 \ \Leftrightarrow \ 2(p-2) = \sqrt{a} \ \Leftrightarrow \ p - 2 = \frac{\sqrt{a}}{2} \ \Leftrightarrow \ p = \frac{\sqrt{a}}{2} + 2.$$

Eingesetzt in die Gleichung (II) liefert dies:

$$\begin{aligned} -40p + 4\sqrt{a} + 3040 = 0 \ &\Leftrightarrow \ -40\left(\frac{\sqrt{a}}{2} + 2\right) + 4\sqrt{a} + 3040 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ -20\sqrt{a} - 80 + 4\sqrt{a} + 3040 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ -16\sqrt{a} + 2960 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ 16\sqrt{a} = 2960 \ \Leftrightarrow \ \sqrt{a} = \frac{2960}{16} = 185 \\ &\Leftrightarrow \ a = (185)^2 = 34225. \end{aligned}$$

Also folgt auch:

$$p = \frac{\sqrt{a}}{2} + 2 = \frac{185}{2} + 2 = 92.5 + 2 = 94.5.$$

Damit ist ein möglicher Kandidat für ein Extremum durch $(a_0, p_0) = (34225, 94.5)$ gegeben.

Jetzt muss die Art des Extremums bestimmt werden. Hierfür benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen. Diese erhalten wir durch:

$$f_{aa}(a, p) = \frac{\partial}{\partial \text{a}}\left(\frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1\right) = 2(p-2)\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-\frac{1}{2}-1} = -(p-2)a^{-\frac{3}{2}}$$
$$f_{pp}(a, p) = -40$$
$$f_{ap}(a, p) = f_{pa}(a, p) = \frac{\partial}{\partial \text{p}}\left(\frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1\right) = \frac{2}{\sqrt{a}} = 2a^{-\frac{1}{2}}.$$

Da (a_0, p_0) die notwendige Bedingung für ein Extrempunkt erfüllt hat f an (a_0, p_0) ein Maximum, falls

$$f_{aa}(a_0, p_0) < 0 \ \wedge \ f_{pp}(a_0, p_0) < 0 \ \wedge \ f_{aa}(a_0, p_0) f_{pp}(a_0, p_0) - (f_{ap}(a_0, p_0))^2 > 0$$

erfüllt ist. Wegen $a_0 > 0$ und $p_0 > 0$ ist $f_{aa}(a_0, p_0) < 0$ erfüllt. Die Bedingung $f_{pp}(a, p) < 0$ gilt für alle $a, p \in \mathbb{R}$, also insbesondere auch für (a_0, p_0). Wegen

$$\begin{aligned} 2(p_0 - 2)a_0^{-\frac{3}{2}} \cdot 40 - \frac{4}{a_0} > 0 \ &\Leftrightarrow \ 2(p_0 - 2)a_0^{-\frac{3}{2}} \cdot 40 > \frac{4}{a_0} \ \Leftrightarrow \ 80(p_0 - 2) > \frac{4a_0^{\frac{3}{2}}}{a_0} = 4\sqrt{a_0} \\ &\Leftrightarrow \ 80 \cdot 94.5 > 4 \cdot 185 + 160 \end{aligned}$$

ist auch die letzte Bedingung erfüllt. Damit besitzt f an der Stelle $(a_0, p_0) = (34225, 94.5)$ ein Maximum.

(d) (10 Punkte)

Ein Rechteck R habe seine Ecken in den Punkten $(0,0), (x,0), (0,y)$, und (x,y), mit $x, y > 0$. Außerdem sei die Distanz zwischen dem Punkt (x,y) und dem Punkt $(a,0)$ gleich 4, wobei $a \in (4,8)$. Bestimmen Sie mögliche Punkte (x,y), sodass die Fläche von R ein Extremum annimmt (also maximal oder minimal wird).

Bemerkung:

(1) Es ist nicht nötig zu überprüfen, ob die gefundenen potentiellen Kandidaten für ein Extremum tatsächlich einen maximalen oder minimalen Flächeninhalt von R erzeugen.

(2) Die Distanz zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ entspricht $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Demnach gilt: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

(3) Für diese Aufgabe müssen Sie die Terme der Lösung(en) nicht vereinfachen.

Lösung:

Vorgehensweise:

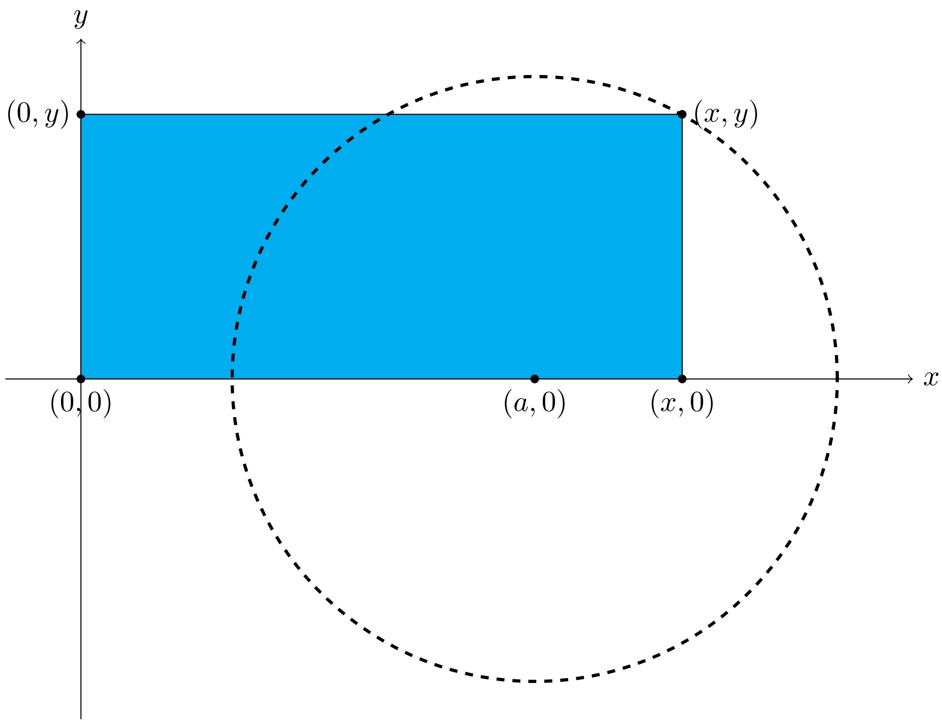
1. Skizziere und formuliere das Problem.
2. Finde mögliche Kandidaten für Extrempunkte.

1. Skizziere und formuliere das Problem

Der Eckpunkt (x,y) des Rechtecks R hat den Abstand 4 zu dem Punkt $(a,0)$. Damit muss

$$4 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} \iff 4^2 = (x-a)^2 + y^2 \iff \varphi(x,y) = (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0$$

für $x, y > 0$ erfüllt sein. Also bewegt sich der Eckpunkt (x,y) auf dem oberen Halbkreis mit Radius 4 und dem Mittelpunkt $(a,0)$. Die Einschränkung $a \in (4,8)$ sorgt dafür, dass der Kreis in der positiven Halbebene $(x > 0)$ bleibt und der Flächeninhalt des Rechtecks nicht beliebig groß werden kann. Der vorliegende Sachverhalt wird durch folgende Skizze veranschaulicht:



Die Fläche eines Rechtecks mit den Seiten x und y berechnet sich durch

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

Damit ist unser Ziel die Extremstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ zu finden.

2. Finde mögliche Kandidaten für Extrempunkte

Da wir ein Extremwertproblem unter einer Nebenbedingung vorliegen haben, wenden wir das Lagrange Verfahren an. Die Lagrangefunktion ist gegeben durch

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = xy + \lambda((x-a)^2 + y^2 - 16).$$

Die notwendigen Bedingung für eine Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ ist, dass alle partiellen Ableitungen gleich Null sind. Damit gilt:

$$\begin{aligned} F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y + 2\lambda(x-a) = 0 && \text{(I)} \\ F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + 2\lambda y = 0 && \text{(II)} \\ F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0 && \text{(III)}. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen nennen wir auch Lagrangebedingungen. Aus der ersten Gleichung erhalten wir

$$y + 2\lambda(x-a) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda(x-a) = -y \;\Leftrightarrow\; 2\lambda = -\frac{y}{x-a}$$

und die Gleichung (II) liefert

$$x + 2\lambda y = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\lambda y = -x \;\Leftrightarrow\; 2\lambda = -\frac{x}{y}.$$

Wegen $2\lambda = 2\lambda$ erhalten wir

$$-\frac{y}{x-a} = -\frac{x}{y} \;\Leftrightarrow\; \underbrace{y^2 = x(x-a)}_{\text{(IV)}}.$$

Wenn wir dies in die Gleichung (III) einsetzen folgt

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 - 16 = (x-a)^2 + x(x-a) - 16 &= x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - ax - 16 \\ &= 2x^2 - 3ax + a^2 - 16 = 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung. Durch die Mitternachts-Formel erhalten wir die Lösungen

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{3a \pm \sqrt{(3a)^2 - 4 \cdot 2(a^2 - 16)}}{2 \cdot 2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2 + 8 \cdot 16}}{4} = \frac{3a \pm \sqrt{a^2 + 128}}{4} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{3a + \sqrt{a^2 + 128}}{4}, \qquad x_2 = \frac{3a - \sqrt{a^2 + 128}}{4}. \end{aligned}$$

Wegen

$$x_2 = \frac{3a - \sqrt{a^2 + 128}}{4} < \frac{3a - \sqrt{a^2}}{4} = \frac{3a - a}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}$$

gilt $x_2 \in (0, \frac{a}{2})$. Damit verletzt x_2 die Gleichung (IV), denn

$$y^2 = x(x-a) < 0$$

ist ein Widerspruch ($y^2 > 0$). Also bleibt x_1 als einzige Möglichkeit übrig. Mit der Gleichung (IV) und $x := x_1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
y^2 = x(x-a) &= \frac{3a + \sqrt{a^2+128}}{4}\left(\frac{3a+\sqrt{a^2+128}}{4} - a\right) = \frac{3a+\sqrt{a^2+128}}{4} \cdot \frac{3a+\sqrt{a^2+128}-4a}{4} \\
&= \frac{3a+\sqrt{a^2+128}}{4} \cdot \frac{-a+\sqrt{a^2+128}}{4} = \frac{-3a^2+3a\sqrt{a^2+128}-a\sqrt{a^2+128}+a^2+128}{16} \\
&= \frac{128+2a\sqrt{a^2+128}-2a^2}{16} \\
&= \frac{64+a\sqrt{a^2+128}-a^2}{8} \\
\overset{y \geq 0}{\Rightarrow} \quad y &= \sqrt{\frac{64+a\sqrt{a^2+128}-a^2}{8}}.
\end{aligned}$$

Damit ist der Punkt

$$\left(\frac{3a+\sqrt{a^2+128}}{4}, \sqrt{\frac{64+a\sqrt{a^2+128}-a^2}{8}}.\right)$$

der einzige Kandidat für ein Extrempunkt von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y) = x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ ihr Maximum im Punkt

(a) $P = (-6, 3)$.

(b) $P = (5, -3)$.

(c) $P = (0, 7)$.

(d) $P = (6, 3)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme das in der Nebenbedingung beschriebene Objekt.
2. Bestimme die richtige Antwort.

1. Bestimme das in der Nebenbedingung beschriebene Objekt
Wegen

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = \frac{x^2}{6^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

beschreibt die Nebenbedingung eine Ellipse mit dem Mittelpunkt $(0,3)$ und den Halbachsen $a = 6$ bezüglich der x-Achse und $b = 4$ bezüglich der y-Achse.

2. Bestimme die richtige Antwort
Da $f(x,y) = x$ erhalten wir das Maximum unter der Nebenbedingung am Endpunkt der Halbachse bezüglich x. Dieser liegt bei $(6,3)$. Das heißt, dass $(6,3)$ das Maximum ist.

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)

Eine zweimal differenzierbare Funktion f hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert durch $g(x, y) = -f(-x, -y)$ und $D_g = D_f$. Dann gilt:

(a) g hat ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

(b) g hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

(c) g hat ein lokales Maximum in $(-x_0, -y_0)$.

(d) g hat ein lokales Minimum in $(-x_0, -y_0)$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme einen stationären Punkt von g.
2. Bestimme die Art des stationären Punkts.

1. Bestimme einen stationären Punkt von g

Die partiellen Ableitungen von g sind mit der Kettenregel gegeben durch:

$$g_x(x, y) = f_x(-x, -y)$$
$$g_y(x, y) = f_y(-x, -y)$$

Wegen

$$g_x(-x_0, -y_0) = f_x(x_0, y_0) = 0$$
$$g_y(-x_0, -y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

ist $(-x_0, -y_0)$ ein stationärer Punkt.

2. Bestimme die Art des stationären Punkts

Da (x_0, y_0) ein lokales Maximum von f ist, ist $(-x_0, -y_0)$ ein lokales Minimum von g. Dies folgt wegen

$$g_{xx}(-x_0, -y_0) = -\underbrace{f_{xx}(x_0, y_0)}_{<0} > 0$$
$$g_{yy}(-x_0, -y_0) = -\underbrace{f_{yy}(x_0, y_0)}_{<0} > 0$$

und

$$g_{xx}(-x_0, -y_0)g_{yy}(-x_0, -y_0) - (g_{xy}(-x_0, -y_0))^2 = (-1)^2 f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{yy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Damit ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 3 (4 Punkte)

Die Funktion f in zwei Variablen hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = x^2 + 3y - 7 = 0$ ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ hat den Wert:

(a) $-\frac{3}{2}$.

(b) $-\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{3}{2}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende den Satz über implizite Funktionen.
2. Verwende das lokale Maximum von f.

1. Verwende den Satz über implizite Funktionen

Wir betrachten die Nebenbedingung φ. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x,y) = 2x &\;\Rightarrow\; \varphi_y(x_0,y_0) = 2 \\ \varphi_y(x,y) = 3 &\;\Rightarrow\; \varphi_y(x_0,y_0) = 3. \end{aligned}$$

Damit können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden. Dieser liefert uns eine stetig differenzierbare Funktion $y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$, sodass

$$\varphi(\underbrace{x, y(x)}_{c(x):=}) = \varphi(c(x)) = 0$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt. Damit finden wir ein kleines Intervall um x_0, worauf die y-Variable nach x aufgelöst werden kann. Dies soll durch die Notation $y(x)$ deutlich gemacht werden. Wegen

$$c'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

ist die Steigung der Tangente an die Niveaulinie $\varphi(x,y) = 0$ in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ durch $y'(1)$ gegeben. Außerdem gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\varphi(x, y(x))) = \varphi_x(x, y(x)) + y'(x)\varphi_y(x, y(x)) = 0 \;\Leftrightarrow\; y'(x) = -\frac{\varphi_x(x, y(x))}{\varphi_y(x, y(x))}$$

für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Damit erhalten wir:

$$y'(1) = -\frac{\varphi_x(1,2)}{\varphi_y(1,2)} = -\frac{2}{3}.$$

2. Verwende das lokale Maximum von f

Da f ein lokales Maximum in (x_0, y_0) unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ hat und $c(x)$ die Nebenbedingung für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ erfüllt erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(f(c(x))) =& \mathbf{grad} f(c(x)) \cdot c'(x)\\ &\Rightarrow 0 = \mathbf{grad} f(c(1)) \cdot c'(1) = \mathbf{grad} f(1,2) \cdot c'(1) = f_x(1,2) + y'(1) f_y(1,2)\\ &\Leftrightarrow y'(1) = -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)}.\end{aligned}$$

Wegen

$$y'(1) = -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)} = -\frac{\varphi_x(1,2)}{\varphi_y(1,2)}$$

sind $\mathbf{grad} f(1,2)$ und $\mathbf{grad}\varphi(1,2)$ linear abhängig. Da diese jeweils orthogonal zu den Tangenten der Niveaulinien sind, ist die Steigung der Niveaulinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1,2)$ gegeben durch $-\frac{2}{3}$.

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 4 (2 Punkte)

Für eine stetige Funktion f und $a, x \in D_f$ mit $a \leq x$ ist die Integralfunktion I definiert als $I(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. Es gilt:

(a) I ist eine Stammfunktion von f.

(b) $f'(x) = I(x)$.

(c) $I'(x) = f(x) - f(a)$.

(d) I ist nicht differenzierbar

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Nehme eine bekannte Stammfunktion F von f an.

1. Nehme eine bekannte Stammfunktion F von f an

Angenommen F sei eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$I(x) = \int_a^x f(t)\ dt = F(t)\Big|_a^x = F(x) \underbrace{-F(a)}_{=+C} = F(x) + C.$$

Die Integralfunktion $I(x)$ unterscheidet sich nur um eine Konstante von F. Damit erhalten wir $I' = F' = f$.

Also ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 5 (2 Punkte)

Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Es folgt:

(a) $\int f(g(x))dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\int f(g(x))dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\int f(g(x))f'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Finde die korrekte Antwort durch Differenzieren .

1. Finde die korrekte Antwort durch Differenzieren

Da F eine Stammfunktion von f ist, gilt $F' = f$. Das Differenzieren des Integrals liefert uns den Integranden. Wir werden beide Seiten der Antwortmöglichkeiten differenzieren. Damit erhalten wir

$$f(g(x)) = F'(x) = f(x).$$

Mit $g(x) \neq x$ haben wir ein Gegenbeispiel gefunden, da dann $f(g(x))$ nicht $f(x)$ entspricht. Damit ist (a) falsch.

Differenzieren der Möglichkeit (b) liefert mit der Kettenregel:

$$f(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Ein Gegenbeispiel erhält man durch $f(x) = g(x) = c \neq 0$. Dies erkennen wir an dem Widerspruch:

$$c = \underbrace{c}_{F'} \cdot \underbrace{0}_{g'}.$$

Damit ist (b) falsch. Dies ist ebenso ein Gegenbeispiel zur (c).
Wegen

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

entspricht die Ableitung von $F(g(x))$ dem Integranden in Möglichkeit (d). Dies ist gerade die Substitutionsregel für Integrale.

Also ist die Antwort (d) korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6x + (2x^2+1)e^{x^2}\right] dx$$

ist

(a) $x^2 + x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3x + 2x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3x^2 + 2x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3x^2 + x\ e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Lösung:

Vorgehensweise:
1. Bestimme die korrekte Antwort durch Differenzieren.

1. Bestimme die korrekte Antwort durch Differenzieren

Die Antwortmöglichkeiten bestehen alle aus zwei Summanden. Die Konstante C können wir ignorieren, da diese bei der Ableitung wegfällt.

Wir definieren die Funktion $h(x) = f(x) + g(x)$, wobei f und g differenzierbar sind. Dann gilt für die Ableitung:

$$h'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Das bedeutet, dass wir die Summanden in den Antwortmöglichkeiten separat untersuchen können.

Wir betrachten zuerst den Term xe^{x^2}, welcher in allen Antworten vorkommt. Für diesen gilt mit der Produkt-und Kettenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(xe^{x^2}) = 1 \cdot e^{x^2} + x\ 2x\ e^{x^2} = (2x^2+1)e^{x^2}.$$

Nach diesem Resultat sind die Antworten (b) und (c) falsch. Wegen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(3x^2) = 6x$$

ist die Antwort (a) falsch.

Also ist die Antwort (d) korrekt.

Dies erkennen wir auch mit der Ketten-und Produktregel:

$$\left(3x^2 + x\ e^{x^2} + C\right)' = 6x + e^{x^2} + 2x^2xe^{x^2} = 6x(2x^2+1)e^{x^2}.$$

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

f ist eine Dichtefunktion für

(a) $a = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = \frac{5}{2}$.

(d) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe das Kriterium für eine Dichtefunktion an.
2. Wende das Kriterium an, um das passende a zu finden.

1. Gebe das Kriterium für eine Dichtefunktion an

Die Funktion f ist eine Dichtefunktion, falls

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$$

gilt.

2. Wende das Kriterium an, um das passende a zu finden

Demnach erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_0^1 ax^2 + \frac{1}{2}\ dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{1}{2} - \left(\frac{a}{3}0^3 + \frac{1}{2}0\right) = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}$$
$$= 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{a}{3} = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ a = \frac{3}{2}$$

Also ist Antwort (b) korrekt.

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{16} & \text{für } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Der Parameter a wird so gewählt, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist. Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X ist:

(a) $\mathbb{E}[X] = \frac{25}{16}$.

(b) $\mathbb{E}[X] = \frac{14}{3}$.

(c) $\mathbb{E}[X] = \frac{-5}{3}$.

(d) $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{3}a$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe das Kriterium einer Dichtefunktion an.
2. Bestimme den Parameter a um den Erwartungswert zu berechnen.

1. Gebe das Kriterium einer Dichtefunktion an

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$$

erfüllt sein.

2. Bestimme den Parameter a um den Erwartungswert zu berechnen

Da $f(x) \neq 0$ für $0 \leq x \leq 8$ ist, erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_{0}^{8} ax + \frac{1}{16}\ dx = \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{16}x \Big|_0^8 = \frac{a}{2} \cdot 64 + \frac{1}{2} - \left(\frac{a}{2}0^2 + \frac{1}{16}0\right)$$
$$= 1 \ \Leftrightarrow\ 32a = \frac{1}{2} \ \Leftrightarrow\ a = \frac{1}{64}$$

Da f die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_{0}^{8} x\left(\frac{1}{64}x + \frac{1}{16}\right)\ dx = \int_{0}^{8} \frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{16}x\ dx = \frac{1}{64 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{32}x^2 \Big|_0^8$$
$$= \frac{8^3}{64 \cdot 3} + \frac{1}{32} \cdot 64 - \left(\frac{0^3}{64 \cdot 3} + \frac{1}{32} \cdot 0^2\right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{14}{3}.$$

Also ist die Antwort (b) korrekt.

Frage 9 (2 Punkte)

Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien orthogonal und $\mathbf{a}$ habe die Länge $\|\mathbf{a}\| = 3$. Dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$.

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3$.

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 9$.

(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ kann ohne Wissen über die Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht bestimmt werden.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Gebe den Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Länge eines Vektors an.
2. Verwende die Orthogonalität.

1. Gebe den Zusammenhang zwischen Skalarprodukt und Länge eines Vektors an

Für die Länge des Vektors $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & ... & a_n \end{pmatrix}$ gilt:

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = 3 \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 3^2 = 9.$$

Hierbei sind a_1 bis a_n die einzelnen Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$.

2. Verwende die Orthogonalität

Da $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ orthogonal sind gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ und wir erhalten:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 9 + 0 = 9.$$

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Frage 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welches der folgenden Systeme ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

(c) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$.

(d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Schließe falsche Antworten durch Linearkombinationen bzw. die Determinante aus.

1. Schließe falsche Antworten durch Linearkombinationen bzw. die Determinante aus

Unter einer Basis verstehen wir ein System von linear unabhängigen Vektoren. Wir können die Antwort (d) direkt verwerfen, da es keine fünf linear unabhängige Vektoren in einem dreidimensionalen Raum geben kann.

Wir werden verwenden, dass drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ genau dann eine Basis bilden, wenn diese linear unabhängig sind. Das heißt die Matrix bestehend aus den Vektoren ist regulär. Dies ist äquivalent dazu, dass die Determinate ungleich null ist. Für die falschen Antworten werden wir jedoch die Linearkombinationen genauer betrachten.

Wegen

$$1 \cdot \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \mathbf{d}$$

ist das System $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$ linear abhängig und Antwort (b) ist falsch. Dies lässt sich auch durch

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) = 0$$

feststellen.

Durch identisches Vorgehen gilt:

$$1 \cdot \mathbf{b} + (-1) \cdot \mathbf{c} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}.$$

Also ist die Antwort (c) falsch. Dies lässt sich auch durch

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}) = 0$$

feststellen.

Übrig bleibt die korrekte Antwort (a). Dies wollen wir noch verifizieren. Hierfür berechnen wir die Determinante, indem wir nach der ersten Zeile entwickeln. Dies ist eine geschickte Wahl, da sich eine Null in der ersten Zeile befindet. Es gilt:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 - 4 = -2 \neq 0.$$

Damit ist das System $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ linear unabhängig und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Also ist die Antwort (a) korrekt.

Frage 11 (2 Punkte)

A sei eine 7×5 Matrix. Das System von linearen Gleichungen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe unendliche viele Lösungen und der Lösungsraum habe die Dimension 3. Dann gilt:

(a) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(c) $\text{rg}(A) < \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(d) $\text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende die Dimensionsformel für den Lösungsraum an.

1. Wende die Dimensionsformel für den Lösungsraum an

Die Dimensionsformel für den Lösungsraum L ist durch

$$\dim\ L = n - \text{rg}(A)$$

gegeben. Hierbei ist n die Anzahl der Variablen. Da A eine 7×5 Matrix ist, besitzt das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ fünf Variablen. Das heißt $n = 5$. Insgesamt erhalten wir

$$3 = \dim\ L = 5 - \text{rg}(A) \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(A) = 5 - \dim\ L = 5 - 3 = 2.$$

Da das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösbar ist, erhalten wir

$$2 = \text{rg}(A) = \text{rg}(A; \mathbf{b}).$$

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 12 (2 Punkte)

A und B seien reguläre Matrizen. Ausserdem sei A symmetrisch. Der Ausdruck

$$B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1}$$

entspricht:

(a) $(A^\top B^\top)^{-1}$.

(b) $(B^{-1}A)^\top$.

(c) $(A^{-1}B)^\top$

(d) Keinem der obigen Terme.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende die Rechenregeln für Matrizen an.

1. Wende die Rechenregeln für Matrizen an

Wir werden die folgenden Rechenregeln verwenden:

$$\begin{aligned}(AB)^\top &= B^\top A^\top \\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1}.\end{aligned}$$

Mit diesen Regeln erhalten wir:

$$\begin{aligned}B^\top (AB)^\top (B^{-1}A^{-1})^\top B(AB)^{-1} &= B^\top B^\top A^\top (A^{-1})^\top (B^{-1})^\top BB^{-1}A^{-1} = B^\top B^\top I(B^{-1})^\top IA^{-1} \\ &= B^\top B^\top (B^\top)^{-1}A^{-1} = B^\top A^{-1} \stackrel{A \text{ symmetrisch}}{=} B^\top (A^{-1})^\top \\ &= (A^{-1}B)^\top.\end{aligned}$$

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \frac{28}{45}.$$

Dann hat das Integral $\int_0^1 (x+1)f(x)\ dx$ den Wert:

(a) $\frac{28}{45}$.

(b) $\frac{73}{45}$.

(c) $\frac{12}{45}$.

(d) $\frac{52}{45}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme mit der Definition der Dichtefunktion und dem Erwartungswert die korrekte Antwort

1. Bestimme mit der Definition der Dichtefunktion und dem Erwartungswert die korrekte Antwort

Da f eine Dichtefunktion ist, erfüllt diese

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_0^1 f(x)\ dx = 1.$$

Das erste Gleichzeichen erhalten wir , da $f(x)$ für $x < 0$ und $x > 1$ gleich null ist. Da die Zufallsvariable X eine Dichtefunktion f besitzt, ist der Erwartungswert gerade das Integral über $xf(x)$. Das heißt für den gegebenen Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx = \int_0^1 xf(x)\ dx = \frac{28}{45}.$$

Nun betrachten wir das gewünschte Integral:

$$\int_0^1 (x+1)f(x)\ dx = \underbrace{\int_0^1 xf(x)\ dx}_{\mathbb{E}[X]=} + \underbrace{\int_0^1 f(x)\ dx}_{=1} = \frac{28}{45} + 1 = \frac{28+45}{45} = \frac{73}{45}.$$

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Frage 2 (4 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal und die Länge von $\mathbf{u}$ gleich $\sqrt{37}$?

(a) $t = -5$.

(b) $t = 0$.

(c) $t = 1$.

(d) Für kein $t \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme t so, dass die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ orthogonal sind.
2. Bestimme die Länge von $\mathbf{u}$ und finde die korrekte Antwort.

1. Bestimme t so, dass die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ orthogonal sind

Die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt gleich Null ist. Es gilt:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot (t+5) + (t-1) \cdot (-1) - 6 \cdot 1 = t^2 + 5t + -t + 1 + (-6)$$
$$= t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Mit der Mitternachts-Formel erhalten wir:

$$t_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -5.$$

Damit können wir die Antworten (a) und (c) in Betracht ziehen.

2. Bestimme die Länge von $\mathbf{u}$ und finde die korrekte Antwort

Die Länge des Vektors $\mathbf{u}$ ist gegeben durch

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{t^2 + (t-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{t^2 + (t-1)^2 + 36}.$$

Wir setzen jetzt $t_1 = 1$ bzw. $t_2 = -5$. Durch

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + (1-1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 0 + 36} = \sqrt{37}$$

erkennen wir, dass die Antwort (c) korrekt ist.

Damit müssen wir t_2 nicht mehr überprüfen, da dies auch eine Antwortmöglichkeit ist.

Damit ist die Antwort (c) korrekt.

Frage 3 (3 Punkte)

Die 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 1.

(b) hat Rang 2.

(c) hat Rang 3.

(d) hat Rang 4.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Wende das Gauß-Verfahren an.

1. Wende das Gauß-Verfahren an
Durch das Gauß-Verfahren erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-9) \quad (-7) \\ + \qquad\quad \\ \qquad\quad + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können keine weitere Nullzeile durch elementare Zeilenoperationen erhalten. Demzufolge ist der Rang der Matrix A gleich 2.

Damit ist Antwort (b) korrekt.

Bemerkung:
Der Rang entspricht der Anzahl der Zeilen, welche keine Nullzeilen sind.

Frage 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(d) A ist singulär.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Determinante der Matrix.
2. Finde durch Ausschließen die korrekte Antwort.

1. Bestimme die Determinante der Matrix

Durch Entwicklung nach der dritten Spalte erhalten wir:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1.$$

Damit ist die Matrix A regulär.

2. Finde durch Ausschließen die korrekte Antwort

Wir machen uns zunutze, dass

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gelten muss. Hierbei ist I die Einheitsmatrix. Zuerst betrachten wir A^{-1} aus (a) und überprüfen, ob $A^{-1} \cdot A = I$ gilt. Durch Multiplikation der ersten Zeile von A^{-1} mit der erste Spalte von A erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 0 \neq 1.$$

Damit ist Antwort (a) falsch. Nun untersuchen wir A^{-1} aus der Möglichkeit (c) und überprüfen auch, ob $A^{-1} \cdot A = I$ gilt. Hier multiplizieren wir die zweite Zeile von A^{-1} mit der zweiten Spalten von A und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -1 \neq 1.$$

Damit ist Antwort (c) falsch.

Also ist Antwort (b) korrekt.

Bemerkung:
Der einfachste und aufwendigste Weg wäre die inverse Matrix von A durch

$$(A|I) \rightsquigarrow ... \rightsquigarrow (I|A^{-1})$$

mit elementaren Zeilenumformungen zu bestimmen.

Frage 5 (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A^2 hat den Eigenwert:

(a) 2.

(b) 4.

(c) 6.

(d) 8.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Überlege dir, was du über die Eigenwerte von A^2 aussagen kannst.
2. Bestimme einen/die Eigenwert/e der Matrix A.

1. Überlege dir, was du über die Eigenwerte von A^2 aussagen kannst
Ein Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix A, falls

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

gilt. Hieraus folgt:

$$A^2 A\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda \mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}.$$

Demnach gilt: Falls λ ein Eigenwert von A ist, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.

2. Bestimme einen/die Eigenwert/e der Matrix A
Wir analysieren die erste und dritte Zeile der Matrix A. Beide enthalten eine 1 als ersten und dritten Eintrag. Die zweite Zeile hingegen hat an diesen Einträgen eine 0. Damit könnte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor sein. Dies werden wir nun überprüfen:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist 2 ein Eigenwert der Matrix A und somit $2^2 = 4$ einer von A^2.

Damit ist die Antwort (b) korrekt.

Bemerkung:
Alternativ lassen sich auch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmen. Hierfür erhalten wir mit Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\\ &= (1-\lambda)\cdot\big((1-\lambda)^2-1\cdot 1\big) = (1-\lambda)\cdot(1-2\lambda+\lambda^2-1) = \lambda\cdot(1-\lambda)\cdot(\lambda-2)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=2.\end{aligned}$$

Wir haben nach der zweiten Zeile entwickelt, da dort zwei Nullen auftreten. A besitzt die Eigenwerte 0, 1, 2 und A^2 somit 0, 1, 4.

Frage 6 (4 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)y_k = 2a, \text{ wobei } a \neq -1, a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = -4(1+a)^k$.

(b) $y_k = 2(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4(1+a)^k - 2$.

(d) $y_k = 8(1+a)^k - 3$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bringe die Differenzengleichung in Normalform.

1. Bringe die Differenzengleichung in Normalform

Die Normalform der Differenzengleichung erhalten wir durch

$$y_{k+1} - (1+a)y_k = 2a \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = (1+a)y_k + 2a.$$

Also ist $A = (1+a)$ und $B = 2a$. Die allgemeine Lösung ist dann durch

$$y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^* = (1+a)^k(y_0 - y^*) + y^*$$

mit $y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{2a}{1-(1+a)} = -2$ gegeben. Eingesetzt liefert dies mit der Anfangsbedingung $y_0 = 2$:

$$y_k = 4(1+a)^k - 2.$$

Damit ist Antwort (c) korrekt.

Bemerkung:
Die Antworten (a), (b) und (d) erfüllen $y_0 = 2$ nicht.

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$3(y_{k+1} - y_k) + 5 = 2y_{k+1} - y_k + 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Bestimme die Normalform.

1. Bestimme die Normalform

Die Normalform einer Differenzengleichung ist durch

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ gegeben. Diese erhalten wir durch

$$3(y_{k+1} - y_k) + 5 = 2y_{k+1} - y_k + 12 \;\Leftrightarrow\; 3y_{k+1} - 3y_k + 5 = 2y_{k+1} - y_k + 12 \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} = 2y_k + 7.$$

Also ist $A = 2$ und $B = 7$.

Eine Differenzengleichung in Normalenform

$$y_{k+1} = Ay_k + B$$

konvergiert für $|A| < 1$ und divergiert für $|A| > 1$. Für $A > 0$ ist das Verhalten monoton und für $A < 0$ oszillierend.

Wegen $|A| > 1$ und $A > 0$ ist die allgemeine Lösung monoton und divergent.

Damit ist Antwort (d) korrekt.

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2(a+2)y_{k+1} - 2y_k + 2(a^2-4) = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert monoton gegen 0 genau dann, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Lösung:

Vorgehensweise:

1. Verwende die Konvergenz gegen 0, um die Antwort zu finden.

1. Verwende die Konvergenz gegen 0, um die Antwort zu finden

Sei y_k eine Lösung von

$$2(a+2)y_{k+1} - 2y_k + 2(a^2-4) = 0,$$

wobei y_k monoton gegen 0 konvergiert. Das heißt insbesondere $y_k \to 0$ und $y_{k+1} \to 0$ für $k \to \infty$. Hiermit folgt:

$$2(a+2)y_{k+1} - 2y_k + 2(a^2-4) = 0$$

$$\downarrow \quad k \to \infty$$

$$0 - 0 + 2(a^2-4) = 0.$$

Wenn y_k gegen 0 konvergiert muss $a^2-4=0$ erfüllt sein. Dies gilt für $a = \pm 2$. In der Aufgabenstellung ist $a = -2$ ausgeschlossen. Deshalb ist $a = 2$ korrekt.

Also ist die Antwort (c) korrekt.

Bemerkung:

Die Lösung lässt sich auch über die Normalform bestimmen. Diese erhalten wir durch

$$\begin{aligned} 2(a+2)y_{k+1} - 2y_k + 2(a^2-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; y_{k+1} &= \frac{2y_k}{2(a+2)} - \frac{2(a^2+4)}{2(a+2)} \\ &= \frac{1}{(a+2)}y_k - \frac{(a+2)(a-2)}{(a+2)} \\ &= \frac{1}{a+2}y_k - (a-2) \end{aligned}$$

mit $A = \frac{1}{a+2}$ und $B = -(a-2)$. Die Lösung kann nur gegen 0 konvergieren, wenn $B = 0$ ist. Dies ist für $a = 2$ der Fall und wird auch an der Lösungsformel sichtbar:

$$y_k = A^k(y_0 - y^*) + y^* = \left(\frac{1}{a+2}\right)^k \left(y_0 - \frac{-(a-2)}{\frac{1}{a+2}}\right) + \frac{-(a-2)}{\frac{1}{a+2}} \overset{k\to\infty,\ |A|<1}{\to} \frac{-(a-2)}{\frac{1}{a+2}}.$$