# Mathematik A
# Musterlösung Prüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

30. Januar 2018

[1]Lehrstuhl für Mathematik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, Email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

# Teil I: Offene Fragen

## Aufgabe 1

(a1) (**4 Punkte**).

Zunächst nutzen wir die Eigenschaft $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a\,b)$ (für $a, b > 0$), um die Logarithmusterme zu vereinfachen, und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\sqrt{x-2} - 4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2} + 4\right) \\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x-2} - 4\right)\,\left(\sqrt{x-2} + 4\right)\right) \\ &= \ln(x - 2 - 16) \\ &= \ln(x - 18). \end{aligned}$$

Die Funktion $f$ ist folglich genau dann definiert, wenn $x - 18 > 0$, d.h., $x > 18$. Wir überprüfen, dass für $x > 18$ die beiden Summanden in der ersten Zeile definiert sind und damit die Vereinfachung von Zeile 1 zu Zeile 2 zulässig ist. Es folgt:

$$D_f = (18, \infty).$$

Ausserdem gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 18 \Leftrightarrow f(x) = \ln(x - 18) \in \mathbb{R}$$

und folglich

$$R_f = \mathbb{R}.$$

Ohne die vorangehende Termvereinfachung erhält man die Bedingung an das Definitionsgebiet von $f$ wie folgt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \quad x - 2 \geq 0 \\ \sqrt{x-2} - 4 > 0 \\ \sqrt{x-2} + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 4 > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 16 \Leftrightarrow x > 18.$$

(a2) (**3 Punkte**).

Wir verwenden das folgende Resultat: Ist $f$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist $f$ streng konkav auf $(a, b)$.

In unserem Fall gilt $f(x) = \ln(x - 18)$, d.h., $f'(x) = \frac{1}{x-18}$ und $f''(x) = \frac{-1}{(x-18)^2}$. Demnach gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (18, \infty)$ und folglich ist die Funktion $f$ streng konkav auf ihrem kompletten Definitionsgebiet.

(a3) (**3 Punkte**).

Für $y \in R_f = \mathbb{R}$ gilt:

$$y = \ln(x - 18) \Leftrightarrow e^y = x - 18 \Leftrightarrow e^y + 18 = x.$$

Mit $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}$ und $R_{f^{-1}} = D_f = (18, \infty)$ folgt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (18, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = e^x + 18.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die konstanten Zahlungen über $10'000$ CHF am Ende jeden Jahres für die *ersten* 5 Jahre stellen eine nachschüssige 5-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 5 Jahren beträgt

$$A_5 = 10'000 \, \frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \approx 50'502.50 \text{ (CHF)}.$$

Die konstanten Zahlungen $C^I$ CHF am Ende jeden Jahres für die *nächsten* 10 Jahre stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 10 Jahren (d.h. am Ende des 15. Jahres) beträgt

$$A_{10} = C^I \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}.$$

Der Barwert zum Zeitpunkt 0 von $A_5$ und $A_{10}$ muss $1'000'000$ CHF entsprechen, d.h.,

$$\begin{aligned}
&1'000'000 = \frac{A_5}{(1 + 0.5\%)^5} + \frac{A_{10}}{(1 + 0.5\%)^5 \, (1 + 2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 = A_5 + \frac{A_{10}}{(1 + 2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 = 10'000 \cdot \frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} + \frac{C^I}{(1 + 2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{C^I}{(1 + 2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1 + 2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} = 1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1 + 0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I = \frac{1'000'000 \cdot (1 + 0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%}}{\frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}} \, (1 + 2.0\%)^{10} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I \approx 108'515.40 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

(c) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}} &\overset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y\to\infty} 2\,y^2\, e^{-y} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{2\,y^2}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4\,y}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4}{e^y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(d) (**6 Punkte**).
Sei $a_n$ die Anzahl der in der $n$-ten Stunde gerannten Kilometer. Es gilt:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 20, \\
a_n &= a_{n-1}\,(1-a), \quad n = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

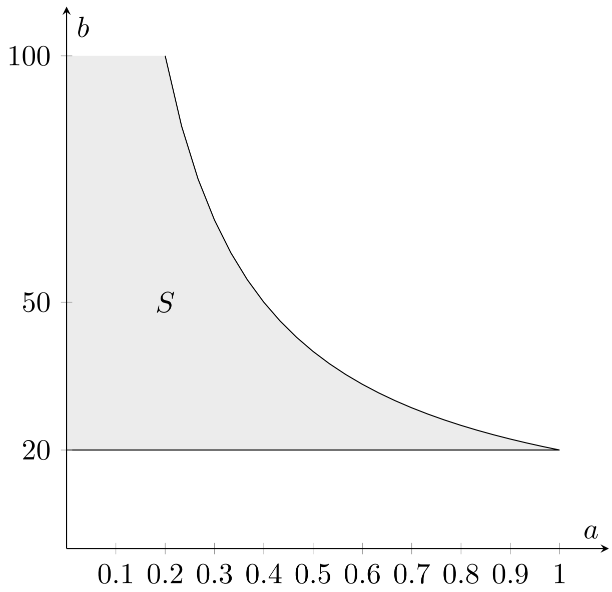
d.h., $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 20$ und $q = (1-a)$.

Die Bedingung dafür, dass die Läuferin einen $b$ Kilometer langen Wettkampf beendet, gegeben, dass sie beliebig lange laufen kann, ist folglich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq b \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{1-(1-a)} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{a} \geq b.$$

Demnach erhalten wir folgende Lösungsmenge:

$$S = \left\{ (a,b) \in (0,1] \times [20,\infty) \,:\, b \leq \frac{20}{a} \right\}.$$



## Aufgabe 2

(a1) (**5 Punkte**).
Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $f$ in $x_0$ ist definiert als:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) = \ln(1+0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{1}{1^2} = -1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_2(x) = x - \frac{1}{2}\,x^2.$$

Damit erhalten wir:

$$a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \approx P_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

(a2) (**4 Punkte**).
Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\,x^3$$

mit $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Daraus folgt für $x \in [0,1]$,

$$|R_2(x)| = \frac{\left|f^{(3)}(\xi)\right|}{3!}\,|x|^3 = \frac{2}{3!}\,\underbrace{\frac{1}{(1+\xi)^3}}_{\leq 1}\,x^3 \leq \frac{1}{3}\,x^3.$$

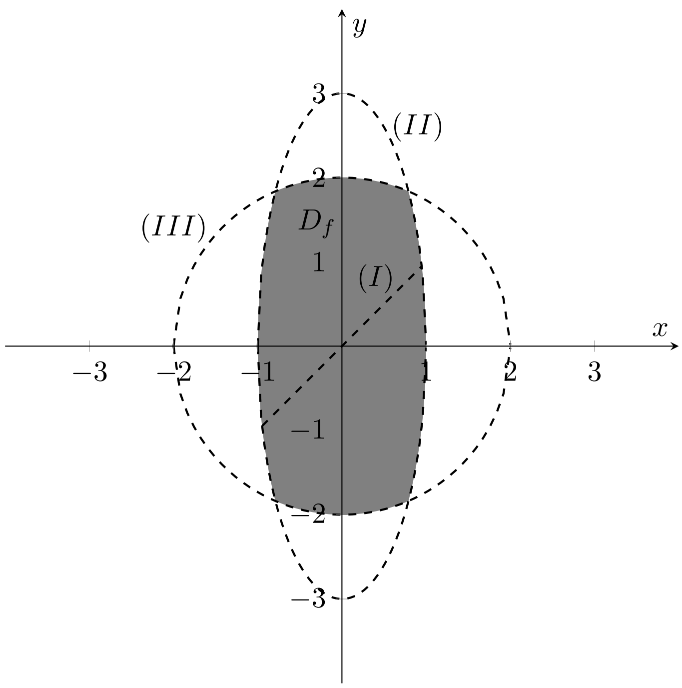
Demnach gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y \neq 0 \\ 9-9\,x^2-y^2 > 0 \\ 4-x^2-y^2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \neq y\ (I) \\ x^2+\frac{y^2}{3^2} < 1\ (II) \\ x^2+y^2 < 2^2\ (III) \end{array}\right. .$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse $(II)$ mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a=1$ und $b=3$, geschnitten mit der Fläche innerhalb eines Kreises $(III)$ mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r=2$. Weiterhin müssen die Punkte auf der Geraden $y=x$ ausgeschlossen werden $(I)$. Die Gerade $y=x$ schneidet die Ellipse für $x^2+\frac{x^2}{9}=1$, d.h., $x^2=\frac{9}{10}$ oder $x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von $f$:



(c) (**5 Punkte**).
Die Parameter $\alpha, p_1, p_2$ müssen so gewählt werden, dass die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liegt auf der Budgetgeraden, d.h., $p_1 + 2\,p_2 = 10$. Es folgt $p_1 = 10 - 2\,p_2$.

(ii) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liefert den Nutzen $\sqrt{2}$, d.h., $u(c_1^\star, c_2^\star) = 1^\alpha\,2^{1-\alpha} = \sqrt{2}$. Demnach gilt $\alpha = 0.5$.

(iii) Die Kurven

$$f(c_1, c_2) = u(c_1, c_2) - \sqrt{2} = c_1^{0.5}\,c_2^{0.5} - \sqrt{2} = 0$$

und

$$\varphi(c_1, c_2) = p_1\,c_1 + p_2\,c_2 - 10 = 0$$

berühren sich in $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$, d.h. (Implizites Funktionen Theorem),

$$\begin{aligned}
-\frac{f_{c_1}(1,2)}{f_{c_2}(1,2)} &= -\frac{\varphi_{c_1}(1,2)}{\varphi_{c_2}(1,2)} \\
\overset{\alpha=0.5}{\Leftrightarrow} \quad & -\frac{0.5\,c_1^{-0.5}\,c_2^{0.5}}{0.5\,c_1^{0.5}\,c_2^{-0.5}}\Big|_{(c_1,c_1)=(1,2)} = -\frac{p_1}{p_2} \\
\overset{p_1=10-2\,p_2}{\Leftrightarrow} \quad & 2 = \frac{10 - 2\,p_2}{p_2} \\
\Leftrightarrow \quad & 2\,p_2 = 10 - 2\,p_2 \\
\Leftrightarrow \quad & p_2 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten $p_1 = 10 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$, $p_2 = \frac{5}{2}$ und $\alpha = 0.5$.

(d) (**6 Punkte**).
Da $f$ homogen vom Grad $r$ und $g$ homogen vom Grad $r-2$ ist, folgt

$$h(\lambda\,x, \lambda\,y) = \frac{f(\lambda\,x, \lambda\,y)}{g(\lambda\,x, \lambda\,y)} = \frac{\lambda^r\,f(x,y)}{\lambda^{r-2}\,g(x,y)} = \lambda^2\,\frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda^2\,h(x,y),$$

d.h., $h$ ist homogen vom Grad 2. Demnach gilt mit der Eulerschen Relation:

$$x\,h_x(x,y) + y\,h_y(x,y) = 2\,h(x,y).$$

Mit

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x}{h(x,y)}\,h_x(x,y)$$

erhalten wir

$$\varepsilon_{h,x}(x,y)\,h(x,y) + y\,h_y(x,y) = 2\,h(x,y),$$

d.h.,

$$h(x,y) = \frac{y\,h_y(x,y)}{2 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}.$$

Wir setzen die Ausdrücke für $h_y(x,y)$ und $\varepsilon_{h,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \frac{y\,\left(x-\frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}\right)}{2-\frac{x\,y-\frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}}} \\ &= \frac{x\,y-\frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{2\,x\,y-2\,x^{0.5}\,y^{1.5}-x\,y+\frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}\,\left(x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}\right) \\ &= \frac{x\,y-\frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y-\frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}\,\left(x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}\right) \\ &= x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$h(x,y)=x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}.$$

Die beiden folgenden Lösungsvorschläge sind unvollständig und wurden mit 1 Punkt bewertet:

1. Wegen $\varepsilon_{h,x}(x,y)=\frac{x}{h(x,y)}\,h_x(x,y)$ muss gelten, dass $h(x,y)=x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}$.

   Grund: Der Bruch $\varepsilon_{h,x}(x,y)=\frac{x\,y-\frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}}$ kann gekürzt sein. Zu zeigen, dass tatsächlich $h(x,y)=x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.
2. Integration von $h_y(x,y)=x-\frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}$ nach $y$ liefert $h(x,y)=x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}$.

   Grund: Die Integration von $h_y(x,y)$ nach $y$ liefert das unbestimmte Integral $H(x,y)=x\,y-x^{0.5}\,y^{1.5}+C(x)$, wobei $C(x)$ ein unbestimmter Ausdruck ist, welcher von $x$ abhängt. Zu zeigen, dass tatsächlich $C(x)=0$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.

# Teil II: Multiple-Choice Fragen

## Aufgabe 3

**1.** Antwort (c).Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $W$ | $W$ | $F$ | $F$ |
| $B$ | $W$ | $F$ | $W$ | $F$ |
| $\neg A$ | $F$ | $F$ | $W$ | $W$ |
| $\neg A \Rightarrow B$ | $W$ | $W$ | $W$ | $F$ |
| $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ | **W** | **W** | **W** | **F** |
| $A \vee B$ | **W** | **W** | **W** | **F** |
| $A \wedge B$ | $W$ | $F$ | $F$ | $F$ |

Folglich ist $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ äquivalent zu $A \vee B$.

**2.** Antwort (d). Es gilt:

- (a) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und $f$ ist stetig auf $(0,\infty)$. Die Folge $\{b_b\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ist jedoch divergent.
- (b) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^2$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ ist monoton und konvergent.
- (c) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \sin(2\,\pi\,x)$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und $f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)$ ist jedoch nicht monoton.

**3.** Antwort (b). Ist die Funktion $f$ differenzierbar in $x_0 \in D_f$, dann ist sie auch stetig in $x_0 \in D_f$. Demnach ist (b) richtig und (d) falsch. Das folgende Beispiel zeigt, dass (a) und (c) im Allgemeinen falsch sind: $f(x) = |x|$ mit Definitionsgebiet $D_f = \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$. Die Betragsfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

**4.** Antwort (a). Der Barwert von Projekt I ist $-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2}$. Daher wäre Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2} > -100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow \frac{50'000}{(1+i)} > \frac{50'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{1+i}.$$

Die letzte Ungleichung ist für jedes $i > 0$ erfüllt.

Alternativ kann man auch ohne die tatsächliche Berechnung der Barwerte wie folgt argumentieren: Projekt 1 ist besser, da es dieselbe Anfangsinvestition wie Projekt 2 benötigt und nach zwei Jahren 60′000 CHF generiert, 50′000 CHF jedoch schon während des ersten Jahres. Demnach ist der Gesamtbetrag, den das Projekt 1 innerhalb der zwei Jahre generiert, strikt grösser als 110'000 CHF, gegeben, dass der Zinssatz echt positiv ist.

**5.** Antwort (b). Gilt $n^I = n^D$ und ist der Zinssatz strikt positiv, dann sind die Zinserträge bei Zahlungen am Anfang des Jahres echt grösser als die Zinserträge bei Zahlungen am Ende des Jahres. Der Grund ist einfach der, dass bei Zahlungen am Anfang des Jahres für ein zusätzliches Jahr Zinserträge generiert werden, im Vergleich zu Zahlungen am Ende des Jahres. Der Kunde muss bei Zahlungen zu Beginn des Jahres weniger bezahlen, da er von den höheren Zinserträgen profitiert. Laufen die Zahlungen am Ende des Jahres länger (d.h., $n^I > n^D$), dann gilt im Allgemeinen nicht, dass die jährlichen Zahlungen $C^I$ kleiner sind als die jährlichen Zahlungen $C^D$. Um beispielsweise einen Kredit in Höhe von 1'000'000 CHF bei einem Zinssatz von $i = 5\%$ über 20 Jahre zurückzuzahlen, müssen die konstanten Zahlungen am Anfang des Jahres $C^D = 76'421.50$ CHF betragen. Um denselben Betrag über 21 Jahre mittels konstanter Zahlungen am Ende des Jahres zu tilgen, müssen diese $C^I = 77'996.10$ CHF betragen. Folglich gilt $C^I > C^D$, obwohl $n^I > n^D$.

**6.** Antwort (d). Offensichtlich ist $f$ stetig für $x \neq \pi$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{a\,(x-\pi)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{a} = -\frac{1}{a}.$$

Demnach ist $f$ stetig in $x = \pi$ genau dann, wenn $-\frac{1}{a} = a$, d.h., $a^2 = -1$. Diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

**7.** Antwort (c). Das Restglied $R_4(x)$ in $x_0 = 1$ ist gleich Null für alle $x$, da $f$ bereits eine Polynomfunktion vom Grad 4 ist. Aus diesem Grund stimmen $f$ und $P_4$ überein. Wir können auch den Satz von Taylor bemühen: es gibt ein $\xi$ so, dass

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,(x-1)^5.$$

Da für alle möglichen Werte von $\xi$ gilt, dass $f^{(5)}(\xi) = 0$, erhalten wir $R_4(x) = 0$.

**8.** Antwort (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_g(x) &= x\,\frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= x\,\frac{f'(a\,x)\,a}{f(a\,x)} \\
&= (a\,x)\,\frac{f'(a\,x)}{f(a\,x)} \\
&= \varepsilon_f(a\,x) \\
&= a\,x\,\ln(a\,x) + e^{3\,a\,x}.
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4

**1.** Antwort (d). Zunächst gilt

$$f(x,y) = (x+y)^2 e^{x+y}$$

und

$$f_x(x,y) = \left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} = f_y(x,y).$$

Folglich:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{f,x}(x,y) < \varepsilon_{f,y}(x,y) \\
&\Leftrightarrow \quad x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)} < y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)} \\
&\overset{f(x,y)>0}{\Leftrightarrow} \quad x\,f_x(x,y) < y\,f_y(x,y) \\
&\Leftrightarrow \quad x\,\left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} < y\,\left[2\,(x+y) + (x+y)^2\right]\, e^{x+y} \\
&\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \quad x < y.
\end{aligned}$$

Folglich ist Antwort (d) richtig.

**2.** Antwort (b). Da $f$ differenzierbar ist, gilt für einen stationären Punkt, dass $f'(x) = 0$. Wir berechnen:

$$f'(x) = 2\,x\,e^{x^2} + x^2\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,x\,e^{x^2}\,(1+x^2).$$

Folglich gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h., $x = 0$ ist ein stationärer Punkt von $f$ und (d) ist falsch. Die zweite Ableitung ist gegeben durch

$$f''(x) = (2 + 6\,x^2)\,e^{x^2} + (2\,x + 2\,x^3)\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,e^{x^2}\,(1 + 5\,x^2 + 2\,x^4).$$

Demnach gilt

$$f''(0) = 2 > 0,$$

und $x = 0$ ist ein Minimum.

**3.** Antwort (b). Wegen

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4,$$

folgt

$$P_3(x) < P_4(x) \Leftrightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 > 0 \Leftrightarrow f^{(4)}(0) > 0.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2}\,, & f''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{-6}{(1+x)^4}\,, & f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1+x)^5}
\end{aligned}$$

Also ist $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ und es folgt, dass $P_3(x) < P_4(x)$.

**4.** Antwort (a). Für die Funktion $f$ gilt:

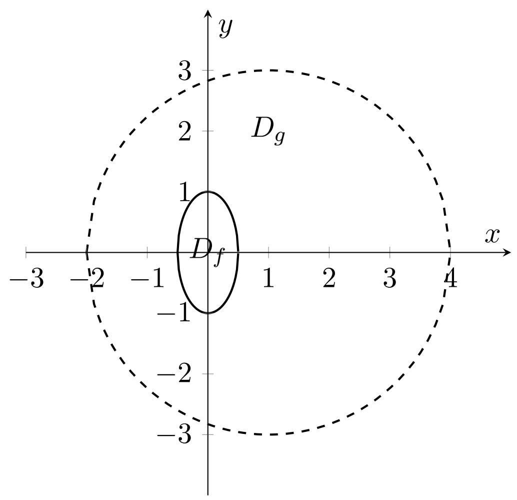
$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 1 - 4\,x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1} \leq 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$.

Für die Funktion $g$ gilt:

$$(x,y) \in D_g \Leftrightarrow 2\,x - x^2 - y^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\,x + 1 + y^2 < 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < 3^2.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 3.




**5.** Antwort (d). Der Satz von Taylor besagt, dass

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4.$$

Wegen $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ gilt, dass $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$ für alle $\xi$ und

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\,|x|^4 \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{|x|^4}{16}.$$

Bemerkung: Logisches Schlussfolgern zeigt, dass nur (d) wahr sein kann. Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass nur eine Antwort richtig ist. Wäre (a) wahr, dann gälte dies auch für (b), (c) und (d). Ähnlich folgt, dass wenn (b) wahr wäre, auch (c) und (d) wahr wären. Nicht zuletzt folgt aus der Wahrheit von (c) die von (d). Demnach kann nur (d) die richtige Antwort sein.

**6.** Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= 8\left(\frac{1}{\lambda\,x} + \frac{1}{5\,\lambda\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,\lambda\,x} + \sqrt{\lambda\,y} \\ &= 8\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)\right]^{-0.5} + \lambda^{0.5}\,\sqrt{3\,x} + \lambda^{0.5}\,\sqrt{y} \\ &= 8\,\lambda^{0.5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \lambda^{0.5}\,\sqrt{3\,x} + \lambda^{0.5}\,\sqrt{y} \\ &= \lambda^{0.5}\left[8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,x} + \sqrt{y}\right] \\ &= \lambda^{0.5}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $f$ homogen vom Grad 0.5 ist.

**7.** Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \left(\frac{(\lambda\,x)^2}{\lambda\,y} + 1\right) + \sqrt{(\lambda\,x)^2 + 5\,(\lambda\,y)^2} \\ &= \left(\frac{\lambda^2\,x^2}{\lambda\,y} + 1\right) + \sqrt{\lambda^2\,x^2 + 5\,\lambda^2\,y^2} \\ &= \left(\lambda\,\frac{x^2}{y} + 1\right) + \lambda\,\sqrt{x^2 + 5\,y^2} \\ &= \lambda\left(\frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^2}\right) - \lambda + 1 \\ &= \lambda\,f(x,y) - \lambda + 1 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$g(\lambda\,x, \lambda\,y) = f(a\,\lambda\,x, a\,\lambda\,y) = f(\lambda\,a\,x, \lambda\,a\,y) = \lambda\,f(a\,x, a\,y) - \lambda + 1 = \lambda\,g(x,y) - \lambda + 1.$$

Daher ist $g$ nicht homogen.

**8.** Antwort (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a+1}\,\sqrt{(\lambda\,y)^{4\,a+4}} + (\lambda\,x\,\lambda\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{\frac{4\,a+4}{2}}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + \lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{2\,a+2}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + \lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{3\,a+3}\left[x^{a+1}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + (x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Also ist $f$ homogen vom Grad $3\,a + 3$ und aus der Eulerschen Relation folgt:

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3\,a + 3.$$

Demnach gilt:

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3 \Leftrightarrow a = 0.$$