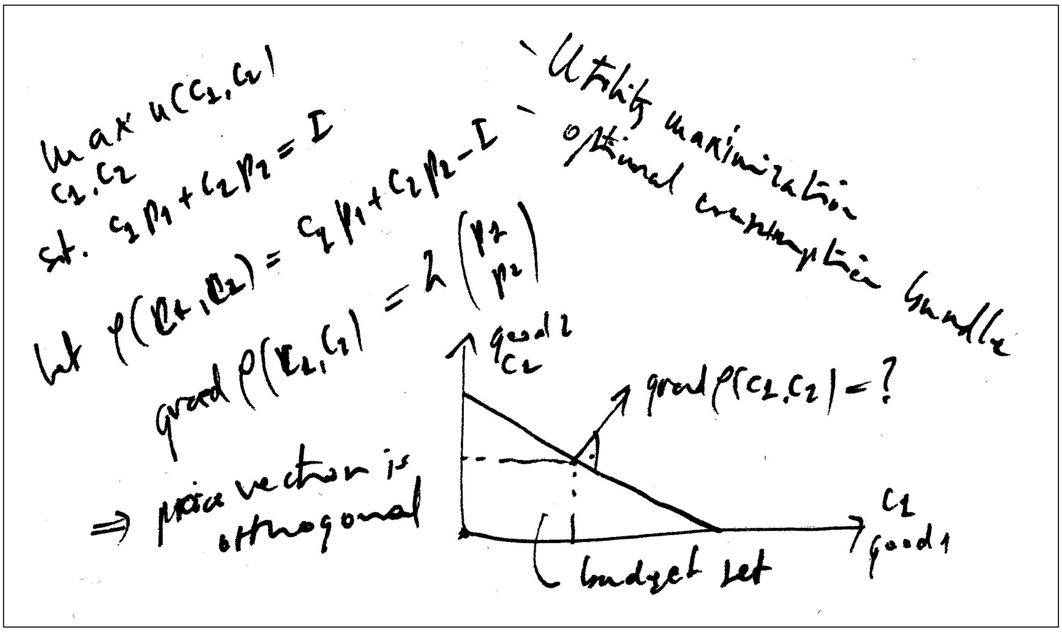
Enrico G. De Giorgi

Mathematatik A

Alte Prüfungen 2009-2019

Herbstsemester 2020



Lehrstuhl für Mathematik
Universität St.Gallen

Diese Version: September 2020.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses PDF beinhaltet eine Sammlung alter Prüfungen aus dem Zeitraum vom Herbstsemester 2009 bis zum Herbstsemester 2019. Das begleitende PDF "Alte Musterlösungen 2009-2019" umfasst die zugehörigen Lösungen. Beginnend mit dem Herbstsemester 2011 werden zudem auch die Nachholprüfungen veröffentlicht. Des Weiteren stehen seit der Nachholprüfung des Herbstsemesters 2011 vollständige und ausführliche Lösungen für alle Prüfungen zur Verfügung. Diese neueren Lösungen zeigen beispielhaft auf, wie Prüfungsaufgaben generell beantwortet und Argumentationsketten präsentiert werden sollten. Dazu gehört insbesondere die korrekte Verwendung mathematischer Notation. Es wird erwartet, dass die Studenten ihre Lösungen unter Verwendung der mathematischen Notation logisch strukturiert präsentieren. Diese Aspekte der Bearbeitung gehen in die Bewertung der Prüfungsleistung mit ein. Seit dem Herbstsemester 2013 beinhalten die Prüfungen auch Multiple-Choice Fragen.

Im Herbstssemester 2018 gab es eine weitere Anpassung des Prüfungsformats. Insbesondere machen seitdem offene Fragen etwa ein Drittel der Prüfung aus. Die verbleibenden zwei Drittel bestehen aus Multiple-Choice-Fragen. Die offenen Fragen zielen in erster Linie darauf ab zu überprüfen, ob die Studenten die gestellten Probleme mathematisch formalisieren können, um sie im Anschluss unter Anwendung der relevanten mathematischen Techniken zu lösen.

Winter 2009

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik A: Prüfung Winter 2009, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 27 Punkte

6

1 a) Gesucht sind

a.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\frac{n^3+1}{n^2-n}\right)$

a.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2e^{2n-1}}{e^{2n+2}-e^n}$

7

1 b) Ein Projekt erfordert heute eine Investition. Nach einem Jahr und nach zwei Jahren fallen Erträge an. Die heutige Investition beträgt 100'000 SFr. Die Erträge sind 40'000 SFr. nach einem Jahr und weitere 96'000 SFr. nach zwei Jahren.

b.1) Ermitteln Sie den Barwert dieses Projektes in Abhängigkeit des Zinssatzes p.

b.2) Für welche Zinssätze $p \geq 0$ ist das Projekt lohnend (positiver Barwert)?

5

1 c) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x = \ln\left(e^{2x}-2\right)?$$

9

1 d) Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}-1}$.

d.1) Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich.

d.2) Ist $f(x)$ streng monoton?

d.3) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

Mathematik A: Prüfung Winter 2009, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 2 28 Punkte

13

2 a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x - \ln\left(2 - x^2\right)$.

a.1) Ermitteln Sie den Definitionsbereich.

a.2) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

a.3) Ist die Funktion konkav, konvex oder weder konkav noch konvex?

a.4) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_2(x)$, welches die Funktion in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert.

6

2 b) Gesucht sind

b.1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{0.5} \cdot \left(e^{-0.5x} + x^{-0.5}\right)$.

b.2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \left(e^{-\frac{1}{x}} + \frac{2}{x}\right)$.

9

2 c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^{-0.5} e^{0.1(1-x)},\ x > 0$.

c.1) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

c.2) Für welche Werte $x > 0$ ist $f(x)$ unelastisch?

c.3) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f, falls x von 2.0 auf 1.94 abnimmt.

Aufgabe 3 23 Punkte

6

3 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(3 - x^2 + y^2\right)^3.$$

a.1) Ermitteln Sie die Niveaulinie $f(x,y) = 8$.

a.2) Um was für einen Typ von Kurve handelt es sich?

a.3) Skizzieren Sie diese Kurve.

9

3 b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 2 \cdot \sqrt{x} + e^{x \cdot \sin y} \quad , x > 0.$$

b.1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

b.2) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $\left(x_0, y_0\right) = \left(4, 0\right)$.

8

3 c) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = \left(K^{0.5} + A^{0.5}\right)^2.$$

c.1) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

c.2) Berechnen Sie die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK}$ im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1, 4\right)$.

c.3) Berechnen Sie die partielle Elastizität $\varepsilon_{P,A}$ im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1, 4\right)$.

c.4) Berechnen Sie mit Hilfe der partiellen Elastizität approximativ die prozentuale Veränderung von P, falls der Produktionsplan $\left(K_0, A_0\right) = \left(1, 4\right)$ durch den Produktionsplan $\left(K, A\right) = \left(1, 4.12\right)$ ersetzt wird.

Aufgabe 4 22 Punkte

9

4 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=e^{25-ax^2-by^2}.$$

Ermitteln Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ derart, dass die Niveaulinie

$$f(x,y)=1$$

durch den Punkt $(x_0, y_0)=(3,4)$ geht und in diesem Punkt die Tangentensteigung -0.75 aufweist.

8

4 b) Welche der folgenden Funktionen sind homogen?
Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

b.1) $f(x,y)=x^{0.3}\cdot y^{0.5} \quad , x>0, y>0$

b.2) $g(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$

b.3) $h(K,A)=10K^{0.3}A^{0.4}-3K-4A \quad , K>0, A>0$

b.4) $j(x,y)=xe^{\sqrt{\ln x-\ln y}} \quad , x>0, y>0$

5

4 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=\frac{x^{2a}\cdot y^{1-a}}{x^2+y^2} \quad , x>0, y>0.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$x\cdot f_x(x,y)+y\cdot f_y(x,y)=0 \quad , x>0, y>0\,?$$

Winter 2010

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik A: Prüfung Winter 2010, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 23 Punkte

3 1.a) Berechnen Sie

$$\sum_{h=2}^{3}\sum_{i=h+1}^{5} h\left(1+i^2\right).$$

5 1.b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c^2+1}{c^2-9}\right)^n = 0 \quad ?$$

5 1.c) In den Zeitpunkten $t = 0,1,2,\ldots$ erfolgen die Auszahlungen

$$d_t = 1000 \cdot 1.02^t.$$

c.1) Für welche Werte des Bewertungszinssatzes $p \geq 0$ ist der Barwert des unendlichen Zahlungsstroms

$$d_t = 1000 \cdot 1.02^t \quad , t = 0,1,2,\ldots$$

endlich? Ermitteln Sie den entsprechenden Barwert.

c.2) Bei welchem Bewertungszinssatz p beträgt der Barwert des unendlichen Zahlungsstroms 18'000 ?

4 1.d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln\left(x^4\right) = \ln x + \ln 8 ?$$

6 1.e) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{12-2\sqrt{\ln x}} = x^2 \quad ?$$

Mathematik A: Prüfung Winter 2010, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 2 26 Punkte

10 2.a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \left(e^{x-1} - 1\right)^{-0.5}.$$

a.1) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

a.2) Ist $f(x)$ streng monoton?

a.3) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

a.4) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_2(x)$, welches die Funktion in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert.

4 2.b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+1}{2x} - \frac{x^2}{x+1}\right).$$

7 2.c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2+9} \quad , x \ge 0$$

c.1) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

c.2) Für welches $x \ge 0$ beträgt die Elastizität 0.5?

c.3) Zeigen Sie, dass $f(x)$ für alle $x \ge 0$ unelastisch ist.

5 2.d) Ist die Funktion

$$f(x) = 2\ln x - \ln\left(x^2+1\right) \quad , x > 0$$

konvex, konkav oder weder konvex noch konkav?

Aufgabe 3 24 Punkte

6

3 a) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_2(x)$, welches die Funktion

$$f(x) = \left(e^x + 1\right)^2$$

in der Nähe von $x_0 = 0$ approximiert, und ermitteln Sie mit Hilfe dieses Polynoms einen Näherungswert für $f(0.1)$.

6

3.b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(1 - x + 2y^2\right).$$

Ermitteln Sie die Niveaulinie durch den Punkt $(x_0, y_0) = (8, 2)$. Um welchen Typ von Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie diese Kurve.

12

3.c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \left(x^{0.5} + 2 \cdot y^{0.5}\right)^2.$$

c.1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.

c.2) Berechnen Sie die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

c.3) In welchem Punkt (x_0, y_0) auf der Niveaulinie $f(x, y) = 16$ gilt $\varepsilon_{f,x} = 0.5$?

Aufgabe 4 27 Punkte

8

4 a) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = \left(\frac{1}{K} + \frac{3}{A}\right)^{-1}.$$

a.1) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $(K_0, A_0) = (2,6)$.

a.2) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $(K_0, A_0) = (2,6)$ und ermitteln Sie damit einen Näherungswert für $P(1.92, 6.12)$.

7

4.b) Gegeben sind die Kurven

$$f(x,y) = x^{0.75}y^{0.25} - 1 = 0,$$

$$g(x,y) = ax + y - b = 0.$$

Ermitteln Sie $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ derart, dass sich die beiden Kurven im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ berühren.

8

4.c) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind.
Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

c.1) $f(x,y) = \dfrac{x^{2.5}}{y^2} \quad , x > 0, y > 0$

c.2) $g(x,y) = x^a y^{1+2a} \quad , x > 0, y > 0$

c.3) $h(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right) - \ln x - \ln y \quad , x > 0, y > 0$

c.4) $j(x,y) = \ln\left(x^{0.3}y^{0.6}\right) - 0.9\left(\ln x + \ln y\right) \quad , x > 0, y > 0$

4

4.d) Eine differenzierbare Funktion $f(x,y)$ sei homogen vom Grade $r = 0.9$ und es gelte $f(x,y) > 0$ für alle x, y. Zeigen Sie, dass für die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$ gilt:

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 0.9.$$

Winter 2011

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematik A: Prüfung Winter 2011, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 1 28 Punkte

6 1 a) Gesucht sind

a.1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(e^n+1\right)^2}{e^{2n-1}}$,

a.2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+2n^2}{n^2-1} - \dfrac{n^2}{n+1}\right)$.

6 1 b) Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2a-3}{9-2a}\right)^k .$$

Untersuchen Sie, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert, und berechnen Sie den Wert der Reihe.

7 1 c) In den Zeitpunkten $t = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ soll jeweils ein Betrag b ausbezahlt werden.

c.1) Ermitteln Sie den Barwert (Wert im Zeitpunkt $t = 0$) dieses unendlichen Zahlungsstroms in Abhängigkeit vom Bewertungszinssatz $p > 0$.

c.2) Der Zinssatz p betrage 10% und im Zeitpunkt $t = 0$ sei ein Startkapital K_0 von Fr. 242'000.- vorhanden.
Wie hoch ist der Betrag b, welcher jeweils in den Zeitpunkten $t = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ ausbezahlt werden kann?

4 1 d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln\left(x^4-16\right) - \ln\left(x^2+4\right) = \ln 5 \ ?$$

5 1 e) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{2x} - e^x - 2 = 0 \ ?$$

Aufgabe 2 25 Punkte

6 2 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-x} & , x < 0 \\ x^2 - \sqrt{x+1} & , 0 \le x < 3 \\ x + b & , x \ge 3 \end{cases}$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ stetig?

6 2 b) Berechnen Sie

b.1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x} - 2} - \frac{x}{\sqrt{x} + 2} \right)$

b.2) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} \right)$.

8 2 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(1 - e^{-\sqrt{x}}\right)$$

c.1) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

c.2) Ist $f(x)$ streng monoton?

c.3) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

5 2 d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x) = (x + a)e^x \quad , x \ge 0$$

konvex?

Mathematik A: Prüfung Winter 2011, Prof. Dr. Heinz Müller

Aufgabe 3 25 Punkte

7

3 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{\sqrt{x-4}} \quad , x > 4 .$$

a.1) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

a.2) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f , falls x von 20.0 auf 19.6 abnimmt.

a.3) Zeigen Sie, dass $f(x)$ für alle $x > 4$ elastisch ist.

6

3 b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 4\sqrt{x} + \ln(2 - x) .$$

b.1) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_2(x)$, welches die Funktion in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert.

b.2) Approximieren Sie $f(0.98)$ mit Hilfe dieses Polynoms.

12

3 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = e^{4+x^2-y^2}$$

c.1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

c.2) Berechnen Sie die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

c.3) Ermitteln Sie die Niveaulinie $f(x, y) = 1$. Um welchen Typ von Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie diese Kurve.

Aufgabe 4 22 Punkte

12

4 a) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = \left(2K^{0.5} + A^{0.5}\right)^2 \quad , K > 0,\ A > 0$$

a.1) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1, 4\right)$.

a.2) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1, 4\right)$ und ermitteln Sie damit einen Näherungswert für $P(1.01, 3.98)$.

a.3) In welchem Punkt der Isoquante $P\left(K, A\right) = 36$ beträgt die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK} = -2$?

6

4 b) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind.
Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

b.1) $f(x,y) = 1 + \frac{x^{0.5}}{y^{0.5}} \quad , x > 0,\ y > 0.$

b.2) $P\left(K, A\right) = K^{0.3}A^{0.7} - 3K - 7A \quad , K > 0,\ A > 0.$

b.3) $g(x,y) = x^{0.2}y^{0.5}\left[\ln\left(x^{0.2}y^{0.5}\right) - 0.7\ln x\right] \quad , x > 0,\ y > 0.$

4

4 c) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^{2c}y^{1-c} + xy^c\right)^c - x^{-c}y^3 \quad , x > 0,\ y > 0.$$

homogen?

Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Heinz Müller

Mathematics I

Prüfung Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Heinz Müller*

February 18, 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität of St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz
email: heinz.mueller@unisg.ch

Aufgabe 1 26 Punkte

6 | 1 a) Untersuchen Sie die nachfolgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

a.1) $a_n = \dfrac{n^4}{n^2+1} - \dfrac{n^4+n^2}{n^2-1} \quad , n = 2,3,\dots ,$

a.2) $b_n = \dfrac{(-4)^{n+1}}{3^n + 2^{2n}} \quad , n = 1,2,\dots .$

3 | 1 b) Berechnen Sie

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+c} \right)^{2k} \quad , c > 0 .$$

7 | 1 c) In den Zeitpunkten $t = 1,2,\dots$ erfolgen die Auszahlungen

$$a_t = 100 \cdot (1+g)^t \quad , g \geq 0$$

c.1) Ermitteln Sie den Barwert B_0 (Wert im Zeitpunkt $t = 0$) dieses unendlichen Zahlungsstroms bei einem Bewertunszinssatz $p > g$.

c.2) Der Bewertungszinssatz p betrage 5%. Welcher Wert von g führt zu einem Barwert $B_0 = 5150$?

5 | 1 d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln(x+2) - 0.5 \cdot \ln x = \ln 3 \ ?$$

5 | 1 e) Welche $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$ lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \ln(x+1) - 2 \cdot \ln y &= 5 \\ 2 \cdot \ln(x+1) + 3 \cdot \ln y &= -4 \quad ? \end{aligned}$$

Aufgabe 2 25 Punkte

5 2 a) Weisen Sie nach, dass die Funktion

$$f(x) = e^{-x} + \frac{2}{x+1} - 2$$

Im Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

3 2 b) Berechnen Sie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\left[\ln(x) - 2(x+1)(x-1)\right] .$$

7 2 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{\sqrt{1-\ln x}}$$

c.1) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

c.2) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ streng monoton ist.

c.3) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

4 2 d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^{x^2-1}.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordung $P_2(x)$, welches die Funktion in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert.

6 2 e) Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = t \cdot e^{-t^2} \quad , t > 0.$$

Zeigen Sie, dass die zugehörige Wachstumrate $r(t)$ monoton fallend und konvex ist.

Aufgabe 3 25 Punkte

5

3 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(p) = \frac{1}{p} \cdot e^{-0.1p} \quad , p > 0 .$$

a.1) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,p}$.

a.2) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f, falls p von 10.00 auf 10.15 zunimmt.

13

3 b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 + x + 4} .$$

b.1) Ermitteln Sie die Niveauline $f(x,y) = 4$. Um welchen Typ von Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie diese Kurve.

b.2) Berechnen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$, $\varepsilon_{f,y}$.

b.3) In welchem Punkt $(x,y),\ x > 0,\ y > 0$ gilt $\varepsilon_{f,x} = \frac{1}{18}$, $\varepsilon_{f,y} = \frac{4}{9}$?

7

3 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x \cdot \left(x^2 + y^2\right)^{0.5} .$$

c.1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung.

c.2) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $(x,y) = (3,4)$ und ermitteln Sie damit einen Näherungswert für $f(2.99, 4.02)$.

Augabe 4 24 Punkte

7

4 a) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 90\left(2K^{-0.5} + A^{-0.5}\right)^{-2} \quad , K > 0,\ A > 0$$

a.1) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1,1\right)$.

a.2) Berechnen Sie die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK}$ im Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1,1\right)$.

a.3) An welchen Punkt $\left(K, A\right)$, $K > 0,\ A > 0$ gilt für die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK} = -\frac{1}{4}$?

6

4 b) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = K^b A^c \quad , 0 < b < 1, 0 < c < 1$$

Ermitteln Sie b und c derart, dass der Punkt $\left(K_0, A_0\right) = \left(1,4\right)$ auf der Isoquante $P\left(K,A\right) = 2$ liegt, und die Substitutionsrate in diesen Punkt $\frac{dA}{dK} = -2$ beträgt.

8

4 c) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind.
Ermitteln Sie gegenbenenfalls den Homogenitätsgrad.

c.1) $f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{-1} \quad , x > 0,\ y > 0$.

c.2) $g(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + 1 \quad , x > 0,\ y > 0$

c.3) $P\left(K,A\right) = K^{0.3}A^{0.5} - 3K - 5A \quad , K > 0,\ A > 0$

c.4) $h(x,y) = x^{-0.5}\left[1 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right] \quad , x > 0,\ y > 0$

3

4 d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x^{1-a}}{x^a + y^a} + \frac{y^{1-a}}{x^a + y^a}, x > 0, y > 0, a \in \mathbb{R}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot f_x\left(x,y\right) + y \cdot f_y\left(x,y\right) = 0 \ ?$$

Mathematik I

Nachholprüfung Herbstsemester 2011

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

13. Juli 2012

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch

Aufgabe 1 **26 Punkte**

| 6 | 1 a) Berechnen Sie

a.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10n}\right)^n$,

a.2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{\sqrt{n}-1}-2\sqrt{n}\right)$.

| 5 | 1 b) Für welche Werte $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|2x-1| > |x+1|\ ?$$

| 5 | 1 c) Ein Projekt erfordert heute eine Investition von CHF 10'000. Nach einem Jahr fällt ein Ertrag von CHF 7'700 an. Welcher zusätzliche Ertrag muss nach zwei Jahren mindestens anfallen, damit das Projekt bei einem Bewertungszinssatz von 10% keinen negativen Barwert aufweist?

| 4 | 1 d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln(x+10) = \ln x + \ln 6\ ?$$

| 6 | 1 e) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln\left(\sqrt{x}-2\right) + \ln\left(\sqrt{x}-3\right) = \ln 12\ ?$$

Aufgabe 2 24 Punkte

| 5 | 2 a) Gegeben ist die Funktion

$$K(x)=\begin{cases} x^2+5 & ,0\le x\le 2 \\ x+c & ,x>2 \end{cases}$$

a.1) Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $K(x)$ stetig?

a.2) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $K(x)$ monoton?

| 8 | 2 b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\left(\sqrt{\ln x}-1\right)^{-0.25}.$$

b.1) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

b.2) Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ streng monoton ist.

b.3) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

| 6 | 2 c) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_2(x)$, welches die Funktion

$$f(x)=\ln\left(x^2-3\right)$$

in der Nähe von $x_0=2$ approximiert, und ermitteln Sie mit Hilfe dieses Polynoms einen Näherungswert für $f(1.9)$.

| 5 | 2 d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=x\left(e^{ax}-a\right) \quad ,x>0.$$

Zeigen Sie

d.1) Für $0\le a\le 1$ ist $f(x)$ streng monoton wachsend.

d.2) Für $a>0$ ist $f(x)$ konvex.

Aufgabe 3 24 Punkte

7

3 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x+10)^{-1} \quad , x \geq 0.$$

a.1) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

a.2) Zeigen Sie, dass $f(x)$ überall unelastisch ist.

a.3) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f, falls x von 5.0 auf 5.3 zunimmt.

4

3 b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(y^2 + x^2 - 4).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich und stellen Sie diesen graphisch dar.

13

3 c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{xy-y-4}.$$

c.1) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

c.2) Ermitteln Sie die Niveaulinie $f(x,y) = 1$ und skizzieren Sie diese Kurve.

c.3) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $(x,y) = (2,4)$.

c.4) Ermitteln Sie mit Hilfe des totalen Differentials einen Näherungswert für $f(1.92, 4.07)$.

Aufgabe 4 26 Punkte

11

4 a) Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = 9\left(\frac{1}{K}+\frac{2}{A}\right)^{-1} \quad , K>0,\ A>0$$

a.1) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $(K_0, A_0) = (1,1)$.

a.2) Berechnen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$ im Punkt $(K_0, A_0) = (1,1)$.

a.3) In welchem Punkt (K, A) auf der Isoquante $P(K, A) = 9$ stimmen die beiden partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$ überein?

7

4 b) Gegeben sind die Kurven

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - a = 0\,,$$
$$g(x,y) = x^c y^{1-c} - 1 = 0\,.$$

Ermitteln Sie $a \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ derart, dass sich die beiden Kurven im Punkt $(x_0, y_0) = (1,1)$ berühren.

4

4 c) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind.
Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

c.1) $f(x,y) = \left(x^{-2a} + y^{-2a}\right)^{\frac{1}{a}} \quad , x>0,\ y>0,\ a \neq 0\,.$

c.2) $g(x,y) = x\left[\ln\left(x^{0.4}y^{0.6}\right) - \ln\left(x^{0.9}y^{0.1}\right)\right] \quad , x>0,\ y>0$

4

4 d) Die Funktion $f(x, y)$ sei differenzierbar und homogen vom Grade 0.
Zeigen Sie, dass die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ durch

$$z = f(x_0, y_0) + x \cdot f_x(x_0, y_0) + y \cdot f_y(x_0, y_0)\,.$$

gegeben ist.

Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I

Prüfung Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[*]

29. Januar 2013

[*] Fachbreich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch

Aufgabe 1 (27 Punkte)

(a) Berechnen Sie

(a1) (3 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(e^{2n}-1)^2}{e^{4n-2}}$$

(a2) (3 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4+3n^3+1}{n^2-1} - \frac{n^3+2n^2}{n-1}\right)$$

(b) (5 Punkte) Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5-3a}{3a-1}\right)^k$$

Untersuchen Sie für welche $a \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert, und berechnen Sie den Wert der Reihe.

(c) Ein Projekt erfordert heute eine Investition. Nach einem Jahr und nach zwei Jahren fallen Erträge an. Die heutige Investition beträgt 150'000 SFr. Die Erträge sind 50'000 SFr. nach einem Jahr und weitere 102'000 SFr. nach zwei Jahren.

(c1) (2 Punkte) Ermitteln Sie den Barwert dieses Projektes in Abhängigkeit des Zinssatzes p.

(c2) (5 Punkte) Für welche Zinssätze $p \geq 0$ ist das Projekt lohnend (positiver Barwert)?

(d) (3 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln(x^4-25) = \ln(x^2+5) + \ln(4)$$

(e) (6 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$4^x - 2^x - 2 = 0$$

Aufgabe 2 (23 Punkte)

(a) (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & ,x < 0 \\ 2x^2 - \sqrt{x+1} & ,0 \leq x \leq 8 \\ 25x + 3 - b & ,x > 8 \end{cases}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ stetig?

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{3x} + 5} - \frac{2x}{\sqrt{3x} - 5} \right)$$

(c) (6 Punkte) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $P_2(x)$ welches die Funktion

$$f(x) = e^{x^2 - 1}$$

in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert, und ermitteln Sie mit Hilfe dieses Polynoms einen Näherungswert für $f(0.9)$.

(d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^{-\sqrt{x}}} \right)$$

(d1) (3 Punkte) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

(d2) (3 Punkte) Ist die Funktion $f(x)$ streng monoton?

(d3) (2 Punkte) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{1+\sqrt{x-5}}, \qquad x > 5$$

(a1) (2 Punkte) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

(a2) (2 Punkte) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f, falls x von 6.0 auf 6.2 zunimmt.

(a3) (3 Punkte) Für welche $x > 5$ ist $f(x)$ elastisch?.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (1 + \ln(3\mathrm{x}))^4, \qquad x > \frac{e^{-1}}{3}$$

(b1) (3 Punkte) Berechnen Sie die Wachstumsrate r.

(b2) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wachstumsrate von f für $x > \frac{e^{-1}}{3}$ streng monoton fallend ist.

(b3) (3 Punkte) Berechnen Sie das Differential von f an der Stelle $x_0 = \frac{e}{3}$ und berechnen Sie mit dessen Hilfe einen Näherungswert für $f\left(\frac{e}{3} + \frac{1}{10}\right)$.

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 3)$$

(c1) (5 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(c2) (3 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.

(c3) (4 Punkte) Ermitteln Sie die Niveaulinie $f(x,y) = \ln(7)$ und skizzieren Sie diese Kurve.

Aufgabe 4 (22 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$P(K,A) = (2K^{0.8} + 4A^{0.2})^4, \qquad K > 0, A > 0$$

(a1) (5 Punkte) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $(K_0, A_0) = (1,1)$.

(a2) (3 Punkte) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $(K_0, A_0) = (1,1)$ und ermitteln Sie damit einen Nährungswert für $P(0.98, 1.02)$.

(a3) (4 Punkte) Bestimmen Sie c>0 und K_0, so dass für den Punkt $(K_0, 1)$ der Isoquante $P(K,A) = c$ die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK} = -2$ beträgt.

(b) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind. Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

(b1) (2 Punkte)

$$f(x,y) = 1 + \frac{x^{0.8}}{y^{0.8}}, \quad x > 0, y > 0$$

(b2) (2 Punkte)

$$g(x,y) = x^{0.6}y^{0.5} - 3x^{1.1} + 5\frac{y^2}{x^{0.9}}, \quad x > 0, y > 0$$

(b3) (2 Punkte)

$$h(x,y) = \frac{2x^2y + 4y^3}{\sqrt{\frac{x^3}{y} + xy}}, \quad x > 0, y > 0$$

(c) (4 Punkte) Die Funktion $f(x,y)$ ist homogen vom Grad $s > 0$ und die Funktion $g(x,y)$ ist homogen vom Grad $r > 0$. Es gilt $f(x,y) > 0$ und $g(x,y) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie $c > 0$, so dass die Funktion

$$h(x,y) = [f(x,y)]^3[g(x,y)]^c + [f(x,y)]^4$$

homogen ist. Ermitteln Sie danach den Homogenitätsgrad von $h(x,y)$.

Mathematik I

Nacholprüfung Herbstsemester 2012

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

12. Juli 2013

* Fachbreich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) Berechnen Sie

(a1) (2 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2-5)^2}{n^4+(3n^2+1)^2}\right)$$

(a2) (3 Punkte)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n^2-3\,n+1}{n^2-1}-\frac{n^2-2\,n+4}{n+1}\right)$$

(b) (5 Punkte) Gegeben ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5\,b+1}{2\,b-1}\right)^k$$

Untersuchen Sie für welche $b \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert, und berechnen Sie für diese Fälle den Wert der Reihe.

(c) Anfang jedes Jahr zahlen Sie über 10 Jahre 2‘000 SFr auf ein Konto ein. Nach 10 Jahren heben Sie 2‘000 SFr. am Anfang jedes Jahres ab. Der Zinssatz beträgt 5%.

(c1) (3 Punkte) Was ist Ihr Vermögen auf dem Konto nach 10 Jahren?

(c2) (4 Punkte) Nach wievielen Jahren haben Sie das Vermögen ausgebraucht?

(d) (3 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{e^{x^4}}{e^{25}} = e^4\, e^{x^2+5}\ ?$$

(e) (5 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\ln\left(x^{2\ln(x^2)}\right) = 4?$$

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^3 + 11 & ,x < 0 \\ \sqrt{(x+1)^3 + 8} & ,0 \leq x \leq 8 \\ \sqrt{x+b-2} & ,x > 8 \end{cases}$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 8$ stetig?

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5\,x}{\sqrt{2\,x} + 2} - \frac{5\,x}{\sqrt{2\,x} - 2} \right)$$

(c) (8 Punkte) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritter Ordnung $P_3(x)$ welches die Funktion

$$f(x) = e^{x^2 - 3x + 2}$$

in der Nähe von $x_0 = 1$ approximiert, und ermitteln Sie mit Hilfe dieses Polynoms einen Näherungswert für $f(1.1)$.

(d) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}$$

(d1) (3 Punkte) Ermitteln Sie den Definitions- und Wertebereich.

(d2) (3 Punkte) Ist die Funktion $f(x)$ streng monoton auf dem Definitionsbereich?

(d3) (2 Punkte) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+\sqrt{x+2}}, \qquad x > -2$$

(a1) (2 Punkte) Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_{f,x}$.

(a2) (2 Punkte) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität approximativ die prozentuale Änderung von f, falls x von 6.0 auf 6.2 zunimmt.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x+10}{x+5}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$$

(b1) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wachstumsrate r.

(b2) (3 Punkte) Für welche Werte von x ∈ $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ ist die Wachstumsrate von f streng monoton wachsend?

(b3) (3 Punkte) Berechnen Sie das Differential von f an der Stelle $x_0 = 1$ und berechnen Sie mit dessen Hilfe einen Näherungswert für $f(1.05)$.

(c) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2+3\,x-2}$$

(c1) (4 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(c2) (2 Punkte) Berechnen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.

(c3) (4 Punkte) Ermitteln Sie die Niveaulinie $f(x,y) = 1$ und skizzieren Sie diese Kurve.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

(a) Gegeben ist die Funktion

$$P(K,A) = (K^{0.5} + 3\mathrm{A}^{0.5})^2, \qquad K > 0, A > 0$$

(a1) (3 Punkte) Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A im Punkt $(K_{0,}A_0) = (1,1)$.

(a2) (4 Punkte) Berechnen Sie das totale Differential im Punkt $(K_{0,}A_0) = (1,1)$ und ermitteln Sie damit einen Nährungswert für $P(0.98,1.02)$.

(a3) (5 Punkte) Bestimmen Sie K_0 und A_0, so dass für den Punkt (K_0, A_0) der Isoquante $P(K,A) = 1$ die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK} = -\frac{1}{3}$ beträgt.

(b) Klären Sie ab, welche der folgenden Funktionen homogen sind. Ermitteln Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

(b1) (2 Punkte)

$$f(x,y) = 4 + \frac{x^{0.5}}{y^{0.2}}, \quad x > 0, y > 0$$

(b2) (2 Punkte)

$$g(x,y) = \ln(x^{0.6}y^{0.5}) - 5\ln\left(\frac{y^2}{x^{0.9}}\right), \quad x > 0, y > 0$$

(b3) (2 Punkte)

$$h(x,y) = \frac{2x^3y + 4x\,y^3 + x^2y^2}{\sqrt{\frac{x^4}{y} + xy^2}}, \quad x > 0, y > 0$$

(c) (7 Punkte)

Die Funktion $f(x,y)$ ist definiert für x>0 und y>0 und ist homogen vom Grad $r + 4$. Die partielle Ableitung $f_x(x,y)$ ist

$$f_x(x,y) = r\,x^{r-1}\,y^4 + 5\,x^4\,y^{r-1}$$

und die Partielle Elastizität $\varepsilon_y(x,y)$ ist

$$\varepsilon_y(x,y) = \frac{4\,x^{r-5} + (r-1)\,y^{r-5}}{x^{r-5} + y^{r-5}}.$$

Ermitteln Sie $f(x,y)$.

Herbstsemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik I
Prüfung Herbstsemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

28. Januar 2014

*Fachbereich fÃ¼r Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie weiterhin Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (22 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge definiert als

$$a_n = \frac{n^2+1}{n-1} - \frac{n^2+3\,n-2}{n+1}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

(b) (4 Punkte)

Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge definiert als

$$b_n = 3 + \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

Zeigen Sie, dass $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton und konvergent ist.

(c) (6 Punkte)

Sei $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe definiert als

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3\,a+1}{a+1}\right)^k, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

Für welche $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ist die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Was ist in diesen Fällen der Grenzwert von $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

(d) (9 Punkte)

Um eine Immobilie zu finanzieren, leihen Sie sich 1'000'000 Schweizer Franken von einer Bank. Sie planen, den Kredit innerhalb von 30 Jahren zurückzuzahlen, mit jährlichen Raten von C Schweizer Franken am Ende des Jahres für 20 Jahre und Raten von $2\,C$ Schweizer Franken am Ende des Jahres für die restlichen 10 Jahre. Der Zinssatz ist $i = 5\%$.
Bestimmen Sie C.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right).$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right).$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

(a3) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}\right).$$

Zeigen Sie, dass f in ihrem Definitionsbereich monoton fallend ist.

(b) (7 Punkte)
Verwenden Sie das Taylor-Polynom 1. Ordnung für die Funktion $f\,:\,(-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln(1+x)$, um näherungsweise

$$\sum_{k=5}^{20} \ln\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$$

zu berechnen.

(c) (6 Punkte)
Der Preis p eines Gutes kann Werte zwischen 0 und 100 Schweizer Franken annehmen. Die Angebotsfunktion q_s für dieses Gut ist definiert als $q_s(p) = \ln(1+p^2)$ und die Nachfragefunktion q_d ist definiert als $q_d(p) = \frac{1}{1+3\,p}$.
Zeigen Sie, dass es genau ein Marktgleichgewicht gibt.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

(a1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{x^2 + 4\,x + 2}.$$

Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_f(x)$.

(a2) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{x^2 + 4\,x + 2}.$$

Zeigen Sie, dass f für alle $x > 0$ unelastisch ist.

(a3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{x^2 + 4\,x + 2}.$$

Berechnen Sie die ungefähre prozentuale Veränderung von $f(x)$, wenn x von 1 auf 1.05 erhöht wird.

(b) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$P(K, A) = \left(2\,K^{\alpha} + 4\,A^{\beta}\right)^2, \quad K > 0,\; A > 0, \quad \alpha > 0,\; \beta > 0.$$

Berechnen Sie α und β so, dass im Punkt $(K_0, A_0) = (2, 1)$ auf der Isoquanten $P(K, A) = 144$ die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK} = -1$ beträgt.

(c) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(1 + 2\,x\,y + x^2\right), \quad x > 0,\; y > 0.$$

Bestimmen Sie das totale Differential im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ und wenden Sie es an, um den ungefähren Wert von $f(0.98, 1.02)$ zu bestimmen.

(d1) (2 Punkte)
Ist die Funktion

$$f(x, y) = 2 + \frac{\ln(x)}{\ln(y)}, \quad x > 0,\; y > 0$$

homogen? Falls ja, bestimmen Sie deren Homogenitätsgrad.

(d2) (2 Punkte)
Ist die Funktion

$$f(x, y) = x\,y^{0.45} + \sqrt{x^2\,y^{0.9} + \frac{x^4}{y^{1.1}}}, \quad x > 0,\; y > 0$$

homogen? Falls ja, bestimmen Sie deren Homogenitätsgrad.

(d3) (2 Punkte)
Ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln(\sqrt{x}\,y + x^{1.5}) - \frac{3}{2}\,\ln(x), \quad x > 0,\, y > 0$$

homogen? Falls ja, bestimmen Sie deren Homogenitätsgrad.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (26 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie?

(a) $(A \vee B) \Rightarrow B$.

(b) $(A \vee B) \Rightarrow A$.

(c) $(A \wedge B) \Leftrightarrow A$.

(d) $(A \wedge B) \Rightarrow A$.

Frage 2 (3 Punkte)
Sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge definiert als $e_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$. Welche der unten aufgeführten Folgen hat den gleichen Grenzwert wie $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \left(5+\frac{1}{n}\right)^n$.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \left(1+\frac{1}{5\,n}\right)^n$.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{5\,n}$.

(d) $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $d_n = 5+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Frage 3 (3 Punkte)
Ein Projekt verlangt eine anfängliche Investition von 20'000 Schweizer Franken und generiert einen Ertrag von 1'000 Schweizer Franken am Ende jeden Jahres für die nächsten 19 Jahre. Nach 20 Jahren generiert das Projekt einen letzten Ertrag in Höhe von 21'000 Schweizer Franken. Für welchen der folgenden Zinssätze i ist der Barwert der Projekts strikt negativ?

(a) $i = 1\%$.

(b) $i = 3\%$.

(c) $i = 5\%$.

(d) $i = 7\%$.

Frage 4 (4 Punkte)
Die Funktion $f\,:\,[0,10] \to \mathbb{R}$ ist genau dann monoton wachsend auf $[0,10]$, wenn

(a) $f(10) \geq f(0)$.

(b) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0,10]$, wobei $x_1 < x_2$.

(c) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0,10]$, wobei $x_1 > x_2$.

(d) die erste Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in (0,10)$ existiert und positiv ist.

Frage 5 (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist 5-mal differenzierbar und $f'''(0) = 2\,f^{(4)}(0)$. Weiterhin ist das Taylor-Polynom 3. Ordnung von f in 0 gegeben durch $P_3(x) = x + 3\,x^2 - 2\,x^3$. Das Taylor-Polynom 4. Ordnung von f in 0 ist

(a) $P_4(x) = x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + \frac{1}{4}\,x^4$.

(b) $P_4(x) = x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$.

(c) $P_4(x) = x + 3\,x^2 - 2\,x^3 - x^4$.

(d) $P_4(x) = x + 3\,x^2 - 2\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4$.

Frage 6 (3 Punkte)
Die Höhenlinie $z = -9$ der Funktion $f(x, y) = x^2 - 4\,x + y^2 - 6\,y$

(a) ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 2)$ und Radius $r = 1$.

(b) ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(2, 0)$ und Radius $r = 1$.

(c) ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$ und Radius $r = 2$.

(d) ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(3, 2)$ und Radius $r = 2$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die Änderungsrate der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{x^3+x}$

(a) ist immer strikt negativ.

(b) ist immer strikt positiv.

(c) kann positiv oder negativ sein.

(d) ist konstant und gleich 1.

Frage 8 (3 Punkte)
Für die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_x(x, y)$ und $\varepsilon_y(x, y)$ der Funktion $f(x, y) = x\,y^3$ gilt:

(a) $\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = 1$.

(b) $\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = 2$.

(c) $\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = 3$.

(d) $\varepsilon_x(x, y) + \varepsilon_y(x, y) = 4$.

Mathematik I
Nachholprüfung Herbstssemester 2013

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

14 Juli 2014

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (22 Punkte)

(a) (3 Punkte)

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, definiert als

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+n-5}{n+3}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

(b) (4 Punkte)

Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, definiert als

$$b_n = -5 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+2}.$$

Zeigen Sie, dass $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton und konvergent ist.

(c) (6 Punkte)

Sei $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Reihe, definiert als

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{3\,a+1}}\right)^{2\,k}, \quad a \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right).$$

Für welche $a \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ ist die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent? Welches ist der Grenzwert von $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall?

(d) (9 Punkte)

Eine 65-jährige Person investiert 1'000'000 Schweizer Franken, um eine nachschüssige Rente zu finanzieren, die für 20 Jahre am Ende jeden Jahres $2\,C^I$ Schweizer Franken und für weitere 10 Jahre am Ende jeden Jahres C^I Schweizer Franken ausbezahlt. Der Zinssatz beträgt $i = 5\%$. Bestimmen Sie C^I.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}.$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

(a3) (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{1-e^{-2\sqrt{x+1}}}.$$

Zeigen Sie, dass f auf ihrem Definitionsbereich monoton wachsend ist.

(b) (7 Punkte)
Verwenden Sie ein Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \cos(x)$, um näherungsweise

$$\sum_{k=10}^{20} \cos\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

zu berechnen.

(c) (6 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$3\,x^3 + 4\,x^2 - 2\,x + 10 = 0$$

im Intervall $I = [-3, 1]$ eine Lösung hat.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

(a1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=e^{x^2+4\,x+2}.$$

Berechnen Sie die Elastizität $\varepsilon_f(x)$.

(a2) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=e^{x^2+4\,x+2}.$$

Bestimmen Sie die Werte $x_0\in\mathbb{R}$, für die f in x_0 unelastisch ist.

(a3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=e^{x^2+4\,x+2}.$$

Wenden Sie die Elastizität von f an, um die approximative Änderung von $f(x)$ zu berechnen, wenn x von 1 auf 1.02 erhöht wird.

(b) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$P(K,A)=\left(2\,K^2+4\,A^2\right)^2,\quad K>0,\;A>0.$$

In welchem Punkt (K_0,A_0) auf der Isoquante $P(K,A)=144$ ist die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK}$ gleich -1?

(c) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=\ln\left(2+4\,x^2\,y+x^3+y^4\right),\quad x>0,\;y>0.$$

Bestimmen Sie das totale Differential im Punkt $(x_0,y_0)=(1,1)$ und wenden Sie es an, um den ungefähren Wert von $f(0.99,1.01)$ zu berechnen.

(d1) (2 Punkte)
Ist die Funktion

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+3\,x\,y},\quad x>0,\;y>0$$

homogen? Wenn ja, bestimmen Sie deren Homogenitätsgrad.

(d2) (2 Punkte)
Ist die Funktion

$$f(x,y)=\ln\left(3\,e^{x\,y}\right),\quad x,y\in\mathbb{R}$$

homogen? Wenn ja, bestimmen Sie deren Homogenitätsgrad.

(d3) (2 Punkte)
Für welche Werte des Parameters a ist die Funktion

$$f(x, y) = x^{0.5}\, y^2 - 3\, x^a\, y^a, \quad x > 0,\, y > 0$$

homogen? Bestimmen Sie für diese Werte von a den Homogenitätsgrad.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (26 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Welche der folgenden Wahrheitstabellen ist die Wahrheitstabelle der Aussage $(A \wedge B) \Rightarrow B$?

(a)

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	T	T	T	F

(b)

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	T	F	T	F

(c)

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	T	T	T	T

(d)

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$(A \wedge B) \Rightarrow B$	F	F	F	T

Frage 2 (3 Punkte)
Sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, definiert als $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{8n}$. Welche der untenstehenden Folgen hat den gleichen Grenzwert wie $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \left(8+\frac{1}{n}\right)^n$.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n = \left(1+\frac{1}{8n}\right)^n$.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n = \left(1+\frac{8}{n}\right)^n$.

(d) $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $d_n = 8+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Frage 3 (3 Punkte)
Ein Projekt verlangt ein anfängliches Investment von 30'000 Schweizer Franken und generiert für 29 Jahre am Ende des Jahres 1'500 Schweizer Franken. Nach 30 Jahren generiert das Projekt einen abschliessenden Ertrag von 31'500 Schweizer Franken. Für welchen der folgenden jährlichen Zinssätze i ist der Barwert des Projekts strikt positiv?

(a) $i = 4\%$.

(b) $i = 5\%$.

(c) $i = 6\%$.

(d) $i = 8\%$.

Frage 4 (4 Punkte)
Eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist überall steigend, während die differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überall fallend ist.

(a) Die Verkettung $g \circ f$ ist monoton wachsend.

(b) Die Verkettung $g \circ f$ ist monoton fallend.

(c) Die Verkettung $g \circ f$ ist streng monoton wachsend.

(d) Die Verkettung $g \circ f$ is streng monoton fallend.

Frage 5 (4 Punkte)
Die ersten, zweiten und dritten Ableitungen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 = 0$ sind identisch, d.h. $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$ und $f'''(0) = g'''(0)$. Im Gegensatz dazu gilt $f(0) = 2 + g(0)$ und $f^{(4)}(0) = 2\,g^{(4)}(0)$. Das Taylor-Polynom vierter Ordnung von f in 0 ist $P_4(x) = 1 + x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$. Das Taylor-Polynom vierter Ordnung von g in 0 ist

(a) $Q_4(x) = 1 + x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$.

(b) $Q_4(x) = -1 + x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + x^4$.

(c) $Q_4(x) = 1 + x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^4$.

(d) $Q_4(x) = -1 + x + 3\,x^2 - 2\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^4$.

Frage 6 (3 Punkte)
Die Niveaulinie $z = 0$ der Funktion $f(x, y) = 4\,x^2 + y^2 - 8\,x - 4\,y - 8$

(a) ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $(1, 2)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 4$.

(b) ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $(2, 1)$ und Halbachsen $a = 4$ und $b = 2$.

(c) ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $(1, 1)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 2$.

(d) ist eine Ellipse mit Mittelpunkt $(2, 2)$ und Halbachsen $a = 4$ und $b = 4$.

Frage 7 (3 Punkte)
Die Gleichung $e^{x^3+x} - 2 = 0$

(a) hat keine Lösung in $[0, 1]$.

(b) hat eine eindeutige Lösung in $[0, 1]$.

(c) hat zwei Lösungen in $[0, 1]$.

(d) hat vier Lösungen in $[0,1]$.

Frage 8 (3 Punkte)
Für die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = x^2\,y + x^1\,y^2$ gilt

(a) $\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 1$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 3$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 4$.

Herbstsemester 2014

Dr. Reto Schuppli

Mathematik I
Prüfung Herbstsemester 2014

Dr. Reto Schuppli*

27. Januar 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 points)

(a) (5 Punkte)

Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(\frac{3\,x-2}{2\,x+10}\right)^n$$

konvergent?

(b) (5 Punkte)

Eine nachschüssige 20-jährige Rente von CHF 10'000 soll bei einem Zinssatz von $i = 2$ % in eine vorschüssige 15-jährige Rente umgewandelt werden.
Welcher Betrag wird jährlich ausbezahlt?

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\cos(x) - \ln(x+1) - \frac{x^2}{2}}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x\,e^x + x^2}.$$

(d1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{\sqrt{\ln(x-1)}+1}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{\sqrt{\ln(x-1)}+1}.$$

Ist f streng monoton (Beweis)?

Aufgabe 2 (25 points)

(a1) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion
$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt[3]{1+x}.$$
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_2(x)$ 2. Ordnung von f im Punkt $x_0 = 0$.

Benützen Sie $P_2(x)$, um einen Näherungswert für $\sqrt[3]{1003} = \sqrt[3]{10^3(1+0.003)}$ zu bestimmen!

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion
$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt[3]{1+x}.$$
$R_2(x)$ bezeichne das Restglied 2. Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ gilt:
$$|R_2(x)| \leq \frac{5}{81}\,x^3.$$

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion
$$f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2-4}} + \sqrt{9-x^2-y^2}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (6 Punkte)
Eine Kurve in der xy-Ebene ist gegeben durch die Gleichung
$$2x^2 + xy + y^2 - 8 = 0.$$
Welche Punkte auf der Kurve haben eine horizontale Tangente?

(d1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Produktionsfunktion
$$P(K,A) = \left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^4.$$
Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A sowie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$.

(d2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Produktionsfunktion
$$P(K,A) = \left(a\,K^{0.25} + A^{0.25}\right)^4.$$
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1,16)$ gleich -4?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 points)

Frage 1 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist *keine* Tautologie.

(a) $A \wedge B \implies A$.

(b) $A \vee \neg A$.

(c) $A \implies A \vee B$.

(d) $A \vee B \implies B$.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{2e^n + n}{e^n + 2n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 1.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 2.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Frage 3 (2 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent mit dem Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und der Grenzwert a ist eindeutig.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder der Grenzwert a ist eindeutig.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Projekt erfordert ein anfängliches Investment von CHF 1'000'000 und zahlt in 15 Jahren CHF 1'600'000 aus.Das Projekt hat den tiefsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2\,\%$.

(b) $i = 3.18\,\%$.

(c) $i = 8\,\%$.

(d) Der Nettobarwert ist unabhängig vom jährlichen Zinssatz i.

Frage 5 (4 Punkte)
Der Term

$$\ln\left(\frac{2x}{y}\right) + \ln\left(\frac{y}{4x}\right)$$

ist äquivalent zu

(a) 0.

(b) $-\ln(2)$.

(c) $2\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

(d) $\ln\left(\frac{2\,x}{y} + \frac{y}{4x}\right)$.

Frage 6 (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} & x \neq -2,\, x \neq 1 \\ -1 & x = -2 \\ \frac{3}{2} & x = 1 \end{cases}$$

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur in $x = -2$ unstetig.

(c) f ist nur in $x = 1$ unstetig.

(d) f ist in $x = -2$ und $x = 1$ unstetig.

Frage 8 (2 Punkte)
Welche der folgenden Bedingung ist hinreichend dafür, dass eine auf $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion f in $(x_0, f(x_0))$ (mit $x_0 \in I$)einen Wendepunkt hat?

(a) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$.

(b) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$.

(c) $f''(x_0) \neq 0$ und $f'''(x_0) = 0$.

(d) $f''(x_0) = f'''(x_0) = f^{(4)}(x_0) = 0$ und $f^{(5)}(x_0) \neq 0$.

Aufgabe 4 (25 points)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) = 2^t.$$

(a) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton fallend in t.

(b) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist konstant in t.

(c) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton wachsend in t.

(d) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist nicht monoton in t.

Frage 2 (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(t) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

(a) f hat ein globales Maximum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein globales Maximum in $x_0 = \ln(2)$.

(c) f hat ein globales Maximum in $x_0 = e$.

(d) f hat ein globales Maximum in $x_0 = e^{-1}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Gegeben ist das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$:

$$P_4(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 3$$

Welches ist die zugehörige Funktion f?

(a) $f(x) = e^x + 2$.

(b) $f(x) = 2\,e^x + 1$.

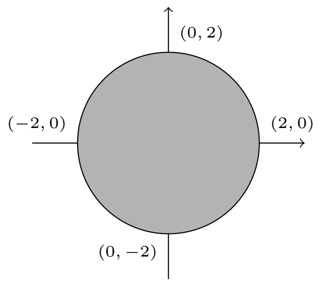
(c) $f(x) = 3\,e^x$.

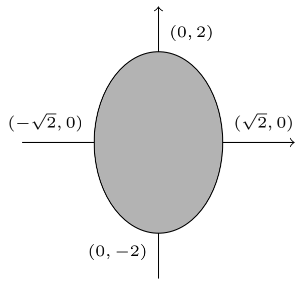
(d) $f(x) = 4\,e^x + 2$.

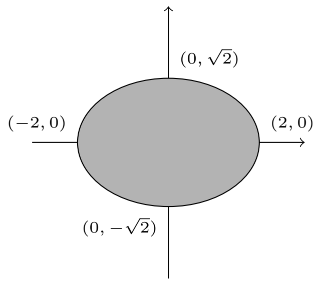
Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

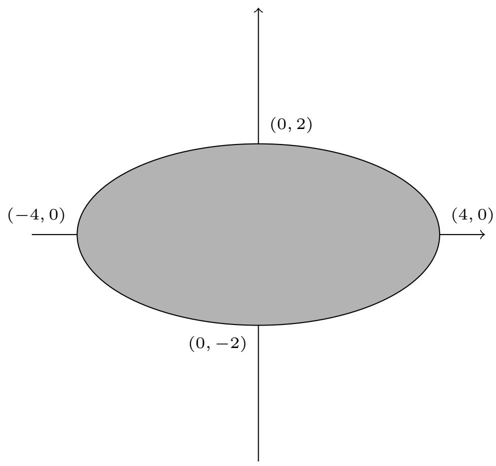
$$f(x,y) = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$$

Welche Graphik zeigt den Definitionsbereich von f?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^{1.8}\,y^{0.6}} + \sqrt{x^{1.2}\,y^{0.4}} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.8.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 1.6.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) + x + y \quad (x > 0,\, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^2 + 18\,x\,y - 9\,y^2\right)^{0.5} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 3.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (2 Punkte)
Sei $P(K,A) = 2\,K^{0.8}\,A^{0.4}$ $(K > 0,\, A > 0)$ eine Produktionsfunktion.

(a) $P(K,A)$ hat zunehmende Skalenerträge.

(b) $P(K,A)$ hat konstante Skalenerträge.

(c) $P(K,A)$ hat abnehmende Skalenerträge.

(d) $P(K,A)$ ist nicht homogen.

Mathematik I
Nachholprüfung Herbstsemester 2014

Dr. Reto Schuppli*

15. Juli 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 points)

(a) (6 Punkte)
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\,a-1}{a+1}\right)^k$$

konvergent?

Ermitteln Sie den zugehörigen Grenzwert.

(b) (6 Punkte)
Ein Unternehmer wird auf das Ende des Jahres 2021 in den Ruhestand treten.Um sich nach seinem Rückritt eine Rente zu sichern, sieht er vor, ab einschliesslich 2001 (bis 2021) zu jedem Jahresende einen konstanten Betrag C auf ein Sparkonto(Zinssatz $i = 2\,\%$) einzuzahlen.Als Rentner will er ab 2022 15 Jahre lang zu jedem Jahresende CHF $40'000$ abheben.

Berechnen Sie C.

(c) (3 Punkte)
Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2\,e^x - x^2 - 2x - 2}.$$

(d1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(d2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = 2^{-2+\sqrt{\ln(x+2)}}.$$

Ist f streng monoton (Beweis)?

Aufgabe 2 (25 points)

(a1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ 3. Ordnung von f im Punkt $x_0 = \pi$.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sin(2x).$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied 3. Ordnung von f in $x_0 = \pi$.

Zeigen Sie, dass für $x \in [\pi - 0.1, \pi + 0.1]$ gilt:

$$|R_3(x)| < \frac{1}{10^4}.$$

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln(4\,x^2 + y^2 - 16) + \sqrt[3]{25 - x^2 - y^2}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \cos(x)\, \sin(y) + a\,(x + 3)^2.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt die Tangentensteigung an die Niveaulinie im Punkt $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ den Wert 3 an?

(d1) (3 Punkte)
Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = 8\left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5} \qquad (\lambda > 0).$$

Berechnen Sie die Grenzerträge P_K und P_A sowie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{P,K}$ und $\varepsilon_{P,A}$.

(d2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = 8\left(\frac{\lambda}{K} + \frac{1}{2A}\right)^{-0.5}$$

mit $\lambda = 2$.
Berechnen Sie das totale Differential dP von P im Punkt $(K_0, A_0) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$.
Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials einen Näherungswert für $P(0.98, 0.29)$.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 points)

Frage 1 (2 Punkte)
Die Aussage

$$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$$

hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	W	W	W	W

(b)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	W	W	W	F

(c)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	F	F	F	W

(d)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$(A \wedge B) \vee (B \vee A)$	W	F	F	F

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{e\,2^n + n}{n^e + 2n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 1.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert e.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Frage 3 (2 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1 - 2\,\cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) $-\sqrt{3}$.

(c) $\frac{1}{3}$.

(d) $3\,\pi$.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Projekt erfordert ein anfängliches Investment von CHF 2'000'000 und zahlt in 5 Jahren CHF 2'500'000 aus.Das Projekt hat den höchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.25\,\%$.

(b) $i = 4.56\,\%$.

(c) $i = 6.65\,\%$.

(d) Der Nettobarwert ist unabhängig vom jährlichen Zinssatz i.

Frage 5 (4 Punkte)
Der Term

$$\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{2a}\right) \quad (a > 0,\ b > 0)$$

ist äquivalent zu

(a) 0.

(b) $-\ln(2)$.

(c) $2\ln\left(\frac{2\sqrt{2}\,a}{b}\right)$.

(d) $\ln\left(\frac{4\,a}{b} - \frac{b}{2a}\right)$.

Frage 6 (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-2\,x-3}, & \text{für } x \neq -1,\, x \neq 3 \\ \frac{1}{2}, & \text{für } x = -1 \\ -2, & \text{für } x = 3 \end{cases}.$$

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur in $x = -1$ unstetig.

(c) f ist nur in $x = 3$ unstetig.

(d) f ist in $x = -1$ und $x = 3$ unstetig.

Frage 7 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$g(t) = x^t \cos(2x).$$

Welche der folgenden Ableitungen beschreibt die erste Ableitung von $g(t)$?

(a) $g'(t) = -2\,t\,x^{t-1} \sin(2x)$.

(b) $g'(t) = \ln(x)\,x^t \cos(2x)$.

(c) $g'(t) = t\,x^{t-1} \cos(2x) - 2\,x^t \sin(2x)$.

(d) $g'(t) = \ln(t)\,x^t \cos(2x)$.

Frage 8 (2 Punkte)
Welche der folgenden Bedingungen ist hinreichend dafür, dass eine auf $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion $f$in $(x_0, f(x_0))$ (mit $x_0 \in I$) ein lokales Maximum hat?

(a) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) < 0$.

(b) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 = f'''(x_0)$ und $f^{(4)}(x_0) < 0$.

(c) $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

(d) $f''(x_0) \neq 0$ und $f'''(x_0) = 0$.

Aufgabe 4 (25 points)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R},\quad t\mapsto f(t)=t^4.$$

(a) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton fallend in t.

(b) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist konstant in t.

(c) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist streng monoton wachsend in t.

(d) Die Wachstumsrate $\rho_f(t)$ von f ist nicht monoton in t.

Frage 2 (5 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}_{++},\quad x\mapsto f(x)=\frac{1}{x}\,x^x.$$

(a) f hat ein lokales Minimum in $x_0=1$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0=\ln(2)$.

(c) f hat ein lokales Minimum in $x_0=e$.

(d) f hat ein lokales Minimum in $x_0=e^{-1}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Gegeben ist das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion f im Punkt $x_0=0$:

$$P_4(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+1.$$

Welches ist die zugehörige Funktion f?

(a) $f(x)=e^x$.

(b) $f(x)=2\,e^x-1$.

(c) $f(x)=3\,e^x-2$.

(d) $f(x)=5\,e^x-4$.

Frage 4 (3 Punkte)
Die Niveaulinien $f(x,y)=c$ der Funktion

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2-1}$$

für $c>1$

(a) sind Parabeln.

(b) sind Hyperbeln.

(c) sind Ellipsen.

(d) sind keine Kurven der unter (a) - (c) genannten Art.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \left(x^a\, y^{1-a} + x^{-3}\, y^4\right)^{0.5} \quad (x > 0,\ y > 0,\ a > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad a.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}\,\ln(x) + \frac{2}{3}\,\ln(y) \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{3}$.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{4\,(x^{0.2}\, y^{0.4})} + \sqrt[4]{x^{1.6}\, y^{0.8}} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.4.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (2 Punkte)
Eine differenzierbare Funktion $f(x, y)$ sei homogen vom Grad $k = 0.7$ und es gelte $f(x, y) > 0$ für alle x, y.Dann gilt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 0$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereiches.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 0.7$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereiches.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0) + \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0) = 1.4$ in jedem Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereiches.

(d) Es lässt sich keine allgemeine Aussage über $\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0)+\varepsilon_{f,y}(x_0, y_0)$ machen, d.h.,$\varepsilon_{f,x}(x_0, y_0)+ \varepsilon_{f,y}(x_0, y_0)$ ist abhängig von (x_0, y_0).

Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

2. Februar 2015

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie weiterhin Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Exercise 1 (26 Punkte)

(a) (5 Punkte)

Für welche Werte $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{5}, \frac{10}{3}\right\}$ ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n\,[\ln(|5\,x+2|) - \ln(|3\,x-10|)]$$

konvergent?

(b) (7 Punkte)

Eine Bankkundin nimmt einen Kredit in Höhe von $P = 2'000'000$ CHF auf. Sie geht zunächst ein Hypothekendarlehen mit einer Laufzeit von 20 Jahren und einem fixem Zinssatz in Höhe von $i = 2\%$ ein. Die am Ende jeden Jahres fälligen Rückzahlungsbeträge belaufen sich auf $C = 50'000$ CHF. Nach 20 Jahren muss das Darlehen neu verhandelt werden. In der Zwischenzeit ist der Zinssatz auf $i = 1\%$ gefallen.
Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen nach der Neuverhandlung sein, damit das Darlehen 40 Jahre nach der Neuverhandlung zurückgezahlt ist, gegeben, dass diese wieder am Ende des Jahres erfolgen?

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{2\,x+4}.$$

(d1) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(-x^2+2\,x+4)}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(-x^2+2\,x+4)}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

Exercise 2 (24 Punkte)

(a1) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad t\mapsto w=w_0\,e^{-i\,t},$$

wobei $w_0>0$ und $i>0$.Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $P_3(t)$ dritter Ordnung von f im

Punkt $t_0=0$.

Verwenden Sie $P_3(t)$ für $w_0=1'000'000$ und $i=0.05$, um einen Näherungswert für $f(1)-f(0)$ zu bestimmen.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad t\mapsto w=w_0\,e^{-i\,t},$$

wobei $w_0>0$ und $i>0$.$R_3(t)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f im Punkt $t_0=0$.

Zeigen Sie, dass für $t\geq 0$ gilt:

$$|R_3(t)|\leq\frac{w_0\,i^4}{24}\,t^4.$$

(b) (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto z=e^{a\,x^2+b\,y+3}$$

wobei $a,b\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(1,1)$ und $\varepsilon_{f,y}(1,1)$ beide gleich 1 sind.

(c) (8 Punkte)
Die beiden Kurven C_1 und C_2 in der xy-Ebene seien gegeben durch die Gleichungen

$$C_1\,:\,15\,x^2+5\,x\,y+15\,y-27=0$$

und

$$C_2\,:\,2\,x^2+5\,y=0.$$

Bestimmen Sie den Punkt auf *beiden* Kurven, in welchem die Tangenten an C_1 und C_2 parallel sind.

(d1) (2 Punkte)
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K,A)=\left(a\,K^{0.5}+A^{0.5}\right)^2.$$

Bestimmen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

(d2) (2 Punkte)
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = \left(a\, K^{0.5} + A^{0.5}\right)^2 .$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 4)$ gleich 1?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = \text{„}\tfrac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“},$$

$$B(x) = \text{„}x \text{ ist eine gerade Zahl“},$$

und

$$C(x) = \text{„Wenn } \tfrac{x}{4} \text{ eine positive ganze Zahl ist, dann ist } x \text{ eine gerade Zahl“}.$$

$C(x)$ ist äquivalent zu

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $A(x) \wedge B(x)$.

(d) $A(x) \vee B(x)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind divergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - b_n$.
Es folgt, dass

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein kann, abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist genau dann, wenn $a_n > b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = (-1)^n\, a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und monoton ist.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt oder monoton ist.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und konvergent ist.

(d) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt und divergent ist.

Frage 4 (2 Punkte)
Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von 2′000′000 CHF und zahlt 1′000′000 CHF in 10 Jahren sowie 1′500′000 CHF in 20 Jahren aus. Das Projekt besitzt den niedrigsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\,\%$.

(b) $i = 3.45\,\%$.

(c) $i = 4.65\,\%$.

(d) $i = 5.05\,\%$.

Frage 5 (4 Punkte)
Die Gleichung

$$\ln\left(x^3\right) - \ln\left(x - \frac{4}{5}x^2\right) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Frage 6 (5 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2} & x \neq -2,\, x \neq -1 \\ 2 & x = -2 \\ -4 & x = -1 \end{cases}$$

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur in $x = -2$ unstetig .

(c) f ist nur in $x = -1$ unstetig .

(d) f ist in $x = -2$ und $x = -1$ unstetig .

Frage 7 (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem *ganzen* Definitionsbereich konkav?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = e^{2x+1}$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $f_3(x) = x^3 + 2x + 4$.

(d) Keine der obigen Funkionen ist in ihrem *ganzen* Definitionsgebiet konkav.

Frage 8 (2 Punkte)
Die Funktion g habe ein lokales Maximum bei $x_0 = 2$. Die Funktion f sei streng monoton wachsend. Sei h die Funktion definiert durch $h(x) = (f \circ g)(x)$. Es folgt:

(a) h hat ein lokales Maximum bei $x_0 = 2$.

(b) h hat ein lokales Minimum bei $x_0 = 2$.

(c) h hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = 2$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die relative Änderungsrate der Funktion $f : R_{++} \to \mathbb{R}$ sei $\rho_f(t) = t^2$. Es folgt, dass die Elastizität von f gegeben ist durch:

(a) $\varepsilon_f(t) = t^3$.

(b) $\varepsilon_f(t) = t$.

(c) $\varepsilon_f(t) = t^2$.

(d) Es ist unmöglich mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die Elastizität $\varepsilon_f(t)$ herzuleiten.

Frage 2 (5 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : (-1, 6) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln(6 + 5\,x - x^2).$$

(a) f hat ein globales Maximum in $x_0 = \frac{5}{2}$.

(b) f hat ein globales Maximum in $x_0 = -\frac{5}{2}$.

(c) f hat ein globales Maximum in $x_0 = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

(d) f hat ein globales Maximum in $x_0 = \ln\left(-\frac{5}{2}\right)$.

Frage 3 (3 Punkte)
Das Taylor-Polynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{3}}$ in $x_0 = 0$ ist gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{2}{9}\,x^2 + \frac{10}{27}\,x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{5}{81}\,x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9}\,x^2 + \frac{5}{81}\,x^3$.

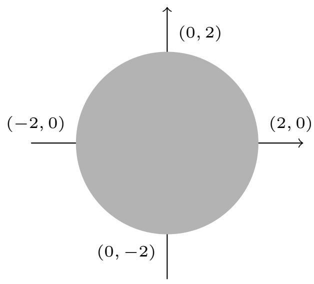
(d) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{3}\,x + \frac{2}{9}\,x^2 + \frac{10}{27}\,x^3$.

Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

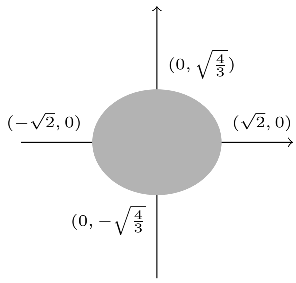
$$f(x, y) = \ln\left(4 - 3\,x^2 - 2\,y^2\right).$$

Welches der folgenden Bilder zeigt den Definitionsbereich von f?

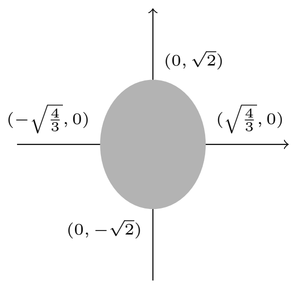
(a)



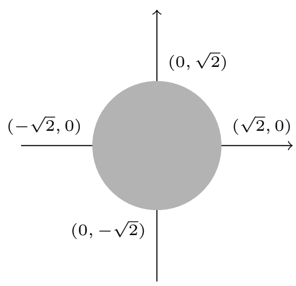
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (3 Punkte)
Eine homogene Funktion vom Grad 1.2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}(x, y)$ gleich $3\,x + 1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -3\,x + 1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 3\,x + 1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = -3\,x + 0.2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 3\,x + 0.2$.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{2.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}\,y^{0.4}} + \sqrt[3]{x\,y^{0.8}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.4.

(b) f ist homogen vom Grad 0.6.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = 4\,x^2\,\sqrt{y} + 5\,y^2\,\sqrt{5\,x} + x\,y^a$$

wobei $x > 0$, $y > 0$, und $a \in \mathbb{R}$.Für welchen Wert a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.5$.

(c) $a = 2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Frage 8 (2 Punkte)
Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen von Grad 2. Dann ist die Funktion h definiert durch $h(x,y) = f(g(x,y), g(x,y))$

(a) homogen vom Grad 1.

(b) homogen vom Grad 5.

(c) homogen vom Grad 6.

(d) nicht homogen.

Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2015

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

18. Juli 2016

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Exercise 1 (26 Punkte)

(a) (5 Punkte)

Sei $q(x) = \frac{5\,x+2}{3\,x-10}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{10}{3}\right\}$.
Für welche Werte von x konvergiert die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} 3\,q(x)^k$?

(b) (7 Punkte)

Eine Kreditnehmerin leiht sich $P = 2'500'000$ CHF, um ihr Haus zu finanzieren. Sie kann jährliche Zahlungen in Höhe von $C = 50'000$ CHF aufbringen. Der jährliche Zinssatz liegt bei $i = 1\%$. Wie lange benötigt die Kundin, um das Darlehen zurückzuzahlen, wenn die Zahlungen zum Ende des Jahres stattfinden?

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{3\,x+6}.$$

(d1) (5 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4\,x+4)}.$$

Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

(d2) (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt{\ln(x^2+4\,x+4)}.$$

Ist f monoton (Beweis)?

Exercise 2 (24 Punkte)

(a1) (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\frac{1}{1+x}.$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $P_3(x)$ dritter Ordnung von f im Punkt $x_0=0$.

Verwenden Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert für $f(0.1)$ zu bestimmen.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\frac{1}{1+x}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f im Punkt $x_0=0$.

Zeigen Sie, dass für $x\geq 0$ gilt:

$$|R_3(x)|\leq x^4.$$

(b) (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto z=3\,e^{2\,a\,x+b\,y+5}$$

wobei $a,b\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(c,c)$ und $\varepsilon_{f,y}(c,c)$ identisch sind für alle $c>0$.

(c) (8 Punkte)
Die Kurve C in der xy-Ebene sei gegeben durch die Gleichung

$$C\,:\,x^2+5\,x\,y+12\,y-a=0,$$

wobei $a\in\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie $a\in\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P=(c,c)$ zur Kurve C gehört und die Steigung der Tangente an C in P -1 beträgt.

(d1) (2 Punkte)
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K,A)=\left(a\,K^{0.25}+A^{0.75}\right)^4$$

wobei $a > 0$.
Bestimmen Sie die Grenzerträge P_K und P_A.

(d2) (2 Punkte)
Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = \left(a\, K^{0.25} + A^{0.75}\right)^4$$

wobei $a > 0$.
Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die technische Substitutionsrate im Punkt $(1, 16)$ gleich $-\frac{4}{3}$?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden.Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet.Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Gegeben seien die Aussagen

$$A(x) = \text{„}\tfrac{x}{4} \text{ ist eine positive ganze Zahl“},$$

$$B(x) = \text{„}x \text{ ist eine gerade Zahl“}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist wahr:

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(a) $\neg A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Rightarrow \neg B(x)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben seien die Folgen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind konvergent. Sei $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $c_n = a_n - (-1)^n\, b_n$.
Dann gilt:

(a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kann abhängig von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent oder divergent sein.

(d) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Frage 3 (3 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und $a_n > 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \ln(a_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt oder monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und konvergent.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Frage 4 (2 Punkte)
Ein Projekt benötigt ein anfängliches Investment in Höhe von $2'000'000$ CHF und zahlt $1'000'000$ CHF in 10 Jahren, $1'500'000$ CHF in 20 Jahren sowie $1'000'000$ CHF in 40 Jahren aus. Das Projekt besitzt denhöchsten Nettobarwert für einen jährlichen Zinssatz i von

(a) $i = 2.35\,\%$.

(b) $i = 3.45\,\%$.

(c) $i = 4.65\,\%$.

(d) $i = 5.05\,\%$.

Frage 5 (4 Punkte)
Die Gleichung

$$\ln\left(x^3\right) - \ln\left(1 - \frac{4}{5}\,x\right) + \ln(x) = \ln(5)$$

besitzt die Lösungsmenge

(a) $\{-5, 1\}$.

(b) $\{1\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

(d) $\{-5\}$.

Frage 6 (5 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

Für welche Werte von a ist die Funktion f stetig?

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = \frac{\pi}{2}$.

(d) $a = \pi$.

Frage 7 (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen ist in ihrem ganzen Definitionsbereich *konvex*?

(a) f_1 definiert durch $f_1(x) = \ln\left(\frac{1}{2\,x+1}\right)$.

(b) f_2 definiert durch $f_2(x) = \ln(x^2 + 2\,x + 1)$.

(c) f_3 definiert durch $f_3(x) = x^3 + 3\,x + 4$.

(d) Keine der obigen Funkionen ist in ihrem ganzen Definitionsgebiet konvex.

Frage 8 (2 Punkte)
Die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{x^2+3\,x+2}$

(a) hat ein lokales Maximum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(b) hat ein lokales Minimum bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(c) hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = -\frac{3}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Die Elastizität der Funktion $f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ sei $\varepsilon_f(x) = x^2 + 3\,x$. Es folgt, dass die relative Änderungsrate von f gegeben ist durch:

(a) $\rho_f(x) = x + 3$.

(b) $\rho_f(x) = x^2 + 3$.

(c) $\rho_f(x) = x^3 + 3\,x^2$.

(d) Es ist unmöglich, mit den oben gegebenen Informationen einen Ausdruck für die relative Änderungsrate $\rho_f(t)$ herzuleiten.

Frage 2 (5 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln(6 + c\,x - x^2),$$

wobei c ein reellwertiger Parameter ist, für den $D_f \neq \emptyset$ gilt. f hat ein globales Maximum bei $x_0 = 1$

(a) für $c = 3$.

(b) für $c = 2$.

(c) für $c \in \{0, 1\}$.

(d) $D_f = \emptyset$ für alle $c \in \mathbb{R}$.

Frage 3 (3 Punkte)
Das Taylor-Polynom dritter Ordnung der Funktion f definiert durch $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{4}}$ in $x_0 = 0$ ist gegeben durch:

(a) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{16}\,x^2 + \frac{21}{64}\,x^3$.

(b) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{16}\,x^2 - \frac{21}{64}\,x^3$.

(c) $P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{32}\,x^2 + \frac{7}{128}\,x^3$.

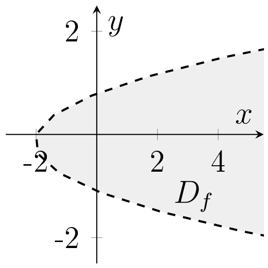
(d) $P_3(x) = 1 - \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{32}\,x^2 - \frac{7}{128}\,x^3$.

Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

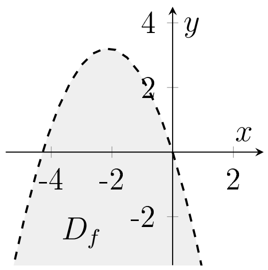
$$f \,:\, D_f \;\to\; \mathbb{R},\; (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln\left(-9\,x^2 - y^2 + 4\,y + 5\right) + \sqrt{4\,x^2 + 2\,y - 4}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

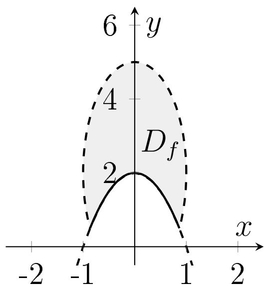
(a)



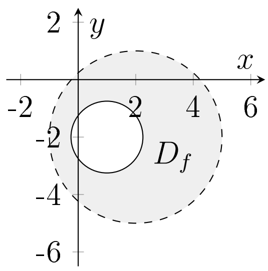
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (3 Punkte)
Eine homogene Funktion vom Grad 2 habe die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ gleich $5\,x+1$. Es folgt, dass

(a) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = -5\,x+1$.

(b) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = 5\,x+1$.

(c) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = -5\,x+2$.

(d) $\varepsilon_{f,y}(x,y) = 5\,x + 2$.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = \sqrt[5]{x^{3.4}\,y^{0.6}} + \sqrt{x^{0.8}\,y^{0.8}} + \sqrt[3]{x^{1.6}\,y^{0.7}}$$

wobei $x > 0$ und $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.6.

(b) f ist homogen vom Grad 0.7.

(c) f ist homogen vom Grad 0.8.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x,y) = x^{3.1}\,\sqrt{y} + 6\,y^{3.5}\,\sqrt{5\,x^{0.2}} + x^{a}\,y^{2\,a}$$

wobei $x > 0$, $y > 0$, und $a \in \mathbb{R}$.Für welchen Wert a ist f homogen?

(a) $a = 1$.

(b) $a = 1.2$.

(c) $a = 1.4$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Frage 8 (2 Punkte)
Die Funktion zweier reeller Variablen f ist homogen vom Grad 3 und die Funktion zweier reeller Variablen g ist homogen vom Grad 2. Die Funktion h ist definiert durch $h(x,y) = f\left((g(x,y))^2, (g(x,y))^2\right)$. Dann gilt:

(a) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 3$.

(b) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 6$.

(c) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 12$.

(d) $\varepsilon_{h,x}(x,y) + \varepsilon_{h,y}(x,y) = 18$.

Herbstsemester 2016

Dr. Reto Schuppli

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2016

Dr. Reto Schuppli*

31. Januar 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (6 Punkte)
Für welche Werte von a und b ($a, b \in \mathbb{R}_+$) konvergiert die Reihe

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1-a}{1+b}\right)^t \; ?$$

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Ermitteln Sie den zugehörigen Grenzwert.

(b) (6 Punkte)
Herr K. will für das Studium seiner Tocher CHF 100′000 durch zehn konstante, jährliche, nachschüssige Einzahlungen bei einem garantierten Zins von $i = 2\%$ ansparen. Nach der 5. Zahlung merkt er, dass der angestrebte Betrag von CHF 100′000 nicht ausreicht.
Wie hoch müssen die verbleibenden Einzahlungen sein, damit nach der zehnten Zahlung CHF 120′000 zur Verfügung stehen?

(c) (4 Punkte)
Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right).$$

(d1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(d2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \; x \mapsto y = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x).$$

Ist f streng monoton (Beweis)?

(d3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ 3. Ordnung von f im Punkt $x_0 = 0$.

Benützen Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert für $\ln(1.5)$ zu bestimmen!

(a2) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right).$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied 3. Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Berechnen Sie $R_3(1)$ auf 3 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu die Definition des Restgliedes.

Zeigen Sie, dass für $x \in [0, 2]$ gilt:

$$|R_3(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{(x-1)\,\ln(y^2 - x^2 - 1)}{\sqrt{4 - 4x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = ax^2 - bxy - 3.$$

Für welche Werte der Parameter a, b, $c \in \mathbb{R}$ berührt die Niveaulinie $f(x, y) = 0$ die Kurve

$$\varphi(x, y) = cxy + y^2 + 3 = 0$$

im Punkt $P = (-1, 1)$?

(d) (6 Punkte)
Die Funktion $f(x, y)$ ist definiert für $x > 0$ und $y > 0$ und ist homogen vom Grad $k = 2$.

Die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ ist gegeben durch

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = \frac{\ln(y) - \ln(x) - 1}{\ln\left(\frac{y}{x}\right)}$$

und die partielle Ableitung $f_y(x,y)$ durch

$$f_y(x,y) = x\,\left(\ln(y) - \ln(x) + 1\right).$$

Ermitteln Sie $f(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Die Aussage $B \Rightarrow A \vee B$ hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \vee B$	W	F	F	F

(b)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \vee B$	W	W	W	W

(c)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \vee B$	W	W	F	W

(d) Keine der obigen Wahrheitstabellen ist korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n .$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $\frac{1}{2}\,e$.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $\sqrt{e}$.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Frage 3 (3 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos(x)}$$

ist

(a) 1.

(b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(c) $\sqrt{3}$.

(d) Der Grenzwert existiert nicht.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:

Projekt I erfordert jetzt eine Investition von CHF 100′000 und bringt in 2 Jahren CHF 120′000.

Projekt II erfordert jetzt eine Investition von CHF 80′000 und bringt in 2 Jahren CHF 100′000.

Für welche Bewertungssätze $i \geq 0$ ist das Projekt I dem Projekt II vorzuziehen?
Projekt I ist Projekt II vorzuziehen für

(a) $i > 2\,\%$.

(b) $i > 10\,\%$.

(c) $i > 20\,\%$.

(d) kein $i \geq 0$.

Frage 5 (3 Punkte)
Die Gleichung

$$3\,\log_a(x) = 2\,\log_a(8)$$

hat (für $x \in \mathbb{R}_{++}$) folgende Lösungsmenge:

(a) $\{4\}$.

(b) $\{\frac{16}{3}\}$.

(c) $\{\sqrt{8^3}\}$.

(d) Die Lösungsmenge ist abhängig von der Basis $a \in \mathbb{R}_{++} \setminus \{1\}$.

Frage 6 (4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{a\,\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist f überall stetig?

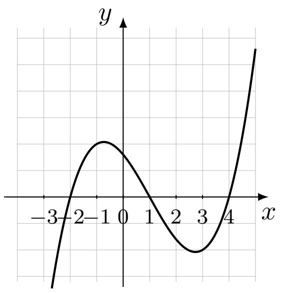
(a) $a = \frac{2}{\pi}$.

(b) $a = \frac{1}{2}$.

(c) $a = -2$.

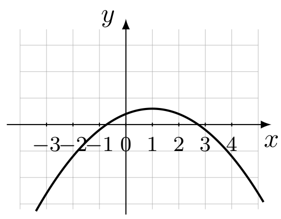
(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ überall stetig.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist der Graph der Funktion f.

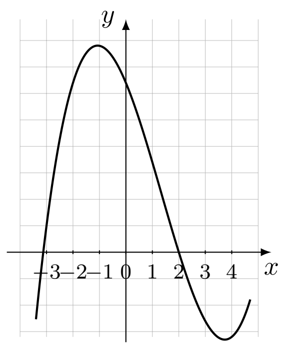


Welcher der folgenden Graphen zeigt die erste Ableitung f'?

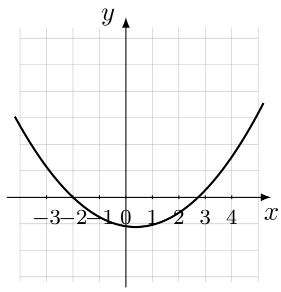
(a)



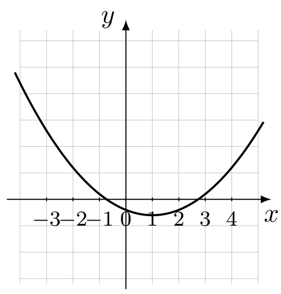
(b)



(c)



(d)



Frage 8 (3 Punkte)
Für eine Funktion f ist die Elastizität $\varepsilon_f(t)$:

$$\varepsilon_f(t) = t\,\ln(t) + e^{3t}.$$

Dann gilt:

(a) $\rho_f(t) = 1 + \ln(t) + 3\,e^{3t}$.

(b) $\rho_f(t) = \frac{t^2\,\ln(t)}{2} - \frac{t^2}{4} + \frac{e^t}{3}$.

(c) $\rho_f(t) = \ln(t) + e^{3t}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\,e^x.$$

(a) f ist unelastisch für $x > 0$.

(b) f ist elastisch für $x > 2$ und unelastisch für $x < 2$.

(c) f ist nur elastisch für $x < e$ und unelastisch für $x > e$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x\,e^{x^2} + x.$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 1$.

(c) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

(d) f hat keine lokale Extremstellen.

Frage 3 (4 Punkte)
Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist

$$P_4(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + a\,x^2 + x + 1$$

das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion

$$f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

im Punkt $x_0 = 0$?
Es ist

(a) $a = -1$.

(b) $a = 0$.

(c) $a = 1$.

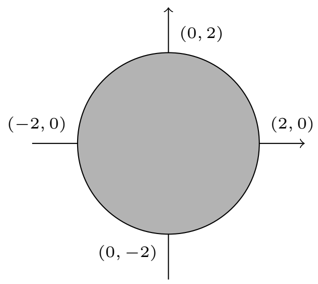
(d) $a = 2$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

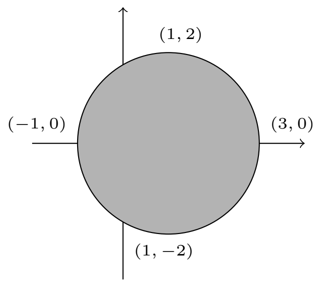
$$f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 + 2x - y^2}.$$

Welche Graphik zeigt den Definitionsbereich von f?

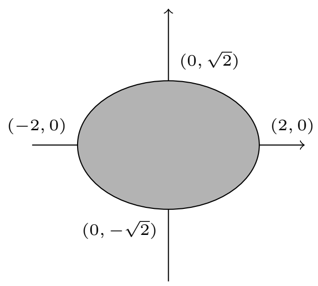
(a)



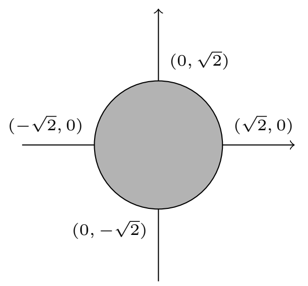
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (2 Punkte)
Die Funktion $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_\varphi \subset \mathbb{R}^2$, sei stetig und $\varphi(x_0, y_0) = 0$.Ausserdem sei φ stetig differenzierbar.Dafür, dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine stetig differenzierbareFunktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in I$ gibt, ist hinreichend, dass

(a) $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$.

(b) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ oder $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(c) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ und $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 8\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2y}\right)^{-0.5} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad -0.5.

(b) f ist homogen vom Grad 0.5.

(c) f ist linear homogen.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = e^x\left(\frac{3x}{y} + 1\right)\left(\sqrt{x^2 + 5y^2}\right) \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)
Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x, y) = x^{a+1} y^{a-3} + \ln\left(\frac{2x}{y}\right) \quad (x > 0,\ y > 0)$$

homogen?

(a) f ist homogen für $a = 0$.

(b) f ist homogen für $a = 1$.

(c) f ist homogen für $a = -2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2016

Dr. Reto Schuppli*

13. Juli 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Für welche Werte von a und b ($a, b \in \mathbb{R}_{++}$) konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-b}{1+2a}\right)^k \ ?$$

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Ermitteln Sie den zugehörigen Grenzwert.

(b) (6 Punkte)

Eine nachschüssige 16-jährige Rente von CHF 30'000 (es werden also 16 Jahre lang am Jahresende CHF 30'000 ausbezahlt) soll in eine zehnjährige vorschüssige Rente (10 Jahre lang wird am Anfang des Jahres der gleiche Betrag B ausbezahlt) umgewandelt werden.Der Zinssatz beträgt $i = 5\%$.

Welcher Betrag B wird jährlich ausbezahlt?

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2t}}{\sqrt{t+4} - \sqrt{3t}}.$$

(d1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \, : \, D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \, : \, D_f \to \mathbb{R}, \ x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ist f streng monoton (Beweis)?

(d3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \, : \, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,[0,\infty]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ 3. Ordnung von f im Punkt $x_0=0$.

Benützen Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert für $\sqrt[4]{1.5}$ zu bestimmen!

(a2) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,[0,\infty]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied 3. Ordnung von f in x_0.

Berechnen Sie $R_3(0.5)$ auf 4 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu die Definition des Restgliedes.
Zeigen Sie, dass für $x\in[0,1]$ gilt:

$$|R_3(x)|<0.04.$$

(b) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=\ln(x^2+4y^2-4)+\frac{y-2}{\sqrt{9-x^2-9y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (6 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y)=x^3+axy+by^2+c.$$

Für welche Werte der Parameter a, b, $c\in\mathbb{R}$ ist die Gleichung der Tangentialebene Γ an den Graph von f im Punkt $P=(2,-1,z_0)$gegeben durch

$$\Gamma:\ 5x-y-\frac{1}{2}z-7=0\,?$$

(d) (6 Punkte)
Die Funktion $f(x,y)$ ist definiert für $x>0$ und $y>0$ und ist homogen vom Grad $k=2$.

Die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ sind

$$f_x(x, y) = \frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2x$$

und

$$f_y(x, y) = \frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2y.$$

Ermitteln Sie $f(x, y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Die Aussage $B \Rightarrow A \wedge B$ hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	F	F	F

(b)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	W	W	W

(c)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	W	F	W

(d) Keine der obigen Wahrheitstabellen ist korrekt.

Frage 2 (3 Punkte)
Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $e^{1.5}$.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Frage 3 (3 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi\, x)}$$

ist

(a) 2.

(b) $-\frac{\pi}{2}$.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) $\frac{2}{\pi^2}$.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:

Projekt I erfordert jetzt eine Investition von CHF 180′000 und bringt in 2 Jahren CHF 220′000.

Projekt II erfordert jetzt eine Investition von CHF 200′000 und bringt in 2 Jahren CHF 240′000.

Für welche jährlichen Zinssätze $i > 0$ ist das Projekt I dem Projekt II vorzuziehen?
Projekt I ist Projekt II vorzuziehen

(a) nur für $i < 10\%$.

(b) nur für $i > 10\,\%$.

(c) für alle $i > 0$.

(d) für kein $i > 0$.

Frage 5 (3 Punkte)
Die Gleichung

$$2\,\log_a(x) = 3\,\log_a(4)$$

hat (für $x \in \mathbb{R}_{++}$) folgende Lösungsmenge:

(a) $\{6\}$.

(b) $\{8\}$.

(c) $\{\sqrt[3]{16}\}$.

(d) Die Lösungsmenge ist abhängig von der Basis $a \in \mathbb{R}_{++} \setminus \{1\}$.

Frage 6 (4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{\sin(x)-\cos(x)}{a\,(x-\frac{\pi}{4})} & \text{für } x \neq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{für } x = \frac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist f überall stetig?

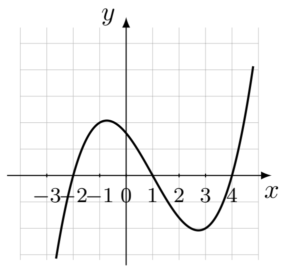
(a) $a = -\frac{4}{\pi}$.

(b) $a = \sqrt{2}$.

(c) $a = 1$.

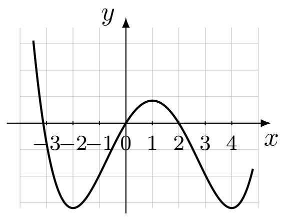
(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ überall stetig.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist der Graph der Ableitung f' der Funktion f.

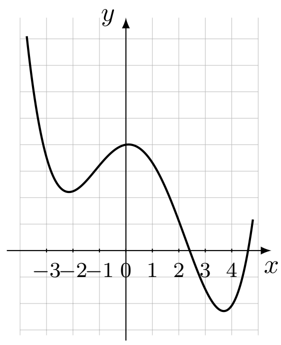


Welcher der folgenden Graphen zeigt die Abbildung f?

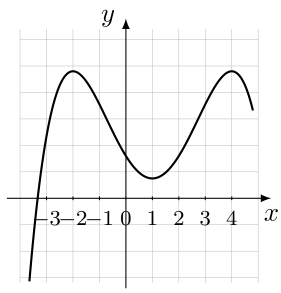
(a)



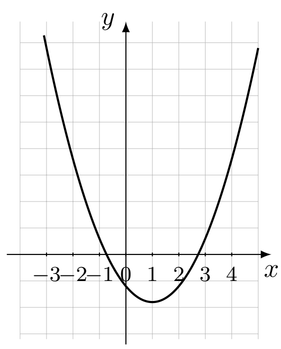
(b)



(c)



(d)



Frage 8 (3 Punkte)
Für eine Funktion f ist die relative Änderungsrate $\rho_f(t)$:

$$\rho_f(t) = t\,\ln(t) + e^{4t}.$$

Dann gilt für die Elastizität $\varepsilon_f(t)$ von f:

(a) $\varepsilon_f(t) = \ln(t) + \frac{e^{4t}}{t}$.

(b) $\varepsilon_f(t) = t^2\,\ln(t) + t\,e^{4t}$.

(c) $\varepsilon_f(t) = \ln(t) + 1 + 4\,e^{4t}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\, e^{-x}.$$

(a) f ist elastisch für $x > 0$.

(b) f ist elastisch für $x < 2$ und unelastisch für $x > 2$.

(c) f ist unelastisch für $x > 1$ und elastisch für $x < 1$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^e + x\, e^x.$$

(a) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 1$.

(b) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = \sqrt{e}$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = e$.

(d) f hat keinen Wendepunkt.

Frage 3 (4 Punkte)
Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist

$$P_4(x) = \frac{13}{24}\, x^4 + \frac{7}{6}\, x^3 + a\, x^2 + x + 1$$

das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

im Punkt $x_0 = 0$?
Es ist

(a) $a = 1$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = 2$.

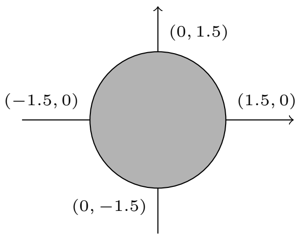
(d) $a = 3$.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

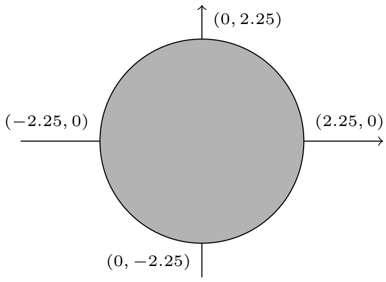
$$f(x,y) = \sqrt{9 - 4x^2 - 4y^2}.$$

Welche Graphik zeigt den Definitionsbereich von f?

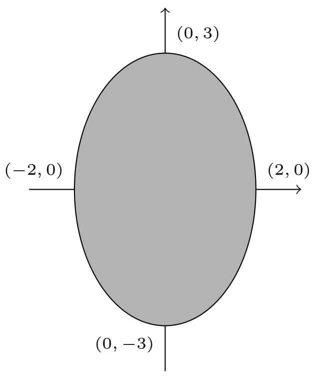
(a)



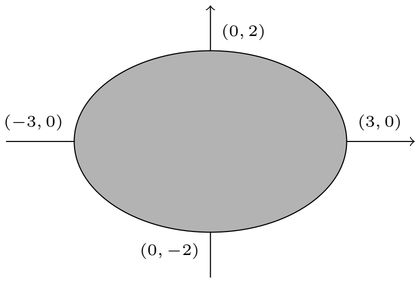
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (2 Punkte)
Die Funktion $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_\varphi \subset \mathbb{R}^2$, sei stetig und $\varphi(x_0, y_0) = 0$.Ausserdem sei φ stetig differenzierbar.Dafür, dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine stetig differenzierbareFunktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in I$ gibt, ist hinreichend, dass

(a) $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$.

(b) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ und $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(c) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ oder $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 8 \left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5xy} \right)^{-0.5} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad -0.5.

(b) f ist homogen vom Grad 0.5.

(c) f ist linear homogen.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{e^x}{e^{x-1}} \left(1 + \frac{4y}{x}\right) \left(\sqrt{7\,x^2 + xy}\right) \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)
Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x,y) = x^{a-1}y^{a+6} + \sqrt{x^2+y^2} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

homogen?

(a) f ist homogen für $a = 0$.

(b) f ist homogen für $a = 1$.

(c) f ist homogen für $a = -2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2017

Enrico De Giorgi*

30. Januar 2018

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Logarithmusterme.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng konkav (Beweis)?

(a3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

(b) (6 Punkte)
Um seine Geschäftsidee zu finanzieren, nimmt ein Start-up einen Kredit in Höhe von $1'000'000$ CHF auf. Die Bank stimmt einem niedrigeren jährlichen Zinssatz von 0,5% während der ersten 5 Jahre zu, in denen das Start-up am Ende jeden Jahres $10'000$ CHF zurückzahlen muss. Danach steigt der Zinssatz auf 2% p.a. und es werden konstante Zahlungen in Höhe von C^I CHF vereinbart, die wieder am Ende jeden Jahres fällig sind. Der Plan sieht vor, dass der Kredit in 15 Jahren zurückgezahlt ist.
Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass der Plan des Start-ups umsetzbar ist?

(c) (4 Punkte)
Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(d) (6 Punkte)
Eine professionelle Langstreckenläuferin läuft in der ersten Stunde 20 Kilometer. Danach nimmt ihre Leistung in jeder weiteren Stunde des Laufens um einen Faktor $a \in (0,1]$ ab, das heisst beispielsweise in der zweiten Stunde läuft sie noch $20 * (1-a)$ Kilometer. Für welche Werte $a \in (0,1]$ und $b \geq 20$ wird die Läuferin einen Wettkampf mit einer Länge von b Kilometern bewältigen können, gegeben dass sie beliebig lange laufen kann?
Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$ Verwenden Sie das Taylorpolynom P_2 zweiter Ordnung der Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R},\, x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x).$$

R_2 bezeichne das Restglied zweiter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \frac{1}{21}.$$

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\ln(9 - 9\,x^2 - y^2)}{(x-y)\,\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Nutzenfunktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha}\, c_2^{1-\alpha}$$

für $\alpha \in (0,1)$, wobei c_1, c_2 die konsumierten Mengen der Güter 1 und 2 sind, und die Budgetrestriktion

$$C \,:\, p_1\, c_1 + p_2\, c_2 = 10$$

für Preise $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$.

Für welche Werte der Parameter α, p_1, p_2 berührt die Niveaulinie (Indifferenzkurve) $u(c_1, c_2) = \sqrt{2}$ die Budgetlinie C im Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1, 2)$?

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Ausserdem

ist die Funktion f homogen vom Grad r und die Funktion g homogen vom Grad $r-2$.
Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

$$h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x\,y - \frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}}$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Seien A und B zwei Aussagen. Die zusammengesetzte Aussage $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu

(a) A.

(b) B.

(c) $A \vee B$.

(d) $A \wedge B$.

Frage 2 (3 Punkte)
Sei f eine stetige Funktion. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 3 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f und einen Punkt $x_0 \in D_f$ ist wahr?

(a) Wenn f in x_0 stetig ist, dann ist f in x_0 differenzierbar.

(b) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

(c) f ist in x_0 stetig genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

(d) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 unstetig.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:

Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100'000 und zahlt CHF 50'000 in 6 Monaten sowie CHF 60'000 in 1 Jahr aus.

Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100'000 und zahlt in 1 Jahr CHF 110'000 aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Frage 6 (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{a\,(x-\pi)} & \text{for } x\neq\pi\\ a & \text{for } x=\pi\end{cases}.$$

Für welches $a\in\mathbb{R}$ ist f überall stetig?

(a) $a=1$.

(b) $a=-1$.

(c) $a\in\{-1,1\}$.

(d) f ist für kein $a\in\mathbb{R}$ überall stetig.

Frage 7 (3 Punkte)
Sei $f(x)=1+3\,x-4\,x^4$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0=1$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0=1$ ist wahr?

(a) $R_4(x)>0$ für alle x.

(b) $R_4(x)<0$ für alle x.

(c) $R_4(x)=0$ für alle x.

(d) Jeder der Fälle $R_4(x)>0$, $R_4(x)<0$ und $R_4(x)=0$ ist für entsprechende $x\in\mathbb{R}$ möglich.

Frage 8 (3 Punkte)
Für eine Funktion f ist die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}.$$

Sei g die Funktion definiert durch $g(x) = f(a\,x)$ für $a > 0$.
Dann gilt:

(a) $\varepsilon_g(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}$.

(b) $\varepsilon_g(x) = a\,x\,\ln(x) + a\,e^{3\,x}$.

(c) $\varepsilon_g(x) = \frac{x}{a}\,\ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{a}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}_{++}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) = (x^2 + 2\,x\,y + y^2)\,e^{x+y}.$$

Ihre partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ genügen der Ungleichung

(a) $\varepsilon_{f,x} > \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(b) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(c) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x > y$.

(d) $\varepsilon_{f,x} < \varepsilon_{f,y}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ mit $x < y$.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\,e^{x^2} + 1.$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Frage 3 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

P_3 und P_4 seien die Taylorpolynome dritter und vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Dann gilt:

(a) $P_3(x) > P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_3(x) < P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_3(x) = P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(d) Jeder der Fälle $P_3(x) > P_4(x)$, $P_3(x) < P_4(x)$ oder $P_3(x) = P_4(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ möglich.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1 - 4\,x^2 - y^2}$$

und

$$g(x,y) = \ln\big(2\,x - x^2 - y^2 + 8\big)$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.
Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Frage 5 (3 Punkte)
Sei $f(x) = \sin(x)$ und P_3 das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Welche der folgenden Aussagen bezüglich des Restgliedes dritter Ordnung R_3 von f in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{128}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{64}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{32}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{16}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Frage 6 (2 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,x} + \sqrt{y} \quad (x > 0,\, y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^2} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(a\,x, a\,y),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\,a$.

(d) g ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^{a+1}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + (x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \quad (x > 0,\, y > 0),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, mit partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.
Für welchen Wert von a gilt

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3\,?$$

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 3$.

Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[*]

12. Juli 2018

[*]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fürtsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhundenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

(a2) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton wachsend (Beweis)?

(a3) (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

(b) (6 Punkte)
Sie benötigen einen Kredit in Höhe von $1'000'000$ CHF, um den Bau eines Hauses zu finanzieren. Dafür schliessen Sie ein Hypothekendarlehen ab, welches einen fixen jährlichen Zinssatz in Höhe von 1% für die ersten 10 Jahre garantiert. Um Ihre Schulden zu tilgen, vereinbaren Sie Zahlungen in Höhe von $25'000$ CHF, die in den 10 Jahren am Ende jeden Jahres fällig werden. Nach 10 Jahren muss das Darlehen neu verhandelt werden. In der Zwischenzeit sind die Zinsen gestiegen und Sie können sich schliesslich auf einen jährlichen Zinssatz von 2% einigen. Sie zahlen C^I CHF am Ende jeden Jahres für die *darauffolgenden* 15 Jahre, um Ihre Schulden auf $200'000$ CHF zu reduzieren.
Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass Ihr Plan umsetzbar ist?

(c) (4 Punkte)
Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2 - x}.$$

(d) (6 Punkte)
Derzeit entstehen 2.5 Exabytes (10^{18} Bytes) an neuen Daten pro Tag. Angenommen, die tägliche Datenproduktion steigt jeden Tag um 5%. Wie viele Jahre dauert es ausgehend von heute,

bis eine Gesamtmenge von 45 Zetabytes (1 Zetabyte entspricht 1000 Exabytes) an Daten produziert wurde, angenommen, dass ein Jahr immer 365 Tage hat?

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \sin\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$ Verwenden Sie das Taylorpolynom P_3 dritter Ordnung der Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\, x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \sin(x).$$

R_3 bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \leq \frac{1}{6120}.$$

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{16 - 16\,x^2 - y^2}}{(x+y)^2\,\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K,A) = \left(2\,K^{\alpha} + 4\,A^{\beta}\right)^2, \quad K > 0,\, A > 0, \quad \alpha > 0,\, \beta > 0.$$

Für welche Werte der Parameter α und β ist die Substitutionsrate im Punkt $(K_0, A_0) = (2, 1)$ auf der Niveaulinie $P(K,A) = 144$ gleich $\frac{dA}{dK} = -1$.

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Ausserdem ist die Funktion f homogen vom Grad $r + 2$ und die Funktion g homogen vom Grad $3 - r$, für $r \in (-2, 3)$. Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = f(x,y)\,g(x,y),$$

$$h_y(x,y) = -\frac{x^6}{y^2} + 3\,x^2\,y^2,$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{6\,x^6 + 2\,x^2\,y^4}{x^6 + x^2\,y^4}.$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie?

(a) $(A \vee B) \Rightarrow B$.

(b) $(A \vee B) \Rightarrow A$.

(c) $(A \wedge B) \Leftrightarrow A$.

(d) $(A \wedge B) \Rightarrow A$.

Frage 2 (3 Punkte)
Sei f eine differenzierbare Funktion. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 3 (2 Punkte)
Eine Funktion $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend auf $[0, 10]$ genau dann, wenn

(a) $f(10) \geq f(0)$.

(b) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0, 10]$ mit $x_1 < x_2$.

(c) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0, 10]$ mit $x_1 > x_2$.

(d) die erste Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in (0, 10)$ existiert und positiv ist.

Frage 4 (3 Punkte)
Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:
Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von 100'000 CHF und zahlt 40'000 CHF in 6 Monaten sowie 80'000 CHF in 1 Jahr aus.
Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von 110'000 CHF und zahlt in 1 Jahr 130'000 CHF aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Frage 5 (3 Punkte)
Ein Finanzberater schlägt seinem Kunden zwei Optionen für die Rückzahlung eines Hypothekenkredites vor: Option 1 sieht die Rückzahlung des Kredites mit konstanten Zahlungen C^D vor, welche über n^D Jahre am Jahresanfang erfolgen. Bei Option 2 dagegen wird derselbe Kredit mit konstanten Zahlungen C^I am Jahresende über n^I Jahre zurückgezahlt.
Unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz strikt positiv ist, folgt:

(a) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D + 1$.

(b) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D - 1$.

(c) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{(\sin(x))^2}{a\,x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f überall stetig?

(a) Für $a \in \{-1, 1\}$.

(b) Für $a = 1$.

(c) Für $a = -1$.

(d) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Frage 7 (3 Punkte)
Sei $f(x) = 1 + 3\,x - 4\,x^4 + 2\,x^5$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $R_4(x) > 0$ für alle $x > 0$.

(b) $R_4(x) < 0$ für alle $x > 0$.

(c) $R_4(x) > 0$ für alle $x \leq 0$.

(d) $R_4(x) < 0$ für alle $x \leq 0$.

Frage 8 (3 Punkte)
Die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ der Funktion f sei gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}.$$

Für die Wachstumsrate $\rho_f(x)$ von f folgt:

(a) $\rho_f(x) = x^2\,\ln(x) + x\,e^{3\,x}$.

(b) $\rho_f(x) = \ln(x) + e^{3\,x^2}$.

(c) $\rho_f(x) = \ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}$.

(d) $\rho_f(x) = x\,\ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}$.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2 e^{-x}.$$

(a) f ist elastisch für $x > 0$.

(b) f ist elastisch für $x < 2$ und unelastisch für $x > 2$.

(c) f ist unelastisch für $x > 1$ und elastisch für $x < 1$.

(d) f ist unelastisch für $x > 0$.

Frage 2 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 e^{x^2} + 1}.$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Frage 3 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{-1}{1+x}.$$

P_4 und P_5 seien die Taylorpolynome vierter und fünfter Ordnung von f in $x_0 = 0$.
Dann gilt:

(a) $P_4(x) > P_5(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_4(x) < P_5(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_4(x) = P_5(x)$ für alle $x \in D_f$.

(d) Jeder der Fälle $P_4(x) > P_5(x)$, $P_4(x) < P_5(x)$ oder $P_4(x) = P_5(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f$ möglich.

Frage 4 (4 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 25}$$

und

$$g(x,y) = \ln\left(8\,x - 4\,x^2 - y^2\right),$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.
Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Frage 5 (3 Punkte)
Sei $f(x) = 1 - x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + 5\,x^4 + 3\,x^5$ und $g(x) = 1 + 4\,x^2 - 6\,x^3 + 4\,x^4 - 2\,x^5$ und seien $P_{f,4}$ und $P_{g,4}$ ihre jeweiligen Taylorpolynome vierter Ordnung in $x_0 = 0$.
Welche der folgenden Aussagen bezüglich der Restglieder vierter Ordnung $R_{f,4}$ und $R_{g,4}$ von f beziehungsweise g in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $R_{f,4}(x) < R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(b) $R_{f,4}(x) > R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(c) $R_{f,4}(x) = R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 6 (2 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{3\,x} + \sqrt[6]{y^2} \quad (x > 0,\ y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 1 + \sqrt{x^4 + 2\,y^4} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(a\,x, a^2\,y),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\,a$.

(d) g ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)
Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x,y) = x^{a-1}\,y^{a+6} + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

homogen?

(a) f ist homogen für $a = 0$.

(b) f ist homogen für $a = 1$.

(c) f ist homogen für $a = -2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Herbstsemester 2018

Dr. Reto Schuppli

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2018

Dr. Reto Schuppli*

29. Januar 2019

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden.Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort.Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung.Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a1) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ p \mapsto q_s(p) = 4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Beweisen Sie: Es gibt genau ein Marktgleichgewicht (p^*, q^*) mit Gleichgewichtspreis $p^* \in [2,3]$ und Gleichgewichtsmenge $q^* \in \mathbb{R}_+$.

(a2) (6 Punkte)

Für Preise $p \in [0,3]$ kann der Markt für ein bestimmtes Gut beschrieben werden durch die Angebotsfunktion

$$q_s : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ p \mapsto q_s(p) = 4e^{p-1}$$

und die Nachfragefunktion

$$q_d : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ p \mapsto q_d(p) = 70 - 15p - 1.5p^2.$$

Der Markt hat genau ein Marktgleichgewicht (p^*, q^*) mit $p^* \in [2,3]$.

Berechnen Sie p^* näherungsweise mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2. Ordnung in $p_0 = 1$.

(b) (10 Punkte)
Nina entschliesst sich am Anfang des Jahres, in dem sie ihr Studium beginnt, einen Studienkredit von CHF 100′000 aufzunehmen.Sie tut dies trotz des hohen Zinssatzes von $i = 8\%$, weil vertragsgemäss die Zahlung der Zinsen und die Rückzahlung erst im Jahr nach Abschluss ihres Studiums beginnt.Dann sollen der Kredit und die Zinsen in 10 gleichmässigen Raten C, jeweils am Jahresende, bezahlt werden.
Nina schliesst ihr Studium nach $5\frac{1}{2}$ Jahren ab. (*Hinweis:* Sie hat damit noch 18 Monate, bis die erste Rate fällig wird.)

(b1) Zeichnen Sie die beschriebenen Zahlungsströme und Ereignisse an einem Zeitstrahl an.

(b2) Wie hoch sind Nina's Schulden zu Beginn des Jahres in dem die Rückzahlung beginnt?

(b3) Bestimmen Sie die Höhe der vereinbarten Raten C.

Nachdem sie schon 5 Raten abbezahlt hat, macht Nina eine Erbschaft von CHF 100′000.Sie beschliesst, statt der 6. Rate den ganzen Restbetrag zurückzuzahlen.

(b4) Ergänzen Sie die Info am Zeitstrahl.

(b5) Reichen die CHF 100′000, um die Schulden vollkommen zurückzuzahlen?
Wenn ja: Wie viel bleibt Nina von ihrer Erbschaft?
Wenn nein: Welchen zusätzlichen Betrag muss Nina zur Tilgung ihrer Schulden aufbringen?

(c) (5 Punkte)
Im Jahre 1955 entwickelte Morris Swadesh (1909-1967) eine (umstrittene) Methode, die sog. *Glottochronologie*, um den Zeitpunkt zu bestimmen, an dem zwei verwandte Sprachen (z. B. Latein und Sanskrit) sich verzweigten.Swadesh ging von der Hypothese aus, dass die sprachlichen Atome - d.h. die Wörter - zerfallen wie radioaktive Atome.Laut Voraussetzung soll der grundlegende Urwortschatz der Sprachen mit einer Halbwertszeit von etwa 2000 Jahren aussterben.Kennt man die Menge des noch gemeinsamen Urwortschatzes zweier Sprachen und geht davon aus, dass sich diese Menge alle 2000 Jahre halbiert, kann man berechnen, wann sich die Sprachen verzweigt haben.A. Raun und E. Kangsmaa-Minn führten unabhänging voneinander, d.h. jeweils mit einer eigenen Methode, den Vergleich des Finnischen und Ungarischen durch.Während Raun herausfand, dass der Anteil der identischen Elemente in beiden Sprachen 21 % beträgt, berechnete Kangsmaa-Minn einen Anteil von 27 %.

Innerhalb welches Zeitraums haben sich die beiden Sprachen nach der Theorie der Glottochronolgie und aufgrund dieser Zahlen voneinander getrennt?
Bemerkung:
Berechnen Sie also, vor wie vielen Jahren sich das Finnische und das Ungarische gemäss a) der Berechnung von A. Raun und b) der Berechnung von E. Kangsmaa-Minn getrennt haben. Geben Sie das finale Ergebnis als Zeitintervall an.

(d) (9 Punkte)
Ein Student hat ein gegenwärtiges Einkommen von CHF 3′000 und erwartet in einem Jahr

ein zukünftiges Einkommen von CHF 7'000.Er plant einen gegenwärtigen Konsum c_1 und im folgenden Jahr einen Konsum c_2 mit der Absicht die Nutzenfunktion $u = \ln(c_1) + \frac{1}{1.2}\ln(c_2)$ zu maximieren.
Wenn er jetzt Geld leiht, weil $c_1 > 3'000$ CHF ist, dann wird der zukünftige Konsum c_2 nach Rückzahlung des Kreditbetrages und der Zinsen berechnet. Spart er entsprechend Geld, i. e. $c_1 < 3'000$ CHF, dann kann er c_2 um den gesparten Betrag und dessen Zinsen erhöhen. Der Zinssatz für Leihe und Sparen beträgt $i = 8\,\%$.

(d1) Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen c_1 und c_2.

(d2) Bestimmen Sie den Nutzen des Studenten in Abhängigkeit von c_1.

(d3) Für welche Wahl von c_1 ist der Nutzen des Studenten maximal?
Wie viel muss er sich allenfalls leihen?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Die Aussage „Wenn Albert kommt, dann kommt auch Beatrice.“ sei richtig.

Dann ist die folgende Aussage sicher auch richtig:

(a) „Wenn Beatrice kommt, dann kommt auch Albert.“

(b) „Wenn Albert nicht kommt, dann kommt auch Beatrice nicht.“

(c) „Wenn Beatrice nicht kommt, dann kommt auch Albert nicht.“

(d) Keine der Aussagen (a) - (c) ist sicher richtig.

Frage 2 (2 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt.Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $b_n = 2\,a_n - 1$.

Dann ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton fallend.

(d) unbeschränkt.

Frage 3 (3 Punkte)
Ein Kapital von $P = 1'000'000$ CHF wird angelegt bei einem Jahreszinssatz von $i = 2\%$ mit monatlicher Verzinsung.

Der effektive Zinssatz i_{eff} beträgt näherungsweise

(a) 1.982 %.

(b) 2 %.

(c) 2.018 %.

(d) 2.020 %.

Frage 4 (3 Punkte)
Die Funktion f ist gegeben durch

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = -\frac{3}{x^5} + 2.$$

Dann ist die inverse Funktion f^{-1} definiert auf

(a) $\mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(d) Die Funktion f ist nicht injektiv.Deshalb ist es unmöglich, eine Umkehrfunktion f^{-1} anzugeben.

Frage 5 (4 Punkte)
Seien m, n, $k > 0$, $m \neq 1$, $n \neq 1$, $k \neq 1$.
Welche der folgenden Identitäten ist allgemein gültig?

(a) $n^{\log_m(k)} = k^{log_n(m)}$.

(b) $n^{\log_m(k)} = k^{log_m(n)}$.

(c) $n^{\log_m(k)} = m^{log_n(k)}$.

(d) Keine der Identitäten (a) - (c) gilt allgemein.

Frage 6 (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(\sin(x))^2}, \ -2\pi < x < 2\pi.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f ist stetig für alle $x \in (-2\pi, 2\pi) \setminus \{0\}$.

(b) f hat mehr als eine Unstetigkeitsstelle in $(-2\pi, 2\pi)$.

(c) f ist überall stetig.

(d) f hat keine Polstelle.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \frac{x}{3} - \frac{e}{x^3}.$$

Der Wertebereich von f' ist

(a) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) $(-\infty, \infty)$.

(c) $(0, \infty)$.

(d) $(\frac{1}{3}, \infty)$.

Frage 8 (3 Punkte)
Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f mit Ableitung f'.
Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) f ist stetig.

(b) Wenn f gerade ist, dann ist auch f' gerade.

(c) Wenn f gerade ist, dann ist f' ungerade.

(d) Wenn $f' > 0$ ist, dann ist f streng monoton wachsend.

Frage 9 (3 Punkte)
Für eine differenzierbare Funktion $h : D_h \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = h(x)$ sei $dh(x)$ ihr Differential an der Stelle x.Wir betrachten nun zwei differenzierbare Funktionen $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten a, $b \in \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Gleichungen ist im Allgemeinen *falsch*?

(a) $d(af + bg)(x) = a\,df(x) + b\,dg(x)$.

(b) $d(fg)(x) = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x)$.

(c) $d(f \circ g)(x) = f'(g(x))\,dg(x)$.

(d) $d\left(\frac{f}{g}\right)(x) = g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)$.

Frage 10 (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = |x^2 - 2x - 24|.$$

Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 1$.

(b) f hat ein globales Maximum in $x_0 = 1$.

(c) f hat ein eindeutiges globales Maximum.

(d) f hat ein eindeutiges lokales Minimum.

Frage 11 (3 Punkte)
Sei
$$P(x) = 1 + 2x + 5x^2 - x^3$$
das Taylor-Polynom 3. Ordnung an der Stelle $x_0 = 0$ einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $f(0) = 2$.

(b) $f'(0) = 1$.

(c) $f''(0) = 10$.

(d) $f^{(3)}(0) = -5$.

Frage 12 (2 Punkte)
Eine homogene Funktion f hat den Grad 1.8.Ausserdem kennt man die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,y}(x, y) = x + y - 1.2$.
Es folgt dann

(a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = x - y - 1.2$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -x - y + 1.2$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -x - y + 3$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x, y)$ ist durch die Angaben nicht eindeutig bestimmt.

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

ist

(a) 0.

(b) 0.5.

(c) 1.

(d) 2.

Frage 2 (4 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{27}{x^3 - 27} \right)$$

ist

(a) 0.

(b) $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{2}{5}$.

(d) ∞.

Frage 3 (4 Punkte)
Am 26.12.2017 entdeckte der Hobby-Mathematiker Jonathan Price aus Germantown, Tennessee, die bislang grösste bekannte Primzahl p, nämlich

$$p = 2^{77'232'917} - 1.$$

Wie viele Stellen hat p im Dezimalsystem?
(*Tipp:* Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen der Anzahl Stellen einer natürlichen Zahl n im Dezimalsystem und ihrem Zehnerlogarithmus $\log_{10}(n)$.)

(a) p hat im Dezimalsystem $23'249'424$ Stellen.

(b) p hat im Dezimalsystem $23'249'425$ Stellen.

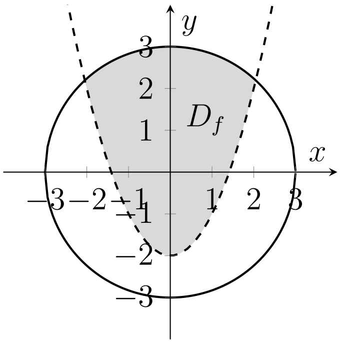
(c) p hat im Dezimalsystem $53'533'778$ Stellen.

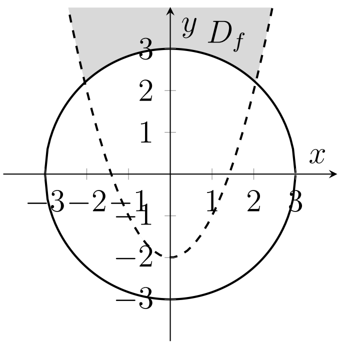
(d) p hat im Dezimalsystem $53'533'779$ Stellen.

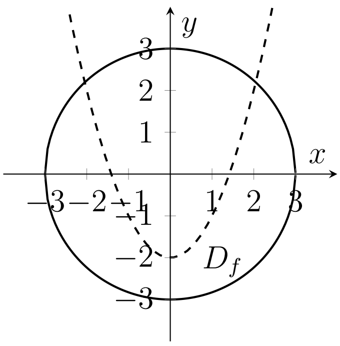
Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

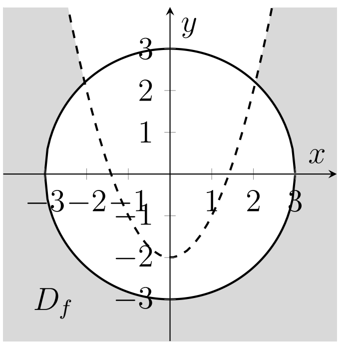
$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto z = f(x,y) = \sqrt[4]{4x^2+4y^2-36} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y-2}}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt grau schraffiert den Definitionsbereich $D_f \subset \mathbb{R}^2$ von f?

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

Frage 5 (4 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto z = f(x,y) = \ln(\sqrt{e} - x^2 - y^2)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + y^2 < \sqrt{e}\}.$$

Dann ist das Bild R_f von f gegeben durch

(a) $R_f = \mathbb{R}$.

(b) $R_f = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) $R_f = (\frac{1}{2}, \infty)$.

(d) $R_f = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Frage 6 (4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R},\; (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln\left(\left|\frac{y+1}{x-2}\right|\right).$$

Die Steigung m der Tangenten an die Niveaulinie $f(x, y) = \ln(2)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gegeben durch

(a) $m = -0.5$.

(b) $m = 0.5$.

(c) $m = -2$.

(d) Es ist nicht möglich, die Steigung m als Funktion von x anzugeben.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(x^2\sqrt{y} + \sqrt[4]{x^3 y^7}\right) - \frac{5}{2}\ln(x),$$

wobei $x > 0$, $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{5}{2}$.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 7x\sqrt{y^a} + 3y^2\sqrt[4]{x^a\, y^b} - x^2 y^{0.2},$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und a, $b \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a und b ist$f$ homogen?

(a) $a = 2.4$, $b = -2$.

(b) $a = 2.4$, $b = -1.6$.

(c) $a = 2$, $b = -1.2$.

(d) f ist nicht homogen für alle a, $b \in \mathbb{R}$.

Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2018

Dr. Reto Schuppli*

11. Juli 2019

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: reto.schuppli@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a1) (6 Punkte)
Die Anzahl Bakterien in einer Kultur zum Zeitpunkt t ist gegeben durch die Wachstumsfunktion

$$b_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ t \mapsto b_1(t) = 10^6 \cdot e^{0.5\,t}.$$

Zur Zeit $t = 1$ werden Bakterien einer anderen Art zugegeben, die aber wegen derSäure produzierenden Bakterien der ersten Art mit der Zeit absterben. Die Anzahl Bakterien der 2. Artist gegeben durch die Funktion

$$b_2 : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ t \mapsto b_2(t) = 10^6 \cdot \frac{2}{t}.$$

Beweisen Sie: Es gibt genau einen Zeitpunkt $t^* \in [1, 2]$, zu dem es gleich viele Bakterien beider Arten in der Kultur hat.

(a2) (6 Punkte)
Die Anzahl Bakterien in einer Kultur zum Zeitpunkt t ist gegeben durch die Wachstumsfunktion

$$b_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ t \mapsto b_1(t) = 10^6 \cdot e^{0.5\,t}.$$

Zur Zeit $t = 1$ werden Bakterien einer anderen Art zugegeben, die aber wegen der Säure produzierenden Bakterien der ersten Art mit der Zeit absterben. Die Anzahl Bakterien der 2. Art ist gegeben durch die Funktion

$$b_2 : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \mapsto b_2(t) = 10^6 \cdot \frac{2}{t}.$$

Es gibt genau einen Zeitpunkt $t^* \in [1, 2]$, zu dem es gleich viele Bakterien beider Arten in der Kultur hat.

Berechnen Sie t^* näherungsweise mit Hilfe eines Taylorpolynoms 2. Ordnung in $t_0 = 1$.(Rechnen Sie beim Taylorpolynom mit auf drei Stellen nach dem Komma gerundeten Werten.)

(b) (10 Punkte)
Karl möchte zu Beginn des Jahres 2010 ein neues Auto für CHF $50'000$ kaufen, obwohl er noch in der Lehre ist.Er bekommt einen Kredit für diese Summe zu einem Jahreszinssatz von $i = 8\,\%$.Mit den Kreditgebern vereinbart er, den Kredit in 8 gleich grossen Raten C jeweils auf Jahresende abzubezahlen.

(b1) Bestimmen Sie die Höhe der vereinbarten Raten C.

Nachdem er schon 4 Raten bezahlt hat, kann er im 5. Jahr die Raten nicht mehr aufbringen.

(b2) Wie gross ist seine Restschuld S_4 am Ende des vierten Jahres, also Ende 2013?

Er vereinbart mit den Kreditgebern, dass er im 5. Jahr keine Ammortisation leistet und seine Restschuld mit Zinsen danach in Raten von $C^* = 5'000$ CHF jeweils auf Jahresende abbezahlt.

(b3) Zeichnen Sie die beschriebenen Zahlungsströme und Ergebnisse an einem Zeitstrahl an.

(b4) Wann wird Karl seine letzte Rate leisten?

(c) (5 Punkte)
In lebenden Organismen ist der Anteil von radioaktiven $^{14}_{6}C$-Atomen mit $3 \cdot 10^{-8}\,\%$ konstant.Stirbt ein organischer Stoff (Knochen, Bäume, usw.), so nimmt der$^{14}_{6}C$-Anteil unter Emission von β-Strahlung konstant in$T_{0.5} = 5730$ Jahren jeweils um die Hälfte ab.

(c1) Wie gross ist der prozentuale $^{14}_{6}C$-Anteil $C(t)$ nach t Jahren?

1988 untersuchten unabhängig voneinander drei Labors das sogenannte “Grabtuch von Turin”, das für das Leichentuch Christi gehalten wird.Die Forscher haben nach Zeitungsberichten eine $^{14}_{6}C$-Konzentration von mehr als$2.747 \cdot 10^{-8}\,\%$ im Leichentuch festgestellt.

(c2) Wie alt ist das Tuch demnach höchstens?

(d) (9 Punkte)
Ein Sportverein plant, ein Flugzeug zu chartern, und berechnet seinen Mitgliedern $10\,\%$ Provision auf den Preis,den er für den Kauf eines Sitzplatzes bezahlt.Der Preis wird durch die Chartergesellschaft festgesetzt.Der Standardpreis für jeden Passagier ist 800 CHF.Für jeden über 60 Passagiere hinausgehenden Passagier erhalten alle Reisenden (einschliesslich der ersten 60) eine Rabatt von 10 CHF.Das Flugzeug kann höchstens 80 Passagiere befördern.

Für welche Anzahl Passagiere ist die gesamte Provison, die der Sportverein einnimmt, maximal?

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (34 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist **keine** Tautologie?

(a) $A \vee B \vee \neg B$.

(b) $A \vee B \implies A$.

(c) $A \wedge B \implies B$.

(d) $[B \wedge (A \implies B)] \implies B$.

Frage 2 (2 Punkte)
Die Reihe $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ist, konvergiert gegen -1.
Es folgt, dass

(a) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

(b) $\lim_{k\to\infty} a_k = -1$.

(c) Es ist nicht möglich, dass $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine negative Zahl konvergiert.

(d) Man kann nichts über den Grenzwert von $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ aussagen.

Frage 3 (3 Punkte)
Ein Kapital werde 2 Jahre zu 4 % p.a., 10 Jahre zu 5 % p.a. und 4 Jahre zu 6 % p.a. verzinst.
Welcher über die Jahre gleichbleibende jährliche Zinssatz $\bar{i}$ führt zur selben Gesamtverzinsung nach 16 Jahren?

(a) $\bar{i} = 5\,\%$.

(b) $\bar{i} = 5.125\,\%$.

(c) $\bar{i} \approx 5.123\,\%$.

(d) $\bar{i} \approx 5.214\,\%$.

Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f\,:\,(-\infty,-1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = e^{\sqrt{x^2-1}-1}.$$

Dann gilt:

(a) $f^{-1}(-1) = -\sqrt{2}$.

(b) $f^{-1}(-1) = \sqrt{2}$.

(c) $f^{-1}(2) = e$.

(d) $f^{-1}(e) = -\sqrt{5}$.

Frage 5 (3 Punkte)
Seien a, x, $x_1, x_2 > 0$, wobei $a \neq 1$.
Welche der folgenden Identitäten ist allgemein gültig?

(a) $(\log_a(x))^{-1} = -\log_a(x)$.

(b) $x^{\log_a(x)} = a$.

(c) $\log_a(x_1 - x_2) = \frac{\log_a(x_1)}{\log_a(x_2)}$.

(d) $\log_a(x^a) = a\,\log_a(x)$.

Frage 6 (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|\,\ln(x)}} - \frac{x}{2+x}.$$

Für welche Werte von x ist die Funktion f stetig?

(a) $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$.

(b) $x \in (1, \infty)$.

(c) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(d) $x \in (1, \infty) \setminus \{2\}$.

Frage 7 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = f(x) = \frac{|x-1|-1}{2\,x}.$$

Der Wertebereich R_f von f ist

(a) $R_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(b) $R_f = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(c) $R_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$.

(d) $R_f = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Frage 8 (3 Punkte)
Gegeben ist eine ungerade, differenzierbare Funktion f mit Ableitung f'.
Dann gilt:

(a) f' ist ungerade.

(b) f' gerade.

(c) $-f'$ ist ungerade.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 9 (3 Punkte)
Wir betrachten zwei Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Behauptungen ist wahr?

(a) $\varepsilon_{f\cdot g}(x) = \varepsilon_f(x) \cdot \varepsilon_g(x)$.

(b) $\varepsilon_{f\cdot g}(x) = x\,\varepsilon_f(x) + x\,\varepsilon_g(x)$.

(c) $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$.

(d) $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \frac{\varepsilon_f(x)}{\varepsilon_g(x)}$.

Frage 10 (3 Punkte)
Die Funktion g hat ein lokales Minimum in $x_0 = 5$.Die Funktion f ist streng monoton fallend.h sei definiert durch $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.
Es folgt:

(a) h hat ein lokales Maximum in $x_0 = 5$.

(b) h hat ein lokales Minimum in $x_0 = 5$.

(c) h hat einen Sattelpunkt in $x_0 = 5$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Frage 11 (3 Punkte)
Das Taylor-Polynom 4. Ordnung einer Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ ist gegeben durch

$$P_4(x) = \frac{4}{3}\,x^4 + \frac{8}{3}\,x^3 + 4\,x^2 + 4\,x + 3.$$

Welches ist die zugehörige Funktion f?

(a) $f(x) = e^{3\,x} + 2.$

(b) $f(x) = 4\,e^{3\,x} - x.$

(c) $f(x) = 3\,e^{3\,x} + 2.$

(d) $f(x) = 2\,e^{2\,x} + 1.$

Frage 12 (2 Punkte)
Für die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x, y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x, y)$der Funktion

$$f(x, y) = x^3y^{-1} + x^5y^{-3} \quad (x,\, y\, > 0)$$

gilt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = 1.$

(b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = 2.$

(c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = 3.$

(d) $\varepsilon_{f,x}(x, y) + \varepsilon_{f,y}(x, y) = 4.$

Aufgabe 3 (30 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$$

ist

(a) 0.

(b) 0.5.

(c) $\frac{4}{5}$.

(d) $\frac{2}{5}$.

Frage 2 (4 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5^x+2^x}{\sqrt{9\cdot 25^x+8^x}}\right)$$

ist gleich

(a) 0.

(b) ∞.

(c) $\frac{5}{8}$.

(d) $\frac{1}{3}$.

Frage 3 (4 Punkte)
Löst man die Gleichung

$$\log_3(-x+25)+\log_3(3-3\,x)-5=0,$$

bekommt man

(a) $x=\frac{1}{2}$.

(b) $x=0$.

(c) $x=28$.

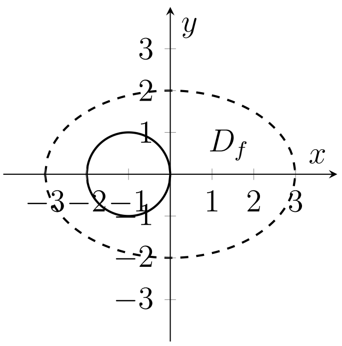
(d) $x=-2$.

Frage 4 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion in zwei reellen Variablen

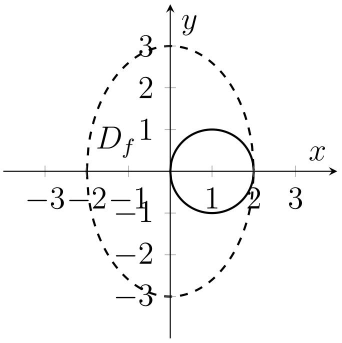
$$f:\,D_f\longrightarrow\mathbb{R},\,(x,y)\mapsto z=f(x,y)=\sqrt{x^2-2\,x+y^2}+\frac{1}{\sqrt[4]{36-4\,x^2-9\,y^2}}.$$

Welches der folgenden Bilder zeigt grau schraffiert den Definitionsbereich $D_f\subset\mathbb{R}^2$ von f?

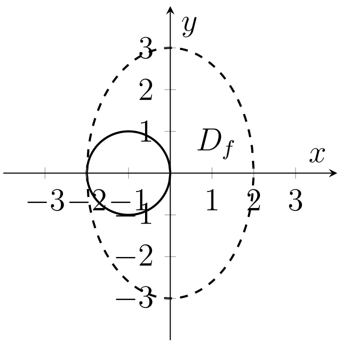
(a)



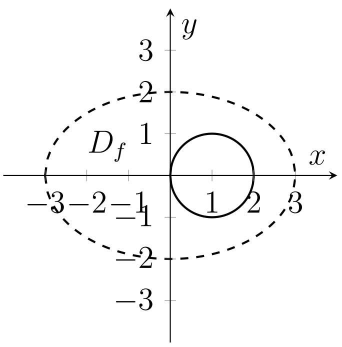
(b)



(c)



(d)



Frage 5 (4 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x^2 - y^2\right)$$

mit dem Definitionsbereich

$$D_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \,:\, x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Dann ist das Bild R_f von f gegeben durch

(a) $R_f = \mathbb{R}$.

(b) $R_f = (0, 1]$.

(c) $R_f = [-1, 1]$.

(d) $R_f = (-\infty, \frac{\pi}{2}]$.

Frage 6 (4 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto z = f(x, y) = a\, y^2 + (x^2 - 1)\sin(y) + 2\, \sin(x) \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

Die Tangentensteigung m an die Niveaulinie im Punkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist gegeben durch

(a) $m = -\frac{2}{a}$ (falls $a \neq 0$).

(b) $m = 2$.

(c) $m = -\frac{2}{2\,a-1}$ (falls $a \neq \frac{1}{2}$).

(d) $m = 0$.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{y}\,\ln\left(\frac{x^2 + y^2}{x\, y}\right) + \sqrt[6]{x}\,\sqrt[3]{y},$$

wobei $x > 0$, $y > 0$.

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad $\frac{1}{2}$.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (4 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^{1.5} y^b}{\sqrt[4]{x^a + y^a}} - \sqrt{x}\, y + (x\, y^2)^{2\,b},$$

wobei $x > 0$, $y > 0$ und a, $b \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte von a und b ist$f$ homogen?

(a) $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$.

(b) $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

(c) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$.

(d) f ist nicht homogen für alle a, $b \in \mathbb{R}$.

Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

28.01.2020

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im grossen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2\,e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,d$.

(a1) (2 Punkte) Verknüpfen Sie die beiden Funktionen P und D zur Funktion $Q = P \circ D$,

$$Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad p \mapsto q = Q(p),$$

welche die Beziehung zwischen dem neuen Preis q und dem alten Preis p beschreibt, nachdem der Investor $D(p)$ Stück Aktien gekauft hat. Geben Sie die Abbildungsvorschrift Q an.

(a2) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Fixpunkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ gibt, für welchen die Relation $p^\star = Q(p^\star)$ gilt. Gesucht ist also der Gleichgewichtspreis $p^\star$, welcher unverändert bleibt, wenn der Investor $D(p^\star)$ Stück Aktien kauft.

(a3) (6 Punkte)

Ein institutioneller Anleger beabsichtigt im grossen Stil Aktien einer Firma zu kaufen. Da der Handelspreis der Aktie jedoch von der Nachfrage abhängt, möchte der Investor zuerst verstehen, wie seine Nachfrage den Preis beeinflussen wird. Die Nachfrage des Investors in Abhängigkeit

vom Preis ist gegeben durch $d = D(p) = 4 - 2\,e^{p-1}$. Der Preis der Aktie in Abhängigkeit von der Nachfrage d des Investors ist gegeben durch $P(d) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,d$.
Für die Funktion $Q = P \circ D$ gibt es einen eindeutigen Punkt $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ mit $p^\star = Q(p^\star)$.
Verwenden Sie eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung im Punkt $p_0 = 1$, um eine Näherung für $p^\star$ zu finden.

(b) (6 Punkte)
Ein Computer hat eine Rechenleistung von a_n während Periode n, $n = 1, 2, \ldots$ Mithilfe maschinellen Lernens erhöht sich die Rechenleistung in jeder Periode um 2%, wobei sie zu Beginn $a_1 = 10$ beträgt. Mit dem Computer benötigt die vollständige Berechnung einer bestimmten, anspruchsvollen Aufgabe 15 Perioden (d.h. die komplette Rechenleistung der ersten 15 Perioden wird für die Berechnung benötigt).
Anstelle die Berechnung direkt zu starten, beschliesst das Rechenzentrum zunächst die Rechenleistung des Computers aufzustocken. Damit kann mit der Aufgabe zwar erst nach 3 Perioden begonnen werden, dafür aber hat der Computer nun eine neue anfängliche Rechenleistung von 15, welche sich pro Periode um 3% erhöht.
Wie viel Zeit (in Perioden) kann das Rechenzentrum durch das Aufstocken des Computers und den Aufschub der Berechnung einsparen?

(c) (10 Punkte)
Eine Familie leiht sich CHF 1′000′000, um ein Haus zu kaufen. Der Zins beträgt zu Beginn $i = 1\%$. Die Familie beschliesst, CHF C_1 am Ende jeden Jahres für 10 Jahre zurückzuzahlen, um so den Schuldenstand auf CHF 750′000 am Ende des 10. Jahres zu reduzieren. Am Ende des 5-ten Jahres ergibt sich die Möglichkeit einer Sondertilgung. Die Familie zahlt folglich am Ende des 5-ten Jahres einen Gesamtbetrag in Höhe von CHF 150′000 (einschliesslich C_1) zurück und verhandelt die Konditionen mit der Bank neu. Der Zinssatz fällt damit auf 0.5%. Die Familie beschliesst, die Schulden weiterhin mit CHF C_1 am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, bis diese auf CHF 500′000 reduziert sind. Aus steuerlichen Gründen zahlen Sie anschliessend CHF C_2 pro Jahr an die Bank, um ihre Schulden konstant bei CHF 500′000 zu halten.

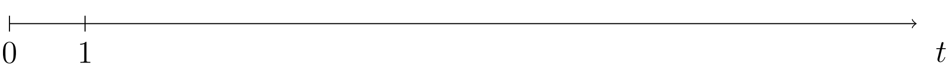
(c1) Fügen Sie alle Ereignisse und Mittelflüsse dem Zeitstrahl hinzu.

(c2) Berechnen Sie C_1.

(c3) Wie hoch ist der Schuldenstand, nachdem die Familie die Zahlung von CHF 150′000 am Ende des 5-ten Jahres veranlasst hat?

(c4) Wie lange dauert es nach Ende des 5-ten Jahres, bis der Schuldenstand CHF 500′000 erreicht hat?

(c5) Berechnen Sie C_2.



(d) (10 Punkte)
Ein Anbieter für Tablets schätzt die Nachfrage q_d nach seinem neusten Produkt auf

$$q_d(p) = \frac{15'840 - 30\,p}{p + 50},$$

wobei $p > 20$ der Verkaufspreis in US-Dollar pro Tablet ist. Die Kosten für Produktion und Vertrieb eines Tablets betragen 20 US-Dollar.

(d1) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion des Anbieters unter der Annahme, dass der Preis $p > 20$ ist.

(d2) Leiten Sie die Funktion her, welche die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit vom Verkaufspreis beschreibt.

(d3) Approximieren Sie mit Hilfe der Elastizitätsfunktion die relative Veränderung des Gewinns bei einer Erhöhung des anfänglichen Verkaufspreises von $p_0 = 100$ US-Dollar um 5 US-Dollar.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Welche der folgenden Aussagen ist wahr, genau dann wenn A und B in ihrem Wahrheitsgehalt verschieden sind (eine Aussage ist wahr, die andere ist falsch)?

(a) $A \vee B$

(b) $A \wedge B$

(c) $\neg(A \Rightarrow B)$

(d) $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$

Frage 2 (3 Punkte)
Sei $A =$ "Jeanette und Hans kommen an die Party" und $B =$ "Mark kommt an die Party".
Wir wissen, dass Hans die Party nicht besuchte. Über Jeanette und Mark ist jedoch nichts bekannt.
Welche der folgenden Aussagen ist demnach richtig?

(a) $A \wedge B$

(b) $A \vee B$

(c) $A \Rightarrow B$

(d) $A \Leftrightarrow B$

Frage 3 (3 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton und konvergent. Zudem gilt $a_n \neq 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n}$.
Dann folgt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(d) Keine der obigen Eigenschaften folgt.

Frage 4 (4 Punkte)
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in (0,1)$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere geo-metrische Folge mit $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q}{2}$.
Zudem gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Dann folgt:

(a) $b_1 = 2\,a_1$, falls $q = \frac{1}{3}$.

(b) $b_1 = 2\,a_1$, falls $q = \frac{1}{2}$.

(c) $b_1 = 2\,a_1$, falls $q = \frac{2}{3}$.

(d) Die Bedingung $b_1 = 2\,a_1$ ist nie erfüllt.

Frage 5 (3 Punkte)
Am Tag, an dem Mark einen Kredit über $P_1 = 1'000'000$ CHF mit Zinssatz $i_1 = 1\%$ aufnimmt, nimmt Lucie einen Kredit über $P_2 = 800'000$ CHF mit Zinssatz $i_2 = 1.2\%$ auf. Mark zahlt den Kredit in konstanten Raten von $10'500$ CHF jeweils am Ende des Jahres zurück, während Lucie $9'500$ CHF auch jeweils am Ende des Jahres zurückbezahlt.
Welche der folgenden Antworten ist richtig?

(a) Mark bezahlt den Kredit vor Lucie zurück.

(b) Lucie bezahlt den Kredit vor Mark zurück.

(c) Lucie und Mark bezahlen den Kredit zum gleichen Zeitpunkt zurück.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 6 (3 Punkte)
Seien f und g Funktionen einer reellen Variable mit Definitionsbereichen D_f beziehungsweise D_g.
Sei $h = f \circ g$. Welche der folgenden Aussagen über den Definitionsbereich D_h von h ist richtig?

(a) $D_h = D_f \cup D_g$

(b) $D_h \subseteq D_g$

(c) $D_h \subseteq D_f$

(d) $D_h = D_f \cap D_g$

Frage 7 (3 Punkte)
Eine Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$ habe eine Elastizität ε_f, die konstant gleich 2 ist.

Welche der folgenden Aussagen über die Wachstumsrate ρ_f von f ist richtig?

(a) ρ_f ist streng monoton fallend.

(b) ρ_f ist streng monoton wachsend.

(c) ρ_f ist konstant.

(d) ρ_f ist nicht monoton.

Frage 8 (4 Punkte)
Eine differenzierbare Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist streng konkav und erfüllt $f(x) > 0$ für alle $x \in D_f$. Zudem gibt es ein $x_0 \in D_f$, $x_0 \neq 0$, so dass für die Elastizität von f an dieser Stelle $\varepsilon_f(x_0) = 0$ gilt.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig:

(a) Bei x_0 ist f elastisch.

(b) Bei x_0 besitzt f ein lokales Minimum.

(c) Bei x_0 besitzt f ein lokales Maximum.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Frage 9 (3 Punkte)
Sei f eine Funktion einer reellen Variable, die mindestens n-mal differenzierbar ist. Sei P_k das Taylor-Polynom k-ter Ordnung von f an der Stelle x_0, für $k = 1, \ldots, n-1$, und R_k das zugehörige Restglied k-ter Ordnung.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \ldots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) < R_{k-1}(x)$.

(b) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \ldots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) > R_{k-1}(x)$.

(c) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \ldots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) = R_{k-1}(x)$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Frage 10 (2 Punkte)
Eine Funktion zweier reellen Variablen f sei homogen von Grad 2 und ihre partielle Elastizi-tät erfülle

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = e^{x+y} + 1.$$

Dann folgt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = 1 + e^{x+y}$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = 1 - e^{x+y}$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = e^{x+y}$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -e^{x+y}$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$$

ist gleich:

(a) $-\frac{1}{2}$.

(b) 0.

(c) $\frac{1}{2}$.

(d) ∞.

Frage 2 (4 Punkte)
Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 0+} x^x$$

ist gleich:

(a) 0.

(b) 1.

(c) e.

(d) e^e.

Frage 3 (4 Punkte)
Ein Blatt Papier sei 0.5 Millimeter dick. Man faltet das Blatt nun in der Hälfte, so dass es eine neue Dicke von 1 Millimeter hat. Anschliessend faltet man es solange erneut, bis die Dicke des gefalteten Papiers 400′000 Kilometer erreicht (ungefähr die Distanz zwischen Erde und Mond). Wie oft muss das Blatt Papier gefaltet werden?

(a) Ungefähr 20 Mal.

(b) Ungefähr 30 Mal.

(c) Ungefähr 40 Mal.

(d) Ungefähr 50 Mal.

Frage 4 (4 Punkte)
Ein Projekt benötigt eine Anfangsinvestition von 10′000 CHF. Nach einem Jahr generiert das Projekt eine Auszahlung in Höhe von 5′000 CHF und nach zwei Jahren eine Auszahlung in Höhe von 10′000 CHF.
Der interne Zinssatz des Projekts ist ungefähr

(a) 5%.

(b) 10%.

(c) 20%.

(d) 30%.

Frage 5 (3 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

(a) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(b) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

(c) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2, ohne das Innere (mit Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.

(d) Der Definitionsbereich von f ist die leere Menge.

Frage 6 (3 Punkte)
Sei f eine Funktion zweier reellen Variablen gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 10\, x^\alpha\, y^{1-\alpha},$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$.
Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f am Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gleich -0.5. Dann folgt:

(a) $\alpha = \frac{1}{6}$.

(b) $\alpha = \frac{1}{3}$.

(c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) $\alpha = \frac{2}{3}$.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln\left(x^3\, \sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\, y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) \qquad \text{für } x > 0,\ y > 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) f ist homogen von Grad 5.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen von Grad 0.

(d) f ist nicht homogen.

Frage 8 (3 Punkte)
Sei f eine Funktion einer reellen Variablen, definiert als $f(x) = x^{\alpha}$ für $\alpha > 0$, und sei g eine Funktion zweier reellen Variablen, die strikt positiv und homogen von Grad κ ist.
Wir definieren die Funktion h als $h(x, y) = f(g(x, y))$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) h ist homogen von Grad 1, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$.

(b) h ist homogen von Grad 2, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$.

(c) h ist homogen von Grad 3, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$.

(d) h ist homogen von Grad 5, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.

Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

09. Juli 2020

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (40 Punkte)

Zwei physikalische Teilchen bewegen sich entlang der x-Achse. Während Partikel 1 zum Zeitpunkt t an der Stelle $x_1(t) = 4^{t-1}$ ist, ist Partikel 2 an der Stelle $x_2(t) = 70 - 15\,t - m\,t^2$, wobei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(a1) **(6 Punkte)** Das Verhalten der Teilchen kann nur dadurch gesteuert werden, dass die Bewegung von Partikel 2 durch entsprechende Wahl des Parameters m kalibriert wird. Nehmen Sie an, dass $m \in [-1.5, 1.5]$, und zeigen Sie, dass es einen einzigen Zeitpunkt zwischen $t = 0$ und $t = 5$ gibt, bei dem sich die beiden Partikel treffen.

Zwei physikalische Teilchen bewegen sich entlang der x-Achse. Während Partikel 1 zum Zeitpunkt t an der Stelle $x_1(t) = 4^{t-1}$ ist, ist Partikel 2 an der Stelle $x_2(t) = 70 - 15\,t - m\,t^2$, wobei $m \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(a2) **(6 Punkte)** Verwenden Sie ein Taylor Polynom zweiter Ordnung an der Entwicklungsstelle $t_0 = 1$, um den Zeitpunkt $t^\star \in [0, 5]$ zu approximieren, an dem sich die beiden Partikel treffen. Nehmen Sie an, dass $m = 1.5$.

(b) **(8 Punkte)**
Eine Zeitung startete zu Beginn des Jahres 2010 ein Online-Portal. Im Januar 2010 betrug

die Anzahl Nutzer 100 und in jedem folgenden Monat erhöhte sich die Anzahl *neuer* Nutzer um 1% verglichen zum vorhergehenden Monat. Im Jahr 2015 wurde das Online-Portal für 6 Monate ausgesetzt, um wichtige redaktionelle Anpassungen vorzunehmen. Als das Online-Portal im Juli 2015 wieder gestartet wurde, reaktivierten jedoch nur 30% der bisherigen Nutzer ihren Zugang. Allerdings verzeichnete das Online-Portal im Juli 2015 500 neue Registrierungen und in jedem folgenden Monat erhöhte sich die Anzahl *neuer* Nutzer um 2% verglichen zum vorhergehenden Monat.

(b1) Wie viele Nutzer hat das Online-Portal Ende Juni im Jahr 2020?

(b2) Wann erreicht das Online-Portal wieder die Anzahl der Nutzer, welche es vor der Schliessung am Ende des Jahres 2014 hatte?

(c) (8 Punkte)
Eine Person leiht sich $500'000$ CHF, um damit ein Ferienhaus im Tessin zu kaufen. Der Zinssatz beträgt 0.5%. Die Person ist damit einverstanden, einen Betrag von $C_1 = 10'000$ CHF am Ende jedes Jahres für die nächsten 5 Jahre zu zahlen. Am Ende des fünften Jahres zahlt die Person einen Gesamtbetrag von $100'000$ CHF (inklusive C_1) und startet einen neuen Hypothekenvertrag mit der Bank. Der Zinssatz beträgt von nun an 1%. Die Person erhöht zudem die jährlichen Zahlungen am Ende des Jahres auf $C_2 = 25'000$ CHF und zahlt diese, bis ihr Schuldenstand $100'000$ CHF beträgt. Ab diesem Zeitpunkt wird die Person noch C_3 am Ende jedes Jahres zahlen, um ihren Schuldenstand konstant zu halten.

(c1) Fügen Sie alle Ereignisse und Mittelflüsse dem Zeitstrahl hinzu.

(c2) Berechnen Sie den Schuldenstand am Ende des fünften Jahres.

(c3) Wie lange dauert es nach Ende des 5-ten Jahres, bis der Schuldenstand CHF $100'000$erreicht hat?

(c4) Berechnen Sie C_3.

(d) (12 Punkte)
Eine Firma produziert und verkauft $100'000$ Mixer für 100 CHF pro Stück. Die Produktionsqualität gewährleistet derzeit, dass $s_0 = 90\%$ aller verkauften Mixer eine Lebensspanne von

mindestens 2 Jahren haben, und die Firma bietet daher eine Garantie von 2 Jahren für alle verkauften Mixer. Falls ein Mixer innerhalb der 2-jährigen Garantiezeit defekt wird, ersetzt ihn die Firma. In diesem Fall trägt die Firma die Produktionskosten für dieses neue Stück.
Die Produktionskosten pro Stück betragen ca. $p_0 = 55.25$ CHF. Die Firma überlegt sich, die Qualität ihrer Mixer zu erhöhen oder zu verringern, ohne dabei den Verkaufspreis anzupassen. Die Qualität wird durch den prozentualen Anteil s der Mixer gemessen, welche mindestens eine Lebensspanne von 2 Jahren haben. Die Produktionskosten p pro Stück hängen folgendermassen von der Qualität s ab:

$$p = f(s) = 50 + \frac{1}{(1 - 0.9\,s)}\,,$$

wobei $s \in [0, 1]$.

(d1) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion der Firma in Abhängigkeit der Produktionsqualität $s \in [0, 1]$.

(d2) Bestimmen Sie die optimale Qualität, also jenes $s \in [0, 1]$, welches den Gewinn der Firma maximiert.

(d3) Approximieren Sie mit Hilfe der Elastizitätsfunktion die relative Veränderung der Produktionskosten bei einer Erhöhung der Qualität von $s_0 = 90\%$ um 5%.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)
Betrachten Sie die Aussagen

$$A(x) = \text{“}\tfrac{x}{8}\text{ ist eine positive ganze Zahl”},$$

$$B(x) = \text{“}x\text{ ist eine gerade Zahl”},$$

und

$$C(x) = \text{“falls }\tfrac{x}{8}\text{ eine positive ganze Zahl ist, dann ist }x\text{ eine gerade Zahl”}.$$

$C(x)$ ist äquivalent zu

(a) $A(x) \Rightarrow B(x)$.

(b) $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.

(c) $A(x) \wedge B(x)$.

(d) $A(x) \vee B(x)$.

Frage 2 (3 Punkte)
Ein Informatiker ist dabei einen Programmcode mit den Blöcken $A =$“Bedingung 1 ist wahr” und $B =$“Anweisung 2 wird ausgeführt” zu schreiben.
Wir wissen, dass “Anweisung 2” nicht ausgeführt wurde. Jedoch ist es dem Informatiker nicht möglich zu überprüfen, ob “Bedingung 1” wahr ist.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $A \wedge B$

(b) $B \Rightarrow A$

(c) $A \Rightarrow B$

(d) $A \Leftrightarrow B$

(e) $B \vee A$

Frage 3 (3 Punkte)
Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton und konvergent. Zudem gilt, dass $a_n \neq 0$ für alle n. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, welche durch $b_n = \frac{1}{(a_n)^2}$ definiert ist.
Dann folgt:

(a) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(b) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton.

(c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(d) Keine der vorherigen Antworten ist korrekt.

Frage 4 (4 Punkte)
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Reihe mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = p \in (0,1)$. Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine andere geometrische Reihe mit $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{p}{2}$ und $b_1 = a_1$. Zudem gilt, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{1}{2}$.
Dann folgt:

(a) $a_1 = \frac{2}{3}$ und $p = \frac{1}{3}$.

(b) $a_1 = 1$ und $p = \frac{1}{2}$.

(c) $a_1 = \frac{1}{3}$ und $p = \frac{2}{3}$.

(d) $a_1 = \frac{1}{3}$ und $p = \frac{1}{2}$.

Frage 5 (4 Punkte)
Am gleichen Tag, an dem Hans einen Kredit von $P_1 = 1'000'000$ CHF zu einem Zinssatz von $i_1 = 1\%$ aufnimmt, bezieht Marie ein Darlehen von $P_2 = 800'000$ CHF zu einem Zinssatz von $i_2 = 2.5\%$. Hans und Marie bezahlen beide ihre Schulden in konstanten Raten von $31'000$ CHF jeweils Ende des Jahres ab.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Hans begleicht seine Schulden, bevor Marie dies tut.

(b) Nach 40 Jahren haben weder Hans noch Marie ihre Schulden vollständig abbezahlt.

(c) Nach 40 Jahren hat nur Marie ihre Schulden vollständig beglichen.

(d) Keine der vorherigen Antworten ist korrekt.

Frage 6 (3 Punkte)
Betrachte die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2} & \text{für } x \neq -2,\ x \neq -1 \\ 2 & \text{für } x = -2 \\ -4 & \text{für } x = -1 \end{cases} .$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) f ist überall stetig.

(b) f ist nur bei $x = -2$ unstetig.

(c) f ist nur bei $x = -1$ unstetig.

(d) f ist bei $x = -2$ und $x = -1$ unstetig.

Frage 7 (3 Punkte)
Für eine gegebene Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$ ist die Änderungsrate ρ_f bekannt als $\rho_f(t) = \ln(t)$.
Welche der folgenden Aussagen über die Elastizität ε_f von f ist korrekt?

(a) ε_f ist streng monoton fallend.

(b) ε_f ist streng monoton wachsend.

(c) ε_f ist konstant.

(d) ε_f ist nicht monoton.

Frage 8 (4 Punkte)
Die Funktion f einer reellen Variable sei definiert durch $f(x) = e^{3x^2+x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) Der Betrag der relativen Änderung von f bei $x_0 = 1$ ist kleiner als $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$, falls Δx nahe bei 0 ist.

(b) Der Betrag der relativen Änderung von f bei $x_0 = \frac{1}{2}$ ist kleiner als $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$, falls Δx nahe bei 0 ist.

(c) Der Betrag der relativen Änderung von f bei $x_0 = \frac{1}{2}$ ist grösser als $\left|\frac{\Delta x}{x_0}\right|$, falls Δx nahe bei 0 ist.

(d) f ist elastisch auf dem ganzen Definitionsbereich.

Frage 9 (3 Punkte)
Sei f eine Funktion einer reellen Variablen, die unendlich oft stetig differenzierbar ist. Sei P_k das Taylor Polynom k-ter Ordnung von f bei x_0, für $k = 1, \ldots, n-1$, und R_k das zugehörige k-te Restglied.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) $R_k(x)$ fällt in k, für alle $x \in D_f$.

(b) $R_k(x)$ steigt in k, für alle $x \in D_f$.

(c) $R_k(x) \to 0$ wenn $k \to \infty$, für alle $x \in D_f$.

(d) $R_k(x) \to 0$ wenn $x \to x_0$.

(e) Keine der vorherigen Antworten ist korrekt.

Frage 10 (2 Punkte)
Eine Funktion zweier Variablen ist homogen vierten Grades und die partielle Elastizität bezüglich y ist gegeben als

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = e^{x+y} + 5.$$

Dann folgt:

(a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -1 - e^{x+y}$.

(b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = 1 - e^{x+y}$.

(c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = e^{x+y}$.

(d) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -e^{x+y}$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)
Der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,\sin(x) - \sin(2\,x)}{x - \sin(x)}$$

ist gleich:

(a) 0.

(b) 2.

(c) 4.

(d) 6.

(e) 8.

Frage 2 (4 Punkte)
Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - \cos(x))^{2\,x}$$

ist gleich:

(a) -1.

(b) 0.

(c) ∞.

(d) 2.

(e) 1.

Frage 3 (4 Punkte)
Sie haben die Absicht ein Haus zu kaufen und benötigen dafür einen Eigenkapitalanteil von 300′000 CHF. Im Moment verfügen Sie aber nicht über diesen Betrag und warten deshalb ab, bis Sie Ihr Vermögen entsprechend vergrössert haben. Neben Ihrem zurzeit verfügbaren Betrag von 150′000 CHF zahlen Sie am Ende jedes Jahres 10′000 CHF auf Ihr Bankkonto ein.
Wie lange dauert es, bis Sie Ihr gewünschtes Ziel von 300′000 CHF erreicht haben, wenn der jährliche Zinssatz 0.5% beträgt?

(a) Ungefähr 5 Jahre.

(b) Ungefähr 10 Jahre.

(c) Ungefähr 15 Jahre.

(d) Ungefähr 20 Jahre.

Frage 4 (4 Punkte)
Ein Projekt benötigt eine Anfangsinvestition von 15′000 CHF. Nach einem Jahr wirft es 5′000 CHF Gewinn ab, nach zwei Jahren 25′000 CHF.
Der interne Zinssatz des Projekts ist ungefähr gleich

(a) 24%.

(b) 37%.

(c) 47%.

(d) 53%.

Frage 5 (3 Punkte)
Das Taylor Polynom vierter Ordnung von $f(x)$ bei $x_0 = 0$ ist gegeben als:

$$P_4(x) = \frac{1}{12}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + x^2 + 2\,x + 3\,.$$

Welches ist die zugehörige Funktion f?

(a) $f(x) = e^x + 2$.

(b) $f(x) = 2\,e^x + 1$.

(c) $f(x) = 3\,e^x$.

(d) $f(x) = 4\,e^x + 2$.

Frage 6 (3 Punkte)
Sei f eine Funktion von zwei reellen Variablen definiert durch:

$$f\ :\ \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = \ln(x\,y + \alpha),$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$.
Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ beträgt -1.
Dann folgt:

(a) $\alpha = 0$.

(b) $\alpha = 1$.

(c) Kein Wert α genügt den geforderten Bedingungen.

(d) Alle Werte α genügen den geforderten Bedingungen.

Frage 7 (3 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen

$$f(x, y) = \frac{x^3}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^3} \quad (x > 0,\ y > 0)$$

und

$$g(x, y) = f(a\,x, a\,y),$$

wobei $a > 0$.Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist nicht homogen.

(c) g ist homogen von Grad a.

(d) g ist homogen von Grad $2\,a$.

Frage 8 (3 Punkte)
Seien f und g Funktionen zweier reeller Variablen, welche beide homogen von Grad κ sind.
Definiere die Funktion h als $h(x,y) = f(x,y)\,g(x,y)$.
Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

(a) h ist homogen von Grad $2\,\kappa$.

(b) h ist homogen von Grad κ^2.

(c) h ist homogen von Grad κ.

(d) h ist nicht homogen.