

# Суррогатное моделирование и оптимизация в прикладных задачах

## Программа курса, осенний семестр

- 1. Введение. Постановка задачи**  
Содержание курса, взаимосвязь с другими курсами. Постановка задачи аэродинамического проектирования. Примеры из практики.
- 2. Матрицы и действия над ними**  
Умножение матриц, умножение блочных матриц. Ранг, ранговая факторизация матриц. Ортогональные, симметричные и положительно определённые матрицы.
- 3. Теория систем линейных уравнений**  
Алгоритм Гаусса. LU-разложение матриц, разложение Холецкого. Псевдорешения и псевдообратные матрицы. Собственные подпространства, ядро и образ отображения, теорема Фредгольма.
- 4. Ортогональность**  
Скалярное произведение. Ортогональные векторы и ортогональные матрицы. Ортогональное проектирование, проекционные матрицы. Алгоритм ортогонализации Грама — Шмидта, QR-разложение матриц.
- 5. Линейная регрессия**  
Формулировка задачи. Метод наименьших квадратов. Алгоритмы решения задачи наименьших квадратов: разложение Холецкого, QR-разложение.
- 6. Спектральное разложение матриц**  
Собственные значения и собственные векторы. Диагонализируемые и недиагонализируемые матрицы. Спектральное разложение матриц, полярное разложение матриц. Методы поиска собственных чисел: прямые, итерационные. QR-алгоритм.
- 7. Сингулярное разложение матриц (SVD)**  
Сингулярные базисы, сингулярные числа. Сингулярное разложение, его свойства, формула для псевдообратной матрицы. Геометрический смысл SVD, полярное разложение.
- 8. Главные компоненты**  
Нормы векторов и матриц. Малоранговые аппроксимации матриц, теорема Эккарта — Янга. Метод главных компонент. Эффективная размерность. Аппроксимация изображений.
- 9. Проблема мультиколлинеарности**  
Число обусловленности матрицы, его геометрическая интерпретация. Проблема мультиколлинеарности, её интерпретация с помощью SVD. Методы решения: метод главных компонент, гребневая регрессия, лассо Тибширани.
- 10. Методы оптимизации**  
Решение задач условной и безусловной оптимизации. Градиентные методы (алгоритм Бройдена — Флетчера — Гольдфарба — Шанно, алгоритм SLSQP), безградиентные методы (симплекс-метод Нелдера — Мида, алгоритм COBYLA). Метод штрафных функций.
- 11. Примеры применения SVD**  
Алгоритм Eigenfaces. Расстояние Махаланобиса.