Вопросы по матричным методам

Содержание

1. Сингулярное разложение

1. **Вопрос**: Как соотносятся собственные и сингулярные числа матрицы?
   Ответ: В общем случае никак.
   Но если S — симметричная положительно определённая матрица, то $S = Q\Lambda Q^\top = U\Sigma V^\top$.
   Если S имеет отрицательные собственные числа ($Sx = \lambda x$), то $\sigma = -\lambda$, а $u = -x$ или $v = -x$ (одно из двух).
   (Strang, p. 61)

2. **Вопрос**: Рассмотрим матрицу 2×2.
   В общем случае *4 разным элементам* (a, b, c, d) ставится в соответствие *4 геометрических параметра*: угол поворота (α), два коэффициента растяжения (σ_1, σ_2), угол обратного поворота (β).
   Но если матрица симметричная, то параметра уже 3 (a, b, b, d). Как в таком случае вычислить четвёрку (α, σ_1, σ_2, β)?
   Ответ: $\beta = -\alpha$.
   (Strang, p. 62)

3. **Вопрос**: Какова связь между сингулярным и полярным разложением?
   Ответ: $A = U\Sigma V^\top = (UV^\top)(V\Sigma V^\top) = QS$ или $A = U\Sigma V^\top = (U\Sigma U^\top)(UV^\top) = KQ$.
   (Strang, p. 67)

4. **Вопрос**: Какова связь между сингулярными числами и собственными числами матрицы S в полярном разложении?
   Ответ: Собственные числа S — это сингулярные числа исходной матрицы A.
   (Strang, p. 67)

---

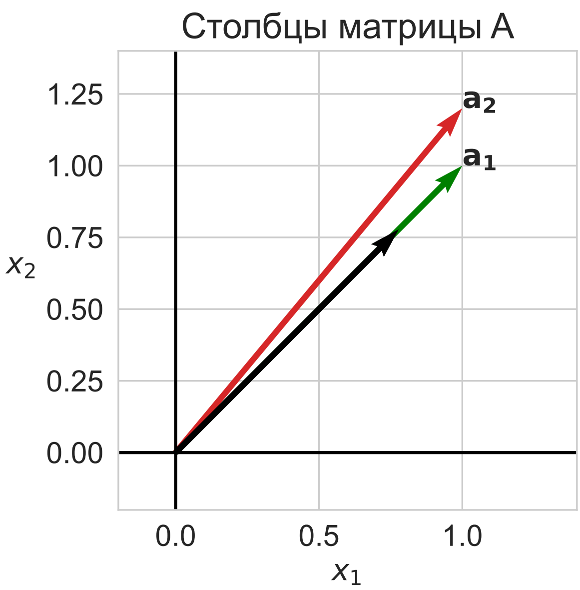
2. Число обусловленности

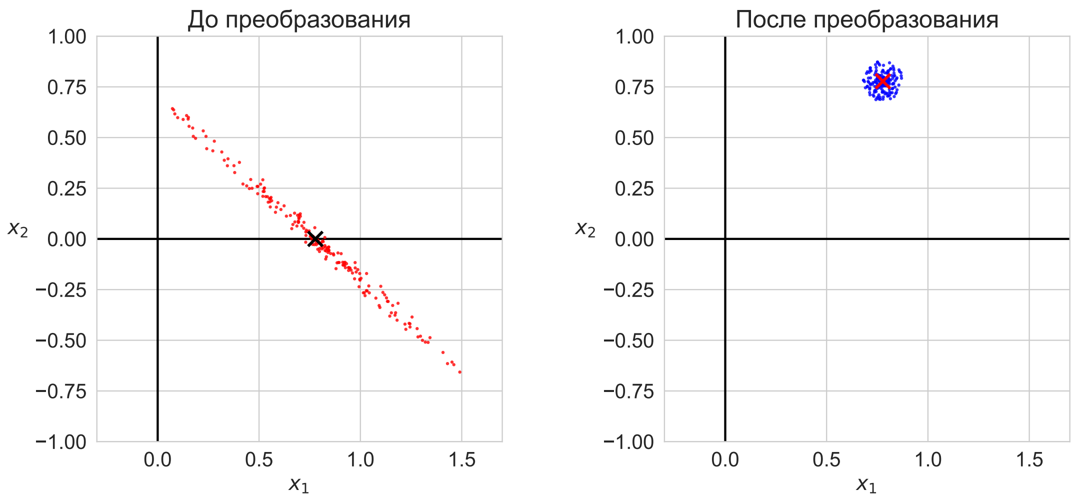
1. **Вопрос**: В рассматриваемом на лекции примере число обусловленности $\mu(A) = 22.15$. Но выше мы нашли, что относительная погрешность увеличилась в 14.88 раз. Почему так произошло? При каком условии оценка, сделанная по числу обусловленности, будет достигаться?
   Ответ: Максимальная оценка будет достигаться, когда вектор **b** будет параллелен первому сингулярному вектору (первой главной компоненте). Минимальная — когда второму сингулярному вектору (см. иллюстрации ниже).

2. **Вопрос**: Если известен вектор **b**, как сделать более точную оценку возрастания относительной погрешности?
   Ответ: Оценка даётся по формуле

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|}\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

   Величина $\nu(A, b) = \frac{\|A^{-1}\|\|\mathbf{b}\|}{\|A^{-1}\mathbf{b}\|}$ называется *числом обусловленности системы при заданной правой части* и показывает, во сколько раз может возрасти относительная погрешность решения по сравнению с погрешностью правой части при решении системы $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.





[8]:
```
# x_sol = np.array([1.0, 0.0]).T
dx = X - x0
db = B - b0

k1 = np.array(list(map(LA.norm, db.T))) / LA.norm(b0)
k2 = np.array(list(map(LA.norm, dx.T))) / LA.norm(x0)

print('Максимальное относительное увеличение возмущения max(dx/x : db/b) =
 ↪', round(max(k2/k1), 4))
```

```
Максимальное относительное увеличение возмущения max(dx/x : db/b) =  14.8831
```

[9]:
```
U, sgm, Vt = LA.svd(A)
mu = sgm[0]/sgm[1]
print('sigma = ', np.round(sgm, 3))
print('mu(A) = ', round(mu, 4))
```

```
sigma =  [2.105 0.095]
mu(A) =  22.1549
```

[10]:
```
mu_2 = 1 / sgm[1] * LA.norm(b0) / LA.norm(x0)
print(round(mu_2, 4))
```

```
14.8845
```

---

3. Расстояние Махаланобиса

1. **Вопрос**: Рассмотрим набор точек, подчиняющийся многомерному нормальному распределению и образующий класс. Как вычислить расстояние от некоторых выбранных точек до «центра масс» класса?
   Ответ: Сначала нужно преобразовать данные (привести эллиптическое облако к круглой форме), а затем посчитать обычное евклидово расстояние. В итоге получиться расстояние Махаланобиса (показать это).

---

4. Регрессия L1

[15]:
```
print(aL2)
print(aL1)
```

```
[0.4948339048519728, 0.21992690643482157]
[0.4963092036984735, 0.49630920494690783]
```