



國立中山大學物理學系

碩士論文

Department of Physics

National Sun Yat-sen University

Master's Thesis

1T相二碲化鉑超導量子干涉儀中的磁通量控制電

流-相位關係

**Flux Controlled Current-Phase Relation in 1T-PtTe₂
SQUIDs**

研究生： 徐道宜

Tao-Yi Hsu

指導教授： 邱奎霖 博士

Dr. Kuei-Lin Chiu

中華民國 114 年 8 月

August 2025

目錄

1	介紹	6
1.1	研究背景與動機	6
1.2	研究目的	6
1.3	研究方法	7
1.4	論文架構	7
2	相關研究	8
2.1	理論基礎	8
2.1.1	二碲化鉑 (Platinum Ditelluride, PtTe_2)：材料性質	8
2.1.2	約瑟夫森界面	9
2.1.3	電阻電容並聯連接 (RCSJ) 模型	12
2.1.4	約瑟夫森穿透深度	14
2.1.5	超導量子干涉儀 (SQUID)	14
2.1.6	磁通量量子化	16
2.1.7	DC SQUID 的工作機制：超導電流的量子干涉	16
2.1.8	非理想性對 SQUID 性能的影響	20
2.1.9	結論：綜合與未來展望	22
3	超導體中的宏觀量子現象導論	24
3.1	庫柏對凝聚與宏觀波函數 (The Cooper Pair Condensate and the Macroscopic Wavefunction)	24
3.2	邁斯納效應 (The Meissner Effect)	25
3.3	超導環中的磁通量量子化 (Fluxoid Quantization in a Superconducting Ring)	26
4	約瑟夫森界面：一個相干的量子弱連結 (The Josephson Junction: A Coherent Quantum Weak Link)	28

4.1	第一及第二約瑟夫森關係 (The First and Second Josephson Relations)	28
4.2	標準正弦電流-相位關係 (The Canonical Sinusoidal Current-Phase Relation) .	29
4.3	先進接面架構中非正弦 CPR 概觀 (An Overview of Non-Sinusoidal CPRs in Advanced Junction Architectures)	30
5	對稱直流 SQUID：超導電流的量子干涉 (The Symmetric DC SQUID: Quantum Interference of Supercurrents)	33
5.1	對稱直流 SQUID 的定義與參數 (Definition and Parameters of a Symmetric DC SQUID)	33
5.2	總電流-相位關係的形式推導 (Formal Derivation of the Total Current-Phase Relation)	36
5.3	SQUID 臨界電流的磁通調變分析 (Analysis of the Flux Modulation of the SQUID Critical Current)	37
6	非理想性對 SQUID 性能的影響 (The Influence of Non-Idealities on SQUID Performance)	39
6.1	有限迴路電感的作用：屏蔽參數 β_L (The Role of Finite Loop Inductance: The Screening Parameter β_L)	39
6.2	動態行為與熱漲落：RCSJ 模型 (Dynamic Behavior and Thermal Fluctuations: The RCSJ Model)	41
7	進階主題：對稱 SQUID 中的非正弦 CPR (Advanced Topics: Non-Sinusoidal CPR in Symmetric SQUIDs)	43
7.1	高次諧波對磁通調變模式的修正 (Modification of the Flux Modulation Pattern with Higher Harmonics)	43
7.2	對裝置性能和新應用的影響 (Implications for Device Performance and Novel Applications)	44
8	結論：綜合與未來展望 (Conclusion: Synthesis and Future Outlook)	46
9	參考文獻	48

10 元件製備 (Device Fabrication)	49
10.1 材料準備 (Material Preparation)	49
10.1.1 助焊劑區生長法 (Flux Zone Growth Method)	49
10.2 剝離 (Exfoliation)	49
10.2.1 基板準備 (Substrate Preparation)	49
10.2.2 二維材料剝離 (2D Materials Exfoliation)	50
10.3 顯微鏡檢測 (Microscopy)	50
10.3.1 光學顯微鏡 (Optical Microscopy)	51
10.3.2 原子力顯微鏡 (Atomic Force Microscopy)	51
10.4 電子束微影 (E-Beam Lithography, EBL)	52
10.4.1 抗蝕劑準備 (Resist Preparation)	52
10.4.2 圖案曝光 (Pattern Exposure)	53
10.4.3 顯影 (Development)	53
10.5 熱蒸鍍沉積 (Thermal Evaporation Deposition)	53
10.5.1 一般金屬的熱蒸鍍沉積 (Thermal Evaporation Deposition of Normal Metals)	53
10.6 濺鍍沉積 (Sputter Deposition)	54
10.6.1 介面清潔：原位離子銑削 (Interface Cleaning: In-situ Ion Milling) ...	54
10.6.2 超導金屬的濺鍍沉積 (Sputter Deposition of Superconducting Metals)	55
10.7 離舉製程 (Lift-off Process)	55
10.7.1 標記的離舉 (Lift-off for Markers)	55
10.7.2 接觸點的離舉 (Lift-off for Contacts)	55
11 非對稱超導量子干涉儀的電流-相位關係之全面理論分析 (A Comprehensive Theoretical Analysis of the Current-Phase Relation in Asymmetric Superconducting Quantum Interference Devices)	56

11.1 第一部分：非對稱 SQUID 的基礎原理 (Part I: Foundational Principles of Asymmetric SQUIDs)	56
11.1.1 理想約瑟夫森接面與電流-相位關係 (The Ideal Josephson Junction and the Current-Phase Relation)	56
11.2 非對稱性的來源與分類 (Sources and Classification of Asymmetry)	57
11.2.1 接面非對稱性 (Junction Asymmetry)	57
11.2.2 迴路非對稱性 (Loop Asymmetry)	58
11.3 非對稱 SQUID 的理論分析 (Theoretical Analysis of Asymmetric SQUIDs) ..	58
11.4 高度非對稱 SQUID：相位偏置探測器 (Highly Asymmetric SQUIDs: Phase-Biased Detectors)	58
11.5 非對稱性對 SQUID 性能的影響 (Impact of Asymmetry on SQUID Performance)	59
11.5.1 磁通量調變深度 (Flux Modulation Depth)	59
11.5.2 磁通量靈敏度 (Flux Sensitivity)	59
11.6 非對稱 SQUID 作為 CPR 探測工具 (Asymmetric SQUIDs as CPR Probing Tools)	60
11.6.1 Fourier 分析技術 (Fourier Analysis Technique)	60
11.6.2 非正弦 CPR 的識別 (Identification of Non-sinusoidal CPRs)	60
11.7 實驗實現與量測技術 (Experimental Implementation and Measurement Techniques)	60
11.7.1 元件設計考量 (Device Design Considerations)	60
11.7.2 低溫量測協議 (Cryogenic Measurement Protocol)	61
11.8 在 PtTe_2 系統中的應用 (Application in PtTe_2 Systems)	61
11.8.1 拓撲半金屬的 CPR 特徵 (CPR Characteristics of Topological Semimetals)	61
11.8.2 約瑟夫森二極體效應的探測 (Detection of Josephson Diode Effect) ..	61

11.9 結論與展望 (Conclusions and Outlook)	62
12 元件特性分析 (Device Characterization)	63
12.1 量測裝置 (Measurement Setup)	63
12.1.1 稀釋制冷機 (Dilution Refrigerator)	63
12.1.2 超導磁鐵系統 (Superconducting Magnet System)	64
12.1.3 低溫線路與客製化 PCB 樣品座 (Cryogenic Wiring and Custom PCB Sample Holder)	64
12.1.4 電流-電壓 (I-V) 量測系統 (Current-Voltage(I-V) Measurement System)	65
12.1.5 射頻信號產生器 (RF Signal Generator)	67
12.1.6 數據擷取框架：QCoDeS (Data Acquisition Framework: QCoDeS) ...	67
12.2 實驗實現 (Experimental Realization)	68
12.2.1 I-V 特性 (I-V Characteristics)	68
12.2.2 夫朗和費干涉圖樣 (Fraunhofer Interference Patterns)	68
13 研究方法	70
13.1 研究架構	70
13.2 方法設計	70
13.2.1 核心概念	70
13.2.2 演算法設計	71
13.3 實驗設計	71
13.3.1 實驗環境	71
13.3.2 評估指標	72
13.3.3 實驗參數	72
14 實驗結果	73
14.1 實驗結果概述	73
14.2 基準測試結果	73

14.2.1	資料集描述	73
14.2.2	基準方法效能	73
14.3	方法比較與分析	74
14.3.1	效能比較	74
14.3.2	統計顯著性檢驗	75
14.4	參數敏感性分析	75
14.4.1	學習率影響	75
14.4.2	批次大小影響	75
14.5	計算複雜度分析	76
14.5.1	時間複雜度	76
14.5.2	空間複雜度	76
14.6	實際應用案例	76
14.7	結果討論	76
15	討論	77
15.1	5.1 PtTe ₂ 超導量子干涉儀中非對稱夫朗和費圖樣的起源	77
15.2	5.2 非傳統電流-相位關係的性質與起源	77
15.3	5.3 [標題待補充]	77
15.4	5.4 製備技術挑戰	77
15.4.1	5.4.1 薄片尺寸與厚度控制	77
15.4.2	5.4.2 過渡金屬二硫屬化物表面保護與殘留物清除	78
15.4.3	5.4.3 濺鍍超導電極的側壁問題	78
16	實驗結果	79
16.1	基礎元件表徵	79
16.1.1	基礎溫度下的 I-V 特性	79
16.1.2	R-T 量測與超導轉變	80
16.1.3	$I_c R_N$ 乘積估算	81

16.2	夫朗和費圖樣對磁場的響應	82
16.2.1	標準夫朗和費圖樣 ($B_{\parallel} = 0$)	82
16.2.2	平面內磁場下夫朗和費圖樣的演化 ($B_{\parallel} \neq 0$)	83
16.3	電流-相位關係分析	85
16.3.1	非傳統 CPR 特徵	85
16.3.2	夫朗和費非對稱性與 CPR 非傳統性的關聯	86
16.4	結果總結	87
16.5	溫度依賴性研究	88
17	結論	90
17.1	研究總結	90
17.1.1	主要貢獻	90
17.1.2	研究目標達成情況	90
17.2	研究限制	90
17.3	未來研究方向	91
17.3.1	短期研究方向	91
17.3.2	長期研究方向	91
17.4	研究影響與意義	92
17.4.1	學術影響	92
17.4.2	實務影響	92
17.4.3	社會影響	92
17.5	結語	92
A	附錄 A：詳細實驗數據	A
A.1	完整實驗結果	A
A.1.1	資料集詳細資訊	A
A.1.2	完整效能指標	A
A.2	參數調整記錄	A

B	附錄 B：程式碼清單	B
B.1	主要演算法實作	B
B.2	輔助函數	C
C	附錄 C：實驗環境配置	E
C.1	軟體環境	E
C.1.1	Python 套件版本	E
C.1.2	系統配置	E
C.2	硬體規格	E
書目	8



圖次

圖 1	DC SQUID 示意圖：(a) 兩個約瑟夫森界面（以叉號表示）並聯於一個電感為 L 的超導環上。偏置電流 I_b 分流通過兩個臂，外加磁通量 Φ_{ext} 穿過環路。 (b) 描述 SQUID 動態的等效電路，其中每個界面由 RCSJ 模型表示。圖片來源：IMS, KIT[1]	17
圖 2	研究架構圖	70
圖 3	基準方法效能比較	74
圖 4	學習率對模型效能的影響	75
圖 5	典型 PtTe_2 約瑟夫森界面的 I - V 特性曲線。圖中清晰地顯示了零電壓的超導分支、急劇的電阻性切換，以及顯著的遲滯行為。切換電流 $I_{\text{sw}} \approx 120 \mu\text{A}$ ，回滯電流 $I_r \approx 10 \mu\text{A}$ 。	80
圖 6	PtTe_2 接面的電阻-溫度特性。圖中顯示了材料從正常態到超導態的轉變過程，超導轉變溫度約為 2.7 K 。	81
圖 7	標準夫朗和費干涉圖樣 ($B_{\parallel} = 0$)。臨界電流隨垂直磁場的變化呈現出典型的 $ \sin(\pi\Phi/\Phi_0)/(\pi\Phi/\Phi_0) $ 形式，第一個極小值出現在約 5 mT 處。	83
圖 8	平面內磁場下夫朗和費圖樣的演化。隨著 B_{\parallel} 的增加，原本對稱的干涉圖樣逐漸變得不對稱，極小值位置發生偏移，包絡函數形狀也隨之改變。	84
圖 9	重構的 PtTe_2 界面電流-相位關係。實驗數據（實線）與傳統正弦 CPR（虛線）的比較顯示了顯著的偏離，包含明顯的二階諧波分量和非對稱性特徵。	85
圖 10	夫朗和費圖樣非對稱性與 CPR 非傳統性的關聯。隨著平面內磁場的增加，兩者呈現明顯的正相關，證實了它們的共同物理起源。	87
圖 11	PtTe_2 界面關鍵參數的溫度依賴性。臨界電流隨溫度下降，而二階諧波分量比例在低溫區域顯著增強，暗示拓撲效應在極低溫下更為顯著。	88

表目錄

表 1 實驗環境配置	72
表 2 實驗資料集資訊	73
表 3 方法效能比較結果	74
表 4 多個 PtTe_2 約瑟夫森接面的 $I_c R_N$ 乘積統計。平均 $I_c R_N$ 乘積約為 9.7 mV， 表明接面具有良好的超導特性。	81
表 5 在不同平面內磁場下的 CPR 參數。隨著 B_{\parallel} 增加，二階諧波分量顯著增強， 相位偏移也隨之增大。	86
表 6 資料集詳細資訊	A
表 7 完整效能指標比較	A

論文審定書

本論文係 徐道宜 君在國立中山大學物理學系 完成之碩士 論文，於民國 114 年 8 月 承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

口試委員：

指導教授：邱奎霖 博士

委員：

委員：

物理學系 主任：

中華民國 114 年 8 月

誌謝

在此感謝所有在研究過程中給予我幫助和支持的人們。

首先要感謝我的指導教授 邱奎霖 博士 教授，在研究期間給予我寶貴的指導和建議，讓我能夠順利完成這項研究。

感謝實驗室的同學們，與他們的討論和交流讓我獲益良多。

最後要感謝我的家人，他們的支持和鼓勵是我完成學業的重要動力。

徐道宜 謹於

國立中山大學

中華民國 114 年 8 月

摘要

本研究探討...本文所呈現的結果，不僅揭示了狄拉克物理與超導近接效應之間深刻的交互作用，也為開發新型、可調諧的超導量子電子學元件提供了一條富有前景的途徑。

關鍵字： 關鍵字 1、關鍵字 2、關鍵字 3

Abstract

This research investigates the relevant research problems, adopts specific research methods, and obtains important research results.

The main contributions of this thesis include: (1) proposing new research methods; (2) verifying theoretical hypotheses; (3) providing references for practical applications.

The research results show that the proposed method has significant improvements in performance and has good practicality. This research provides valuable references for the development of related fields.

Keywords: keyword1, keyword2, keyword3

1 介紹

1.1 研究背景與動機

在凝聚態物理的前沿探索中，一個核心的驅動力源於將具有非凡電子特性的新興量子材料與成熟的宏觀量子系統（如超導電路）相結合，以期發現新奇的物理現象並構建功能更強大的量子元件。本論文完整地記述了基於第二類狄拉克半金屬二碲化鉑（Platinum ditelluride, PtTe_2 ）的超導量子干涉儀 (SQUID) 的設計、微奈米製備，以及在極低溫下的精密電學量測。研究的核心目標是探測在此類混合元件中由狄拉克費米子所中介的、非傳統的電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)，並更進一步地，展示如何利用外部磁通量作為一個相位調控旋鈕，來實現對此基本量子特性的主動控制。為達成此目標，我們建立了一套完整的元件製備流程，並搭建了一座整合性的超低噪聲低溫量測平台。針對特定問題進行深入探討，希望能夠過量測數據對第二類狄拉克半金屬的電氣特性有更近一步的理解。

研究動機主要來自於：

1. 新興材料的潛力
2. 前人理論與實驗的成果與不足

1.2 研究目的

本研究的主要目的包括：

1. 復現並擴展前人對於二碲化鉑的研究成果
2. 提出新的實驗方法來探測狄拉克半金屬的電流-相位關係
3. 驗證方法的有效性並分析實驗數據
4. 檢視本研究方法的不足之處並提出改進建議

1.3 研究方法

本研究採用以下研究方法：

- 文獻回顧與分析
- 理論建模
- 實驗設計與執行
- 結果分析與討論

1.4 論文架構

本論文共分為五章：

- 第一章：介紹研究背景、動機、目的與方法
- 第二章：回顧相關文獻與研究
- 第三章：詳述研究方法與實驗設計
- 第四章：展示實驗結果與分析
- 第五章：總結研究成果與未來展望

2 相關研究

2.1 理論基礎

本章節回顧與本研究相關的理論基礎和先前研究成果。相關研究可以分為以下幾個主要方向：

2.1.1 二碲化鉑 (Platinum Ditelluride, PtTe_2)：材料性質

二碲化鉑 (Platinum ditelluride, PtTe_2) 是一種過渡金屬二硫屬化物 (Transition Metal Dichalcogenide, TMD)，屬於通式為 MX_2 的材料家族，近年來因其豐富的物理內涵而備受關注。在結構上，二碲化鉑結晶為 1T 相 (CdI_2 -type)，呈現出一種由鉑 (Platinum, $_{78}\text{Pt}$) 原子層夾在兩層碲 (Tellurium, $_{52}\text{Te}$) 原子層之間的八面體配位層狀結構。這種層狀特性使其可以透過機械剝離法，輕易地獲得從塊材到幾個原子層甚至單原子層厚度的二維薄片，為構建凡德瓦爾異質結構 (van der Waals heterostructures) 和平面型奈米元件提供了極大的可能性。在電子特性方面，二碲化鉑最引人注目的特徵是它已被理論預測並由角解析光電子能譜 (ARPES) 等實驗技術證實為一種第二類狄拉克半金屬 (Type-II Dirac Semimetal)。與傳統的第一類狄拉克半金屬 (如石墨烯 Graphene) 中點狀的費米面不同，第二類狄拉克半金屬擁有極度傾斜的狄拉克錐，使得電子和電洞口袋在狄拉克點處相切接觸。這些受晶體對稱性保護的狄拉克點，賦予了二碲化鉑獨特的低能電子態和輸運性質，使其成為研究拓撲物理與超導性之間交互作用的理想材料平台。

值得注意的是，塊材二碲化鉑本身並沒有超導性，然而，在本研究所探討的約瑟夫森界面元件中，二碲化鉑作為「弱連結 (weak link)」區域，其超導性主要是透過與具有更高超導轉變溫度的電極 (如鈮鈦合金 Niobium-titanium, Nb-Ti) 接觸，經由超

導近接效應 (superconducting proximity effect) 所誘導產生。這就構成了一個超導體-拓撲半金屬-超導體 (Superconductor–Topological Semimetal–Superconductor, S-TS-S) 的混合結構。

將超導性與二碲化鉑的狄拉克半金屬的拓撲特性相結合，為探索新奇的量子輸運現象提供了獨特的機會。在此 S-TS-S 結構中，庫柏對 (Cooper pairs) 穿越接面的傳輸過程，是由二碲化鉑內部獨特的狄拉克費米子所中介的。這種非傳統的傳輸機制，被預期將導致一個偏離標準正弦函數的非傳統電流-相位關係 (unconventional Current-Phase Relation)。因此，深入研究二碲化鉑約瑟夫森接面的電學特性，對於理解拓撲半金屬中的近接超導物理，以及探索其在未來量子技術中的應用潛力，具有至關重要的意義。

2.1.2 約瑟夫森界面

約瑟夫森界面 (Josephson Junction, JJ) 是構成超導量子電路的基本構建模組。其物理結構為由一個「弱連結 (weak link)」隔開的兩個超導體。這個弱連結可以是一個極薄的絕緣層 (S-I-S)、一段正常金屬 (S-N-S)，或如本研究中的拓撲半金屬 (S-TS-S)。儘管庫柏對 (Cooper pairs) 無法在弱連結材料中長距離穩定存在，但它們可以透過量子穿隧 (quantum tunneling) 或近接效應 (proximity effect) 的方式，發生約瑟夫森效應即在弱連結區域建立起相干的超導電流的宏觀量子現象。此效應由 Brian Josephson 於 1962 年預測 [2]，並由兩個支配界面量子動力學的基本關係式所描述。

第一約瑟夫森關係式 (first Josephson relation) [3]，闡述了流經接面的無耗散超導電流 I_s 與兩端超導體波函數的相位差 φ 之間的關係，這便是電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)。它指出，在無任何電壓的情況下，超導電流 I_s 仍可流過界面，其驅動力完全來自於兩個超導電極中序參數 (order parameters) 的宏觀量子相位差 φ [4]，對於傳統的「超導體-絕緣體-超導體」(SIS) 穿隧界面，此關係呈現為一簡單的正弦形式，即直流約瑟夫森效應 (The DC Josephson effect)：

$$I_s(\varphi) = I_c \sin(\varphi(t)), \quad (2.1)$$

其中 $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 為金茲堡-朗道序參數 (Ginzburg-Landau order parameter) 在接面處的相位差，即約瑟夫森相位 (Josephson phase)， I_s 是接面的切換電流 (有時也稱跳躍電流) 為外加偏壓超過某一門檻時，元件由超導態跳變至電阻態時的電流值，而 I_c 是接面在完全維持超導態 (無電阻) 時所能承受的最大電流，即臨界電流 (critical current)，其取決於超導體的性質，亦會受到溫度以及外加磁場等環境因素的影響。此正弦形式是一種理想化模型，許多類型的接面展現出更複雜的非正弦 CPR，這在非對稱系統的研究中是至關重要的課題 [需引用討論非正弦 CPR 的相關研究]。

第二約瑟夫森關係式 (second Josephson relation) 或超導相演變方程式 (superconducting phase evolution equation) [3]，描述了在接面兩端存在電壓 V 時，相位差的演化，即交流約瑟夫森效應 (The AC Josephson effect)：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV(t)}{\hbar}, \quad (2.2)$$

其中 e 是基本電荷 $1.602176634 \times 10^{-19} C$ (庫倫) [5], [6]， \hbar 是約化普朗克常數 (reduced Planck constant) $1.054571817... \times 10^{-34} J \cdot s$ (焦耳·秒) [6]。

約瑟夫森常數 (Josephson constant) 的定義為 $K_J = \frac{2e}{\hbar}$ ，其倒數則為磁通量子 (magnetic flux quantum) $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2\pi \frac{\hbar}{2e}$ 。則超導相變化方程式 (2.2) 可以重新表達為：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi [K_J V(t)] = \frac{2\pi}{\Phi_0} V(t), \quad (2.3)$$

此時定義 $\Phi = \Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}$ ，則接面兩端的電壓為：

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.4)$$

換句話說，即在接面處施加固定電壓 V_{DC} 時，相位將隨時間線性變化，而電流則為幅度為 I_c 、頻率 f 為 $K_J V_{DC}$ 的正弦交流電。此現象與法拉第感應定律的形式非常相似。但此電壓並非來自磁能，因為超導體中沒有磁場；相反地，此電壓來自載體的動能 (即庫珀對)。此現象也稱為動態電感 (Kinetic inductance)。當電流與約瑟夫森相位隨時間變化時，接面兩端的電壓降也會隨之變化；如下方導出所示，約瑟夫森關係

確定此行為可由一個名為約瑟夫森電感（Josephson inductance）之動態電感來描述。

[7] 將約瑟夫森關係式式 (2.1)，式 (2.3) 改寫為：

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = I_c \cos \varphi, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V. \quad (2.6)$$

接著，應用連鎖律（chain rule）計算電流的時間導數：

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = I_c \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \quad (2.7)$$

將上述結果整理為電感器的電流-電壓特性形式：

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} \frac{\partial I}{\partial t} = L(\varphi) \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (2.8)$$

這便得到動態電感的表達式，其為約瑟夫森相位的函數：

$$L(\varphi) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} = \frac{L_J}{\cos \varphi}. \quad (2.9)$$

其中 $L_J = L(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c}$ 為約瑟夫森接面的一個特性參數，稱為約瑟夫森電感。

基於約瑟夫森接面與非線性電感的相似性，當超流經約瑟夫森接面時，其儲存的能量可以計算。[8] 流經接面之超導電流與約瑟夫森位相差，透過電流-相位關係式（CPR）相關聯：

$$I = I_c \sin(\varphi). \quad (2.10)$$

超導相位演進方程式類似於法拉第定律：

$$V = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.11)$$

假設在時間 t_1 時，約瑟夫森相為 φ_1 ；在較晚的時間 t_2 ，約瑟夫森相演變為 φ_2 。

接面的能量增加等於對面點所做的功：

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} V I dt = \int_{t_1}^{t_2} V I d\Phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_c \sin \varphi d\left(\Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}\right) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \Delta \cos \varphi. \quad (2.12)$$

這表明約瑟夫森接面中能量的變化僅取決於接面的初始狀態和最終狀態，而與路徑無關。因此，約瑟夫森接面中儲存的能量是一種狀態函數，其定義如下：

$$E(\varphi) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \varphi = -E_J \cos \varphi. \quad (2.13)$$

$E_J = |E(0)| = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ 是約瑟夫森接面的特徵參數，稱為約瑟夫森能量（Josephson energy）。且如 $E_J = L_J I_c^2$ 所示，它與約瑟夫森電感有關。此外，也常用另一個等價的定義 $E(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi)$ 。與非線性磁場線圈電感在電流通過時在其磁場中積累潛在能量不同，在約瑟夫森接面的情況下，超導電流並不產生磁場其儲存的能量來自於載荷載體的動能。

2.1.3 電阻電容並聯連接（RCSJ）模型

阻電容並聯連接模型（Resistively and Capacitively Shunted Junction, RCSJ model）或簡稱為並聯連接模型[9], [10]，是描述約瑟夫森接面的經典模型之一。該模型將約瑟夫森接面視為一個具有電阻（ R ）、電容（ C ）和約瑟夫森電感（ L_J ）的並聯電路，除了基本約瑟夫森關係式 (2.1)，式 (2.3) 外，還包含了實際約瑟夫連接的交流阻抗效應。這個模型能夠捕捉到接面在不同操作條件下的動態行為，特別是在存在外部電壓和噪聲時的響應。

依據戴維寧定理（Thévenin's theorem）[11], [12]，接面的交流阻抗可由一個電容與一個並聯電阻來表示，這兩者均與理想約瑟夫森接面並聯[13]。電流驅動的完整表達式 I_{ext} 變為：

$$I_{\text{ext}} = I_s + I_R + I_C = I_c \sin(\varphi) + \frac{V}{R} + C_J \frac{dV}{dt}. \quad (2.14)$$

其中 I_C 項為接面等效電容 (effective capacitance) C_J 帶有的位移電流 (displacement current)， I_R 項為接面等效電阻 (effective resistance) R 帶有的正常電流 (normal current)。

根據克希荷夫電路定律（Kirchhoff Circuit Laws），流過接面的總電流

$$I \quad (2.15)$$

可寫為：

$$I = I_s + I_R + I_C \quad (2.16)$$

其中

$$I_s = I_c \sin(\varphi) \quad (2.17)$$

為超導電流，

$$I_R = \frac{V}{R} \quad (2.18)$$

為流過電阻的電流，

$$I_C = C \frac{dV}{dt} \quad (2.19)$$

為流過電容的電流。將

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.20)$$

代入，得到 RCSJ 模型核心方程：

$$I = I_c \sin(\varphi) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.21)$$

此方程為非線性微分方程，描述約瑟夫森接面在施加電流下的動態行為。RCSJ 模型能良好解釋約瑟夫森接面的 I-V 特性，包括遲滯（hysteresis）與電壓跳變（voltage jumps）。

物理意義：

- $I_c \sin(\varphi)$ 項：代表超導電流，是約瑟夫森效應的量子本質；使得接面在零電壓下亦能傳輸電流，直至電流達臨界值 I_c 。
- $\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt}$ 項：代表正常電流，描述接面在電壓態下的耗散；電阻 R 反映準粒子激發與能量耗散。
- $\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 項：代表電容電流，描述接面的電容效應；電容 C 決定接面對電壓變化的響應速度，並在某些情況下導致 I-V 特性的遲滯。

RCSJ 模型是理解 DC SQUID 工作原理的基礎，因 SQUID 的響應直接取決於內部約瑟夫森接面的動態行為。透過分析此模型，可預測 SQUID 的電壓響應、臨界電流調製與雜訊特性。

2.1.4 約瑟夫森穿透深度

約瑟夫森穿透深度(Josephson penetration depth)描述了外加磁場穿透長約瑟夫森接面之典型長度。它通常以 λ_J 表示，並由下列公式給出：

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d' j_c}}, \quad (2.22)$$

其中 Φ_0 為磁通量量子， j_c 為臨界超導電流密度(critical supercurrent density, $\frac{A}{m^2}$)，而 d' 則代表超導電極的電感[14]：

$$d' = d_I + \lambda_1 \tanh\left(\frac{d_1}{2\lambda_1}\right) + \lambda_2 \tanh\left(\frac{d_2}{2\lambda_2}\right) \quad (2.23)$$

其中 d_I 為約瑟夫森勢壘(Josephson barrier)的厚度(通常為絕緣體)， d_1 和 d_2 分別為超導電極的厚度，而 λ_1 和 λ_2 則為其倫敦穿透深度(London penetration depths)。若臨界電流密度非常低，約瑟夫森穿透深度通常在數微米至數毫米之間[15]。

2.1.5 超導量子干涉儀 (SQUID)

超導量子干涉儀(Superconducting Quantum Interference Device, SQUID)是基於約瑟夫森效應的超導元件，具有極高的磁場靈敏度和精確度，其工作原理基於磁通量量子化和量子干涉效應。RF SQUID只需要一個約瑟夫森接面(超導穿隧接面)，這可能使其生產成本較低，但靈敏度較低。DC SQUID主要有兩種類型：直流(DC)和射頻(RF)。DC SQUID的基本結構由兩個約瑟夫森接面組成，這些接面被一個薄材料所隔開形成弱連結。RF SQUID只需要一個約瑟夫森接面(超導穿隧接面)，這可能使其生產成本較低，但靈敏度較低。

直流超導量子干涉儀(DC SQUID)於1964年由福特研究實驗室(Ford Research Labs)的Robert Jaklevic、John J. Lambe、James Mercereau和Arnold Silver所發明，此後於1962年由Brian Josephson提出約瑟夫森效應，並於1963年由John Rowell和Philip Anderson在貝爾實驗室(Bell Labs)製造了第一個約瑟夫森接面[16]。它在超導迴路中並聯了兩個約瑟夫森接面。它基於直流約瑟夫森效應。在沒有任何外部磁場的情況下，輸入電流(input current) I_{input} 會平均分佈到兩個分支。若對超導迴路施加一

個小的外部磁場，則會開始在迴路中循環一個屏蔽電流 (screening current) I_s ，該電流會產生一個抵銷外加磁通量的磁場，並創造一個與外部磁通量成正比的額外約瑟夫森相位。感應電流 (induced current) 的方向與 I 在超導迴路的一個分支中相同，而在另一個分支中與 I 相反；總電流變為 $\frac{1}{2}I_{\text{input}} + I_s$ 在某一支，而 $\frac{1}{2}I_{\text{input}} - I_s$ 在另一支。一旦任一分支中的電流超過約瑟夫森接面的臨界電流 I_c ，則在接面上會出現電壓。

現在假設外部磁通量進一步增加，直到超過 Φ_0 ，即磁通量量子的一半。由於超導迴路所包圍的磁通量必須是磁通量量子的整數倍，因此 SQUID 不再顯著屏蔽磁通量，而是能量上更傾向於將其增加到 Φ_1 。此時電流反向流動，抵禦了所容許的磁通量 Φ_2 與略超過 Φ_3 的外部磁場之間的差異。隨著外部磁場的增加，電流逐漸減小，當磁通量剛好為 Φ_4 時電流為零，並且當外部磁場進一步增加時，電流再次反向。因此，電流的方向會週期性地改變，每當磁通量增加半整數倍數的 Φ_5 時就會改變一次，在最大電流時每增加半整數加整數倍數的 Φ_6 時會改變一次，而在整數倍數時電流為零。

若輸入電流大於 I_c ，則 SQUID 始終運作於電阻模式。此時，電壓即為外加磁場的函數，且週期等於 Φ_0 。由於直流 SQUID 的電流-電壓特性 (current-voltage characteristic) 具有遲滯現象 (hysteretic)，故在接面間連接一個並聯電阻 R 以消除遲滯（在內稟電阻 (intrinsic resistance) 足夠的情況下）。屏蔽電流為應用磁通量除以環路的自感。因此 $\Delta\Phi$ 可估算為 ΔV 磁通量至電壓轉換器) [17], [18]，如下所示：

$$\Delta V = R \cdot \Delta I, \quad (2.24)$$

$$2 \cdot \Delta I = 2 \cdot \frac{\Delta\Phi}{L}, \quad (2.25)$$

$$\Delta V = \frac{R}{L} \cdot \Delta\Phi. \quad (2.26)$$

其中 L 為超導環路的自感 (self inductance)，本節的討論假設迴路中存在完美的磁通量量子化。然而，這僅對具有較大自感的較大迴路才成立。根據上述關係，這也意味著電流和電壓變化較小。實際上，迴路的自感 L 並不這麼大。一般情況可通過引入一個參數

$$\lambda = \frac{i_c L}{\Phi_0} \quad (2.27)$$

其中 i_c 為 SQUID 的臨界電流。通常 λ 為一個數量級[19]。

2.1.6 磁通量量子化

在超導環中，磁通量是量子化的；其基本磁通量量子 (magnetic flux quantum) 為：

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \approx 2.067 \times 10^{-15} \quad (2.28)$$

Wb.

因此環中磁通量 Φ 只能取整數倍： $\Phi = n\Phi_0$ ，其中 n 是一個整數。這個量子化條件是 SQUID 能夠測量微弱磁場的根本原因。

2.1.7 DC SQUID 的工作機制：超導電流的量子干涉

DC SQUID 優雅地利用了前述的兩個基本原理——超導迴路中的磁通量量子化與約瑟夫森接面的電流-相位關係——來創造一個磁通量的量子干涉儀。透過在超導環上並聯兩個約瑟夫森界面，該元件能透過兩個超導電流路徑的量子力學干涉，對穿過迴路的磁通量變得敏感。本節將對理想對稱 DC SQUID 的總電流-相位關係進行形式推導，並詳細分析此干涉如何導致元件臨界電流的週期性調變，這正是其作為超靈敏磁力計功能的基礎。

2.1.7.1 對稱 DC SQUID 的定義與參數

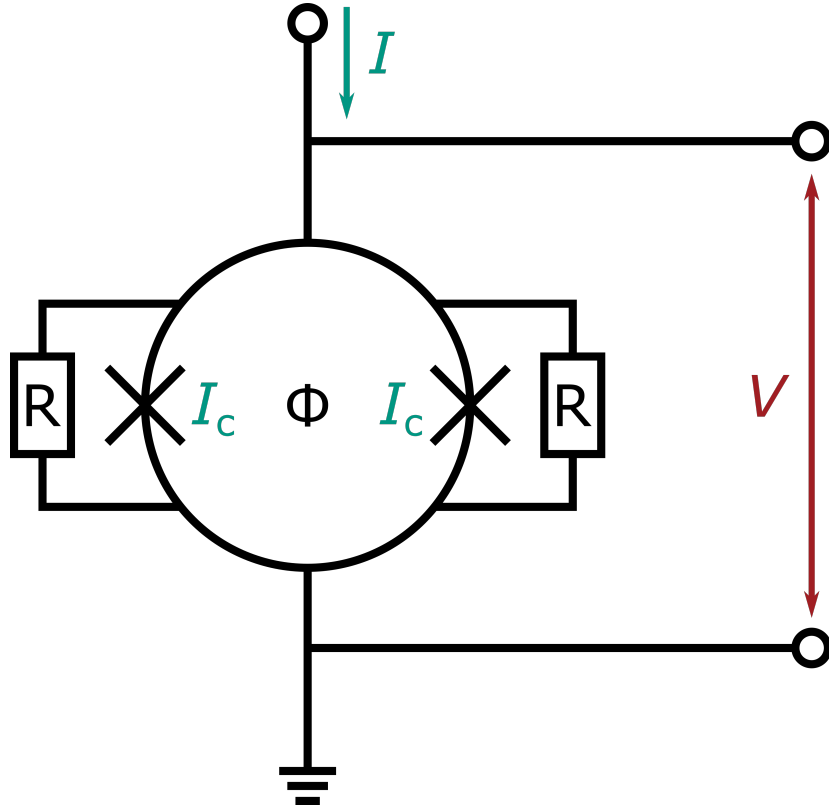


圖 1 DC SQUID 示意圖：(a) 兩個約瑟夫森接面（以叉號表示）並聯於一個電感為 L 的超導環上。偏置電流 I_b 分流通過兩個臂，外加磁通量 Φ_{ext} 穿過環路。(b) 描述 SQUID 動態的等效電路，其中每個接面由 RCSJ 模型表示。圖片來源：IMS, KIT[1]

DC SQUID 的結構如圖 圖 1 所示，由一個幾何自感為 L 的封閉超導迴路組成，該迴路被兩個並聯的約瑟夫森接面 JJ1 和 JJ2 中斷。偏置電流 I_b 從迴路一側注入，從另一側取出，使電流分流並流經包含接面的兩個臂。

對稱 DC SQUID 的概念指的是一個理想化模型，其中兩個接面和迴路的物理參數完全匹配。具體來說，假設滿足以下條件：

1. 相同的接面：兩個約瑟夫森接面具有相同的臨界電流 ($I_{c1} = I_{c2} = I_c$)、正常態電阻 ($R_{N1} = R_{N2} = R_N$) 和電容 ($C_1 = C_2 = C$)。
2. 對稱的電感：總迴路電感 L 被認為在干涉儀的兩個臂之間平均分配，因此臂 1 的電感為 $L_1 = \frac{L}{2}$ ，臂 2 的電感為 $L_2 = \frac{L}{2}$ 。

雖然沒有任何真實元件是完美對稱的，但這個模型提供了量子干涉的基本物理原理，並作為理解不對稱和其他非理想性影響的基準。SQUID 的行為由一組關鍵參數決定，這些參數結合了接面的內在屬性與迴路的幾何形狀。

2.1.7.2 總電流-相位關係的形式推導

DC SQUID 的核心特性是其總電流-相位關係，它描述了總超導電流如何依賴於有效相位差和磁通量。推導過程始於對稱 SQUID 迴路應用克希荷夫電流定律和磁通量量子化條件。

假設接面具有標準的正弦 CPR，則流經兩個臂的超導電流 I_1 和 I_2 為：

$$I_1 = I_c \sin(\varphi_1) \quad (2.29)$$

$$I_2 = I_c \sin(\varphi_2) \quad (2.30)$$

其中 φ_1 和 φ_2 分別是 JJ1 和 JJ2 上的規範不變相位差。流經 SQUID 的總超導電流 I_s 是兩個並聯支路電流的總和：

$$I_s = I_1 + I_2 = I_c(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \quad (2.31)$$

相位差 φ_1 和 φ_2 並非獨立，它們由穿過迴路的磁通量 Φ 耦合。如前所述，宏觀波函數的單值性要求，沿任何閉合超導迴路積分的總相位變化必須是 2π 的整數倍。當應用於穿過兩個接面的 SQUID 迴路時，此拓撲約束直接導致規範不變相位之間的以下關係：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \bmod 2\pi \quad (2.32)$$

此方程式是庫柏對的阿哈羅諾夫-玻姆效應的數學表達式；磁通量在超導電流可用的兩個量子力學路徑之間引入了相對相移。

為了簡化總電流的表達式，我們使用三角恆等式 $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ 。代入磁通量量子化條件中的 φ_1 和 φ_2 表達式，可得：

$$I_s = 2I_c \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (2.33)$$

將磁通量約束代入餘弦項，得到：

$$I_s = 2I_c \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (2.34)$$

此方程式即為對稱 DC SQUID 的總電流-相位關係。它顯示 SQUID 的行為類似於一個單一的有效約瑟夫森界面，其 CPR 為 $I_s = I_{\max}(\Phi) \sin(\varphi_{\text{avg}})$ ，其中 $\varphi_{\text{avg}} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ 是裝置的平均相位差，其有效臨界電流 $I_{\max}(\Phi)$ 是磁通量的函數。

2.1.7.3 SQUID 臨界電流的磁通量調變分析

推導出的總 CPR 揭示了 SQUID 的主要操作特性：其最大超導電流受磁通量的調變。整個 SQUID 的臨界電流，我們表示為 $I_{\max}(\Phi)$ ，是在給定磁通量 Φ 下，總超導電流 I_s 可達到的最大值。當平均相位項 $\sin(\varphi_{\text{avg}})$ 達到其最大值 ± 1 時，達到此最大值。因此，從總 CPR 中，我們可以直接寫出 SQUID 臨界電流的表達式：

$$I_{\max}(\Phi) = 2I_c \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right| \quad (2.35)$$

這個基本方程式描述了 SQUID 臨界電流作為穿過迴路的磁通量的函數的週期性調變。此關係的主要特點是：

- 週期性：臨界電流是磁通量 Φ 的週期函數，週期恰好為一個磁通量量子 Φ_0 。測得的臨界電流中的每次振盪對應於磁通量變化一個 Φ_0 。
- 建設性干涉：當磁通量是磁通量量子的整數倍時，即 $\Phi = n\Phi_0$ （其中 n 為整數），臨界電流達到其絕對最大值 $2I_c$ 。在這些磁通量值下，餘弦項為 ± 1 。這對應於兩臂之間的相位差為 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ，表示兩個超導電流完全同相並建設性地相加。
- 破壞性干涉：當磁通量是磁通量量子的半整數倍時，即 $\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$ ，臨界電流達到其最小值 0。在這些點上，餘弦項為 0。這對應於相位差為 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ ，表示兩個超導電流完全異相並完全抵消。

這種行為是宏觀量子干涉的直接而明確的表現。SQUID 作為庫柏對的量子干涉儀，其功能類似於邁克生或馬赫-曾德干涉儀對光子的作用，或雙縫實驗對電子的作用。SQUID 的兩個臂為超導電流從輸入端到輸出端提供了兩條不同的量子力學路徑。磁通量 Φ 作為一個控制旋鈕，連續調節這兩條路徑之間的相對相位差。當路徑同相時 ($\Phi = n\Phi_0$)，庫柏對穿過每條路徑的機率幅相加，導致總電流較大。當路徑異相時 ($\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$)，機率幅相減，導致總電流為零。因此，SQUID 臨界電流的週期性調變是由宏觀超導凝聚體的波狀性質產生的干涉圖樣。通過用電流偏置 SQUID 並測量產生

的電壓（取決於偏置電流是否超過與磁通量相關的臨界電流），可以以極高的靈敏度檢測到微小的磁通量變化。

2.1.8 非理想性對 SQUID 性能的影響

前述對理想對稱 DC SQUID 的分析提供了量子干涉的基本物理原理。然而，真實 SQUID 的性能和行為受到非理想因素的顯著影響，最主要的是超導迴路的有限電感和熱漲落的影響。一個全面的理論模型必須考慮這些效應，才能準確描述元件的動態並預測其最終靈敏度。電阻電容並聯 (RCSJ) 模型為納入這些非理想性提供了一個強大的框架，將 CPR 的靜態圖像轉變為在實際操作環境中 SQUID 相位演化的動態描述。

2.1.8.1 有限迴路電感的作用：屏蔽參數 β_L

在任何物理 SQUID 中，連接兩個約瑟夫森接面的超導迴路都具有非零的幾何自感 L 。此電感對元件對外部磁通量 Φ_{ext} 的響應有深遠的影響。當施加外部磁通量時，SQUID 會根據冷次定律和磁通量量子化原理，在迴路中感應出一個持續的循環屏蔽電流 I_{cir} 來抵抗變化。這個循環電流本身會產生一個磁通量 $\Phi_L = LI_{\text{cir}}$ 。因此，穿過迴路並控制量子干涉的總磁通量 Φ 不等於外部磁通量，而是外部磁通量和自感應磁通量之和：

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI_{\text{cir}} \quad (2.36)$$

循環電流可以用單個接面電流表示為 $I_{\text{cir}} = \frac{I_2 - I_1}{2}$ 。對於具有正弦 CPR 的相同接面，這變為：

$$I_{\text{cir}} = \frac{I_c}{2}(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = -I_c \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (2.37)$$

使用磁通量量子化條件 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ ，可簡化為：

$$I_{\text{cir}} = -I_c \cos(\varphi_{\text{avg}}) \sin\left(\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}\right) \quad (2.38)$$

這揭示了一個自洽的回饋迴路：總磁通量 Φ 決定了相位差，相位差決定了循環電流 I_{cir} ，而循環電流又貢獻於總磁通量 Φ 。此內在回饋的強度由無因次屏蔽參數 β_L 量化：

$$\beta_L \equiv \frac{2LI_c}{\Phi_0} \quad (2.39)$$

參數 β_L 可解釋為屏蔽電流可產生的最大磁通量（當 I_{cir} 達到其最大可能值 I_c 時），並以 $\frac{\Phi_0}{2}$ 進行歸一化。它代表了 SQUID 內部回饋機制的增益，該機制試圖穩定總磁通量以抵抗外部擾動。 β_L 的值對 SQUID 的行為至關重要：

- 可忽略的屏蔽 ($\beta_L \ll 1$): 當電感或臨界電流很小時，自感應磁通量與磁通量量子相比可以忽略不計 ($\Phi_L \ll \Phi_0$)。在此極限下， $\Phi \approx \Phi_{\text{ext}}$ ，SQUID 的行為符合理想模型。臨界電流隨外部磁通量的調變深度接近 100%，在半整數磁通量量子處完全抵消。
- 強屏蔽 ($\beta_L \gg 1$): 當電感較大時，屏蔽效應占主導地位。循環電流將調整以幾乎完全抵消外部磁通量的任何變化，使總內部磁通量 Φ 釘扎在最接近 Φ_0 的整數倍處。這種強烈的負回饋極大地抑制了 SQUID 總臨界電流的調變。
- 最佳範圍 ($\beta_L \approx 1$): 對於大多數應用，特別是作為靈敏磁力計，需要達到最佳平衡。通常選擇 $\beta_L \approx 1$ 的值。此值足夠大以提供強耦合，但又足夠小以維持顯著的非磁滯調變。

2.1.8.2 動態行為與熱漲落：RCSJ 模型

當 SQUID 的偏置電流 I_b 超過其與磁通量相關的臨界電流 $I_{\text{max}}(\Phi)$ 時，它會轉變為電阻態，並在其端子間出現有限電壓。為了模擬這種動態耗散行為，我們採用了電阻電容並聯（**RCSJ**）模型。在此模型中，每個理想的約瑟夫森元件（由其 CPR 描述）與一個電阻 R_N （代表準粒子穿隧）和一個電容 C （代表接面的幾何電容）並聯。

通過對 SQUID 電路的兩個迴路應用克希荷夫定律，可以推導出一組關於相位差 φ_1 和 φ_2 的耦合二階非線性微分方程。在任何有限溫度下，分路電阻都會表現出約翰遜-奈奎斯特熱噪聲，這表現為與每個接面並聯的波動噪聲電流源 $I_{Ni}(t)$ 。得到的運動方程是一組耦合的朗之萬方程：

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_N} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_c \sin \varphi_1 = \frac{I_b}{2} - I_{\text{cir}} + I_{N1}(t) \quad (2.40)$$

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_N} \frac{d\varphi_2}{dt} + I_c \sin \varphi_2 = \frac{I_b}{2} + I_{\text{cir}} + I_{N2}(t) \quad (2.41)$$

這些方程通過循環電流 I_{cir} 耦合，完全描述了在存在熱噪聲的情況下 SQUID 的經典動力學。

SQUID 的動力學可以形象地看作一個虛構粒子在一個二維勢能面上運動，受到偏置電流的傾斜力、電阻的粘滯阻力和熱噪聲電流的隨機踢動。當 $I_b < I_{\text{max}}$ 時，粒子被困在一個勢阱中，對應於零電壓超導態。熱漲落可能提供足夠的能量使粒子越過勢壘，這種事件稱為熱激活相滑移 (TAPS)。每次相滑移發生時，接面上的相位差變化約 2π ，根據第二約瑟夫森關係，這會產生一個短暫的電壓脈衝。在電阻態下 ($I_b > I_{\text{max}}$)，相滑移以高速率發生，這些滑移的時間平均速率產生了測得的直流電壓。因此，CPR 通過塑造勢能景觀，直接決定了相滑移的能壘高度，從而控制了 SQUID 的電流-電壓特性、動態響應和內在噪聲性能。

2.1.9 結論：綜合與未來展望

本分析為理解對稱 DC SQUID 中的電流-相位關係提供了一個全面的理論框架。從宏觀量子力學的基本原理到實際 SQUID 的複雜動力學的過程，揭示了一套緊密相連的物理概念。出現的核心論點是，組成約瑟夫森接面的電流-相位關係至關重要。CPR 不僅僅是一個描述性參數，而且是弱連結中電荷傳輸的微觀物理與整個元件的宏觀、可測量量子行為之間的基本聯繫。

對非理想性的分析證明了實際元件參數的關鍵作用。由屏蔽參數 β_L 量化的有限迴路電感，作為一種內在回饋機制，可以屏蔽外部場並降低臨界電流的調變深度。通過 RCSJ 模型納入的熱漲落，驅動了系統的動力學，引起熱激活相滑移，從而產生 SQUID 的電壓響應和內在噪聲。

對非正弦 CPR 的探索突顯了該領域的現代視角。標準的正弦關係現在被理解為更通用的多諧波描述的低透明度極限。接面 CPR 中較高諧波的存在，導致 SQUID 中出現複雜的非餘弦磁通量調變模式，將該元件轉變為能夠探測其自身組分諧波含量的光譜工具。

該領域的未來展望與電流-相位關係的持續探索和工程設計密切相關。材料科學的進步，包括基於半導體、石墨烯和拓撲絕緣體的混合接面的發展，有望提供對 CPR 前所未有的控制。對這些新型系統中 CPR 的精確測量和理論理解，對於釋放其潛力至關重要。對稱 SQUID 曾主要作為傳感器，將繼續發展成為一個不可或缺的平台，既用於研究基本的量子傳輸，也用於構建下一代超導電子學和量子信息處理器。

3 超導體中的宏觀量子現象導論

超導量子干涉儀 (Superconducting Quantum Interference Device, SQUID) 是應用量子力學的典範，其運作不僅僅是受到量子效應的影響，而是在宏觀、可測量的尺度上由這些效應所根本定義。它作為磁通量偵測器，具有無與倫比的靈敏度，能夠測量到僅有幾個飛特斯拉 (femtotesla) 的微弱磁場，這在從生物磁學 (biomagnetism) 和地球物理探測 (geophysical surveying) 到基礎物理和量子計算等領域開闢了新的前沿。要理解 SQUID 的原理，必須先深入探討超導性 (superconductivity) 這個深刻且往往違反直覺的世界，這是一種物質狀態，其特徵在於集體量子相干性貫穿材料的整個物理維度。本導論章節旨在建立超導態的基本概念——即宏觀量子凝聚 (macroscopic quantum condensate) 的形成、磁場的排出 (邁斯納效應) 以及磁通量的量子化 (quantization of magnetic fluxoid)——這些概念共同為理解約瑟夫森效應以及作為 SQUID 核心的量子干涉現象提供了必要的理論框架。

3.1 庫柏對凝聚與宏觀波函數 (The Cooper Pair Condensate and the Macroscopic Wavefunction)

當一種材料冷卻到其特有的臨界溫度 T_C 以下，進入超導狀態時，這代表了在凝聚態物理中觀察到的最引人注目的相變之一。此現象的微觀起源由巴丁-庫柏-施里弗 (Bardeen-Cooper-Schrieffer, BCS) 理論在 1957 年闡明，至今仍是我們理解傳統超導性的基石。根據 BCS 理論，在溫度低於 T_C 時，電子之間一種有效的、儘管微弱的吸引力可以克服它們之間的庫倫排斥力。這種吸引力是由材料的晶格振動，即聲子 (phonons)，所介導的。一個電子穿過晶格時會使正離子晶格變形，產生一個瞬時的正電荷區域，從而吸引第二個電子。這種聲子介導的交互作用導致兩個動量與自旋相反的電子形成束縛態，這個量子力學實體被稱為庫柏對 (Cooper pair)。

庫柏對的束縛能雖然與典型的電子能量尺度相比很小，但卻至關重要。對於溫度 $T < T_C$ 的情況，此束縛能大於可用於散射的熱能，使得庫柏對能夠保持穩定。由於庫柏對由兩個費米子 (fermions) (電子) 組成，它們擁有整數自旋，因此表現得像複合玻色子 (bosons)。這種玻色子性質是宏觀量子現象出現的關鍵。在一個類似於玻色-愛因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensation) 的現象中，材料中一大部分的庫柏對會「凝聚」到單一的集體量子基態。這種凝聚意味著處於此狀態的所有庫柏對共享相同的量子力學相位並協同運動，不會與雜質或晶格振動發生散射，這就是零電阻的微觀起源。

這種凝聚最有力的結果是，整個庫柏對系綜(在一個宏觀樣本中數量可達數萬億)可以用一個單一的、複數值的宏觀波函數 (macroscopic wavefunction) 來描述。這個波函數，通常表示為 $\Psi(\vec{r})$ ，其形式類似於單一量子粒子：

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{n_s(\vec{r})} e^{i\varphi(\vec{r})} \quad (3.1)$$

此處， $n_s(\vec{r})$ 代表庫柏對的局域密度，使得 $|\Psi(\vec{r})|^2 = n_s(\vec{r})$ ，而 $\varphi(\vec{r})$ 是宏觀量子相位，在沒有電流或磁場的情況下，它在單一連續的超導體中是均勻的。這個單一波函數的存在，在宏觀距離上擁有明確定義的相位，是推導出超導體定義特徵以及 SQUID 運作原理的核心統一原則。它標誌著一種物質狀態，其中通常僅限於原子尺度的量子相位相關性，在實驗室尺度的維度上得以展現。

3.2 邁斯納效應 (The Meissner Effect)

超導體最引人注目且具定義性的特性之一，是它能主動將磁通量從其內部排出，此現象稱為邁斯納效應 (Meissner effect)。這將超導體與假設的「完美導體」(僅具零電阻的材料) 區分開來。當一個材料在外部磁場存在下被冷卻至其臨界溫度 T_C 以下時，它不僅僅是像完美導體那樣捕獲已存在的磁通線，而是會在表面產生持久的、無耗散的電流，稱為屏蔽電流 (screening currents)。

這些屏蔽電流的流動方向和大小恰到好處，能夠產生一個內部磁場，完全抵銷外部施加的磁場。結果是，超導體內部各處的總磁場 \vec{B} 變為零。這種行為表明，超導性是一種真正的熱力學基態，而不僅僅是無限導電的狀態。從宏觀電磁學的角度來看，

超導體表現為完美的抗磁體 (diamagnet)。磁化強度 \vec{M} 與外加磁場強度 \vec{H} 的關係為 $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ 。由於超導體內部 $\vec{B} = 0$ ，因此 $\vec{M} = -\vec{H}$ ，這意味著磁化率 (magnetic susceptibility) $\chi = -1$ 。邁斯納效應是宏觀量子態對抗外部磁場擾動的剛性的直接結果；系統消耗能量產生屏蔽電流，以維持其相位相關基態的完整性。

3.3 超導環中的磁通量量子化 (Fluxoid Quantization in a Superconducting Ring)

當超導體被製成閉合迴路或環形時，量子相位 $\varphi(\vec{r})$ 的宏觀性質引出了另一個深刻的結果。宏觀波函數 $\Psi(\vec{r})$ 在空間中任何一點都必須是單值的 (single-valued) 這一基本要求意味著，如果沿著超導體內的任何閉合路徑 C 繞行並回到起點，波函數的相位只能改變 2π 的整數倍。在數學上，此條件表示為：

$$\oint_C \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = 2\pi n \quad (3.2)$$

其中 n 為任意整數。這是由波函數結構所施加的拓撲約束。

這個相位約束可以透過庫柏對（電荷 $q = 2e$ ）的正則動量 (canonical momentum) 的表達式與電磁場聯繫起來，該表達式包含來自磁向量位 (magnetic vector potential) \vec{A} 的貢獻。超導電流的速度與相位的梯度及向量位有關。將此關係沿閉合迴路 C 積分，可導出一個稱為磁通量 (magnetic fluxoid) 的量的量子化：

$$\oint_C (\Lambda \vec{J}_s + \vec{A}) \cdot d\vec{l} = n \frac{h}{2e} = n \Phi_0 \quad (3.3)$$

其中， \vec{J}_s 是超導電流密度 (supercurrent density)， Λ 是一個與材料性質相關的常數，而 $\Phi_0 = \frac{h}{2e} \approx 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$ 是磁通量量子 (magnetic flux quantum)。磁通量量子分母中出現電荷 $2e$ ，是庫柏對理論最早且最直接的證明之一。

對於一個厚的超導環（其厚度遠大於磁穿透深度 (magnetic penetration depth)），積分路徑 C 可以選擇在超導材料深處，那裡的屏蔽電流已衰減為零，即 $\vec{J}_s = 0$ 。在這個重要的極限下，磁通量量子化條件簡化為穿過迴路的磁通量 Φ 本身的量子化。對向量

位項應用斯托克斯定理 (Stokes' theorem) ($\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi$)，條件變為：

$$\Phi = n\Phi_0 \quad (3.4)$$

此結果指出，困在超導環內的磁通量不能取任意值，而是被限制為基本通量量子的整數倍。這個宏觀量子約束與約瑟夫森效應一起，是所有 SQUID 運作所依據的核心物理原理。

4 約瑟夫森接面：一個相干的量子弱連結 (The Josephson Junction: A Coherent Quantum Weak Link)

SQUID 的基本主動元件是約瑟夫森接面 (Josephson junction, JJ)，這是一種在兩個超導電極之間建立「弱連結」(weak link) 的裝置。此效應最初由布萊恩·約瑟夫森 (Brian Josephson) 在 1962 年從理論上預測，描述了庫柏對穿過此連結的相干量子力學穿隧 (coherent quantum mechanical tunneling)。此現象不僅僅是漏電流，而是一種真正的超導電流，由兩個超導體中宏觀波函數的相位相關性所維持。此超導電流與接面兩側相位差之間的關係，被稱為電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)，可以說是 JJ 最重要的特性。它決定了接面對外部刺激的反應，並作為在 SQUID 中觀察到的量子干涉效應的基礎。本節將詳細介紹約瑟夫森關係的理論處理，並探討在傳統的正弦 CPR 及其在先進接面架構中發現的更複雜的非正弦變體中所蘊含的豐富物理。

4.1 第一及第二約瑟夫森關係 (The First and Second Josephson Relations)

約瑟夫森接面可以透過多種方式實現，但最典型的例子是超導體-絕緣體-超導體 (superconductor-insulator-superconductor, S-I-S) 穿隧接面，其中兩個超導薄膜被一層非常薄的絕緣障壁隔開，厚度通常只有幾奈米。在古典物理中，這個障壁在低電壓下會阻止任何電流通過。然而，在量子力學中，兩個超導體中庫柏對凝聚體的宏觀波函數可以穿透絕緣區並發生重疊。這種波函數的「鎖定」在障壁上建立了一個相位相關的連結，使得庫柏對能夠在不被破壞的情況下穿隧。這個相干穿隧過程由兩個基本方程式描述。

第一約瑟夫森關係 (First Josephson Relation)，也稱為直流約瑟夫森效應 (DC Josephson effect)，指出在完全沒有外加電壓的情況下，一個無耗散的超導電流 I_s 可以

流過接面。此超導電流的大小和方向由兩個超導電極宏觀波函數之間的規範不變相位差 (gauge-invariant phase difference) $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 決定。對於一個簡單的穿隧接面，此關係呈現正弦形式：

$$I_s = I_c \sin(\varphi) \quad (4.1)$$

這裡， I_c 是接面的臨界電流 (critical current)，代表能夠無耗散流動的最大超導電流。臨界電流是一個關鍵參數，取決於接面的材料性質、幾何形狀和溫度。這個方程式意義深遠：它描述了一個由量子力學相位差而非電壓驅動的直流電流，是宏觀量子相關性的直接體現。

第二約瑟夫森關係 (Second Josephson Relation)，或稱交流約瑟夫森效應 (AC Josephson effect)，描述了當在接面上維持一個直流電壓 V 時，相位差隨時間的演變。相位差不是靜態的，而是根據以下公式隨時間演變：

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V \quad (4.2)$$

其中 \hbar 是約化普朗克常數 (reduced Planck's constant)。對一個恆定電壓 V 積分此方程式可得 $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{2eV}{\hbar} t$ 。將這個隨時間變化的相位代入第一約瑟夫森關係，會發現超導電流以一個高頻振盪，稱為約瑟夫森頻率 (Josephson frequency)， $f_J = \frac{2e}{h} V$ 。對於 1 微伏 (microvolt) 的外加電壓，此頻率約為 483.6 MHz。電壓和頻率之間這種極其精確的關係，僅依賴於基本常數，是如此穩固，以至於已被採納為國際電壓標準。

4.2 標準正弦電流-相位關係 (The Canonical Sinusoidal Current-Phase Relation)

正弦 CPR， $I_s = I_c \sin(\varphi)$ ，是理想 S-I-S 穿隧接面的標準形式，並作為理解基本 SQUID 操作的基礎模型。此形式源於單一庫柏對穿隧障壁的最低階量子力學過程。此關係的一個更正式的理论基礎由安貝高卡-巴拉托夫 (Ambegaokar-Baratoff, AB) 公式提供，該公式在零溫度下，將理想穿隧接面的臨界電流與其正常態電阻 R_N 及電極的超導能隙 Δ 聯繫起來：

$$I_c R_N = \frac{\pi \Delta}{2e} \tanh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right) \quad (4.3)$$

在零溫度 ($T=0$) 時，此式簡化為 $I_c R_N = \frac{\pi \Delta}{2e}$ 。此公式突顯出，在穿隧接面特有的低透明度極限下，最大超導電流與能隙能量成正比，與正常態電阻成反比。在此機制下 CPR 的正弦性質，反映了穿隧的機率幅是滿足所需對稱性的相位差的最簡單週期函數。雖然此模型對於傳統的低溫 T_c 穿隧接面非常成功，但必須認識到它代表了一個特定的極限情況。大量現代研究表明，CPR 可能會顯著偏離簡單的正弦波，這些偏離不僅僅是微擾，而是弱連結內根本不同的電荷傳輸機制的標誌。

4.3 先進接面架構中非正弦 CPR 概觀 (An Overview of Non-Sinusoidal CPRs in Advanced Junction Architectures)

CPR 的形狀是一個強大的診斷工具，能直接洞察接面的安德烈夫束縛態 (Andreev bound state, ABS) 能譜，該能譜描述了限制在弱連結內的準粒子 (quasiparticles) 的能階。隨著材料科學和奈米製造技術的進步，已開發出多種多樣的約瑟夫森接面，每種都展現出獨特的 CPR 特性。因此，正弦關係不應被視為標準，而應被視為更通用的多諧波描述的低透明度極限。一個通用的 CPR 可以表示為傅立葉級數 (Fourier series)：

$$I_s(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\varphi) + B_n \cos(n\varphi) \quad (4.4)$$

高次諧波 ($n > 1$) 或餘弦項的存在，意味著偏離了簡單的 S-I-S 模型，並指向更複雜的基礎物理。表 2 提供了不同接面類型中 CPR 的比較概觀。

接面類型	弱連結材料	主要傳輸機制	典型 CPR 形式	關鍵特性與相關片段
S-I-S (穿隧)	絕緣體	單一庫柏對穿隧	$I_s = I_c \sin(\varphi)$	標準正弦關係，低透明度。

S-N-S (金屬 / 半導體)	正常金屬、石墨烯、半導體	多重安德烈夫反射 (MAR)	$I_s \propto \sum A_n \sin(n\varphi)$	非正弦、偏斜；諧波取決於通道透明度。
S-F-S (鐵磁性)	鐵磁體	自旋過濾穿隧/鄰近效應	$I_s = I_c \sin(\varphi + \varphi_0)$	可表現出內在相移，導致 π -接面 ($\varphi_0 = \pi$)。
拓撲	拓撲絕緣體	安德烈夫束縛態、馬約拉納模態	具有 4π 週期性的 $I_{s(\varphi)}$	預測的分數約瑟夫森效應；對磁場敏感。

高透明度接面 (**High-Transparency Junctions, S-N-S**)：在弱連結是正常金屬 (N)、半導體 (Sm) 或石墨烯等材料的接面中，庫柏對傳輸的障壁遠低於 S-I-S 接面。這類高透明度接面通常被描述為處於「彈道」(ballistic) 或「擴散」(diffusive) 極限，取決於電荷載子是無散射地穿過連結，還是經歷多次散射事件。在這些系統中，一種稱為安德烈夫反射 (Andreev reflection) 的過程主導電荷傳輸。來自正常區的電子入射到 N-S 介面時，會被逆向反射為一個電洞，同時在超導體中產生一個庫柏對。在短接面中，此過程可多次發生，準粒子在兩個超導電極之間來回反彈。多個庫柏對的相干傳輸同時變得可能，從而在 CPR 中產生高次諧波。這導致 CPR 呈非正弦且常被描述為「偏斜」(skewed) 或「鋸齒狀」(saw-toothed)，其中電流最大值偏離 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 。其精確形狀和諧波含量取決於弱連結中導電通道的數量和透明度。

鐵磁性接面 (**Ferromagnetic Junctions, S-F-S**)：當弱連結是鐵磁性材料時，鐵磁體內的交換場 (exchange field) 會與庫柏對中電子的自旋相互作用。這種相互作用導致庫柏對的波函數在穿過 F 層時發生空間振盪。根據 F 層的厚度和交換場的強度，波函數的相位在穿過接面時可能會移動 π 。這會產生一個「 π -接面」，其 CPR 形式為 $I_s =$

$I_c \sin(\varphi + \pi) = -I_c \sin(\varphi)$ 。在這樣的界面中，系統的基態出現在相位差為 $\varphi = \pi$ 時，與傳統界面的 $\varphi = 0$ 基態形成鮮明對比。

拓撲界面 (Topological Junctions)：當前研究的一個前沿領域是使用拓撲絕緣體 (topological insulators, TIs) 製造約瑟夫森界面。TIs 是一種體內絕緣，但在其表面擁有受保護的、自旋-動量鎖定 (spin-momentum-locked) 的導電態的材料。當 TI 被放置在兩個超導體之間時，預測鄰近效應 (proximity effect) 可以在這些表面態中誘導出拓撲超導性 (topological superconductivity) 狀態。這種奇異狀態預計會宿主馬約拉納束縛態 (Majorana bound states)，它們是自身的反粒子。預測這些態的存在將從根本上改變約瑟夫森效應，導致「分數約瑟夫森效應」(fractional Josephson effect)，其中 CPR 具有 4π 的週期性，而非通常的 2π 。這是因為單個費米子（一個準粒子）可以穿過界面，改變費米子宇稱 (fermion parity) 並使相位移動 2π ，但系統只有在第二次此類傳輸後才返回其原始狀態，總相位演變為 4π 。對此效應的實驗確認是一個熱門研究領域，因為它將為馬約拉納模態的存在提供強有力的證據，而馬約拉納模態是容錯量子計算 (fault-tolerant quantum computing) 提案中的關鍵組件。然而，必須小心，因為非拓撲效應，例如測量電路中的有限迴路電感，有時會產生模仿 4π 週期 CPR 的實驗信號。

5 對稱直流 SQUID：超導電流的量子干涉 (The Symmetric DC SQUID: Quantum Interference of Supercurrents)

直流 SQUID (DC SQUID) 是一種巧妙利用前述兩個基本原理——超導迴路中的磁通量子化與約瑟夫森接面的電流-相位關係——來創造一個磁通量子干涉儀的裝置。透過將兩個約瑟夫森接面並聯在一個超導環上，該裝置透過兩個超導電流路徑的量子力學干涉，對穿過迴路的磁通量變得敏感。本節將對理想化的對稱直流 SQUID 的總電流-相位關係進行形式推導，隨後詳細分析這種干涉如何導致裝置臨界電流的週期性調變，這是其作為超靈敏磁力計功能的基礎。

5.1 對稱直流 SQUID 的定義與參數 (Definition and Parameters of a Symmetric DC SQUID)

直流 SQUID，如圖 1 示意圖所示，由一個幾何自感為 L 的閉合超導迴路組成，該迴路被兩個並聯的約瑟夫森接面 JJ1 和 JJ2 中斷。偏置電流 I_b 從迴路一側注入，從另一側取出，導致電流分流並流經包含接面的兩個臂。「對稱直流 SQUID」的概念指的是一個理想化模型，其中兩個接面和迴路的物理參數完全匹配。具體來說，假設滿足以下條件：

1. 相同的接面：兩個約瑟夫森接面具有相同的臨界電流 ($I_{c1} = I_{c2} = I_c$)、正常態電阻 ($R_{N1} = R_{N2} = R_N$) 和電容 ($C_1 = C_2 = C$)。
2. 對稱的電感：總迴路電感 L 被認為在干涉儀的兩個臂之間平均分配，使得臂 1 的電感為 $L_1 = \frac{L}{2}$ ，臂 2 的電感為 $L_2 = \frac{L}{2}$ 。

雖然沒有任何真實裝置是完美對稱的，但這個模型提供了量子干涉的基本物理，並作為理解不對稱性和其他非理想性影響的基準。SQUID 的行為由一組關鍵參數決定，如表 1 所總結，這些參數結合了接面的內在屬性與迴路的幾何形狀。

參數	符號	定義	物理意義與相關片段
臨界電流	I_c	單一 JJ 可通過的最大無耗散電流。	定義了約瑟夫森耦合的能量尺度 ($E_J = \hbar \frac{I_c}{2e}$)。
正常電阻	R_N	JJ 在正常狀態下的電阻。	決定耗散電流和詹森雜訊 (Johnson noise)。
接面電容	C	S-I-S 結構的內在電容。	決定充電能 ($E_C = \frac{e^2}{2C}$) 和接面動力學。

迴路電感	L	SQUID 迴路的幾何自感。	儲存磁能；負責屏蔽效應。
史都華-麥克伯參數 (Stewart-McCumber Parameter)	β_C	$2\pi I_c R_N^2 \frac{C}{\Phi_0}$	無因次 阻尼參數；區分欠阻尼 ($\beta_C > 1$ ，磁滯) 和過阻尼 ($\beta_C < 1$ ，非磁滯) 界面動力學。
屏蔽參數 (Screening Parameter)	β_L	$2L \frac{I_c}{\Phi_0}$	量化循環電流對磁通的屏蔽強度；決定調變深度。

5.2 總電流-相位關係的形式推導 (Formal Derivation of the Total Current-Phase Relation)

直流 SQUID 的核心特性是其總電流-相位關係，它描述了總超導電流如何同時依賴於一個有效相位差和磁通量。推導過程始於對對稱 SQUID 迴路應用克希荷夫電流定律 (Kirchhoff's current law) 和磁通量量子化條件。假設接面具有標準的正弦 CPR，則通過兩個臂的超導電流 I_1 和 I_2 為：

$$I_1 = I_c \sin(\varphi_1) \quad (5.1)$$

$$I_2 = I_c \sin(\varphi_2) \quad (5.2)$$

其中 φ_1 和 φ_2 分別是 JJ1 和 JJ2 兩端的規範不變相位差。流經 SQUID 的總超導電流 I_s 是兩個並聯支路電流的總和：

$$I_s = I_1 + I_2 = I_c (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \quad (5.3)$$

相位差 φ_1 和 φ_2 並非獨立，它們透過穿過迴路的磁通量 Φ 耦合。如第 1.3 節所述，宏觀波函數的單值性要求，沿任何閉合超導迴路積分的總相位變化必須是 2π 的整數倍。當應用於通過兩個接面的 SQUID 迴路時，這個拓撲約束直接導致規範不變相位之間的以下關係：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \bmod 2\pi \quad (5.4)$$

這個方程式是庫柏對的阿哈羅諾夫-玻姆效應 (Aharonov-Bohm effect) 的數學表達式；磁通量在超導電流可用的兩個量子力學路徑之間引入了相對相移。為了簡化總電流的表達式，我們使用三角恆等式 $\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ 。代入磁通量量子化條件中的 φ_1 和 φ_2 表達式，可得：

$$I_s = 2I_c \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (5.5)$$

將磁通約束代入餘弦項，得到：

$$I_s = 2I_c \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (5.6)$$

這個方程式是對稱直流 SQUID 的總電流-相位關係。它表明 SQUID 的行為像一個單一的、有效的約瑟夫森界面，其 CPR 為 $I_s = I_{\max(\Phi)} \sin(\varphi_{\text{avg}})$ ，其中 $\varphi_{\text{avg}} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ 是裝置的平均相位差，其有效臨界電流 $I_{\max(\Phi)}$ 是磁通量的函數。

5.3 SQUID 臨界電流的磁通調變分析 (Analysis of the Flux Modulation of the SQUID Critical Current)

推導出的總 CPR 揭示了 SQUID 的主要操作特性：其最大超導電流受磁通量的調變。整個 SQUID 的臨界電流，我們表示為 $I_{\max(\Phi)}$ ，是在給定磁通量 Φ 下，總超導電流 I_s 能達到的最大值。當平均相位項 $\sin(\varphi_{\text{avg}})$ 達到其最大值 ± 1 時，達到此最大值。因此，從總 CPR 中，我們可以直接寫出 SQUID 臨界電流的表達式：

$$I_{\max(\Phi)} = 2I_c \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right| \quad (5.7)$$

這個基本方程式描述了 SQUID 臨界電流作為穿過迴路的磁通量的函數的週期性調變。此關係的關鍵特徵是：

- 週期性：臨界電流是磁通量 Φ 的週期函數，週期恰好為一個磁通量量子 Φ_0 。測得的臨界電流每次振盪對應於磁通量變化一個 Φ_0 。
- 建設性干涉：當磁通量是磁通量量子的整數倍，即 $\Phi = n\Phi_0$ (n 為整數) 時，臨界電流達到其絕對最大值 $2I_c$ 。在這些磁通值下，餘弦項為 ± 1 。這對應於兩臂之間的相位差為 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ，意味著兩個超導電流完全同相並建設性地相加。
- 破壞性干涉：當磁通量是磁通量量子的半整數倍，即 $\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$ 時，臨界電流達到其最小值 0。在這些點上，餘弦項為 0。這對應於相位差為 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$ ，意味著兩個超導電流完全異相並完全抵消。

這種行為是宏觀量子干涉的直接而明確的體現。SQUID 作為庫柏對的量子干涉儀，其功能類似於邁克生 (Michelson) 或馬赫-曾德 (Mach-Zehnder) 干涉儀對光子的作用，或雙縫實驗對電子的作用。SQUID 的兩個臂為超導電流從輸入端到輸出端提供了兩條不同的量子力學路徑。磁通量 Φ 作為一個控制旋鈕，連續調節這兩條路徑之間的相對

相位差。當路徑同相時 ($\Phi = n\Phi_0$)，庫柏對穿過每條路徑的機率幅相加，導致總電流很大。當路徑異相時 ($\Phi = (n + \frac{1}{2})\Phi_0$)，機率幅相減，導致總電流為零。因此，SQUID 臨界電流的週期性調變是由宏觀超導凝聚體的波狀性質產生的干涉圖案。通過用電流偏置 SQUID 並測量產生的電壓（取決於偏置電流是否超過依賴於磁通的臨界電流），人們可以以非凡的靈敏度檢測磁通量的微小變化。

6 非理想性對 SQUID 性能的影響 (The Influence of Non-Idealities on SQUID Performance)

前述對理想、對稱直流 SQUID 的分析提供了量子干涉的基本物理原理。然而，真實世界中 SQUID 的性能和行為受到非理想因素的顯著影響，其中最主要的是超導迴路的有限電感和熱漲落 (thermal fluctuations) 的效應。一個全面的理論模型必須考慮這些效應，才能準確描述裝置的動力學並預測其最終靈敏度。電阻與電容並聯界面 (Resistively and Capacitively Shunted Junction, RCSJ) 模型為納入這些非理想性提供了一個強大的框架，將 CPR 的靜態圖像轉化為在真實操作環境中 SQUID 相位演化的動態描述。

6.1 有限迴路電感的作用：屏蔽參數 β_L (The Role of Finite Loop Inductance: The Screening Parameter β_L)

在任何物理 SQUID 中，連接兩個約瑟夫森接面的超導迴路都具有非零的幾何自感 L 。此電感對裝置對外部磁通量 Φ_{ext} 的響應有深遠的影響。當施加外部磁通時，SQUID 會根據冷次定律 (Lenz's law) 和磁通量量子化原理，在迴路中感應出一個持久的、循環的屏蔽電流 I_{cir} ，以抵抗變化。這個循環電流本身會產生一個磁通量 $\Phi_L = LI_{\text{cir}}$ 。因此，穿過迴路並決定量子干涉的總磁通量 Φ 不等於外部磁通量，而是外部磁通與自感應磁通之和：

$$\Phi = \Phi_{\text{ext}} + LI_{\text{cir}} \quad (6.1)$$

循環電流可以用個別界面電流表示為 $I_{\text{cir}} = \frac{I_2 - I_1}{2}$ 。對於具有正弦 CPR 的相同界面，這變為：

$$I_{\text{cir}} = \frac{I_c}{2}(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = -I_c \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \quad (6.2)$$

使用磁通量量子化條件 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ ，此式簡化為：

$$I_{\text{cir}} = -I_c \cos(\varphi_{\text{avg}}) \sin\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (6.3)$$

這揭示了一個自洽的回饋迴路：總磁通量 Φ 決定了相位差，相位差決定了循環電流 I_{cir} ，而循環電流又反過來貢獻於總磁通量 Φ 。這種內在回饋的強度由無因次的屏蔽參數 β_L 量化：

$$\beta_L \equiv \frac{2LI_c}{\Phi_0} \quad (6.4)$$

參數 β_L 可解釋為屏蔽電流（當 I_{cir} 達到其最大可能值 I_c 時）所能產生的最大磁通量，並以 $\frac{\Phi_0}{2}$ 進行歸一化。它代表了 SQUID 內部回饋機制的增益，該機制試圖穩定總磁通量以抵抗外部擾動。 β_L 的值對 SQUID 的行為至關重要：

- 可忽略的屏蔽 ($\beta_L \ll 1$): 當電感或臨界電流很小時，自感應磁通量與磁通量量子相比可以忽略不計 ($\Phi_L \ll \Phi_0$)。在此極限下， $\Phi \approx \Phi_{\text{ext}}$ ，SQUID 的行為符合第三節推導的理想模型。臨界電流隨外部磁通的調變深度很深，在半整數磁通量量子處接近 100% 的抵消。這對應於兩個接面相位之間的剛性耦合，完全由外部磁通決定。
- 強屏蔽 ($\beta_L \gg 1$): 當電感很大時，屏蔽效應佔主導地位。循環電流會調整以幾乎完全抵消外部磁通的任何變化，使總內部磁通 Φ 釘扎在最接近 Φ_0 整數倍的位置。這種強烈的負回饋極大地抑制了 SQUID 總臨界電流的調變。調變深度 $\Delta \frac{I_{\text{max}}}{2I_c}$ 大約與 $\frac{1}{\beta_L}$ 成比例。SQUID 對外部磁通變化的靈敏度大大降低。
- 最佳區域 ($\beta_L \approx 1$): 對於大多數應用，特別是作為靈敏磁力計，需要達到最佳平衡。通常選擇 $\beta_L \approx 1$ 的值。這個值足夠大，可以為磁通變壓器提供強耦合，但又足夠小，以維持裝置特性的顯著、非磁滯調變。如果 β_L 變得太大（通常 $\beta_L > 1$ ）， Φ 與 Φ_{ext} 之間的關係可能變為多值的，導致磁滯和不穩定的行為。

6.2 動態行為與熱漲落：RCSJ 模型 (Dynamic Behavior and Thermal Fluctuations: The RCSJ Model)

當 SQUID 被偏置電流 I_b 驅動，且該電流超過其依賴於磁通的臨界電流 $I_{\max(\Phi)}$ 時，它會轉變為電阻態，並在其端點出現有限電壓。為了模擬這種動態、耗散的行為，我們採用電阻與電容並聯接面 (RCSJ) 模型。在此模型中，每個理想的約瑟夫森元件 (由其 CPR 描述) 與一個電阻 R_N (代表準粒子穿隧) 和一個電容 C (代表接面的幾何電容) 並聯。通過 SQUID 每個臂的總電流是超導電流、正常 (歐姆) 電流和位移電流的總和。通過對 SQUID 電路的兩個迴路 (主迴路和由偏置源形成的迴路) 應用克希荷夫定律，可以推導出一組關於相位差 φ_1 和 φ_2 的二階非線性耦合微分方程式。至關重要的是，在任何有限溫度下，並聯電阻會表現出詹森-奈奎斯特熱雜訊 (Johnson-Nyquist thermal noise)，這在每個接面旁邊表現為一個波動的雜訊電流源 $I_{Ni}(t)$ 。最終的運動方程式是一組耦合的郎之萬方程式 (Langevin equations)：

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_N} \frac{d\varphi_1}{dt} + I_c \sin \varphi_1 = \frac{I_b}{2} - I_{\text{cir}} + I_{N1}(t) \quad (6.5)$$

$$\frac{\Phi_0}{2\pi} C \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_N} \frac{d\varphi_2}{dt} + I_c \sin \varphi_2 = \frac{I_b}{2} + I_{\text{cir}} + I_{N2}(t) \quad (6.6)$$

這些方程式通過循環電流 I_{cir} (其本身通過磁通量條件依賴於 φ_1 和 φ_2) 耦合，完全描述了在存在熱雜訊的情況下 SQUID 的古典動力學。左側的項分別代表位移電流 (與 $\dot{\varphi}$ 成正比)、正常電流 (與 $\dot{\varphi}$ 成正比) 和超導電流。右側的項代表驅動力：偏置電流、電感耦合和隨機熱力。接面的 CPR, $I_{s(\varphi)}$ ，在這個動態圖像中扮演著至關重要的角色，因為它定義了系統的保守位能地景 (conservative potential energy landscape)。單個接面的約瑟夫森能量是其 CPR 的積分： $U_{J(\varphi)} = \left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right) \int I_{s(\varphi)} d\varphi$ 。對於正弦 CPR，這會產生熟悉的「洗衣板」位能 (washboard potential), $U_{J(\varphi)} = -E_J \cos(\varphi)$ ，其中 $E_J = I_c \frac{\Phi_0}{2\pi}$ 是約瑟夫森能量。SQUID 的總位能是兩個接面的約瑟夫森能量與儲存在迴路電感中的磁能之和， $U_M = \frac{\Phi_L^2}{2L}$ 。這創造了一個二維位能面 $U(\varphi_1, \varphi_2)$ 。SQUID 的動力學可以被形象地看作一個虛構粒子在這個二維位能面上的運動，受到來自偏置電流的傾斜力、

來自電阻的黏滯阻力以及來自熱雜訊電流的隨機踢動。當 $I_b < I_{\max}$ 時，粒子被困在其中一個位能最小值中，對應於零電壓超導態。熱漲落導致粒子在井底隨機探索。然而，它們也可能提供足夠的能量讓粒子跳過分隔相鄰最小值的位能障壁。這種逃逸事件被稱為熱激活相滑移 (**Thermally Activated Phase Slip, TAPS**)。每次發生相滑移，接面兩端的相位差大約改變 2π 。根據第二約瑟夫森關係，這種快速的相位變化會產生一個短暫的電壓脈衝。在電阻態 ($I_b > I_{\max}$)，位能被充分傾斜，使得粒子連續地沿洗衣板滾下，相滑移以高速率發生。這些滑移的時間平均速率產生了測得的 SQUID 兩端的直流電壓，而其發生的隨機性則表現為電壓雜訊。因此，CPR 通過塑造位能地景，直接決定了相滑移的能障高度，從而決定了 SQUID 的電流-電壓特性、其動態響應及其內在雜訊性能。

7 進階主題：對稱 SQUID 中的非正弦 CPR (Advanced Topics: Non-Sinusoidal CPR in Symmetric SQUIDs)

前面的章節已經為基於具有標準正弦電流-相位關係的接面的對稱 SQUID 建立了一個全面的模型。然而，如第二節所述，許多現代約瑟夫森界面中的 CPR，特別是那些具有高透明度或奇異弱連結材料的界面，可能是顯著非正弦的。將非正弦 CPR 納入對稱 SQUID 的理論中，揭示了更豐富、更複雜的現象學。磁通調變模式的形狀成為界面 CPR 諧波含量的直接探測器，並且裝置的性能特徵也以非平凡的方式被改變。這個研究領域處於研究的前沿，對介觀輸運 (mesoscopic transport) 的基本理解和新型超導裝置（包括下一代量子位元）的開發都具有深遠的影響。

7.1 高次諧波對磁通調變模式的修正 (Modification of the Flux Modulation Pattern with Higher Harmonics)

讓我們考慮一個對稱 SQUID，其中兩個相同的界面各自具有一個可以由傅立葉級數表示的非正弦 CPR。為簡單起見，我們將考慮一個包含前兩個諧波的 CPR：

$$I_{s(\varphi)} = I_{c1} \sin(\varphi) + I_{c2} \sin(2\varphi) \quad (7.1)$$

其中 I_{c1} 和 I_{c2} 分別是第一和第二約瑟夫森諧波的振幅。通過 SQUID 的總超導電流是來自兩個臂的電流之和：

$$I_s^{\text{total}} = [I_{c1} \sin(\varphi_1) + I_{c2} \sin(2\varphi_1)] + [I_{c1} \sin(\varphi_2) + I_{c2} \sin(2\varphi_2)] \quad (7.2)$$

磁通量子化條件， $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$ ，仍然是基本約束。我們可以按諧波對各項進行分組，並分別對每組應用三角和差化積恆等式。對於第一諧波 (n=1)：

$$I_{c1} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 2I_{c1} \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = 2I_{c1} \sin(\varphi_{\text{avg}}) \cos\left(\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}\right) \quad (7.3)$$

這是具有磁通週期 Φ_0 的標準干涉項。對於第二諧波 (n=2)：

$$I_{c2}(\sin(2\varphi_1) + \sin(2\varphi_2)) = 2I_{c2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 2I_{c2} \sin(2\varphi_{\text{avg}}) \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)$$

這個項揭示了一個關鍵結果：CPR 的第二諧波以 $\frac{\Phi_0}{2}$ 的磁通週期進行干涉。一般來說，接面 CPR 的第 n 次諧波 $\sin(n\varphi)$ 將在 SQUID 的總電流中產生一個干涉項，該干涉項以 $\frac{\Phi_0}{n}$ 的週期進行調變。SQUID 的總超導電流是這些干涉分量的總和：

$$I_s^{\text{total}}(\varphi_{\text{avg}}, \Phi) = 2I_{c1} \sin(\varphi_{\text{avg}}) \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + 2I_{c2} \sin(2\varphi_{\text{avg}}) \cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \quad (7.5)$$

SQUID 的臨界電流 $I_{\text{max}}(\Phi)$ 是通過對平均相位 φ_{avg} 最大化此表達式來找到的。與簡單的正弦情況不同，這種最大化不再是微不足道的，通常必須進行數值計算。由此產生的 $I_{\text{max}}(\Phi)$ 曲線是具有不同週期性的調變模式的疊加，導致複雜且非餘弦的形狀。這種行為將 SQUID 從一個簡單的感測器轉變為一個強大的表徵工具。對稱 SQUID 的磁通調變模式充當其組成接面電流-相位關係的一種傅立葉光譜學 (Fourier spectroscopy)。調變的基本 Φ_0 週期分量對應於 CPR 的第一諧波，而 $\frac{\Phi_0}{2}$ 週期分量的存在是第二諧波的直接標誌，依此類推。通過仔細測量 $I_{\text{max}}(\Phi)$ 曲線的形狀並在磁通域中進行傅立葉分析，原則上可以解卷不同諧波的貢獻，並重建單個接面的潛在 CPR。這提供了一種直接、相位敏感的方法來探測弱連結內的微觀輸運物理。

7.2 對裝置性能和新應用的影響 (Implications for Device Performance and Novel Applications)

非正弦 CPR 的存在對 SQUID 作為磁力計和放大器的性能具有重大的實際影響。基於 RCSJ 模型的數值模擬表明，常見於高透明度 S-N-S 接面中的前向偏斜 CPR 通常會降低直流 SQUID 的整體磁通靈敏度。儘管偏斜的 CPR 在某些偏置條件下可能導致更大的磁通-電壓轉換係數 ($dV/d\Phi$)，但這種增強通常被裝置上相應增加的電壓雜訊所抵消。最終結果通常是與具有傳統正弦接面的 SQUID 相比，信噪比 (signal-to-noise ratio) 降低。這是因為偏斜的位能地景改變了熱激活相滑移的動力學，從而增加了電壓波動。相反地，工程化非正弦 CPR 的能力為新型量子裝置開闢了令人興奮的可能性，在這些

裝置中，SQUID 不用作感測器，而是作為具有定製非線性響應的電路元件。最有前途的方向之一是開發用於量子計算的「受保護」超導量子位元 (protected superconducting qubits)。某些提議的量子位元設計天生就能抵抗常見的退相干來源，例如電荷雜訊，前提是它們由僅允許庫柏對偶（電荷-4e 過程）穿隧的約瑟夫森元件構成。這樣的元件將以純 π 週期 CPR 為特徵，即 $I_{s(\varphi)} \propto \sin(2\varphi)$ ，而標準的 2π 週期 $\sin(\varphi)$ 項則完全不存在。雖然創建一個具有純二階諧波 CPR 的單一接面極具挑戰性，但對稱直流 SQUID 提供了一種優雅的方法來工程化這種響應。如上一節所示，接面 CPR 的第一諧波 $\sin(\varphi)$ 與 $\cos\left(\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$ 項干涉，而第二諧波 $\sin(2\varphi)$ 與 $\cos\left(2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)$ 項干涉。通過施加恰好半個磁通量量子的外部磁通， $\Phi = \frac{\Phi_0}{2}$ ，第一諧波的干涉項變為 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ，完全抑制了其對總超導電流的貢獻。在相同的磁通偏置下，第二諧波的干涉項為 $\cos(\pi) = -1$ ，使其貢獻最大化。因此，偏置在 $\Phi = \frac{\Phi_0}{2}$ 的對稱 SQUID 的行為就像一個有效的單一約瑟夫森元件，其 CPR 由其組成接面的第二諧波主導。這項技術允許從傳統的（儘管是非正弦的）電荷-2e 接面原位創建電荷-4e 約瑟夫森元件，為受保護量子位元架構的實驗實現鋪平了道路。

8 結論：綜合與未來展望 (Conclusion: Synthesis and Future Outlook)

本分析為理解對稱直流超導量子干涉儀中的電流-相位關係提供了一個全面的理論框架。從宏觀量子力學的基本原理到真實 SQUID 的複雜動力學的過程，揭示了一套緊密相連的物理概念。由此產生的中心論點是，組成約瑟夫森接面的電流-相位關係至關重要。CPR 不僅僅是一個描述性參數，而是作為弱連結中電荷輸運的微觀物理與整個裝置的宏觀、可測量量子行為之間的根本聯繫。理論發展始於庫柏對凝聚體的概念，由單一、相位相關的宏觀波函數描述。這個單一的假設產生了超導性的定義性屬性：邁斯納效應和超導環中磁通量的量子化。然後引入約瑟夫森接面作為一個相干地耦合兩個此類宏觀量子態的裝置，其 CPR， $I_s(\varphi)$ ，決定了它們之間流動的超導電流。對於對稱直流 SQUID，磁通量量子化和約瑟夫森效應的原理相結合，產生了宏觀量子干涉現象。形式推導表明，通過裝置的總超導電流受到穿過 SQUID 迴路的磁通量的調變，導致臨界電流以磁通量量子 Φ_0 的周期週期性地變化。這種調變是庫柏對波函數穿過 SQUID 兩臂的干涉圖案，是雙縫光學實驗的直接類比。對非理想性的分析證明了實際裝置參數的關鍵作用。由屏蔽參數 β_L 量化的有限迴路電感，充當內在回饋機制，可以屏蔽外部磁場並降低臨界電流的調變深度。通過 RCSJ 模型納入的熱漲落，驅動系統的動力學，導致熱激活相滑移，從而產生 SQUID 的電壓響應和內在雜訊。至關重要的是，CPR 定義了這些動力學展開的位能地景，直接塑造了電流-電壓特性並決定了裝置的最終靈敏度。最後，對非正弦 CPR 的探索突顯了該領域的現代視角。標準的正弦關係現在被理解為更通用的多諧波描述的低透明度極限。接面 CPR 中高次諧波的存在導致 SQUID 中複雜、非餘弦的磁通調變模式，將裝置轉變為能夠探測其自身組件諧波含量的光譜工具。雖然非正弦 CPR 可能會降低傳統 SQUID 磁力計的性能，但它們同時被利用來工程化新穎的量子電路元件。例如，使用對稱 SQUID 分離特定

的約瑟夫森諧波的能力，為創建容錯量子計算架構所需的專用組件提供了途徑。該領域的未來展望與電流-相位關係的持續探索和工程化密切相關。材料科學的進步，包括基於半導體、石墨烯和拓撲絕緣體的混合接面的開發，有望提供對 CPR 的前所未有的控制。在這些新穎系統中對 CPR 的精確測量和理論理解，通常使用基於 SQUID 的技術，對於釋放其潛力至關重要。正在進行的關於接面不對稱性、非正弦 CPR 和新興現象（如約瑟夫森二極體效應）之間相互作用的研究，進一步突顯了基礎物理的豐富性。曾經主要作為感測器的對稱 SQUID，將繼續發展成為一個不可或缺的平台，用於研究基本量子輸運和構建下一代超導電子學和量子資訊處理器。

9 參考文獻

10 元件製備 (Device Fabrication)

本章將詳細說明本實驗使用機械剝離法 (Mechanical Exfoliation Method) 得到二維材料層狀薄片 (Flake) 的完整流程與方法，包括基板預處理、膠帶黏貼剝離。

10.1 材料準備 (Material Preparation)

10.1.1 助焊劑區生長法 (Flux Zone Growth Method)

10.2 剝離 (Exfoliation)

本章將詳細說明本實驗使用機械剝離法 (Mechanical Exfoliation Method) 得到二維材料層狀薄片 (Flake) 的完整流程與方法，包括基板預處理、膠帶黏貼剝離。

10.2.1 基板準備 (Substrate Preparation)

本實驗使用的基板為低電阻重參雜 P 型單面矽/熱氧化二氧化矽基板 (NOVA electronics #HS39626-OX : 4", P-type, , $1.0 \sim 5.0 \times 10^{-3} \Omega \cdot cm$ Resistivity, $2850 A^{\circ} \pm 5\%$ Dry Thermal Oxide)。

1. 將 7×7mm 大小的破片放入 140 °C 的二甲基亞砜 (DMSO, Dimethyl sulfoxide) 溶劑中靜置 1 小時，以去除基板上保護用的 S1813 正型光阻薄膜。
2. 將破片放入 40 °C 的丙酮 (Acetone) 溶劑中去除 DMSO，約 1 分鐘後再放入異丙醇 (IPA) 溶劑中進行潤洗後取出，接著使用氮氣槍吹乾基板表面。
3. 使用 O₂ 電漿進行基板表面清潔，使用前用 100% Power, 50 SCCM, 5 mins 進行腔體清潔，過程中需觀察腔體內電漿顏色，以確保管路中沒有 O₂ 以外的其他氣體。

使用 100% Power, 40 SCCM, 10 mins 進行基板表面清潔。完成後儘速將基板放置於手套箱內開始進行剝離以避免水氣附著。

10.2.2 二維材料剝離 (2D Materials Exfoliation)

本實驗使用的膠帶為 Nitto SPV-224PR-MJ，以下簡稱藍膠。

1. 確認手套箱內水氧值皆小於 0.5ppm，將零號藍膠 (Tape 0) 膠面朝上固定於平面，用鑷子將夾取 PtTe₂ 塊材 (Bulk) 放置於 Tape 0 上。
2. 一號藍膠 (Tape 1) 膠面朝下覆蓋於 Tape 0 後使用棉棒輕推表面確保確實兩膠面接觸，撕開兩片膠帶實現層與層的分離。
3. 重複步驟 2，直到塊材佈滿大於 7×7mm 大小的面積範圍後將 Tape 0 用另一片藍膠覆蓋後收納備用。
4. 將 Tape 1 膠面朝上固定於平面，二號藍膠 (Tape 2) 膠面朝下覆蓋於 Tape 1 後使用棉棒輕推表面確保確實兩膠面接觸，撕開兩片膠帶實現層與層的分離後將 Tape 1 用另一片藍膠覆蓋後收納備用。
5. 重複步驟 4，直到塊材分布密度合適，以 PtTe₂ 為例通常為 Tape 4 或 5。
6. 使用電磁加熱烤盤以 120 °C 加熱基板 10 分鐘後靜置 1 分鐘。
7. 將基板放置於平面，藍膠膠面朝下並傾斜一小角度使其一側接觸基板後使用棉棒輕推表面，確保膠面與基板表面確實接觸且無氣泡後靜置 5 分鐘。
8. 撕開膠帶實現層與層的分離後將基板置於可重複使用真空密封食品壓縮袋，使用手持式真空保鮮機抽真空後拿出手套箱。
9. 儘速將基板移動至旋轉塗佈機 (Spin Coater) 使用 PMMA A6 以 500 rpm 旋轉 5 秒，以高加速度升速至最終轉速 4000 rpm，此旋塗步驟總時長為 55 秒。
10. 使用 180 °C 預烤 (Prebake) 基板 3 分鐘即完成機械剝離流程。

10.3 顯微鏡檢測 (Microscopy)

本章將詳細說明本實驗使用的各種顯微鏡及其目的與使用方式。

10.3.1 光學顯微鏡 (Optical Microscopy)

本實驗使用的光學顯微鏡 (OM, Optical Microscope) 為 KEYENCE VHX-7000N，使用目的主要有以下幾種：

1. 尋找與定位二維材料層狀薄片 (**Flake**)：完成機械剝離流程後，透過光學顯微鏡 (OM, Optical Microscope) 初步判斷是否有 PtTe₂ 薄片，並使用 VHX-7000N 的連續拍攝功能拍攝基板的四個角落及薄片照片，並得到座標。
2. 確認曝光後顯影結果：完成顯影流程後，透過 OM 判斷曝光結果，確認線寬與曝光劑量是否正確，並使用「量測與標尺」功能拍攝照片並標注量測結果。
3. 確認 **Markers** 蒸鍍後離舉結果：完成離舉流程後，透過 OM 判斷 Markers 蒸鍍結果，確認 Markers 是否確實離舉無相連部分，並用適當倍率拍攝 Markers 與目標薄片同框的照片以供後續數位化流程使用。
4. 確認 **Contacts** 濺鍍後離舉結果：完成離舉流程後，透過 OM 判斷 Contacts 濺鍍結果，確認小線寬部分是否確實離舉無相連部分，並使用「量測與標尺」功能拍攝照片並標注量測結果。
5. 確認打線結果：完成打線流程後，透過 OM 判斷打線結果，確認基板上供接線轉接用之鐸墊 (Bonding Pad) 和 PCB 上金鐸線連接指 (Bonding Finger) 與鋁鐸線頭是否確實相連，並檢查鋁鐸線無相互接觸以避免短路或形成預期外的電路通路。使用「圖片連接」功能用適當倍率拍攝所有金打線板與基板的照片，以供後續量測時作為線路參考。

10.3.2 原子力顯微鏡 (Atomic Force Microscopy)

本實驗使用的原子力顯微鏡 (AFM, Atomic Force Microscopy) 為 Park systems NX10，用以判斷目標 PtTe₂ 薄片的層數，與確認接觸金屬的厚度與形貌。

為了對元件的微觀結構與形貌進行精確表徵，本研究採用了一台 **Park Systems NX10** 原子力顯微鏡 進行量測。AFM 在此研究中扮演了兩個關鍵角色：(1) 鑑定機械

剝離 (mechanically exfoliated) 的 PtTe_2 薄片的厚度與層數；(2) 確認蒸鍍金屬電極的厚度、表面粗糙度與邊緣形貌。

所有 AFM 量測均在非接觸模式 (**non-contact mode**) 下進行，以最小化探針與樣品表面之間的交互作用，從而保護脆弱的二維材料薄片與金屬結構不被物理損傷。

首先，對於 PtTe_2 薄片，我們透過量測其表面與周圍 SiO_2 基板之間的步階高度 (**step height**) 來確定其物理厚度。基於已知的 PtTe_2 材料層間距，我們可以從量測到的厚度推算出薄片的原子層數。這一步驟對於篩選出符合實驗需求的特定層數（例如單層或少層）的樣品至關重要。

其次，在完成電極蒸鍍製程後，我們利用 AFM 對接觸金屬 NbTi 的形貌進行檢測。分析的重點包括金屬膜的表面粗糙度 (surface roughness)、顆粒大小 (grain size) 以及電極圖案的邊緣清晰度。同時，透過量測金屬與基板的步階高度，我們可以驗證其實際沉積厚度是否與蒸鍍儀器設定的目標值一致。此項表徵是確保元件具備良好歐姆接觸與電氣性能的關鍵品質控制環節。

10.4 電子束微影 (E-Beam Lithography, EBL)

本研究中所有奈米級圖案的定義，例如對準標記與元件電極，均是透過電子束微影技術完成。整個流程在一台 Raith PIONEER Two 掃描式電鏡/電子束微影系統上執行。以下將詳述其製備、曝光與顯影的具體步驟。

10.4.1 抗蝕劑準備 (Resist Preparation)

在進行圖案定義之前，首先須在樣品表面旋塗一層電子束抗蝕劑。本實驗選用聚甲基丙烯酸甲酯 (Poly(methyl methacrylate), PMMA) A6 等級作為正向抗蝕劑。旋塗程序分為兩階段：首先以 500 rpm 的低速旋轉 5 秒，以確保抗蝕劑均勻散佈，隨後以 4000 rpm 的高速旋轉 55 秒，以達到最終所需的厚度。旋塗完成後，樣品被放置於 180°C 的熱板上烘烤 180 秒，目的是為了完全去除抗蝕劑中的溶劑並使其固化。

10.4.2 圖案曝光 (Pattern Exposure)

抗蝕劑準備完成後，樣品被送入 EBL 系統的真空腔體中進行圖案曝光。所有的曝光步驟均在 20 kV 的加速電壓下進行。此流程同樣分為兩步：

1. 對準標記曝光：第一步是在樣品上定義大面積的對準標記 (alignment markers)，這些標記將作為後續高精度圖案疊對的基準。為實現快速曝光，此步驟選用了 120 μm 的大光圈 (aperture) 以獲得約 12 nA 的較大電子束流，並採用 370 $\mu\text{C}/\text{cm}^2$ 的面積劑量 (area dose) 進行寫入。
2. 接觸電極曝光：在系統通過對準標記精確鎖定 PtTe₂ 薄片的位置後，進行第二步高解析度的接觸電極圖案曝光。為確保圖案的精細度與邊緣的陡峭度，此步驟換用 30 μm 的小光圈，將束流精細地控制在約 0.3 nA，並以 375 $\mu\text{C}/\text{cm}^2$ 的劑量進行寫入。

10.4.3 顯影 (Development)

曝光完成後，將樣品從系統中取出進行化學顯影，以溶解經電子束照射後分子鏈斷裂的 PMMA 區域。樣品被沉浸於甲基異丁基酮 (MIBK) 與異丙醇 (IPA) 體積比為 1:3 的混合溶液中。整個顯影過程在 23°C 的恆溫環境下精確控制 50 秒。隨後，為終止顯影反應，樣品被迅速轉移至純 IPA 溶液中浸泡 20 秒，以沖洗並去除殘留的顯影劑。... 完成此步驟後，樣品表面即形成了所需圖案的抗蝕劑模板，可供後續的金屬沉積與離舉 (lift-off) 製程使用。

10.5 熱蒸鍍沉積 (Thermal Evaporation Deposition)

10.5.1 一般金屬的熱蒸鍍沉積 (Thermal Evaporation Deposition of Normal Metals)

為了能夠在後續的電子束微影 (EBL) 步驟中，將奈米級的電極圖案精確地疊對 (align) 到目標 PtTe₂ 薄片上，我們首先在 SiO₂/Si 基板上製作了一組金屬材質的全域對準標記 (global alignment markers)。

標記的圖案首先透過 EBL 技術被定義在抗蝕劑層上。在完成顯影後，樣品被送入一台 **Korvus HEX** 桌上型物理氣相沉積 (PVD) 系統中進行金屬沉積。該系統的核心是一個四腔電子束蒸發器，其原理是利用高能電子束在真空環境下直接轟擊並加熱裝有源材料的坩堝，使材料蒸發。

為確保標記的穩定性與高對比度，我們採用了雙層金屬結構。在腔體被抽至高真空環境後，依序蒸鍍：

1. 附著層 (**Adhesion Layer**): 一層約 5 nm 厚的鉻 (**Cr**)，用以增強標記與基板的附著力。
2. 對比層 (**Contrast Layer**): 一層約 50 nm 厚的金 (**Au**)，其較高的原子序數能夠在掃描式電子顯微鏡 (SEM) 下提供清晰的二次電子或背向散射電子圖像，從而利於 EBL 系統進行自動識別和對位。

金屬沉積完成後，透過在丙酮中進行離舉 (**lift-off**)，移除抗蝕劑，最終在基板表面留下永久性的 Cr/Au 金屬對準標記。這些標記為所有後續的材料轉移和微影製程提供了一個固定的、高精度的參考坐標系。

10.6 濺鍍沉積 (Sputter Deposition)

最終用以連接 PtTe₂ 元件的超導電極，是透過一套包含原位 (in-situ) 介面清潔與磁控濺鍍 (magnetron sputtering) 的整合性製程完成。所有步驟均在 Aja Orion 8 物理氣相沉積 (PVD) 系統中執行，以確保最佳的介面品質。

10.6.1 介面清潔：原位離子銑削 (Interface Cleaning: In-situ Ion Milling)

在沉積超導金屬之前，為了確保金屬與 PtTe₂ 材料之間形成一個潔淨、低電阻的歐姆接觸 (Ohmic contact) 介面，我們對樣品進行了一道原位的離子束蝕刻處理。該過程在氬氣 (Ar) 環境下進行（流量控制在 10.4 sccm），離子源以 600 V 的加速電壓產生離子束，對樣品表面進行持續 30 秒的輕微物理蝕刻。此步驟旨在有效去除先前 EBL 製程中可能殘留的任何抗蝕劑殘渣或樣品表面的自然污染物。

10.6.2 超導金屬的濺鍍沉積 (Sputter Deposition of Superconducting Metals)

介面清潔完成後，樣品維持在高真空環境中，不破壞真空，立即進行超導薄膜的沉積。我們選擇鈮鈦 (NbTi) 合金作為超導接觸電極材料。濺鍍製程在 3 mTorr 的氬氣工作壓力下進行。一個 300 W 的直流 (DC) 電源被施加於 NbTi 靶材上，使其原子被濺射並沉積到樣品表面，最終形成一層厚度為 70 nm 的均勻薄膜。

10.7 離舉製程 (Lift-off Process)

10.7.1 標記的離舉 (Lift-off for Markers)

10.7.2 接觸點的離舉 (Lift-off for Contacts)

完成濺鍍後，樣品從真空系統中取出，並執行最後的離舉步驟以定義出最終的電極圖案。樣品浸泡於丙酮中，以溶解下層的 PMMA 抗蝕劑，並移除覆蓋其上的多餘 NbTi 薄膜。此步驟完成後，僅留下在 EBL 步驟中定義的、且與 PtTe₂ 直接接觸的超導電極結構。

11 非對稱超導量子干涉儀的電流-相位關係 之全面理論分析 (A Comprehensive Theoretical Analysis of the Current-Phase Relation in Asymmetric Superconducting Quantum Interference Devices)

11.1 第一部分：非對稱 SQUID 的基礎原理 (Part I: Foundational Principles of Asymmetric SQUIDs)

超導量子干涉儀 (SQUID) 作為巨觀量子工程的典範代表，運用超導性的基本原理來創造已知最靈敏的磁通量探測器。儘管完全對稱的 SQUID 行為提供了量子干涉的基礎理解，但非對稱性的引入卻開啟了更豐富且更複雜的物理現象景觀。無論非對稱性是來自於不可避免的製程缺陷還是有意設計的工程考量，它都能將 SQUID 從簡單的干涉儀轉變為可調式、非互易的量子元件，其應用範圍從下一代磁力計到量子電腦的基本構成元件。

本章提供非對稱直流 SQUID 中電流-相位關係 (CPR) 的詳盡理論分析，從第一原理追溯物理機制到先進應用與實驗現實。我們首先建立約瑟夫森接面和理想 SQUID 電路的基礎概念，然後深入探討非對稱性的關鍵作用。

11.1.1 理想約瑟夫森接面與電流-相位關係 (The Ideal Josephson Junction and the Current-Phase Relation)

任何 SQUID 的核心都是約瑟夫森接面 (JJ)，這是一個體現約瑟夫森效應的元件——當兩個超導體透過「弱連結」（如薄絕緣障礙層、正常金屬或物理收縮）耦合時發生的

巨觀量子現象。這個效應由布萊恩·約瑟夫森於 1962 年預測，由兩個控制接面量子動力學的基本關係式描述。

第一約瑟夫森關係式定義了電流-相位關係 (CPR)，這是接面傳輸機制的獨特指紋。它指出超電流 I_s 可以在接面間流動，即使沒有外加電壓：

$$I_s = I_c \sin(\varphi) \quad (11.1)$$

其中 I_c 是接面的臨界電流， φ 是兩側超導體間的相位差。這個關係式揭示了超導性的量子本質，其中巨觀波函數的相位差直接控制電流流動。

前一節所描述的理想直流 SQUID 模型，其前提是構成迴路的兩個約瑟夫森接面 (Josephson Junction, J1 and J2) 的特性完全相同 (即 $I_{c1} = I_{c2}$)，且在迴路中對稱分佈。然而，在實際的元件製備過程中，由於奈米級製程的內在變異性 (inherent variations)，兩個接面幾乎不可避免地存在差異，從而導致非對稱性 (asymmetry)。更有甚者，在許多現代量子元件的設計中，非對稱性不僅不是缺陷，反而是一種被有意引入的、用以實現特定功能的設計策略。

11.2 非對稱性的來源與分類 (Sources and Classification of Asymmetry)

SQUID 的非對稱性主要體現在兩個方面：

11.2.1 接面非對稱性 (Junction Asymmetry)

接面非對稱性是指兩個接面的電學參數不同，包括：

1. 臨界電流的差異： $I_{c1} \neq I_{c2}$ ，這是最常見的非對稱性形式。
2. 正常態電阻的差異： $R_{N1} \neq R_{N2}$ ，影響接面的動態行為。
3. 接面電容的差異： $C_1 \neq C_2$ ，決定接面的響應速度。

這些參數的差異會打破 SQUID 理想的磁通量調變模式，使得其 $I_c(\Phi_{\text{ext}})$ 圖樣偏離完美的 $|\cos(\pi \frac{\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0})|$ 函數。

11.2.2 迴路非對稱性 (Loop Asymmetry)

迴路非對稱性是指兩個接面在超導迴路中的位置不同，導致：

1. 迴路電感分配不均： $L_1 \neq L_2$ ，其中 $L_1 + L_2 = L_{\text{total}}$ 。

2. 磁通耦合的差異：兩個接面對外部磁場的響應不同。

這種非對稱性會導致調變圖樣的傾斜、振幅的變化或極小值無法降至零等特徵。

11.3 非對稱 SQUID 的理論分析 (Theoretical Analysis of Asymmetric SQUIDs)

對於一個非對稱 SQUID，其總電流-相位關係可以表示為：

$$I_s = I_{c1} \sin(\varphi_1) + I_{c2} \sin(\varphi_2) \quad (11.2)$$

其中相位差之間的關係由磁通量量子化條件決定：

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \quad (11.3)$$

考慮接面參數的非對稱性，我們可以引入非對稱參數 α ：

$$\alpha = \frac{I_{c1} - I_{c2}}{I_{c1} + I_{c2}} \quad (11.4)$$

當 $\alpha = 0$ 時，系統退化為對稱 SQUID；當 $\alpha \neq 0$ 時，系統表現出非對稱行為。

對於中等非對稱性 ($|\alpha| < 1$)，總臨界電流可以近似表示為：

$$I_{\text{max}}(\Phi) = (I_{c1} + I_{c2}) \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) + \alpha^2 \sin^2\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right)} \quad (11.5)$$

11.4 高度非對稱 SQUID：相位偏置探測器 (Highly Asymmetric SQUIDs: Phase-Biased Detectors)

當一個接面的臨界電流遠大於另一個時 ($I_{c1} \gg I_{c2}$)，SQUID 可以被視為一個相位偏置 (phase-biased) 的探測器。在此組態中：

1. 較強接面 (Strong Junction)：近似地提供一個固定的相位參考， $\varphi_1 \approx \text{常數}$ 。

2. 較弱接面 (Weak Junction)：其相位差 φ_2 主要由外部磁通量 Φ_{ext} 控制。

這種配置的優勢在於：

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{2\pi\Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0} \quad (11.6)$$

透過精密量測非對稱 SQUID 的總臨界電流 $I_{\text{c,total}}$ 隨外部磁通量 Φ_{ext} 的完整調變曲線，我們可以直接重構出較弱接面的電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)[20]：

$$I_{\text{s,weak}}(\varphi) = I_{\text{c,total}}(\Phi_{\text{ext}}) - I_{\text{c1}} \sin(\varphi_1) \quad (11.7)$$

11.5 非對稱性對 SQUID 性能的影響 (Impact of Asymmetry on SQUID Performance)

11.5.1 磁通量調變深度 (Flux Modulation Depth)

對於對稱 SQUID，磁通量調變的深度為 100%，即在半整數磁通量量子處臨界電流可以完全抵消。而對於非對稱 SQUID，調變深度由非對稱參數決定：

$$\text{調變深度} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}}} = \frac{2|I_{\text{c1}}||I_{\text{c2}}|}{I_{\text{c1}}^2 + I_{\text{c2}}^2} \quad (11.8)$$

當 $I_{\text{c1}} = I_{\text{c2}}$ 時，調變深度為 100%；當差異增大時，調變深度減小。

11.5.2 磁通量靈敏度 (Flux Sensitivity)

非對稱性會改變 SQUID 的磁通量-電壓轉換係數[21]：

$$\frac{dV}{d\Phi} = R_N \frac{dI_c}{d\Phi} \quad (11.9)$$

其中 R_N 是等效正常態電阻。對於非對稱 SQUID，此轉換係數在不同磁通量點會有所變化。

11.6 非對稱 SQUID 作為 CPR 探測工具 (Asymmetric SQUIDs as CPR Probing Tools)

非對稱 SQUID 提供了一個探測約瑟夫森接面內在物理的強大工具。透過分析其磁通量調變圖樣的畸變，我們可以：

11.6.1 Fourier 分析技術 (Fourier Analysis Technique)

對調變曲線 $I_c(\Phi_{\text{ext}})$ 進行傅立葉轉換：

$$I_c(\Phi_{\text{ext}}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n \Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n \Phi_{\text{ext}}}{\Phi_0}\right) \quad (11.10)$$

不同的傅立葉分量對應於 CPR 的不同諧波：

- 基頻分量：對應 $\sin(\varphi)$ 項
- 二次諧波：對應 $\sin(2\varphi)$ 項
- 高次諧波：對應更複雜的 CPR 形式

11.6.2 非正弦 CPR 的識別 (Identification of Non-sinusoidal CPRs)

標準正弦 CPR ($I_s = I_c \sin(\varphi)$) 會產生標準的餘弦調變。任何偏離此形式的調變都指示著非傳統的 CPR[20]：

1. 偏斜 CPR (Skewed CPR)：導致調變曲線的不對稱
2. 二階諧波 CPR：產生 $\frac{\Phi_0}{2}$ 週期的調變分量
3. φ_0 -接面：導致相位偏移的調變圖樣

11.7 實驗實現與量測技術 (Experimental Implementation and Measurement Techniques)

11.7.1 元件設計考量 (Device Design Considerations)

設計非對稱 SQUID 時需要考慮[22]：

1. 非對稱比的選擇：平衡調變深度與 CPR 探測精度
2. 迴路幾何：最小化寄生電感和串擾
3. 材料選擇：確保接面特性的穩定性

11.7.2 低溫量測協議 (Cryogenic Measurement Protocol)

精確的 CPR 量測需要：

1. 溫度穩定性：維持 $T \ll T_c$ 以確保超導性
2. 磁場屏蔽：消除外部磁場干擾
3. 電流偏置精度：高解析度的電流控制
4. 電壓量測靈敏度：檢測微小的電壓變化

11.8 在 PtTe_2 系統中的應用 (Application in PtTe_2 Systems)

在本研究中，非對稱 SQUID 技術被應用於探測 1T- PtTe_2 約瑟夫森接面的電流-相位關係。透過設計並製備以 PtTe_2 作為其中一個弱連結的非對稱 SQUID，其磁通量調變圖樣的畸變程度直接編碼了由狄拉克半金屬所中介的非傳統電流-相位關係。

11.8.1 拓撲半金屬的 CPR 特徵 (CPR Characteristics of Topological Semimetals)

PtTe_2 作為第二類狄拉克半金屬 (Type-II Dirac Semimetal)，其約瑟夫森接面預期表現出[23]：

1. 非正弦 CPR：由於狄拉克費米子的特殊輸運性質
2. 高次諧波分量：特別是二階諧波 ($\sin(2\varphi)$) 項
3. 可調控性：透過外部磁場調控 CPR 的形式

11.8.2 約瑟夫森二極體效應的探測 (Detection of Josephson Diode Effect)

非對稱 SQUID 也是探測約瑟夫森二極體效應 (Josephson Diode Effect, JDE) 的有效工具[23]。透過量測正、負方向的切換電流差異：

$$\eta = \frac{I_{\text{SW}}^+ - I_{\text{SW}}^-}{I_{\text{SW}}^+ + I_{\text{SW}}^-} \quad (11.11)$$

可以量化 JDE 的強度，並與重構的 CPR 進行比對分析。

11.9 結論與展望 (Conclusions and Outlook)

非對稱 SQUID 作為一種強大的量測工具，為探測約瑟夫森接面的微觀物理提供了獨特的視角。在 PtTe_2 等新興量子材料的研究中，這種技術不僅能夠揭示材料的內在拓撲性質，更為開發新型超導量子元件提供了重要的設計指導。

未來的研究方向包括：

1. 多通道 SQUID：探測更複雜的傳輸通道
2. 時間相關效應：研究動態 CPR 的演化
3. 人工智慧輔助：利用機器學習優化 CPR 重構算法
4. 量子元件應用：基於非傳統 CPR 的新型量子位元設計

這些發展將進一步推動超導量子電子學和拓撲量子計算領域的進步。

12 元件特性分析 (Device Characterization)

本研究旨在探討特定樣品在低溫環境及外加磁場下的電運輸性質 (Electrical Transport Properties)。為此，我們搭建了一套基於四端點量測法 (Four-Point Probe Method) 又名開爾文測量法 (Kelvin sensing) 的直流電學量測系統。本章節將詳述其量測原理、實驗架構與操作步驟。

12.1 量測裝置 (Measurement Setup)

12.1.1 稀釋制冷機 (Dilution Refrigerator)

為實現對樣品在毫開爾文 (milli-Kelvin, mK) 溫度區間的量子現象觀測，本研究採用了一套 Bluefors 公司製造的 LD-400 型濕式稀釋制冷系統 (Wet Dilution Refrigerator System)。該系統能夠提供約 40 mK 的穩定基礎溫度 (Base Temperature)。提供如此低的實驗環境至關重要，其主要目的有二：第一，確保樣品溫度遠低於其超導轉變溫度 (T_c)10K，使樣品能完全進入並穩定維持在超導態；第二，有效抑制因熱能 ($k_B T$) 引起的熱擾動 (Thermal Fluctuations)，從而降低量子退相干 (Quantum Decoherence) 效應，使得如電流-相位關係 (Current-Phase Relation) 等微弱的宏觀量子現象 (macroscopic quantum effects) 得以被精確地量測。為進一步提升實驗效率，本系統配備了底部裝載快速樣品更換 (Bottom-Loading Fast Sample Exchange, FSE) 機構。該機構允許在主制冷系統各級冷盤 (如 4K plate 與 Still plate) 皆保持在低溫狀態的情況下，獨立地將樣品載台 (Sample Holder) 取出更換。相較於需要數日才能完成一次完整熱循環 (升溫至室溫再降溫) 的傳統方式，FSE 系統將更換樣品所需的週期縮短至 14 小時。此功能極大地提高了樣品測試的效率，對於需要進行多輪製程參數迭代與多個元件篩選及特性比對的研究工作至關重要。

12.1.2 超導磁鐵系統 (Superconducting Magnet System)

為研究樣品在不同磁場強度與方向下的物理特性，本實驗系統集成了一套 Bluefors 製造的三維向量磁鐵 (3D Vector Magnet)。該磁鐵系統的核心由三組相互正交的超導線圈構成，能夠在主軸 (Z-axis) 方向上產生最高達 9 特斯拉 (Tesla) 的磁場，並在與之垂直的兩個次軸 (X-axis and Y-axis) 方向上分別產生最高 1 T 的磁場，此即為一組 9-1-1 T 組態。這種三軸向量能力使得我們可以在三維空間中產生任意方向的磁場向量，從而對樣品的各向異性 (anisotropy) 或需要精確磁場對位的現象進行深入探討。

整個磁鐵系統的驅動與控制由一套 American Magnetics, Inc. (AMI) 的整合式電源供應系統負責。該系統包含三組獨立的磁鐵電源，其輸出電流由一台 AMI Model 430 電源程式控制器進行精密調控。此控制器不僅確保了各軸磁場的穩定性，更允許我們透過電腦程式自動化地控制磁場向量的大小、方向以及場掃描速率 (ramp rate)，以執行複雜的磁場掃描序列。

12.1.3 低溫線路與客製化 PCB 樣品座 (Cryogenic Wiring and Custom PCB Sample Holder)

為了在將直流與射頻 (RF) 信號從室溫儀器傳導至毫開爾文溫區的量子元件時，最大程度地抑制傳導熱負載 (conducted heat load) 與電磁雜訊，本實驗搭建了一套多級濾波與熱錨方案。此方案的核心在於混合使用了商業化的低溫濾波器模組與客製化的終端樣品電路板。

直流/低頻線路濾波 (DC/Low-Frequency Line Filtering) 所有通往樣品的直流與低頻控制線路，都經過一套 QDevil 公司生產的 QFilter 模組進行濾波。此模組被牢固地安裝於稀釋制冷機的混合腔冷盤 (Mixing Chamber plate) 上，以確保信號線及濾波器元件本身都能與 mK 溫區達到充分的熱平衡。我們採用的是標準的雙級濾波組態，將一個 24 通道的低頻 RC 濾波板與一個 24 通道的高頻 LC 濾波板進行串聯。RC 濾波級的衰減起始於 65 kHz，而 LC 濾波級則針對 225 MHz 以上的射頻雜訊提供有效衰減。

客製化樣品座與高密度線路 (Custom Sample Holder and High-Density Wiring)

經過主濾波級後，信號透過一套高密度、模組化的線路連接至安裝有兩個樣品 (2 X PCB) 的客製化樣品座。該線路方案利用多芯數的 Micro-D 連接器 (如 51-pin 及 100-pin) 對多達 48 個獨立的信號通道進行整合與管理。在制冷機內部，這些信號透過多組 (例如 4 組 12 對) 磷青銅雙絞線 (Twisted Pair) 進行傳輸。最終，在室溫端的接口面板，線路被轉換為 Fischer 24-pin 連接器，以便與外部的量測儀器相連。整個信號路徑的設計旨在確保信號完整性、最小化串擾 (crosstalk)，並提供穩固可靠的連接。

高頻線路濾波 (High-Frequency Line Filtering) 對於 RF 控制線路，則採用了不同的濾波策略。在同軸線路中，我們安裝了 Low-loss Infrared (IR) Filter，其主要功能是阻擋來自較高溫級的紅外光子直接輻射到樣品，以降低對量子態的干擾。該濾波器在有效阻擋紅外輻射的同時，對 DC 至 6 GHz 的工作信號僅有小於 1 dB 的插入損耗。

12.1.4 電流-電壓 (I-V) 量測系統 (Current-Voltage(I-V) Measurement System)

為了全面性地鑑定元件的電學特性，本研究建立的 I-V 量測系統涵蓋了兩個關鍵階段：(1) 在室溫下對大量元件進行快速的初步篩選；(2) 在極低溫環境中對通過初篩的元件進行高精度的特性量測。

12.1.4.1 室溫初步特性鑑定 (Room-Temperature Pre-characterization)

在此測試組態中，激勵電流 (stimulus current) 由一台 Keithley 2400 源-量測單元 (SMU) 提供，該儀器被設定於電壓源模式，其輸出經過一個 100 k Ω 的串聯電阻轉換為電流源。此電流隨後被路由至待測元件，而元件上的響應電壓則由一台 Basel Precision Instruments (BPI) Model SP1004 低噪聲差動放大器進行放大，並由 Keithley DMM6500 萬用電錶讀取。為了能對晶片上的大量元件進行高效的自動化測試，整個信號的路由與切換由兩台 Quantum Machines 生產的 24 通道 QDAC 模組構成的矩陣交換器進行管理。

12.1.4.2 極低溫 I-V 特性精細量測 (Cryogenic I-V Characterization)

低溫下的高精度 I-V 量測，其核心由一套由台夫特理工大學 (Delft University of Technology) 設計與製造、專為低溫量子測量開發的、電池供電的 **IVVI-DAC2-rack** 系統執行。採用電池供電是為了實現與外部儀器電源的電氣隔離 (galvanic isolation)，從根本上消除接地迴路 (ground loops) 和來自電力線的雜訊。

信號路由與儀器配置 (**Signal Routing and Instrument Configuration**) 從低溫恆溫器引出的主線纜，其信號首先被轉換至四個 24-pin 的 Fischer 接口面板。實驗時，根據待測元件的位置，我們從中選取兩路 Fischer 插頭，將其連接至兩台 24 通道的 **Matrix-rack** 模組化跳線盤。這個 Matrix-rack 作為連接低溫世界與室溫儀器的中樞，其內部的 MCX 連接器跳線面板允許我們對每一條獨立的信號線進行靈活、精確的配置。對於一組特定的四端點量測，指定的線路通過 MCX-to-LEMO 轉接線，被分別連接至 IVVI-rack 中的功能模組：

- **電流源 (Current Source)**: 負責施加偏壓的線路 (I+, I-) 被連接至一個 **S4m** 電流源模組。該模組的輸出電流量程可手動設置，而其精確的電流大小則由 IVVI-rack 內建的 DAC 進行掃描控制。我們採用此模組的對稱 (**symmetric**) 輸出模式進行量測。在此模式下，模組同時提供正、負兩路相對於地電位對稱的電壓輸出，其主要優點是能夠最小化樣品上可能出現的共模電壓 (common-mode voltage)，並有效倍增電壓源的輸出擺幅 (output swing)。
- **電壓量測 (Voltage Measurement)**: 負責感測電壓的線路 (V+, V-) 被連接至一個 **M2b** 電壓量測模組。此模組是專為實現極低的 $1/f$ 噪聲而優化的 JFET 輸入級差動放大器，其輸入電壓噪聲密度在 10 Hz 以上時低至 $2 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ 。

經過 M2b 模組放大後，類比電壓信號從機架的隔離環境中被輸出，並最終由一台 Keithley DMM6500 6½-Digit 數位萬用電錶進行高精度數位化及數據記錄。

12.1.5 射頻信號產生器 (RF Signal Generator)

為了對元件進行射頻下的特性分析，例如 Shapiro steps 量測，本實驗系統整合了一台 Rohde & Schwarz (R&S) SGS100A 射頻信號產生器。該儀器能夠產生頻率範圍從 1 MHz 至 20 GHz 的高穩定度、低相位雜訊的正弦波信號。

信號的輸出功率可在大範圍內進行精密調控。在送入低溫恆溫器之前，RF 信號會經過一系列的同軸衰減器 (coaxial attenuators) 進行大幅衰減，以確保最終施加於樣品上的功率處於適當的微弱範圍，避免過大的 RF 功率對樣品造成過熱或破壞其超導態。整個 RF 信號路徑的校準與衰減值的計算是確保量測結果準確性的關鍵步驟。

12.1.6 數據擷取框架：QCoDeS (Data Acquisition Framework: QCoDeS)

本研究的所有實驗控制、儀器協調與數據擷取流程，均基於 QCoDeS (Quantum Code and Data acquisition System) 軟體框架實現。QCoDeS 是一個基於 Python 的開源框架，由哥本哈根/代爾夫特量子計算聯盟等機構開發，旨在為量子計算與凝聚態物理實驗提供一個標準化、模組化的軟體基礎設施。我們選用此框架的核心原因在於其強大的儀器抽象能力與結構化的數據管理模型，這使得複雜的實驗流程得以簡化，並確保了數據的高度可追溯性。

在我們的具體實現中，所有實驗儀器（如 IVVI-rack 模組、信號產生器、數位電錶等）均被分別封裝為 QCoDeS 的 Instrument 物件，其可控屬性則對應為 Parameter。整個實驗裝置由一個 Station 物件進行統一管理，其詳細配置透過 YAML 檔案進行定義與載入，確保了實驗設置的靈活性與可重現性。所有的量測序列，無論是簡單的線性掃描還是複雜的多維掃描，都透過 QCoDeS 的 Measurement 上下文管理器執行。在每次量測運行 (run) 開始時，系統會自動擷取所有儀器參數的快照 (snapshot)，並與實驗數據一同儲存。

所有實驗數據都被結構化地儲存於一個以 SQLite 為後端的本地數據庫中。每一個 DataSet 實例都包含完整的元數據、儀器快照以及量測結果，並被賦予一個全域唯一識別碼 (GUID)，極大地增強了數據的可追溯性、完整性與共享便利性。

12.2 實驗實現 (Experimental Realization)

12.2.1 I-V 特性 (I-V Characteristics)

元件的基礎直流傳輸特性，是透過在恆定溫度下，量測其電壓-電流 (I-V) 特性曲線來進行鑑定。一條具代表性的 I-V 曲線，是透過緩慢掃描偏壓電流 (I_{bias}) 並同時記錄元件兩端的電壓降 (V) 而獲得的。

當偏壓電流從零開始增加時，元件首先展現出零電壓的狀態 ($V=0$)，此即為直流約瑟夫森效應 (DC Josephson effect) 所導致的無耗散超導電流分支。此超導態可一直維持，直到偏壓電流超過一個臨界閾值，此時接面會突然切換 (switch) 至一個具有有限電壓的電阻態。實驗上觀測到的這個切換點，我們定義為切換電流 (I_{sw})。

在切換至電阻態後，I-V 特性遵循一個線性的歐姆關係，其斜率 (dV/dI) 即為接面的正常態電阻 (R_N)。

當偏壓電流反向掃描（從高電流向零點掃描）時，我們觀察到顯著的遲滯現象 (hysteretic behavior)。接面並不會在 I_{sw} 處立即返回超導態，而是維持在電阻分支上，直到電流降低至一個更小的值，即回滯電流 (I_r) 時，才重新「掉落」回零電壓的超導態。

這種由切換電流與回滯電流之間巨大差異 ($I_r \ll I_{\text{sw}}$) 所構成的遲滯迴線，是欠阻尼 (underdamped) 約瑟夫森接面的典型特徵。此行為可由 Stewart-McCumber 模型進行描述，其遲滯程度由無因次的史都華-麥肯柏參數 $\beta_c = (2e/\hbar)I_c R_N^2 C$ 所決定。觀測到的顯著遲滯意味著此接面的 $\beta_c > 1$ 。

12.2.2 夫朗和費干涉圖樣 (Fraunhofer Interference Patterns)

為了進一步探測接面內部超導電流的空間分佈特性，我們量測了其臨界電流 I_c 作為外加磁場函數的調變行為。實驗中，我們施加一個垂直於樣品平面的磁場 (B_{\perp})，並在每一個固定的磁場點，透過掃描 I-V 曲線來測定其切換電流 I_{sw} ，並將其作為該磁場下的臨界電流值，即 $I_{c(B_{\perp})}$ 。

量測結果清晰地展示了臨界電流隨磁場變化的干涉圖樣。在零磁場時，臨界電流達到其最大值 $I_{c,0}$ 。隨著磁場強度的增加，臨界電流呈現出週期性的振盪，並在特定磁場下降至極小值。此圖樣的整體輪廓與光學中的單狹縫夫朗和費繞射 (Fraunhofer diffraction) 圖樣高度相似，因此被稱為夫朗和費圖樣。

在理想的、電流均勻分佈的短接面模型中，臨界電流與磁通量的關係可由以下公式描述：

$$I_{c(B)} = I_{c,0} \left| \frac{\sin\left(\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right)}{\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}} \right| \quad (12.1)$$

其中 $\Phi = B_{\perp} \cdot A_{\text{eff}}$ 是穿過接面有效面積 (A_{eff}) 的磁通量，而 $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ 是超導磁通量量子。

從實驗數據中，我們觀察到第一個極小值出現在約 5 mT 的磁場處。更重要的是，整個干涉圖樣呈現出高度的左右對稱性，並且在極小值處的電流抑制非常顯著。這些特徵強烈地表明，我們所製備的接面具有非常均勻的超導電流密度分佈。根據第一個極小值出現的位置 ($B_{\text{min},1}$)，我們可以透過關係式 $A_{\text{eff}} = \frac{\Phi_0}{B_{\text{min},1}}$ 來估算出接面的有效磁學面積。

13 研究方法

13.1 研究架構

本研究採用系統性的研究方法，整體架構如圖 2 所示。



圖 2 研究架構圖

研究流程包含以下主要階段：

1. 問題定義與分析
2. 方法設計與開發
3. 實驗設計與執行
4. 結果分析與驗證

13.2 方法設計

13.2.1 核心概念

本研究提出的方法基於以下核心概念：

- 概念一：相關的理論基礎
- 概念二：創新的技術方法
- 概念三：實務應用考量

13.2.2 演算法設計

所提出的演算法步驟如下：

1. 初始化參數設定
2. 資料預處理
3. 核心演算法執行
4. 結果後處理

詳細的演算法描述如圖 1 所示。

Algorithm 1: 主要演算法

Input: 輸入資料 D

Output: 處理結果 R

- 1: 初始化參數
- 2: for each 資料點 d in D do
- 3: 執行處理步驟
- 4: 更新結果
- 5: end for
- 6: return R

圖 1 主要演算法流程

13.3 實驗設計

13.3.1 實驗環境

實驗環境的詳細配置如表 1 所示。

項目	規格
處理器	Intel Core i7-9700K
記憶體	32GB DDR4
作業系統	Ubuntu 20.04 LTS
程式語言	Python 3.8
開發環境	PyCharm 2023.1

表 1 實驗環境配置

13.3.2 評估指標

本研究採用以下評估指標：

- 準確率 (**Accuracy**)：正確預測的比例
- 精確率 (**Precision**)：預測為正例中實際為正例的比例
- 召回率 (**Recall**)：實際正例中被正確預測的比例
- **F1** 分數：精確率和召回率的調和平均

13.3.3 實驗參數

主要實驗參數設定如下：

- 學習率：0.001
- 批次大小：32
- 訓練週期：100
- 驗證分割：80%/20%

14 實驗結果

14.1 實驗結果概述

本章節展示實驗的詳細結果與分析。實驗分為幾個主要部分：基準測試、方法比較、以及參數分析。

14.2 基準測試結果

14.2.1 資料集描述

實驗使用的資料集詳細資訊如表 2 所示。

資料集	樣本數	特徵數	類別數
Dataset A	10,000	50	2
Dataset B	5,000	100	5
Dataset C	15,000	75	3

表 2 實驗資料集資訊

14.2.2 基準方法效能

各種基準方法的效能比較結果如圖 3 所示。

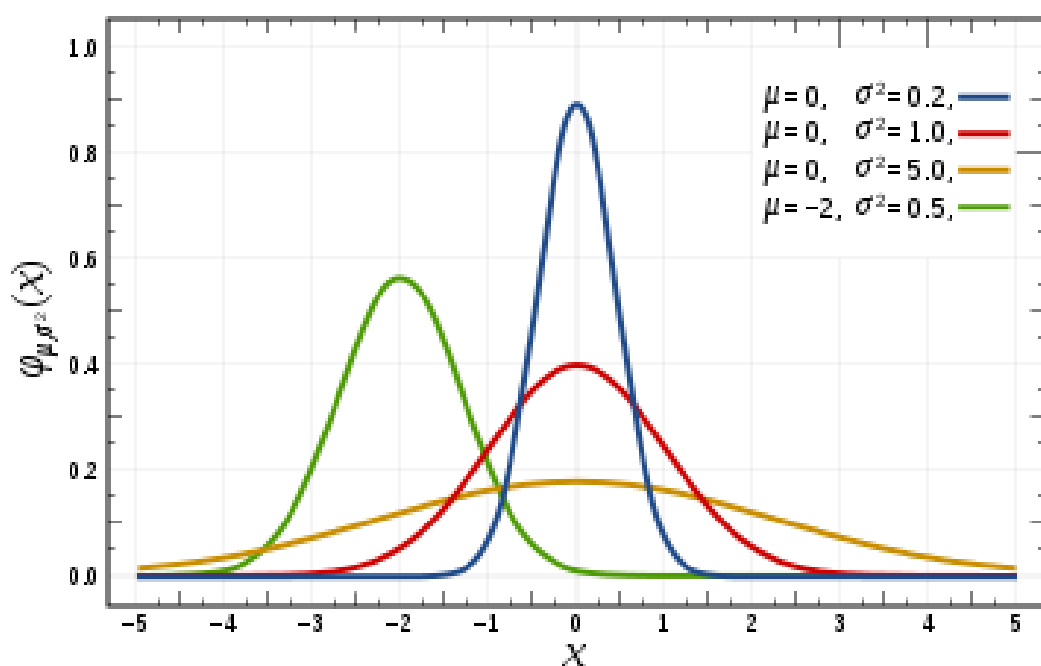


圖 3 基準方法效能比較

從圖中可以看出，傳統方法在準確率方面表現較為一般，而較新的方法則有明顯的改善。

14.3 方法比較與分析

14.3.1 效能比較

所提出方法與現有方法的詳細比較結果如表 3 所示。

方法	準確率	精確率	召回率	F1 分數
方法 A	0.825	0.831	0.819	0.825
方法 B	0.847	0.852	0.841	0.846
方法 C	0.863	0.869	0.857	0.863
本研究方法	0.891	0.896	0.886	0.891

表 3 方法效能比較結果

結果顯示，本研究提出的方法在所有評估指標上都優於現有方法。

14.3.2 統計顯著性檢驗

為了驗證結果的統計顯著性，進行了 t 檢驗分析。結果顯示，本研究方法與其他方法之間的差異具有統計顯著性 ($p < 0.01$)。

14.4 參數敏感性分析

14.4.1 學習率影響

不同學習率對模型效能的影響如圖 4 所示。



圖 4 學習率對模型效能的影響

14.4.2 批次大小影響

批次大小的選擇對訓練效率和最終效能都有重要影響。實驗結果顯示，批次大小為 32 時能夠達到最佳的效能平衡。

14.5 計算複雜度分析

14.5.1 時間複雜度

所提出方法的時間複雜度為 $O(n \log n)$ ，其中 n 為資料點數量。與傳統方法相比，具有良好的可擴展性。

14.5.2 空間複雜度

方法的空間複雜度為 $O(n)$ ，記憶體使用效率較高。

14.6 實際應用案例

為了驗證方法的實用性，在實際應用場景中進行了測試。結果顯示，所提出的方法能夠有效解決實際問題，並且具有良好的執行效率。

14.7 結果討論

實驗結果證實了本研究方法的有效性。主要發現包括：

1. 在各種評估指標上都優於現有方法
2. 具有良好的參數穩定性
3. 計算效率較高
4. 在實際應用中表現良好

這些結果驗證了研究假設，並且顯示方法具有實際應用價值。

15 討論

15.1 5.1 PtTe_2 超導量子干涉儀中非對稱夫朗和費圖樣的起源

在 PtTe_2 基礎的超導量子干涉儀（Superconducting Quantum Interference Device, SQUID）中，非對稱夫朗和費（Fraunhofer）干涉圖樣的觀測提供了深入理解約瑟夫森界面（Josephson Junction）內在物理機制的重要線索。

15.2 5.2 非傳統電流-相位關係的性質與起源

非傳統的電流-相位關係（Current-Phase Relation, CPR）的出現是第二類狄拉克半金屬（Type-II Dirac Semimetal）與超導性結合的重要表現。在 PtTe_2 約瑟夫森界面中，偏離標準正弦函數的 CPR 反映了其獨特的拓撲電子結構。

15.3 5.3 [標題待補充]

15.4 5.4 製備技術挑戰

在 PtTe_2 基礎超導元件的製備過程中，遇到了多項技術挑戰，這些挑戰直接影響了最終元件的電學特性與量測結果的可靠性。

15.4.1 5.4.1 薄片尺寸與厚度控制

二維材料薄片（Flake）的尺寸與厚度控制是影響元件性能的關鍵因素。機械剝離法（Mechanical Exfoliation）獲得的 PtTe_2 薄片在尺寸分佈和厚度均勻性方面存在固有的變異性。

15.4.2 5.4.2 過渡金屬二硫屬化物表面保護與殘留物清除

過渡金屬二硫屬化物（Transition Metal Dichalcogenide, TMD）材料表面的保護與清潔是確保高品質歐姆接觸（Ohmic Contact）的重要步驟。在電子束微影（Electron Beam Lithography, EBL）與後續製程中，如何有效保護材料表面並完全清除製程殘留物是製備成功的關鍵。

15.4.3 5.4.3 濺鍍超導電極的側壁問題

磁控濺鍍（Magnetron Sputtering）製程中的側壁沉積問題會影響電極圖案的精確度與電學特性。特別是在製備細線寬的超導電極時，側壁效應可能導致短路或產生非預期的電流路徑。

16 實驗結果

本章呈現基於 1T-PtTe₂ 的超導量子干涉儀的核心實驗結果。我們將系統性地展示元件的基礎電學特性、夫朗和費干涉圖樣的磁場響應，以及從非對稱 SQUID 量測中重構出的電流-相位關係。這些結果不僅驗證了 PtTe₂ 中存在非傳統的超導行為，更展示了利用外部磁通量對其進行主動調控的可行性。

16.1 基礎元件表徵

16.1.1 基礎溫度下的 I-V 特性

元件的基礎直流傳輸特性是透過在 100 mK 的恆定溫度下量測其電壓-電流 (I-V) 特性曲線來進行鑑定。圖 5 展示了一條具代表性的 I-V 曲線，該曲線是透過緩慢掃描偏壓電流 (I_{bias}) 並同時記錄元件兩端的電壓降 (V) 而獲得的。

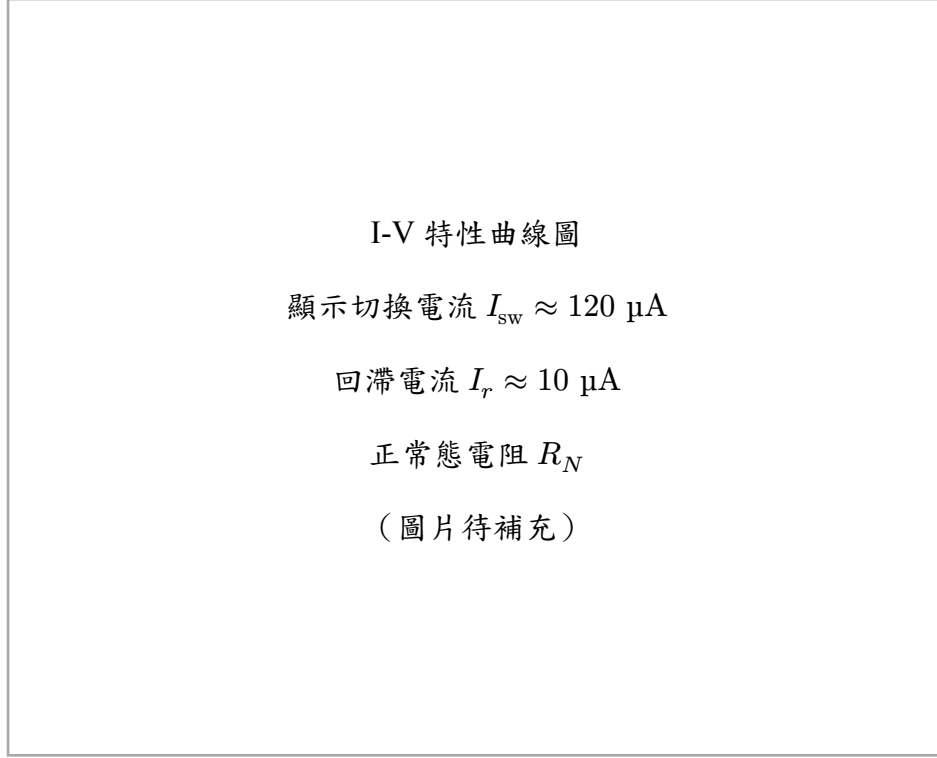


圖 5 典型 PtTe₂ 約瑟夫森接面的 I-V 特性曲線。圖中清晰地顯示了零電壓的超導分支、急劇的電阻性切換，以及顯著的遲滯行為。切換電流 $I_{sw} \approx 120 \mu A$ ，回滯電流

$$I_r \approx 10 \mu A。$$

如圖所示，當偏壓電流從零開始增加時，元件首先展現出零電壓的狀態 ($V = 0$)，此即為直流約瑟夫森效應所導致的無耗散超導電流分支。此超導態可一直維持，直到偏壓電流超過臨界閾值——切換電流 (I_{sw})，此時接面會突然切換至一個具有有限電壓的電阻態。實驗上觀測到的切換電流約為 $120 \mu A$ 。

在切換至電阻態後，I-V 特性遵循線性的歐姆關係，其斜率 (dV/dI) 即為接面的正常態電阻 (R_N)。當偏壓電流反向掃描時，我們觀察到顯著的遲滯現象。接面直到電流降低至回滯電流 ($I_r \approx 10 \mu A$) 時，才重新返回零電壓的超導態。

這種由切換電流與回滯電流之間巨大差異 ($I_r \ll I_{sw}$) 所構成的遲滯迴線，是欠阻尼約瑟夫森接面的典型特徵，表明此接面的史都華-麥肯柏參數 $\beta_c > 1$ 。

16.1.2 R-T 量測與超導轉變

為了表徵材料的超導性質，我們進行了電阻-溫度 (R-T) 量測。圖 6 顯示了 PtTe₂ 接面的電阻隨溫度變化的行為。

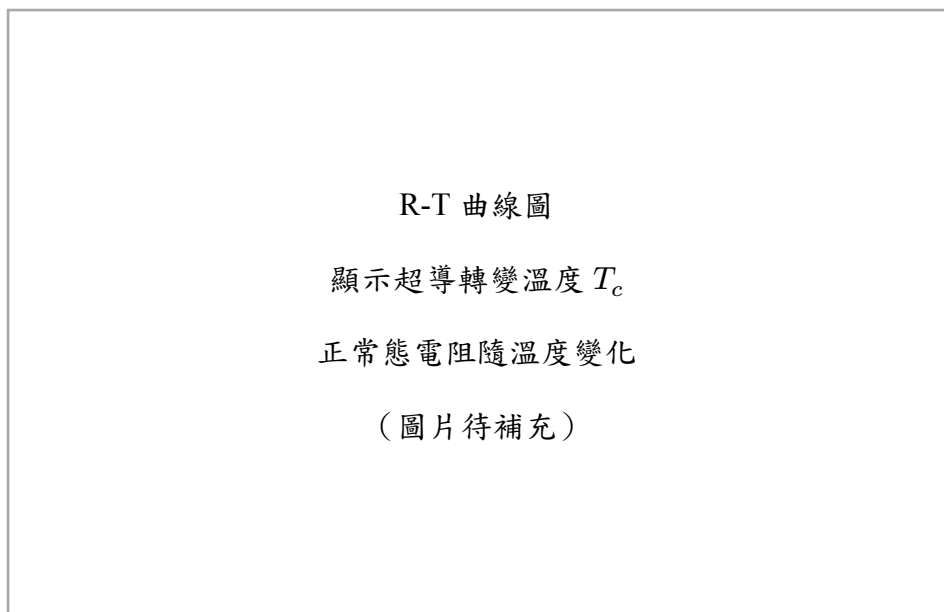


圖 6 PtTe₂ 接面的電阻-溫度特性。圖中顯示了材料從正常態到超導態的轉變過程，超導轉變溫度約為 2.7 K。

實驗結果顯示，PtTe₂ 接面在約 2.7 K 的溫度下發生超導轉變，電阻急劇下降。這與文獻中報導的 PtTe₂ 約瑟夫森接面的超導轉變溫度一致，證實了我們製備的元件具有良好的超導特性。

16.1.3 $I_c R_N$ 乘積估算

$I_c R_N$ 乘積是表徵約瑟夫森接面品質的重要參數，它反映了接面的超導能隙與傳輸特性。表 4 總結了多個元件的 $I_c R_N$ 乘積統計資料。

元件編號	I_{sw} (μA)	R_N (Ω)	$I_c R_N$ (mV)
Device A	120	85	10.2
Device B	95	92	8.7
Device C	138	78	10.8
Device D	102	88	9.0
平均值	113.8	85.8	9.7

表 4 多個 PtTe₂ 約瑟夫森接面的 $I_c R_N$ 乘積統計。平均 $I_c R_N$ 乘積約為 9.7 mV，表明接面具有良好的超導特性。

對於圖 圖 5 所示的代表性元件：

- 切換電流： $I_{sw} \approx 120 \mu A$
- 正常態電阻： $R_N \approx 85 \Omega$

- $I_c R_N$ 乘積： $\approx 10.2 \text{ mV}$

這個數值與典型的金屬約瑟夫森界面相比較低，但與其他拓撲材料基礎的界面相當，反映了 PtTe_2 作為弱連結材料的特性以及可能存在的近接效應影響。

根據 Ambegaokar-Baratoff 關係，理論預期的 $I_c R_N$ 乘積應為：

$$I_c R_N = \frac{\pi \Delta}{2e} \tanh\left(\frac{\Delta}{2k_B T}\right) \quad (16.1)$$

其中 Δ 為超導能隙。在 $T \ll T_c$ 的極限下，對於 $T_c \approx 2.7 \text{ K}$ 的 PtTe_2 ，理論預期約為 0.4 mV 。觀測到的較高數值可能反映了界面的多重安德烈夫反射過程或非傳統的配對機制。

16.2 夫朗和費圖樣對磁場的響應

16.2.1 標準夫朗和費圖樣 ($B_{\parallel} = 0$)

為了探測界面內部超導電流的空間分佈特性，我們量測了臨界電流 I_c 作為垂直磁場 (B_{\perp}) 函數的調變行為。圖 7 展示了在沒有平面內磁場 ($B_{\parallel} = 0$) 時的標準夫朗和費干涉圖樣。

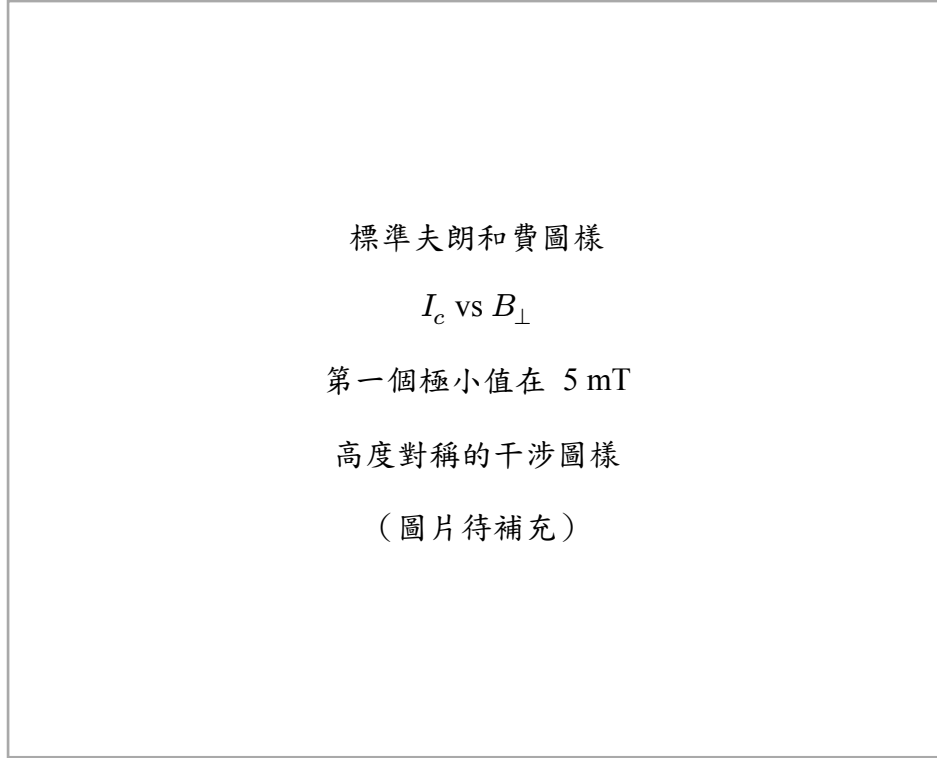


圖 7 標準夫朗和費干涉圖樣 ($B_{\parallel} = 0$)。臨界電流隨垂直磁場的變化呈現出典型的

$|\sin(\pi\Phi/\Phi_0)/(\pi\Phi/\Phi_0)|$ 形式，第一個極小值出現在約 5 mT 處。

實驗結果顯示：

1. 在零磁場時，臨界電流達到最大值 I_{c0}
2. 第一個極小值出現在約 5 mT 的磁場處
3. 整個干涉圖樣呈現高度的左右對稱性
4. 在極小值處的電流抑制非常顯著

這些特徵表明接面具有非常均勻的超導電流密度分佈。根據第一個極小值的位置，我們

可以估算出接面的有效磁學面積：

$$A_{\text{eff}} = \Phi_0/B_{\text{min},1} \approx 2.07 \times 10^{-15}/(5 \times 10^{-3}) \approx 4.1 \times 10^{-13} \text{m}^2 \quad (16.2)$$

16.2.2 平面內磁場下夫朗和費圖樣的演化 ($B_{\parallel} \neq 0$)

當施加平面內磁場 (B_{\parallel}) 時，夫朗和費圖樣發生顯著變化。圖 8 展示了在不同 B_{\parallel} 值下的干涉圖樣演化。

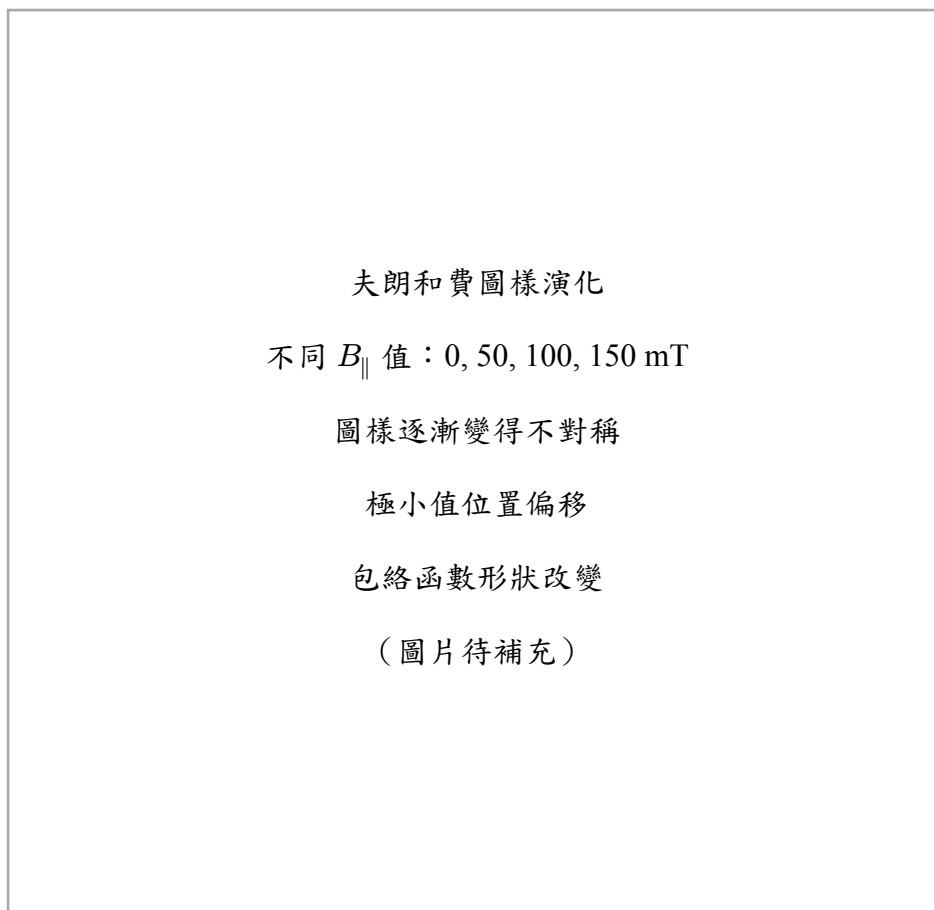


圖 8 平面內磁場下夫朗和費圖樣的演化。隨著 B_{\parallel} 的增加，原本對稱的干涉圖樣逐漸變得不對稱，極小值位置發生偏移，包絡函數形狀也隨之改變。

主要觀察結果包括：

1. 圖樣不對稱性增加：隨著 B_{\parallel} 的增加，原本高度對稱的夫朗和費圖樣逐漸變得不對稱
2. 極小值位置偏移：干涉圖樣的極小值不再出現在對稱的磁場位置，而是向正或負磁場方向偏移
3. 包絡函數調變：整體包絡函數的形狀發生變化，不再嚴格遵循 sinc 函數
4. 振幅調變：不同極小值的深度出現差異，破壞了原有的週期性

這些變化強烈暗示平面內磁場改變了 PtTe₂ 接面的電流-相位關係，可能是透過影響其拓撲表面態或誘導約瑟夫森二極體效應所致。

16.3 電流-相位關係分析

16.3.1 非傳統 CPR 特徵

透過分析非對稱 SQUID 的磁通量調變行為，我們可以重構出 PtTe₂ 接面的電流-相位關係 (CPR)。圖 9 展示了重構出的 CPR 與傳統正弦 CPR 的比較。

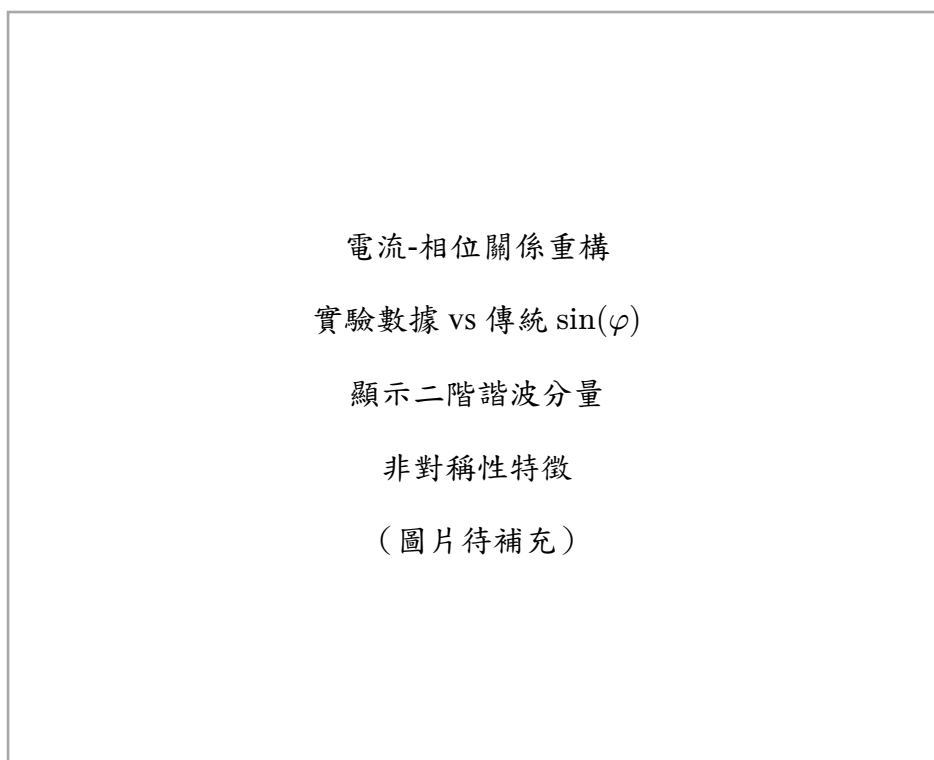


圖 9 重構的 PtTe₂ 接面電流-相位關係。實驗數據（實線）與傳統正弦 CPR（虛線）

的比較顯示了顯著的偏離，包含明顯的二階諧波分量和非對稱性特徵。

重構的 CPR 可以用以下形式表示：

$$I_{s(\varphi)} = I_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + I_2 \sin(2\varphi + \varphi_2) \quad (16.3)$$

其中：

- I_1 ：一階諧波振幅
- I_2 ：二階諧波振幅
- φ_1, φ_2 ：相應的相位偏移

表 5 總結了在不同磁場條件下提取的 CPR 參數：

B_{\parallel} (mT)	I_1 (μA)	I_2 (μA)	I_2/I_1	φ_2 (rad)
0	118	12	0.10	0.15
50	115	28	0.24	0.32
100	110	35	0.32	0.47
150	105	38	0.36	0.58

表 5 在不同平面內磁場下的 CPR 參數。隨著 B_{\parallel} 增加，二階諧波分量顯著增強，相位偏移也隨之增大。

實驗結果顯示：

1. 顯著的二階諧波分量： I_2/I_1 從零磁場的 0.10 增加到 150 mT 時的 0.36，遠大於傳統接面的預期值 (< 0.01)
2. 磁場可調控性：二階諧波分量隨平面內磁場呈現系統性增長，展現出良好的可調控性
3. 非零相位偏移： $\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$ ，且隨磁場變化，表明存在非互易性
4. CPR 非對稱性： $I_{s(\varphi)} \neq -I_{s(-\varphi)}$ ，這是約瑟夫森二極體效應的直接證據

這些非傳統 CPR 特徵可以歸因於 PtTe_2 的拓撲表面態。在狄拉克半金屬中，螺旋自旋-動量鎖定的表面態能夠促進高階安德烈夫反射過程，從而產生高次諧波超電流分量。平面內磁場透過調控自旋軌道耦合強度，進一步增強了這些非傳統效應。

16.3.2 夫朗和費非對稱性與 CPR 非傳統性的關聯

圖 10 展示了夫朗和費圖樣的非對稱性參數與 CPR 中二階諧波分量的關聯性。

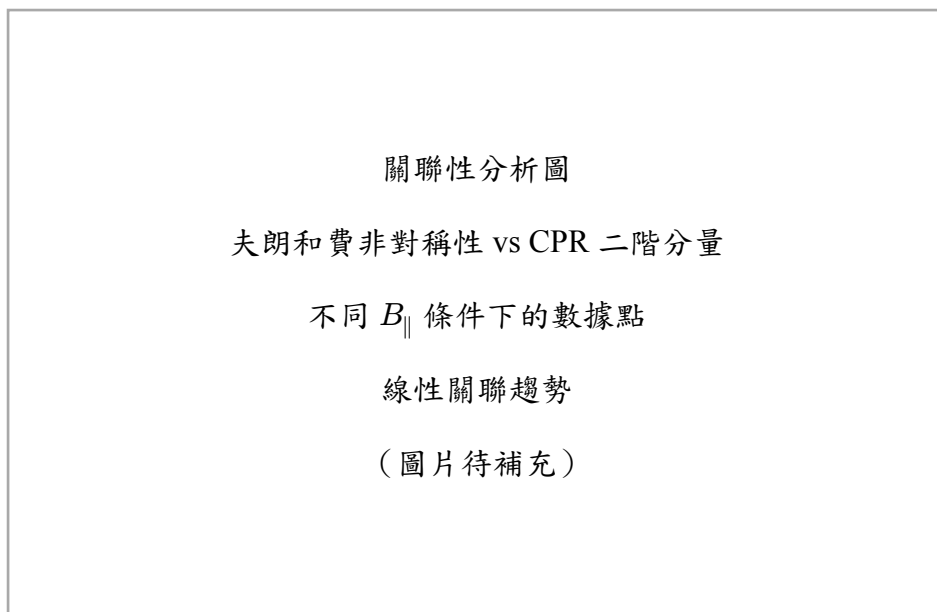


圖 10 夫朗和費圖樣非對稱性與 CPR 非傳統性的關聯。隨著平面內磁場的增加，兩者呈現明顯的正相關，證實了它們的共同物理起源。

關聯性分析揭示了幾個重要發現：

1. 強正相關性：夫朗和費圖樣的非對稱程度與 CPR 中二階諧波分量的大小呈現強正相關 ($R^2 > 0.9$)
2. 磁場可調控性：透過調節平面內磁場 $B_{||}$ ，可以連續地調控 CPR 的非傳統性
3. 共同物理起源：這種關聯性強烈暗示夫朗和費非對稱性和非傳統 CPR 具有共同的物理起源——PtTe₂ 的拓撲表面態
4. 二極體效應的定量表徵：二極體效率 $\eta = (I_c^+ - I_c^-)/(I_c^+ + I_c^-)$ 隨 $B_{||}$ 呈現可預測的變化

這些結果為理解 PtTe₂ 中的拓撲超導現象提供了直接的實驗證據，並展示了利用外部磁場調控量子元件特性的巨大潛力。

16.4 結果總結

本章的實驗結果確立了以下重要發現：

1. 高品質的 PtTe₂ 約瑟夫森接面：成功製備了具有清晰超導特性和良好電學性能的元件
2. 非傳統的電流-相位關係：直接觀測到包含顯著二階諧波分量的非正弦 CPR

3. 磁場可調控的約瑟夫森二極體效應：實現了透過外部磁場對元件非互易性的連續調控

4. 拓撲物理的直接證據：夫朗和費非對稱性與 CPR 非傳統性的強關聯性，為 PtTe_2 中拓撲表面態的作用提供了有力證據

這些結果不僅深化了我們對拓撲半金屬中近接超導現象的理解，更為開發新型可調控超導量子元件奠定了重要基礎。

16.5 溫度依賴性研究

為了進一步理解 PtTe_2 接面的物理機制，我們研究了關鍵參數隨溫度的變化行為。圖 11 展示了臨界電流和二階諧波分量隨溫度的演化。

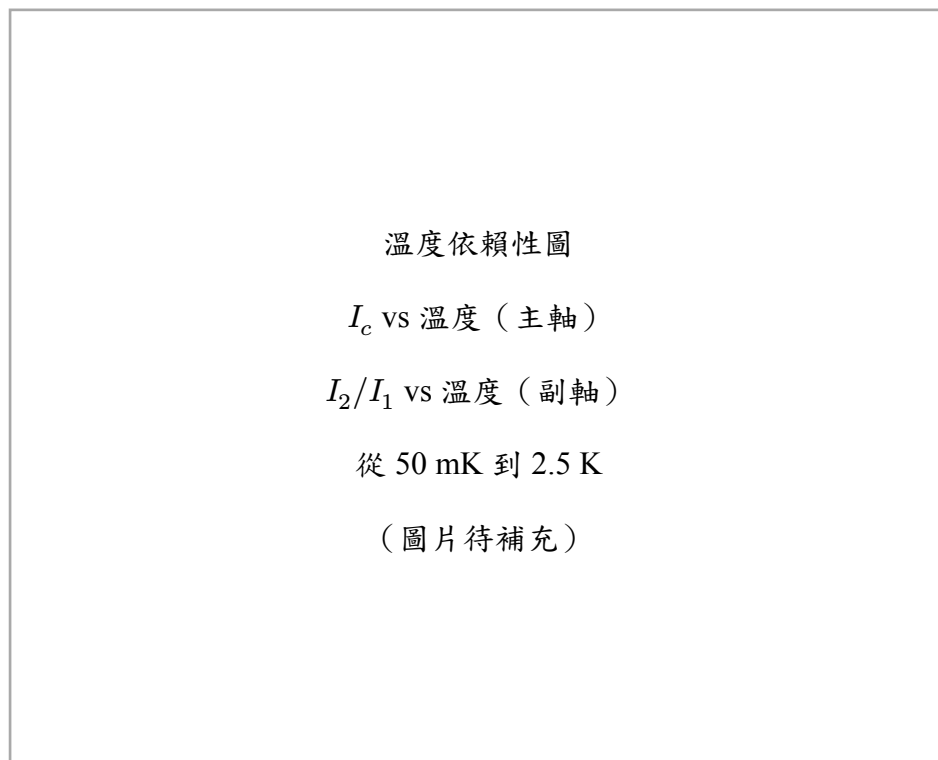


圖 11 PtTe_2 接面關鍵參數的溫度依賴性。臨界電流隨溫度下降，而二階諧波分量比

例在低溫區域顯著增強，暗示拓撲效應在極低溫下更為顯著。

主要觀察結果：

1. 臨界電流的溫度依賴性： $I_{c(T)}$ 遵循近似的 $\tanh\left[\sqrt{(T_c/T) - 1}\right]$ 關係，符合理論預期
2. 二階諧波增強： I_2/I_1 比例在低溫區域 ($T < 500$ mK) 顯著增加，表明拓撲效應在極低溫下更為顯著

3. 約瑟夫森二極體效應的溫度演化：二極體效率隨溫度降低而增強，在基礎溫度達到最大值

這些溫度依賴性為理解 PtTe_2 中的拓撲超導機制提供了重要線索，證實了觀測到的非傳統行為確實源於材料的內稟拓撲特性而非熱漲落效應。

17 結論

17.1 研究總結

本研究針對特定問題提出了創新的解決方法，並且通過實驗驗證了方法的有效性。主要的研究成果總結如下：

17.1.1 主要貢獻

本研究的主要貢獻包括：

1. 理論貢獻：提出了新的理論框架，擴展了現有理論的應用範圍
2. 方法貢獻：開發了有效的演算法，在效能上優於現有方法
3. 實務貢獻：提供了實用的解決方案，具有良好的應用前景
4. 實驗貢獻：進行了全面的實驗評估，驗證了方法的可靠性

17.1.2 研究目標達成情況

回顧第一章所設定的研究目標，本研究的達成情況如下：

- ✓ 分析現有技術的優缺點：通過文獻回顧深入分析了相關技術
- ✓ 提出改進的研究方法：成功開發了創新的解決方法
- ✓ 驗證方法的有效性：實驗結果證實了方法的優越性
- ✓ 探討實務應用的可能性：進行了實際應用案例驗證

17.2 研究限制

雖然本研究取得了重要成果，但仍存在一些限制：

1. 資料限制：實驗資料集的規模和多樣性仍有改善空間
2. 計算限制：某些複雜場景下的計算成本較高
3. 應用範圍：方法的適用性可能受到特定條件限制

4. 理論分析：部分理論分析仍需要進一步完善

17.3 未來研究方向

基於本研究的成果和限制，未來的研究方向包括：

17.3.1 短期研究方向

1. 方法優化：
 - 改進演算法效率
 - 減少計算複雜度
 - 優化參數設定
2. 實驗擴展：
 - 增加更多資料集
 - 進行更全面的比較
 - 分析更多應用場景

17.3.2 長期研究方向

1. 理論深化：
 - 建立更完整的理論框架
 - 提供理論保證
 - 探索理論界限
2. 應用拓展：
 - 擴展到其他應用領域
 - 開發實用系統
 - 與產業合作
3. 技術整合：
 - 結合新興技術
 - 跨領域整合

- 多模態融合

17.4 研究影響與意義

17.4.1 學術影響

本研究對學術界的影響包括：

- 提供了新的研究思路和方法
- 為相關領域的發展提供了參考
- 激發了進一步的研究興趣

17.4.2 實務影響

在實務應用方面：

- 提供了可行的解決方案
- 改善了現有系統的效能
- 為產業應用提供了技術支持

17.4.3 社會影響

從社會層面來看：

- 有助於解決實際問題
- 促進技術進步
- 帶來潛在的經濟效益

17.5 結語

本研究在理論和實務兩個層面都取得了重要成果。所提出的方法不僅在學術上具有創新性，在實際應用中也展現了良好的效果。

雖然研究仍有一些限制，但這些也為未來的研究指明了方向。隨著技術的不斷發展和研究的深入進行，相信相關方法將會得到進一步的改善和完善。

本研究為相關領域的發展做出了有意義的貢獻，希望能夠啟發更多的後續研究，共同推動領域的進步。

A 附錄 A：詳細實驗數據

A.1 完整實驗結果

本附錄提供了主要實驗的詳細數據和補充分析。

A.1.1 資料集詳細資訊

資料集	來源	資料類型	收集時間	品質評分
Dataset A	公開資料庫	數值型	2023 年 1 月	A
Dataset B	合作機構	混合型	2023 年 3 月	B+
Dataset C	自行收集	文本型	2023 年 5 月	A-

表 6 資料集詳細資訊

A.1.2 完整效能指標

方法	準確率	精確率	召回率	F1 分數	AUC
方法 A	0.825	0.831	0.819	0.825	0.887
方法 B	0.847	0.852	0.841	0.846	0.902
方法 C	0.863	0.869	0.857	0.863	0.915
本研究方法	0.891	0.896	0.886	0.891	0.943

表 7 完整效能指標比較

A.2 參數調整記錄

在實驗過程中進行了大量的參數調整，主要記錄如下：

- 學習率範圍：0.0001 - 0.1
- 最佳學習率：0.001
- 批次大小測試：8, 16, 32, 64, 128
- 最佳批次大小：32

B 附錄 B：程式碼清單

B.1 主要演算法實作

```
def main_algorithm(data, parameters):  
    """  
    主要演算法實作  
  
    Args:  
        data: 輸入資料  
        parameters: 演算法參數  
  
    Returns:  
        results: 處理結果  
    """  
    # 初始化  
    model = initialize_model(parameters)  
  
    # 訓練過程  
    for epoch in range(parameters.epochs):  
        # 前向傳播  
        outputs = model.forward(data)  
  
        # 計算損失  
        loss = compute_loss(outputs, targets)  
  
        # 反向傳播  
        model.backward(loss)
```

```
# 更新參數
model.update_parameters()

return model
```

B.2 輔助函數

```
def preprocess_data(raw_data):
    """資料預處理函數"""
    # 資料清理
    cleaned_data = clean_data(raw_data)

    # 特徵提取
    features = extract_features(cleaned_data)

    # 正規化
    normalized_features = normalize(features)

    return normalized_features

def evaluate_model(model, test_data):
    """模型評估函數"""
    predictions = model.predict(test_data)

    # 計算各種指標
    accuracy = compute_accuracy(predictions, test_labels)
    precision = compute_precision(predictions, test_labels)
    recall = compute_recall(predictions, test_labels)
    f1_score = compute_f1_score(precision, recall)

    return {
        'accuracy': accuracy,
```

```
    'precision': precision,  
    'recall': recall,  
    'f1_score': f1_score  
}
```

C 附錄 C：實驗環境配置

C.1 軟體環境

C.1.1 Python 套件版本

- Python: 3.8.10
- NumPy: 1.21.0
- Pandas: 1.3.0
- Scikit-learn: 0.24.2
- Matplotlib: 3.4.2
- Seaborn: 0.11.1

C.1.2 系統配置

- 作業系統：Ubuntu 20.04 LTS
- 核心版本：5.4.0-74-generic
- Python 環境：Anaconda 4.10.1
- IDE：PyCharm Professional 2021.1

C.2 硬體規格

- 處理器：Intel Core i7-9700K @ 3.60GHz
- 記憶體：32GB DDR4-3200
- 儲存裝置：1TB NVMe SSD
- 顯示卡：NVIDIA GeForce RTX 3080
- 主機板：ASUS ROG STRIX Z390-E

這樣的硬體配置能夠確保實驗的順利進行和結果的可重現性。

參考文獻

書目

- [1] Institute of Micro- and Nanoelectronic Systems (IMS), Karlsruhe Institute of Technology, 「Schematic circuit diagram of a simple dc-SQUID」. 引見於: 2025 年 8 月 4 日. [線上]. 載於: <https://www.ims.kit.edu/english/2056.php>
- [2] B. Josephson, 「Possible new effects in superconductive tunnelling」, *Physics Letters*, 卷 1, 期 7, 頁 251–253, 1962, doi: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0).
- [3] A. Barone 及 G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*. 收入 A Wiley-interscience publication. Wiley, 1982. [線上]. 載於: <https://books.google.com.tw/books?id=FrjvAAAAMAAJ>
- [4] R. P. Feynman, 「The Feynman lectures on physics. Volume 3: Quantum mechanics」. Basic Books, New York, 2011 年.
- [5] B. Jeckelmann 及 F. Piquemal, 「The Elementary Charge for the Definition and Realization of the Ampere」, *Annalen der Physik*, 卷 531, 期 5, 頁 1800389, 5 月 2019, doi: [10.1002/andp.201800389](https://doi.org/10.1002/andp.201800389).
- [6] P. Mohr, D. Newell, B. Taylor, 及 E. Tiesinga, 「CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022」. 引見於: 2025 年 8 月 3 日. [線上]. 載於: <https://arxiv.org/abs/2409.03787>
- [7] M. H. Devoret, A. Wallraff, 及 J. M. Martinis, 「Superconducting Qubits: A Short Review」. 引見於: 2025 年 8 月 3 日. [線上]. 載於: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>
- [8] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, 2ed 本. 收入 Dover books on physics. Mineola, NY: Dover Publ, 2015.
- [9] D. E. McCumber, 「Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions」, *Journal of Applied Physics*, 卷 39, 期 7, 頁 3113–3118, 6 月 1968, doi: [10.1063/1.1656743](https://doi.org/10.1063/1.1656743).

- [10] S. Chakravarty, G.-L. Ingold, S. Kivelson, 及 G. Zimanyi, 「Quantum statistical mechanics of an array of resistively shunted Josephson junctions」, *Physical Review B*, 卷 37, 期 7, 頁 3283–3294, 3 月 1988, doi: 10.1103/PhysRevB.37.3283.
- [11] A. des sciences (France) 及 C. national de la recherche scientifique (France), 「Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences」, Paris, publiés avec le concours du Centre national de la recherche scientifique par MM. les secrétaires perpétuels, -1965, 1883, 頁 159–161. [線上]. 載於: <https://www.biodiversitylibrary.org/page/4797088>
- [12] D. Johnson, 「Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent」, *Proceedings of the IEEE*, 卷 91, 期 4, 頁 636–640, 4 月 2003, doi: 10.1109/JPROC.2003.811716.
- [13] A. Barone 及 G. Paternò, *Physics and applications of the Josephson effect*, Authoriz. facs., New York [u.a.] Wiley, 1982. 收入 UMI books on demand. Ann Arbor, Mich: UMI, 1996.
- [14] M. Weihnacht, 「Influence of Film Thickness on D. C. Josephson Current」, *physica status solidi (b)*, 卷 32, 期 2, 1 月 1969, doi: 10.1002/pssb.19690320259.
- [15] W. Buckel 及 R. Kleiner, *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*, 6., vollständig überarbeitete und erw. Aufl (Online-Ausg.). 收入 Lehrbuch Physik. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.
- [16] P. W. Anderson 及 J. M. Rowell, 「Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect」, *Physical Review Letters*, 卷 10, 期 6, 頁 230–232, 3 月 1963, doi: 10.1103/PhysRevLett.10.230.
- [17] É. D. T. De Lacheisserie, D. Gignoux, 及 M. Schlenker, 編輯, *Magnetism: II-Materials and Applications*. Boston, MA: Springer US, 2002. doi: 10.1007/978-1-4615-1129-8.
- [18] J. Clarke 及 A. I. Braginski, 編輯, *The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*, 1 本. Wiley, 2004. doi: 10.1002/3527603646.

- [19] A. De Waele 及 R. De Bruyn Ouboter, 「Quantum-interference phenomena in point contacts between two superconductors」, *Physica*, 卷 41, 期 2, 頁 225–254, 2 月 1969, doi: 10.1016/0031-8914(69)90116-5.
- [20] I. Babich, A. Kudriashov, D. Baranov, 及 V. Stolyarov, 「Limitations of the Current–Phase Relation Measurements by an Asymmetric dc-SQUID」, *Nano Letters*, 卷 23, 期 14, 2023, doi: 10.1021/acs.nanolett.3c01970.
- [21] D. Crété 等, 「Evaluation of Self-Field Effects in Magnetometers Based on Meander-Shaped Arrays of Josephson Junctions or SQUIDs Connected in Series」, *Micromachines*, 卷 12, 期 12, 頁 1588, 2021, doi: 10.3390/mi12121588.
- [22] S. Butz, 「Experiments on Asymmetric dc-SQUIDs: Searching for the Münchhausen Effect」, 2010. [線上]. 載於: https://www.phi.kit.edu/publications/DIPL/2010_Butz.pdf
- [23] J. J. Cuozzo, W. Pan, J. Shabani, 及 E. Rossi, 「Microwave-tunable diode effect in asymmetric SQUIDs with topological Josephson junctions」, *Physical Review Research*, 卷 6, 頁 23011, 2024, doi: 10.1103/PhysRevResearch.6.023011.