



國立中山大學物理學系

碩士論文

Department of Physics

National Sun Yat-sen University

Master's Thesis

1T相二碲化鉑超導量子干涉儀中的磁通量控制電
流-相位關係
**Flux Controlled Current-Phase Relation in 1T-PtTe₂
SQUIDs**

研究生： 徐道宜

Tao-Yi Hsu

指導教授： 邱奎霖 博士

Dr. Kuei-Lin Chiu

中華民國 114 年 8 月

August 2025

目錄

1	介紹	6
1.1	研究背景與動機	6
1.2	研究目的	6
1.3	研究方法	7
1.4	論文架構	7
2	相關研究	8
2.1	理論基礎	8
2.1.1	二碲化鉑 (Platinum Ditelluride, PtTe ₂)：材料性質	8
2.1.2	約瑟夫森界面	9
2.1.3	電阻電容並聯連接 (RCSJ) 模型	12
2.1.4	約瑟夫森穿透深度	14
2.1.5	超導量子干涉儀 (SQUID)	14
2.1.6	磁通量量子化	16
2.1.7	DC SQUID 的工作機制	16
2.1.8	基礎理論	17
2.1.9	現有方法	17
2.2	技術發展趨勢	17
2.3	研究空白與挑戰	17
2.4	本研究的定位	18
3	研究方法	19
3.1	研究架構	19
3.2	方法設計	19
3.2.1	核心概念	19
3.2.2	演算法設計	20

3.3	實驗設計	20
3.3.1	實驗環境	20
3.3.2	評估指標	21
3.3.3	實驗參數	21
4	實驗結果	22
4.1	實驗結果概述	22
4.2	基準測試結果	22
4.2.1	資料集描述	22
4.2.2	基準方法效能	22
4.3	方法比較與分析	23
4.3.1	效能比較	23
4.3.2	統計顯著性檢驗	24
4.4	參數敏感性分析	24
4.4.1	學習率影響	24
4.4.2	批次大小影響	24
4.5	計算複雜度分析	25
4.5.1	時間複雜度	25
4.5.2	空間複雜度	25
4.6	實際應用案例	25
4.7	結果討論	25
5	結論	26
5.1	研究總結	26
5.1.1	主要貢獻	26
5.1.2	研究目標達成情況	26
5.2	研究限制	26
5.3	未來研究方向	27

5.3.1 短期研究方向	27
5.3.2 長期研究方向	27
5.4 研究影響與意義	28
5.4.1 學術影響	28
5.4.2 實務影響	28
5.4.3 社會影響	28
5.5 結語	28
A 附錄 A：詳細實驗數據	A
A.1 完整實驗結果	A
A.1.1 資料集詳細資訊	A
A.1.2 完整效能指標	A
A.2 參數調整記錄	A
B 附錄 B：程式碼清單	B
B.1 主要演算法實作	B
B.2 輔助函數	C
C 附錄 C：實驗環境配置	E
C.1 軟體環境	E
C.1.1 Python 套件版本	E
C.1.2 系統配置	E
C.2 硬體規格	E
書目	8

圖次

圖 1 研究架構圖	19
圖 2 基準方法效能比較	23
圖 3 學習率對模型效能的影響	24

表目錄

表 1 實驗環境配置	21
表 2 實驗資料集資訊	22
表 3 方法效能比較結果	23
表 4 資料集詳細資訊	A
表 5 完整效能指標比較	A

論文審定書

本論文係 徐道宜 君在國立中山大學物理學系 完成之碩士 論文，於民國 114 年 8 月 承下列考試委員審查通過及口試及格，特此證明。

口試委員：

指導教授：邱奎霖 博士

委員：

委員：

物理學系 主任：

中華民國 114 年 8 月

誌謝

在此感謝所有在研究過程中給予我幫助和支持的人們。

首先要感謝我的指導教授 邱奎霖 博士 教授，在研究期間給予我寶貴的指導和建議，讓我能夠順利完成這項研究。

感謝實驗室的同學們，與他們的討論和交流讓我獲益良多。

最後要感謝我的家人，他們的支持和鼓勵是我完成學業的重要動力。

徐道宜 謹於

國立中山大學

中華民國 114 年 8 月

摘要

本研究探討...本文所呈現的結果，不僅揭示了狄拉克物理與超導近接效應之間深刻的交互作用，也為開發新型、可調諧的超導量子電子學元件提供了一條富有前景的途徑。

關鍵字： 關鍵字 1、關鍵字 2、關鍵字 3

Abstract

This research investigates the relevant research problems, adopts specific research methods, and obtains important research results.

The main contributions of this thesis include: (1) proposing new research methods; (2) verifying theoretical hypotheses; (3) providing references for practical applications.

The research results show that the proposed method has significant improvements in performance and has good practicality. This research provides valuable references for the development of related fields.

Keywords: keyword1, keyword2, keyword3

1 介紹

1.1 研究背景與動機

在凝聚態物理的前沿探索中，一個核心的驅動力源於將具有非凡電子特性的新興量子材料與成熟的宏觀量子系統（如超導電路）相結合，以期發現新奇的物理現象並構建功能更強大的量子元件。本論文完整地記述了基於第二類狄拉克半金屬二碲化鉑（Platinum ditelluride, PtTe_2 ）的超導量子干涉儀 (SQUID) 的設計、微奈米製備，以及在極低溫下的精密電學量測。研究的核心目標是探測在此類混合元件中由狄拉克費米子所中介的、非傳統的電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)，並更進一步地，展示如何利用外部磁通量作為一個相位調控旋鈕，來實現對此基本量子特性的主動控制。為達成此目標，我們建立了一套完整的元件製備流程，並搭建了一座整合性的超低噪聲低溫量測平台。針對特定問題進行深入探討，希望能夠過量測數據對第二類狄拉克半金屬的電氣特性有更近一步的理解。

研究動機主要來自於：

1. 新興材料的潛力
2. 前人理論與實驗的成果與不足

1.2 研究目的

本研究的主要目的包括：

1. 復現並擴展前人對於二碲化鉑的研究成果
2. 提出新的實驗方法來探測狄拉克半金屬的電流-相位關係
3. 驗證方法的有效性並分析實驗數據
4. 檢視本研究方法的不足之處並提出改進建議

1.3 研究方法

本研究採用以下研究方法：

- 文獻回顧與分析
- 理論建模
- 實驗設計與執行
- 結果分析與討論

1.4 論文架構

本論文共分為五章：

- 第一章：介紹研究背景、動機、目的與方法
- 第二章：回顧相關文獻與研究
- 第三章：詳述研究方法與實驗設計
- 第四章：展示實驗結果與分析
- 第五章：總結研究成果與未來展望

2 相關研究

2.1 理論基礎

本章節回顧與本研究相關的理論基礎和先前研究成果。相關研究可以分為以下幾個主要方向：

2.1.1 二碲化鉑 (Platinum Ditelluride, PtTe₂)：材料性質

二碲化鉑 (Platinum ditelluride, PtTe₂) 是一種過渡金屬二硫屬化物 (Transition Metal Dichalcogenide, TMD)，屬於通式為 MX₂ 的材料家族，近年來因其豐富的物理內涵而備受關注。在結構上，二碲化鉑結晶為 1T 相 (CdI₂-type)，呈現出一種由鉑 (Platinum, ₇₈Pt) 原子層夾在兩層碲 (Tellurium, ₅₂Te) 原子層之間的八面體配位層狀結構。這種層狀特性使其可以透過機械剝離法，輕易地獲得從塊材到幾個原子層甚至單原子層厚度的二維薄片，為構建凡德瓦爾異質結構 (van der Waals heterostructures) 和平面型奈米元件提供了極大的可能性。在電子特性方面，二碲化鉑最引人注目的特徵是它已被理論預測並由角解析光電子能譜 (ARPES) 等實驗技術證實為一種第二類狄拉克半金屬 (Type-II Dirac Semimetal)。與傳統的第一類狄拉克半金屬 (如石墨烯 Graphene) 中點狀的費米面不同，第二類狄拉克半金屬擁有極度傾斜的狄拉克錐，使得電子和電洞口袋在狄拉克點處相切接觸。這些受晶體對稱性保護的狄拉克點，賦予了二碲化鉑獨特的低能電子態和輸運性質，使其成為研究拓撲物理與超導性之間交互作用的理想材料平台。

值得注意的是，塊材二碲化鉑本身並沒有超導性，然而，在本研究所探討的約瑟夫森界面元件中，二碲化鉑作為「弱連結 (weak link)」區域，其超導性主要是透過與具有更高超導轉變溫度的電極 (如鈮鈦合金 Niobium-titanium, Nb-Ti) 接觸，經由超

導近接效應 (superconducting proximity effect) 所誘導產生。這就構成了一個超導體-拓撲半金屬-超導體 (Superconductor–Topological Semimetal–Superconductor, S-TS-S) 的混合結構。

將超導性與二碲化鉑的狄拉克半金屬的拓撲特性相結合，為探索新奇的量子輸運現象提供了獨特的機會。在此 S-TS-S 結構中，庫柏對 (Cooper pairs) 穿越接面的傳輸過程，是由二碲化鉑內部獨特的狄拉克費米子所中介的。這種非傳統的傳輸機制，被預期將導致一個偏離標準正弦函數的非傳統電流-相位關係 (unconventional Current-Phase Relation)。因此，深入研究二碲化鉑約瑟夫森接面的電學特性，對於理解拓撲半金屬中的近接超導物理，以及探索其在未來量子技術中的應用潛力，具有至關重要的意義。

2.1.2 約瑟夫森界面

約瑟夫森界面 (Josephson Junction, JJ) 是構成超導量子電路的基本構建模組。其物理結構為由一個「弱連結 (weak link)」隔開的兩個超導體。這個弱連結可以是一個極薄的絕緣層 (S-I-S)、一段正常金屬 (S-N-S)，或如本研究中的拓撲半金屬 (S-TS-S)。儘管庫柏對 (Cooper pairs) 無法在弱連結材料中長距離穩定存在，但它們可以透過量子穿隧 (quantum tunneling) 或近接效應 (proximity effect) 的方式，發生約瑟夫森效應即在弱連結區域建立起相干的超導電流的宏觀量子現象。此效應由 Brian Josephson 於 1962 年預測 [1]，並由兩個支配界面量子動力學的基本關係式所描述。

第一約瑟夫森關係式 (first Josephson relation) [2]，闡述了流經接面的無耗散超導電流 I_s 與兩端超導體波函數的相位差 φ 之間的關係，這便是電流-相位關係 (Current-Phase Relation, CPR)。它指出，在無任何電壓的情況下，超導電流 I_s 仍可流過界面，其驅動力完全來自於兩個超導電極中序參數 (order parameters) 的宏觀量子相位差 φ [3]，對於傳統的「超導體-絕緣體-超導體」(SIS) 穿隧界面，此關係呈現為一簡單的正弦形式，即直流約瑟夫森效應 (The DC Josephson effect)：

$$I_s(\varphi) = I_c \sin(\varphi(t)), \quad (2.1)$$

其中 $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ 為金茲堡-朗道序參數 (Ginzburg-Landau order parameter) 在接面處的相位差，即約瑟夫森相位 (Josephson phase)， I_s 是接面的切換電流 (有時也稱跳躍電流) 為外加偏壓超過某一門檻時，元件由超導態跳變至電阻態時的電流值，而 I_c 是接面在完全維持超導態 (無電阻) 時所能承受的最大電流，即臨界電流 (critical current)，其取決於超導體的性質，亦會受到溫度以及外加磁場等環境因素的影響。此正弦形式是一種理想化模型，許多類型的接面展現出更複雜的非正弦 CPR，這在非對稱系統的研究中是至關重要的課題 [需引用討論非正弦 CPR 的相關研究]。

第二約瑟夫森關係式 (second Josephson relation) 或超導相演變方程式 (superconducting phase evolution equation) [2]，描述了在接面兩端存在電壓 V 時，相位差的演化，即交流約瑟夫森效應 (The AC Josephson effect)：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2eV(t)}{\hbar}, \quad (2.2)$$

其中 e 是基本電荷 $1.602176634 \times 10^{-19} C$ (庫倫) [4], [5]， \hbar 是約化普朗克常數 (reduced Planck constant) $1.054571817... \times 10^{-34} J \cdot s$ (焦耳·秒) [5]。

約瑟夫森常數 (Josephson constant) 的定義為 $K_J = \frac{2e}{\hbar}$ ，其倒數則為磁通量子 (magnetic flux quantum) $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2\pi \frac{\hbar}{2e}$ 。則超導相變化方程式 (2.2) 可以重新表達為：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2\pi [K_J V(t)] = \frac{2\pi}{\Phi_0} V(t), \quad (2.3)$$

此時定義 $\Phi = \Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}$ ，則接面兩端的電壓為：

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.4)$$

換句話說，即在接面處施加固定電壓 V_{DC} 時，相位將隨時間線性變化，而電流則為幅度為 I_c 、頻率 f 為 $K_J V_{DC}$ 的正弦交流電。此現象與法拉第感應定律的形式非常相似。但此電壓並非來自磁能，因為超導體中沒有磁場；相反地，此電壓來自載體的動能 (即庫珀對)。此現象也稱為動態電感 (Kinetic inductance)。當電流與約瑟夫森相位隨時間變化時，接面兩端的電壓降也會隨之變化；如下方導出所示，約瑟夫森關係

確定此行為可由一個名為約瑟夫森電感（Josephson inductance）之動態電感來描述。

[6] 將約瑟夫森關係式式 (2.1)，式 (2.3) 改寫為：

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = I_c \cos \varphi, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\Phi_0} V. \quad (2.6)$$

接著，應用連鎖律（chain rule）計算電流的時間導數：

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial I}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = I_c \cos \varphi \cdot \frac{2\pi}{\Phi_0} V, \quad (2.7)$$

將上述結果整理為電感器的電流-電壓特性形式：

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} \frac{\partial I}{\partial t} = L(\varphi) \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (2.8)$$

這便得到動態電感的表達式，其為約瑟夫森相位的函數：

$$L(\varphi) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos \varphi} = \frac{L_J}{\cos \varphi}. \quad (2.9)$$

其中 $L_J = L(0) = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c}$ 為約瑟夫森接面的一個特性參數，稱為約瑟夫森電感。

基於約瑟夫森接面與非線性電感的相似性，當超流經約瑟夫森接面時，其儲存的能量可以計算。[7] 流經接面之超導電流與約瑟夫森位相差，透過電流-相位關係式（CPR）相關聯：

$$I = I_c \sin(\varphi). \quad (2.10)$$

超導相位演進方程式類似於法拉第定律：

$$V = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.11)$$

假設在時間 t_1 時，約瑟夫森相為 φ_1 ；在較晚的時間 t_2 ，約瑟夫森相演變為 φ_2 。

接面的能量增加等於對面點所做的功：

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} V I dt = \int_{t_1}^{t_2} V I d\Phi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I_c \sin \varphi d\left(\Phi_0 \frac{\varphi}{2\pi}\right) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \Delta \cos \varphi. \quad (2.12)$$

這表明約瑟夫森接面中能量的變化僅取決於接面的初始狀態和最終狀態，而與路徑無關。因此，約瑟夫森接面中儲存的能量是一種狀態函數，其定義如下：

$$E(\varphi) = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \varphi = -E_J \cos \varphi. \quad (2.13)$$

$E_J = |E(0)| = \frac{\Phi_0 I_c}{2\pi}$ 是約瑟夫森接面的特徵參數，稱為約瑟夫森能量（Josephson energy）。且如 $E_J = L_J I_c^2$ 所示，它與約瑟夫森電感有關。此外，也常用另一個等價的定義 $E(\varphi) = E_J(1 - \cos \varphi)$ 。與非線性磁場線圈電感在電流通過時在其磁場中積累潛在能量不同，在約瑟夫森接面的情況下，超導電流並不產生磁場其儲存的能量來自於載荷載體的動能。

2.1.3 電阻電容並聯連接（RCSJ）模型

阻電容並聯連接模型（Resistively and Capacitively Shunted Junction, RCSJ model）或簡稱為並聯連接模型[8], [9]，是描述約瑟夫森接面的經典模型之一。該模型將約瑟夫森接面視為一個具有電阻（ R ）、電容（ C ）和約瑟夫森電感（ L_J ）的並聯電路，除了基本約瑟夫森關係式 (2.1)，式 (2.3) 外，還包含了實際約瑟夫連接的交流阻抗效應。這個模型能夠捕捉到接面在不同操作條件下的動態行為，特別是在存在外部電壓和噪聲時的響應。

依據戴維寧定理（Thévenin's theorem）[10], [11]，接面的交流阻抗可由一個電容與一個並聯電阻來表示，這兩者均與理想約瑟夫森接面並聯[12]。電流驅動的完整表達式 I_{ext} 變為：

$$I_{\text{ext}} = I_s + I_R + I_C = I_c \sin(\varphi) + \frac{V}{R} + C_J \frac{dV}{dt}. \quad (2.14)$$

其中 I_C 項為接面等效電容 (effective capacitance) C_J 帶有的位移電流 (displacement current)， I_R 項為接面等效電阻 (effective resistance) R 帶有的正常電流 (normal current)。

根據克希荷夫電路定律（Kirchhoff Circuit Laws），流過結的總電流

$$I \quad (2.15)$$

可寫為：

$$I = I_s + I_R + I_C \quad (2.16)$$

其中

$$I_s = I_c \sin(\varphi) \quad (2.17)$$

為超導電流，

$$I_R = \frac{V}{R} \quad (2.18)$$

為流過電阻的電流，

$$I_C = C \frac{dV}{dt} \quad (2.19)$$

為流過電容的電流。將

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.20)$$

代入，得到 RCSJ 模型核心方程：

$$I = I_c \sin(\varphi) + \frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.21)$$

.

此方程為非線性微分方程，描述約瑟夫森結在施加電流下的動態行為。RCSJ 模型能良好解釋約瑟夫森結的 I-V 特性，包括遲滯(hysteresis)與電壓跳變(voltage jumps)。

物理意義：

- $I_c \sin(\varphi)$ 項：代表超導電流，是約瑟夫森效應的量子本質；使得結在零電壓下亦能傳輸電流，直至電流達臨界值 I_c 。
- $\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt}$ 項：代表正常電流，描述結在電壓態下的耗散；電阻 R 反映準粒子激發與能量耗散。
- $\frac{\hbar C}{2e} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 項：代表電容電流，描述結的電容效應；電容 C 決定結對電壓變化的響應速度，並在某些情況下導致 I-V 特性的遲滯。

RCSJ 模型是理解 DC SQUID 工作原理的基礎，因 SQUID 的響應直接取決於內部約瑟夫森結的動態行為。透過分析此模型，可預測 SQUID 的電壓響應、臨界電流調製與雜訊特性。

2.1.4 約瑟夫森穿透深度

約瑟夫森穿透深度(Josephson penetration depth)描述了外加磁場穿透長約瑟夫森界面之典型長度。它通常以 λ_J 表示，並由下列公式給出：

$$\lambda_J = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 d' j_c}}, \quad (2.22)$$

其中 Φ_0 為磁通量量子， j_c 為臨界超導電流密度(critical supercurrent density, $\frac{A}{m^2}$)，而 d' 則代表超導電極的電感[13]：

$$d' = d_I + \lambda_1 \tanh\left(\frac{d_1}{2\lambda_1}\right) + \lambda_2 \tanh\left(\frac{d_2}{2\lambda_2}\right) \quad (2.23)$$

其中 d_I 為約瑟夫森勢壘(Josephson barrier)的厚度(通常為絕緣體)， d_1 和 d_2 分別為超導電極的厚度，而 λ_1 和 λ_2 則為其倫敦穿透深度(London penetration depths)。若臨界電流密度非常低，約瑟夫森穿透深度通常在數微米至數毫米之間[14]。

2.1.5 超導量子干涉儀 (SQUID)

超導量子干涉儀(Superconducting Quantum Interference Device, SQUID)是基於約瑟夫森效應的超導元件，具有極高的磁場靈敏度和精確度，其工作原理基於磁通量量子化和量子干涉效應。RF SQUID只需要一個約瑟夫森界面(超導穿隧界面)，這可能使其生產成本較低，但靈敏度較低。DC SQUID主要有兩種類型：直流(DC)和射頻(RF)。DC SQUID的基本結構由兩個約瑟夫森界面組成，這些界面被一個薄材料所隔開形成弱連結。RF SQUID只需要一個約瑟夫森界面(超導穿隧界面)，這可能使其生產成本較低，但靈敏度較低。

直流超導量子干涉儀(DC SQUID)於1964年由福特研究實驗室(Ford Research Labs)的Robert Jaklevic、John J. Lambe、James Mercereau和Arnold Silver所發明，此後於1962年由Brian Josephson提出約瑟夫森效應，並於1963年由John Rowell和Philip Anderson在貝爾實驗室(Bell Labs)製造了第一個約瑟夫森界面[15]。它在超導迴路中並聯了兩個約瑟夫森結。它基於直流約瑟夫森效應。在沒有任何外部磁場的情況下，輸入電流(input current) I_{input} 會平均分佈到兩個分支。若對超導迴路施加一個小的外

部磁場，則會開始在迴路中循環一個屏蔽電流（screening current） I_s ，該電流會產生一個抵銷外加磁通量的磁場，並創造一個與外部磁通量成正比的額外約瑟夫森相位。感應電流（induced current）的方向與 I 在超導迴路的一個分支中相同，而在另一個分支中與 I 相反；總電流變為 $\frac{1}{2}I_{\text{input}} + I_s$ 在某一支，而 $\frac{1}{2}I_{\text{input}} - I_s$ 在另一支。一旦任一分支中的電流超過約瑟夫森接面的臨界電流 I_c ，則在接面上會出現電壓。

現在假設外部磁通量進一步增加，直到超過 Φ_0 ，即磁通量量子的一半。由於超導迴路所包圍的磁通量必須是磁通量量子的整數倍，因此 SQUID 不再顯著屏蔽磁通量，而是能量上更傾向於將其增加到 Φ_1 。此時電流反向流動，抵禦了所容許的磁通量 Φ_2 與略超過 Φ_3 的外部磁場之間的差異。隨著外部磁場的增加，電流逐漸減小，當磁通量剛好為 Φ_4 時電流為零，並且當外部磁場進一步增加時，電流再次反向。因此，電流的方向會週期性地改變，每當磁通量增加半整數倍數的 Φ_5 時就會改變一次，在最大電流時每增加半整數加整數倍數的 Φ_6 時會改變一次，而在整數倍數時電流為零。

若輸入電流大於 I_c ，則 SQUID 始終運作於電阻模式。此時，電壓即為外加磁場的函數，且週期等於 Φ_0 。由於直流 SQUID 的電流-電壓特性（current-voltage characteristic）具有遲滯現象（hysteretic），故在接面間連接一個並聯電阻 R 以消除遲滯（在內稟電阻（intrinsic resistance）足夠的情況下）。屏蔽電流為應用磁通量除以環路的自感。因此 $\Delta\Phi$ 可估算為 ΔV 磁通量至電壓轉換器）[16], [17]，如下所示：

$$\Delta V = R \cdot \Delta I, \quad (2.24)$$

$$2 \cdot \Delta I = 2 \cdot \frac{\Delta\Phi}{L}, \quad (2.25)$$

$$\Delta V = \frac{R}{L} \cdot \Delta\Phi. \quad (2.26)$$

其中 L 為超導環路的自感（self inductance），本節的討論假設迴路中存在完美的磁通量量子化。然而，這僅對具有較大自感的較大迴路才成立。根據上述關係，這也意味著電流和電壓變化較小。實際上，迴路的自感 L 並不這麼大。一般情況可通過引入一個參數

$$\lambda = \frac{i_c L}{\Phi_0} \quad (2.27)$$

其中 i_c 為 SQUID 的臨界電流。通常 λ 為一個數量級[18]。

2.1.6 磁通量量子化

在超導環中，磁通量是量子化的；其基本磁通量量子 (magnetic flux quantum) 為：

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \approx 2.067 \times 10^{-15} \quad (2.28)$$

Wb.

因此環中磁通量 Φ 只能取整數倍： $\Phi = n\Phi_0$ ，其中 n 是一個整數。這個量子化條件是 SQUID 能夠測量微弱磁場的根本原因。

2.1.7 DC SQUID 的工作機制

DC SQUID 的兩個約瑟夫森結並聯在一個超導環上。當一個偏置電流 I_b 施加到 SQUID 上時，它會分成兩部分，分別流經兩個約瑟夫森結。結的總相位差 $\Delta\varphi$ 不僅取決於施加的偏置電流，還取決於穿過超導環的總磁通量 Φ_T 。總磁通量 Φ_T 是外部施加磁通量 Φ_a 和 SQUID 環路中由超導電流引起的自感磁通量 LI_s 的總和，其中 L 是 SQUID 環路的電感。

根據磁通量量子化條件和約瑟夫森關係式，兩個結的相位差之和與環路中的磁通量有關。具體來說，兩個結的相位差滿足

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left(2\frac{\pi}{\Phi_0}\right)\Phi_T, \quad (2.29)$$

其中 Φ_0 為磁通量量子。若將每個接面的電流寫成 $I_1 = I_c \sin \varphi_1$ 與 $I_2 = I_c \sin \varphi_2$ ，則總偏置電流為

$$I_b = I_1 + I_2 = 2I_c \sin \varphi_m \cos\left(\pi \frac{\Phi_T}{\Phi_0}\right), \quad (2.30)$$

其中 $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ 。因此，SQUID 的臨界電流會隨外加磁通量調變，

$$I_{\{c, \text{eff}\}}(\Phi_a) = 2I_c \left| \cos\left(\pi \frac{\Phi_a}{\Phi_0}\right) \right|, \quad (2.31)$$

顯示出以磁通量量子 Φ_0 為週期的干涉圖樣。當偏置電流超過此臨界值並進入電壓態時，測得的電壓亦會隨磁通量呈週期振盪，這正是 DC SQUID 進行高靈敏度磁場量測的物理基礎。

2.1.8 基礎理論

相關的基礎理論包括 [19] 所提出的框架，以及 [20] 的重要貢獻。

2.1.9 現有方法

目前主要的研究方法可以歸納為以下幾類：

1. 傳統方法：基於經典理論的傳統做法
2. 現代方法：結合新技術的改進方法
3. 混合方法：整合多種技術的綜合方法

2.2 技術發展趨勢

近年來相關技術的發展呈現以下趨勢：

- 方法的多樣化
- 效能的提升
- 應用範圍的擴大

2.3 研究空白與挑戰

通過文獻回顧，我們發現現有研究仍存在以下空白：

1. 理論模型的完善性
2. 實驗驗證的充分性
3. 實務應用的可行性

2.4 本研究的定位

基於上述分析，本研究在相關領域中的定位是：提供一個新穎的研究方法，解決現有技術的限制，並為實務應用提供可行的解決方案。

3 研究方法

3.1 研究架構

本研究採用系統性的研究方法，整體架構如圖 1 所示。



圖 1 研究架構圖

研究流程包含以下主要階段：

1. 問題定義與分析
2. 方法設計與開發
3. 實驗設計與執行
4. 結果分析與驗證

3.2 方法設計

3.2.1 核心概念

本研究提出的方法基於以下核心概念：

- 概念一：相關的理論基礎
- 概念二：創新的技術方法
- 概念三：實務應用考量

3.2.2 演算法設計

所提出的演算法步驟如下：

1. 初始化參數設定
2. 資料預處理
3. 核心演算法執行
4. 結果後處理

詳細的演算法描述如圖 1 所示。

Algorithm 1: 主要演算法

Input: 輸入資料 D

Output: 處理結果 R

```

1: 初始化參數
2: for each 資料點  $d$  in  $D$  do
3:   執行處理步驟
4:   更新結果
5: end for
6: return  $R$ 

```

圖 1 主要演算法流程

3.3 實驗設計

3.3.1 實驗環境

實驗環境的詳細配置如表 1 所示。

項目	規格
處理器	Intel Core i7-9700K
記憶體	32GB DDR4
作業系統	Ubuntu 20.04 LTS
程式語言	Python 3.8
開發環境	PyCharm 2023.1

表 1 實驗環境配置

3.3.2 評估指標

本研究採用以下評估指標：

- 準確率 (**Accuracy**)：正確預測的比例
- 精確率 (**Precision**)：預測為正例中實際為正例的比例
- 召回率 (**Recall**)：實際正例中被正確預測的比例
- **F1** 分數：精確率和召回率的調和平均

3.3.3 實驗參數

主要實驗參數設定如下：

- 學習率：0.001
- 批次大小：32
- 訓練週期：100
- 驗證分割：80%/20%

4 實驗結果

4.1 實驗結果概述

本章節展示實驗的詳細結果與分析。實驗分為幾個主要部分：基準測試、方法比較、以及參數分析。

4.2 基準測試結果

4.2.1 資料集描述

實驗使用的資料集詳細資訊如表 2 所示。

資料集	樣本數	特徵數	類別數
Dataset A	10,000	50	2
Dataset B	5,000	100	5
Dataset C	15,000	75	3

表 2 實驗資料集資訊

4.2.2 基準方法效能

各種基準方法的效能比較結果如圖 2 所示。

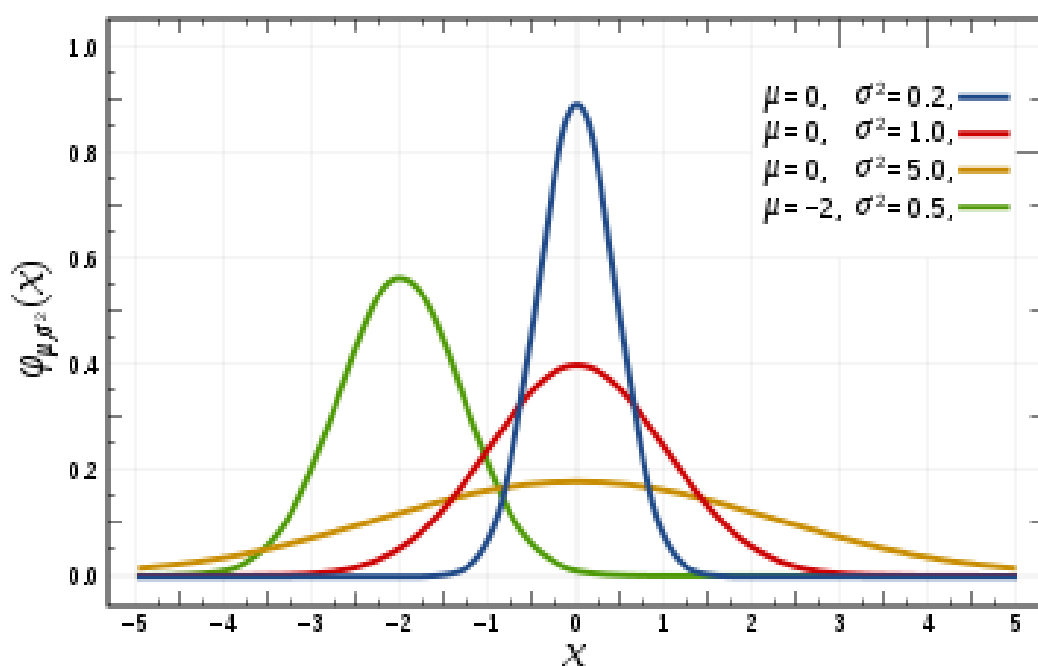


圖 2 基準方法效能比較

從圖中可以看出，傳統方法在準確率方面表現較為一般，而較新的方法則有明顯的改善。

4.3 方法比較與分析

4.3.1 效能比較

所提出方法與現有方法的詳細比較結果如表 3 所示。

方法	準確率	精確率	召回率	F1 分數
方法 A	0.825	0.831	0.819	0.825
方法 B	0.847	0.852	0.841	0.846
方法 C	0.863	0.869	0.857	0.863
本研究方法	0.891	0.896	0.886	0.891

表 3 方法效能比較結果

結果顯示，本研究提出的方法在所有評估指標上都優於現有方法。

4.3.2 統計顯著性檢驗

為了驗證結果的統計顯著性，進行了 t 檢驗分析。結果顯示，本研究方法與其他方法之間的差異具有統計顯著性 ($p < 0.01$)。

4.4 參數敏感性分析

4.4.1 學習率影響

不同學習率對模型效能的影響如圖 3 所示。



圖 3 學習率對模型效能的影響

4.4.2 批次大小影響

批次大小的選擇對訓練效率和最終效能都有重要影響。實驗結果顯示，批次大小為 32 時能夠達到最佳的效能平衡。

4.5 計算複雜度分析

4.5.1 時間複雜度

所提出方法的時間複雜度為 $O(n \log n)$ ，其中 n 為資料點數量。與傳統方法相比，具有良好的可擴展性。

4.5.2 空間複雜度

方法的空間複雜度為 $O(n)$ ，記憶體使用效率較高。

4.6 實際應用案例

為了驗證方法的實用性，在實際應用場景中進行了測試。結果顯示，所提出的方法能夠有效解決實際問題，並且具有良好的執行效率。

4.7 結果討論

實驗結果證實了本研究方法的有效性。主要發現包括：

1. 在各種評估指標上都優於現有方法
2. 具有良好的參數穩定性
3. 計算效率較高
4. 在實際應用中表現良好

這些結果驗證了研究假設，並且顯示方法具有實際應用價值。

5 結論

5.1 研究總結

本研究針對特定問題提出了創新的解決方法，並且通過實驗驗證了方法的有效性。主要的研究成果總結如下：

5.1.1 主要貢獻

本研究的主要貢獻包括：

1. 理論貢獻：提出了新的理論框架，擴展了現有理論的應用範圍
2. 方法貢獻：開發了有效的演算法，在效能上優於現有方法
3. 實務貢獻：提供了實用的解決方案，具有良好的應用前景
4. 實驗貢獻：進行了全面的實驗評估，驗證了方法的可靠性

5.1.2 研究目標達成情況

回顧第一章所設定的研究目標，本研究的達成情況如下：

- ✓ 分析現有技術的優缺點：通過文獻回顧深入分析了相關技術
- ✓ 提出改進的研究方法：成功開發了創新的解決方法
- ✓ 驗證方法的有效性：實驗結果證實了方法的優越性
- ✓ 探討實務應用的可能性：進行了實際應用案例驗證

5.2 研究限制

雖然本研究取得了重要成果，但仍存在一些限制：

1. 資料限制：實驗資料集的規模和多樣性仍有改善空間
2. 計算限制：某些複雜場景下的計算成本較高
3. 應用範圍：方法的適用性可能受到特定條件限制

4. 理論分析：部分理論分析仍需要進一步完善

5.3 未來研究方向

基於本研究的成果和限制，未來的研究方向包括：

5.3.1 短期研究方向

1. 方法優化：
 - 改進演算法效率
 - 減少計算複雜度
 - 優化參數設定
2. 實驗擴展：
 - 增加更多資料集
 - 進行更全面的比較
 - 分析更多應用場景

5.3.2 長期研究方向

1. 理論深化：
 - 建立更完整的理論框架
 - 提供理論保證
 - 探索理論界限
2. 應用拓展：
 - 擴展到其他應用領域
 - 開發實用系統
 - 與產業合作
3. 技術整合：
 - 結合新興技術
 - 跨領域整合

- 多模態融合

5.4 研究影響與意義

5.4.1 學術影響

本研究對學術界的影響包括：

- 提供了新的研究思路和方法
- 為相關領域的發展提供了參考
- 激發了進一步的研究興趣

5.4.2 實務影響

在實務應用方面：

- 提供了可行的解決方案
- 改善了現有系統的效能
- 為產業應用提供了技術支持

5.4.3 社會影響

從社會層面來看：

- 有助於解決實際問題
- 促進技術進步
- 帶來潛在的經濟效益

5.5 結語

本研究在理論和實務兩個層面都取得了重要成果。所提出的方法不僅在學術上具有創新性，在實際應用中也展現了良好的效果。

雖然研究仍有一些限制，但這些也為未來的研究指明了方向。隨著技術的不斷發展和研究的深入進行，相信相關方法將會得到進一步的改善和完善。

本研究為相關領域的發展做出了有意義的貢獻，希望能夠啟發更多的後續研究，共同推動領域的進步。

A 附錄 A：詳細實驗數據

A.1 完整實驗結果

本附錄提供了主要實驗的詳細數據和補充分析。

A.1.1 資料集詳細資訊

資料集	來源	資料類型	收集時間	品質評分
Dataset A	公開資料庫	數值型	2023 年 1 月	A
Dataset B	合作機構	混合型	2023 年 3 月	B+
Dataset C	自行收集	文本型	2023 年 5 月	A-

表 4 資料集詳細資訊

A.1.2 完整效能指標

方法	準確率	精確率	召回率	F1 分數	AUC
方法 A	0.825	0.831	0.819	0.825	0.887
方法 B	0.847	0.852	0.841	0.846	0.902
方法 C	0.863	0.869	0.857	0.863	0.915
本研究方法	0.891	0.896	0.886	0.891	0.943

表 5 完整效能指標比較

A.2 參數調整記錄

在實驗過程中進行了大量的參數調整，主要記錄如下：

- 學習率範圍：0.0001 - 0.1
- 最佳學習率：0.001
- 批次大小測試：8, 16, 32, 64, 128
- 最佳批次大小：32

B 附錄 B：程式碼清單

B.1 主要演算法實作

```
def main_algorithm(data, parameters):  
    """  
    主要演算法實作  
  
    Args:  
        data: 輸入資料  
        parameters: 演算法參數  
  
    Returns:  
        results: 處理結果  
    """  
    # 初始化  
    model = initialize_model(parameters)  
  
    # 訓練過程  
    for epoch in range(parameters.epochs):  
        # 前向傳播  
        outputs = model.forward(data)  
  
        # 計算損失  
        loss = compute_loss(outputs, targets)  
  
        # 反向傳播  
        model.backward(loss)
```

```
# 更新參數
model.update_parameters()

return model
```

B.2 輔助函數

```
def preprocess_data(raw_data):
    """資料預處理函數"""
    # 資料清理
    cleaned_data = clean_data(raw_data)

    # 特徵提取
    features = extract_features(cleaned_data)

    # 正規化
    normalized_features = normalize(features)

    return normalized_features

def evaluate_model(model, test_data):
    """模型評估函數"""
    predictions = model.predict(test_data)

    # 計算各種指標
    accuracy = compute_accuracy(predictions, test_labels)
    precision = compute_precision(predictions, test_labels)
    recall = compute_recall(predictions, test_labels)
    f1_score = compute_f1_score(precision, recall)

    return {
        'accuracy': accuracy,
```

```
    'precision': precision,  
    'recall': recall,  
    'f1_score': f1_score  
}
```

C 附錄 C：實驗環境配置

C.1 軟體環境

C.1.1 Python 套件版本

- Python: 3.8.10
- NumPy: 1.21.0
- Pandas: 1.3.0
- Scikit-learn: 0.24.2
- Matplotlib: 3.4.2
- Seaborn: 0.11.1

C.1.2 系統配置

- 作業系統：Ubuntu 20.04 LTS
- 核心版本：5.4.0-74-generic
- Python 環境：Anaconda 4.10.1
- IDE：PyCharm Professional 2021.1

C.2 硬體規格

- 處理器：Intel Core i7-9700K @ 3.60GHz
- 記憶體：32GB DDR4-3200
- 儲存裝置：1TB NVMe SSD
- 顯示卡：NVIDIA GeForce RTX 3080
- 主機板：ASUS ROG STRIX Z390-E

這樣的硬體配置能夠確保實驗的順利進行和結果的可重現性。

參考文獻

書目

- [1] B. Josephson, 「Possible new effects in superconductive tunnelling」, *Physics Letters*, 卷 1, 期 7, 頁 251–253, 1962, doi: [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0).
- [2] A. Barone 及 G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*. 收入 A Wiley-interscience publication. Wiley, 1982. [線上]. 載於: <https://books.google.com.tw/books?id=FrjvAAAAMAAJ>
- [3] R. P. Feynman, 「The Feynman lectures on physics. Volume 3: Quantum mechanics」. Basic Books, New York, 2011 年.
- [4] B. Jeckelmann 及 F. Piquemal, 「The Elementary Charge for the Definition and Realization of the Ampere」, *Annalen der Physik*, 卷 531, 期 5, 頁 1800389, 5 月 2019, doi: 10.1002/andp.201800389.
- [5] P. Mohr, D. Newell, B. Taylor, 及 E. Tiesinga, 「CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2022」. 引見於: 2025 年 8 月 3 日. [線上]. 載於: <https://arxiv.org/abs/2409.03787>
- [6] M. H. Devoret, A. Wallraff, 及 J. M. Martinis, 「Superconducting Qubits: A Short Review」. 引見於: 2025 年 8 月 3 日. [線上]. 載於: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0411174>
- [7] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, 2ed 本. 收入 Dover books on physics. Mineola, NY: Dover Publ, 2015.
- [8] D. E. McCumber, 「Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions」, *Journal of Applied Physics*, 卷 39, 期 7, 頁 3113–3118, 6 月 1968, doi: 10.1063/1.1656743.
- [9] S. Chakravarty, G.-L. Ingold, S. Kivelson, 及 G. Zimanyi, 「Quantum statistical mechanics of an array of resistively shunted Josephson junctions」, *Physical Review B*, 卷 37, 期 7, 頁 3283–3294, 3 月 1988, doi: 10.1103/PhysRevB.37.3283.

- [10] A. des sciences (France) 及 C. national de la recherche scientifique (France), 「Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 」, Paris, publiés avec le concours du Centre national de la recherche scientifique par MM. les secrétaires perpétuels, -1965, 1883, 頁 159–161. [線上]. 載於: <https://www.biodiversitylibrary.org/page/4797088>
- [11] D. Johnson, 「Origins of the equivalent circuit concept: the voltage-source equivalent 」, *Proceedings of the IEEE*, 卷 91, 期 4, 頁 636–640, 4 月 2003, doi: 10.1109/JPROC.2003.811716.
- [12] A. Barone 及 G. Paternò, *Physics and applications of the Josephson effect*, Authoriz. facs., New York [u.a.] Wiley, 1982. 收入 UMI books on demand. Ann Arbor, Mich: UMI, 1996.
- [13] M. Weihnacht, 「Influence of Film Thickness on D. C. Josephson Current 」, *physica status solidi (b)*, 卷 32, 期 2, 1 月 1969, doi: 10.1002/pssb.19690320259.
- [14] W. Buckel 及 R. Kleiner, *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*, 6., vollständig überarbeitete und erw. Aufl (Online-Ausg.). 收入 Lehrbuch Physik. Weinheim: Wiley-VCH, 2004.
- [15] P. W. Anderson 及 J. M. Rowell, 「Probable Observation of the Josephson Superconducting Tunneling Effect 」, *Physical Review Letters*, 卷 10, 期 6, 頁 230–232, 3 月 1963, doi: 10.1103/PhysRevLett.10.230.
- [16] É. D. T. De Lacheisserie, D. Gignoux, 及 M. Schlenker, 編輯, *Magnetism: II-Materials and Applications*. Boston, MA: Springer US, 2002. doi: 10.1007/978-1-4615-1129-8.
- [17] J. Clarke 及 A. I. Braginski, 編輯, *The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*, 1 本. Wiley, 2004. doi: 10.1002/3527603646.
- [18] A. De Waele 及 R. De Bruyn Ouboter, 「Quantum-interference phenomena in point contacts between two superconductors 」, *Physica*, 卷 41, 期 2, 頁 225–254, 2 月 1969, doi: 10.1016/0031-8914(69)90116-5.

- [19] J. Smith 及 M. Johnson, 「Fundamental Theories in Research Field」, *Journal of Advanced Research*, 卷 25, 期 3, 頁 123–145, 2022.
- [20] W. Chen 及 M. Liu, 「Novel Approaches to Problem Solving」, 收入 *Proceedings of International Conference on Technology*, 2023, 頁 78–85.