第 1 讲 极限强化练习参考答案

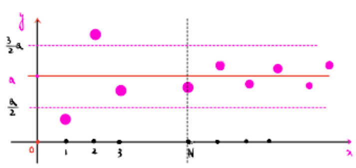
1.【答案】A

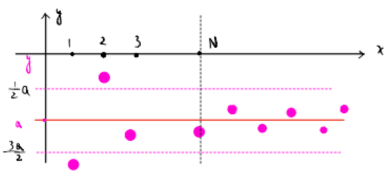
【解答】对于选项(A)和(B)：由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$。取 $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$，则 $\exists N > 0$，使得当

$n > N$ 时，恒有 $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ 成立，从而当 $n > N$ 时有：

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$$。(如图所示)

故（A）正确，(B)错误。





$a > 0$ 的情形　　　　$a < 0$ 的情形

(a)　　　　(b)

对于选项(C)：取 $a_n = a - \frac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \frac{2}{n}\right) = a$，但 $a_n = a - \frac{2}{n} < a - \frac{1}{n}$，故（C）错误。

对于选项(D)：取 $a_n = a + \frac{2}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a + \frac{2}{n}\right) = a$，但 $a_n = a + \frac{2}{n} > a + \frac{1}{n}$，故（D）错误。

综上所述，答案选(A)。

2.【解答】记 $f\left(x\right)=\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}=\begin{cases}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x},x>0\\\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x},x<0\end{cases}$ 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\right)-\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=2-1=1,$$

且 $\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{2}{\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}}{\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+1}\right)+1=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}\right)+1=0+1=1,$$

所以 $\lim_{x\to0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$。

【注】在求 $\lim_{x\to0^\pm}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}$ 时，可以用如下换元法：

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\underline{\underline{u=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}}\lim_{u\to+\infty}\frac{2+u}{1+u^4}=0;\lim_{x\to0^-}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}\underline{\underline{u=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}}\lim_{u\to0}\frac{2+u}{1+u^4}=2.$$

3.【答案】C

【解答】方法一：由 $\lim_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$ 得，$\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\alpha$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\to0(x\to0)$;

所以 $f\left(x\right)=\frac{\alpha x^3-\sin6x}{x}$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6+\frac{\alpha x^3-\sin6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\alpha x^3+6x-\sin6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 6x}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}\times36x^2}{x^2}=36。$$

方法二：由泰勒公式可得，当 $x\to0$ 时，

$$\sin 6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o\left(x^3\right)=6x-36x^3+o\left(x^3\right),$$

由 $$0=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-36x^3+o\left(x^3\right)+xf(x)}{x^3}$$

$$=-36+\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=-36+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

可得 $$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36。$$

方法三：$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sin 6x+xf(x)\right)+\left(6x-\sin 6x\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}+\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6x-\left[6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{36x^3+o\left(x^3\right)}{x^3}=36。$$

故答案选(C)。

【注】对于选择题，有时我们可以采用特例法求解。在此题中 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，作为特例，我们取 $\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，即 $f(x)=\frac{-\sin 6x}{x}$，从而

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=36。$$

4.【解答】

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{2+\cos x}{3}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$ 。

5.【解答】 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$ 。

下面用两种方法计算该极限:

方法一: $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2-\sin^2 2x}{4x^4}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{8x-4\sin 2x\cos 2x}{16x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}$$ 。

由洛必达法则以及等价无穷小替换可得

$$\lim_{x\to0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos 4x}{24x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3},$$

或者利用泰勒公式可得

$$\lim_{x\to0}\frac{4x-\sin 4x}{8x^3}=\lim_{x\to0}\frac{4x-\left[4x-\frac{1}{3!}(4x)^3+o\left(x^3\right)\right]}{8x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{32}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{8x^3}=\frac{4}{3}$$

故, $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\frac{4}{3}$ 。

方法二: $\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x\cos x)(x+\sin x\cos x)}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}$$

下面采用两种方式计算该极限:

其一,

$$\lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x+\sin 2x}{x}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left(2+\frac{\sin 2x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}=\frac{1}{4}\cdot(2+2)\cdot\lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}=\frac{4}{3}。$$

其二,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)(2x+\sin 2x)}{4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[2x-\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^3\right)\right)\right]\cdot\left[2x+2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o\left(x^3\right)\right]}{4x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]\left[4x-\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right]}{4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{16}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{4x^4}=\frac{4}{3},$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\frac{4}{3}。$$

6.【答案】0.

【解答】因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x\ln^2 2+6x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x\ln^3 2+6}=0,$$

又因为$|\sin x+\cos x|\le 2$,故$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0$。

7.【解达到】方法一:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}。$$

下面用两种方式求该极限:

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6};$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right)\right]-x}{x^3}=-\frac{1}{6};$$

故原式$=-\dfrac{1}{6}$。

方法二: $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{6}。$$

8、【解答】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

下面用三种方法求：$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$。

方法一：$I\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos(\sin x)\cdot\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\left[1-\cos(\sin x)\right]}{3x^2}$

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{x^2}=\frac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{6}$。

方法二：$I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{\sin^3 x}\overset{t=\sin x}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\left(t-\frac{t^3}{3!}+o\left(t^3\right)\right)}{t^3}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{1}{6}t^3+o\left(t^3\right)}{t^3}=\frac{1}{6}$。

方法三：当 $x\to 0$ 时 $\sin x\to 0$，$\sin\left(\sin x\right)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o\left(\sin^3 x\right)$，

所以 $\sin x-\sin\left(\sin x\right)=\frac{\sin^3 x}{3!}+o\left(\sin^3 x\right)\sim\frac{\sin^3 x}{6}\sim\frac{x^3}{6}$，

故

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\frac{1}{6}。$$

综上所述，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\frac{1}{6}$。

【注】我们对方法三作如下说明：

由泰勒公式可得，若 $x\to\bullet$ 时，$\varphi(x)\to 0$，则

$$\sin\left(\varphi\left(x\right)\right)=\varphi\left(x\right)-\frac{\varphi^3\left(x\right)}{3!}+o\left(\varphi^3\left(x\right)\right),$$

从而 $\varphi(x)-\sin(\varphi(x))\sim\frac{\varphi^3(x)}{6}$，这个结论可直接使用。

9.【答案】2.

【解答】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}[xf(x)]^2}{x^2 f(x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，从而 $1=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{1}{2}f(0)$，故 $f(0)=2$。

10.【解答】

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2\left[x-\ln(1+\tan x)\right]}{x^4}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$$

下面用三种方法计算上式中的极限：$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}$。

方法一： $$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan x-\sec^2 x}{x(1+\tan x)}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\tan x)}{x(1+\tan x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\tan x)}{x(1+\tan x)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}=\frac{1}{2}。$$

方法二：当 $x\to 0$ 时，$\tan x\to 0,\ln(1+\tan x)=\tan x-\dfrac{1}{2}\tan^2 x+o\left(\tan^2 x\right)$，

所以 $$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+o\left(\tan^2 x\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}+\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^2}+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

方法三：

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x+\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2},$$

由于 $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\tan x)}{\tan^2 x}\overset{t=\tan x}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\left(t-\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)\right)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}t^2+o\left(t^2\right)}{t^2}=\frac{1}{2}$$，所以 $I=\frac{1}{2}$。

故原式 $=\frac{1}{2}I=\frac{1}{4}$。

11. 【答案】$\frac{3}{2}\mathrm{e}$.

【解答】方法一：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\frac{1}{3}x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\sin x}{\frac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\cdot x}{\frac{2}{3}x}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$。

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\cos x}\left(\mathrm{e}^{1-\cos x}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=3\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}$。

方法三：设 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则 $f(t)$ 在 $\left[\cos x,1\right]$ 上连续可导，由拉格朗日中值定理可知

$\exists\xi\in\left(\cos x,1\right)$ 使 $f(1)-f(\cos x)=f'(\xi)\left(1-\cos x\right)$，即 $\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}=\mathrm{e}^{\xi}\left(1-\cos x\right)$，由于

$\cos x<\xi<1$，故当 $x\to0$ 时，$\xi\to1$，从而 $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{\xi}=\lim\limits_{\xi\to1}\mathrm{e}^{\xi}=\mathrm{e}$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\xi}\left(1-\cos x\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}e$$。

12.【解答】$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}}$，下面计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\frac{1-\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\left(1-\ln x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1,$$

故 原式 $=\mathrm{e}^{-1}$。

【注】对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}$，我们介绍另外一种求法：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}-1\right)}{\ln x},$$

设 $f(t)=\mathrm{e}^t$，则 $f(t)$ 在 $\left[0,\dfrac{\ln x}{x}\right]$ 上满足拉格朗日中值定理，从而存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\ln x}{x}\right)$，使

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1=f\left(\frac{\ln x}{x}\right)-f(0)=f'(\xi)\left(\frac{\ln x}{x}-0\right)=\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{\ln x}{x},$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，从而 $x\to+\infty$时$\xi\to 0$，由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\xi}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi+\ln\frac{\ln x}{x}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi+\ln\ln x-\ln x}{\ln x}$$

$$=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\xi}{\ln x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=-1+0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}-1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=-1$$

13.【答案】B.

【解答】方法一：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$。

方法二：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微，从而

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+o(x)=f'(0)\cdot x+o(x),,$$

$$f(x^3)=f(0)+f'(0)x^3+o(x^3)=f'(0)x^3+o(x^3),$$

于是，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\left(f'(0)x+o(x)\right)-2\left(x^3f'(0)+o(x^3)\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-f'(0)x^3+o(x^3)}{x^3}=-f'(0)$$ 故答案选（B）。

14.【解答】

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\right]}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}},$$

下面用两种方法求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$。

方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{2}。$$

方法二：利用泰勒公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}。$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}。$$

15.【解答】方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\frac{1}{2}。$$

方法二：分子有理化

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)-(x+1)^2}{x^2\left[\sqrt{1+2\sin x}+(x+1)\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-x^2-2x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}-\frac{1}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

方法三：利用泰勒公式

由于 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)$，且 $x\to 0$ 时，$\sin x\to 0$，

所以 $$(1+2\sin x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}(2\sin x)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(2\sin x)^2+o\left(\sin^2 x\right)$$

$$=1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o\left(\sin^2 x\right)$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln\left(1+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o\left(\sin^2 x\right)-x-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x-\frac{1}{2}\sin^2 x+o\left(\sin^2 x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}。$$

16.【解答】

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x+2x\sin x)}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x+2x\sin x-1)]}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}}。$$

下面用两种方法求指数部分的极限。

方法一：利用洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sin x+x\cos x\right)-2\sin 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x-\sin 2x}{2x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\sin x-2\cos 2x}{6x^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x-x\cos x+4\sin 2x}{12x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{8\cos 2x-4\cos x+x\sin x}{12}=\frac{1}{3}。$$

故 $$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}。$$

方法二：利用泰勒公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)]-1+2x[x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)]}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{3},$$

从而 $$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1+2x\sin x}{x^4}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}。$$

17.【答案】B

【解答】方法一：由 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-a}{x-a}=b$ 得，$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-a\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$，从而

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{f(x)-a}{2}\cdot\cos\frac{f(x)+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\frac{f(x)-a}{2}}{x-a}\cdot\cos\frac{f(x)+a}{2}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-a}{x-a}\cos\frac{f(x)+a}{2}\right)=b\cos a\text{。}$$

方法二：同“方法一”中的分析可得 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$，对函数 $g\left(t\right)=\sin t$ 使用拉格朗日中值定理得，存在介于 $f(x)$ 与 a 之间的点 ξ，使得

$$\sin f(x)-\sin a=g\left(f\left(x\right)\right)-\mathrm{g}\left(a\right)=g'\left(\xi\right)\left(f(x)-a\right)=\cos\xi\left(f(x)-a\right),$$

这里 $\xi\to a\left(x\to a\right)$。

因此 $$\lim_{x\to a}\frac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\cos\xi\frac{f(x)-a}{x-a}=b\cos a\text{。}$$

选项（D）的错误在于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处不一定连续，尽管 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=a$，但 $f(a)$ 不一定等于 a。故答案选（B）。

18.【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解答】分别计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x,\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]$。

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+c}{x-c}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\frac{2c}{x-c}}=\mathrm{e}^{2c};$$

由拉格朗日中值定理可得，存在 $\xi\in(x-1,x)$，使得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)\left[x-\left(x-1\right)\right]=f'(\xi)$$

因为 $x-1<\xi<x$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\xi\to\infty$，从而

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}\text{。}$$

由题设可得 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，解得 $c=\dfrac{1}{2}$。

19. 【答案】C

【解答】方法一：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$，所以 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-ax)\mathrm{e}^x}{x}$。

下面用两种方法计算该极限：

其一，$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-ax)\mathrm{e}^x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}[a\mathrm{e}^x-(1-ax)\mathrm{e}^x]=a-1;$$

其二， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-ax)\mathrm{e}^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-ax)[1+x+o(x)]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a-1)x+o(x)}{x}=a-1$。

所以，$a-1=1$，从而$a=2$。

方法二：

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a\mathrm{e}^x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^x}{x}+a\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x=-1+a\text{。}$$

所以，$a-1=1$，从而$a=2$。

20.【解答】记 $f(x)=\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$， 由于$\ln(1+x^2)>0,(x>0)$且单调递增，故 当 $x\to+\infty$时， $f(x)\geq \int_1^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\geq \int_1^x\ln 2\mathrm{d}t =(x-1)\ln 2 \to+\infty$，

所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。由$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$得$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=0$，所以$\alpha>0$。

又由$0=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^{3-\alpha}}{\alpha}$ 得，$\alpha<3$；

再由$0=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$，得$\alpha>1$，此时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^\alpha(1+\frac{1}{x^2})}=0\text{。}$$

综上所述，α 的取值范围为$1<\alpha<3$。

【注】我们也可以由

$$\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t>\int_{\frac{x}{2}}^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t>\int_{\frac{x}{2}}^x\ln[1+(\frac{x}{2})^2]\mathrm{d}t=\ln[1+(\frac{x}{2})^2]\int_{\frac{x}{2}}^x 1\mathrm{d}t$$

$$=\frac{x}{2}\ln(1+\frac{x^2}{4})\to+\infty(x\to+\infty)$$

得出 $$\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t\to+\infty,(x\to+\infty)\text{。}$$

21. 【答案】B

【解答】由$1=\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\mathrm{e}^x+ax^2+bx)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln[1+(\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1)]}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}}$

得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}=0\text{。}$$

所以，$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{[1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2)]+ax^2+bx-1}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+b)x+(\frac{1}{2}+a)x^2+o(x^2)}{x^2},$$

故$b=-1$，$a=-\frac{1}{2}$，应选（B）。

【注】我们也可以利用洛必达法则由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+ax^2+bx-1}{x^2}=0$确定其中的参数$a$，$b$。

请同学们自己试一试。

22.【答案】B.

【解答】当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\frac{1}{2}x^2\cdot x^2=\frac{1}{2}x^4$；$x\sin(x^n)\sim x\cdot x^n=x^{n+1}$；

$\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$。由题设可得，$4>n+1>2$，所以正整数$n=2$。

故答案选（B）。

23.【证明】方法一：由泰勒公式可得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)(x\to 0),$$

分别取$x=h,2h,3h$得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2),$$
$$f(2h)=f(0)+f'(0)\cdot 2h+\frac{f''(0)}{2!}(2h)^2+o(h^2),$$
$$f(3h)=f(0)+f'(0)\cdot 3h+\frac{f''(0)}{2!}(3h)^2+o(h^2),$$

于是

$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$

$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)\frac{f''(0)}{2!}h^2+o(h^2)$。

由$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)=o(h^2)$可得

因为$f(0)\neq 0,\ f'(0)\neq 0,\ f''(0)\neq 0$，所以

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0,\end{cases}$$

又因为该线性方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq 0$，

所以该线性方程组有唯一解。故存在唯一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得当$h\to 0$时，

$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小。

方法二：由
$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$$

得
$$\lambda_1 f(0)+\lambda_2 f(0)+\lambda_3 f(0)-f(0)=0,$$

因为$f(0)\neq 0$，所以 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ 。 ①

又由

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h},$$

得
$$\lambda_1 f'(0)+2\lambda_2 f'(0)+3\lambda_3 f'(0)=0。$$

因为$f'(0)\neq 0$，所以$\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0$ ， ②

进而有

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)$$

因为$f''(0)\neq 0$，所以$\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0$， ③

联立①，②，③得$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$

同方法一知该线性方程组有唯一解，故结论成立。

【注】$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1^2&2^2&3^2\end{vmatrix}$是一个三阶范德蒙行列式，其值为

$$D=(2-1)\cdot(3-1)\cdot(3-2)=2\neq 0。$$

利用初等变换或克莱姆法则，我们可以求出 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ ：由

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&0\\1&4&9&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&3&8&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_3}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&-3\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$ 得，

$\lambda_1=3,\lambda_2=-3,\lambda_3=1$。

24.【答案】$\frac{3}{4}$

【解答】$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}。$$

下面用两种方法求上式中的极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}$。

方法一：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arcsin x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}。$$

方法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\arcsin x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x(x+o(x))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{3}{2},$$

所以$I=\dfrac{3}{4k}$，又由题设$I=1$得$\dfrac{3}{4k}=1$，故$k=\dfrac{3}{4}$。

【注】我们再提供一种方法供大家参考

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{kx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\arcsin x)^{\frac{1}{2}}-1+1-\sqrt{\cos x}}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x\arcsin x)^{\frac{1}{2}}-1}{kx^2}-\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x-1)^{\frac{1}{2}}-1}{kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(\cos x-1)}{kx^2}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{kx^2}=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}=\frac{3}{4k}$$

所以$I=\dfrac{3}{4k}$，又由题设$I=1$，所以$\dfrac{3}{4k}=1$，故$k=\dfrac{3}{4}$。

25.【解析】方法一：因为 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，

所以

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)(1+Bx+Cx^2)$$
$$=1+(1+B)x+\left(\frac{1}{2}+B+C\right)x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C\right)x^3+o(x^3),$$

由题设 $e^x\left(1+Bx+Cx^2\right)=1+Ax+o\left(x^3\right)$ 可得

$$\begin{cases}1+B=A\\ \frac{1}{2}+B+C=0\\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0\end{cases},$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$。

方法二：由 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，可得 $e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax=o(x^3)$，

由

$$0=\lim_{x\to0}\frac{e^x(1+Bx+Cx^2)-1-Ax}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[\left(1+B\right)+\left(B+2C\right)x+Cx^2\right]-A}{3x^2},$$

得
$$\lim_{x\to0}\left[e^x\left(\left(1+B\right)+\left(B+2C\right)x+Cx^2\right)-A\right]=0,$$

即得，
$$1+B-A=0, \qquad ①$$

$$0=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[\left(1+B\right)+\left(B+2C\right)x+Cx^2\right]-A}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[\left(1+2B+2C\right)+\left(B+4C\right)x+Cx^2\right]}{6x}$$

得
$$\lim_{x\to0}e^x\left[\left(1+2B+2C\right)+(B+4C)x+Cx^2\right]=0,$$

即得，
$$1+2B+2C=0, \qquad ②$$

从而

$$0=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left[\left(1+2B+2C\right)+(B+4C)x+Cx^2\right]}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\left(1+2B+2C\right)+(B+4C)x+Cx^2}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{B+4C}{6}$$

即得，
$$B+4C=0。\qquad ③$$

联立方程①，②，③可得$\begin{cases}1+B-A=0\\1+2B+2C=0\\B+4C=0\end{cases}$，解得$A=\frac{1}{3},B=-\frac{2}{3},C=\frac{1}{6}$。

26. 【答案】 A

【解答】方法一：由 $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$

得$\lim\limits_{x\to0}(1-a\cos ax)=0$，所以$1-a=0$，故$a=1$。从而

$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}=-\frac{1}{6b}$，所以$b=-\frac{1}{6}$。综上所述$a=1,b=-\frac{1}{6}$。

方法二：

由$1=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-[ax-\frac{(ax)^3}{3!}+o(x^3)]}{-bx^3}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3)}{-bx^3}$$

得$\begin{cases}1-a=0,\\\frac{a^3}{6}=-b,\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-\frac{1}{6}\end{cases}$。故答案选（A）。

27. 【解答】（1）$a=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x(1+x)-\sin x}{x\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}1+\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}=1+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=1+0=1;$$

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+1}\sin x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)-x\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right)}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x^{k+2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^{k+2}}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}x^{1-k}.$$

由于当$x\to0$时，$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，故$k-1=0$，解得$k=1$。

【注】对于第(2)问，我们提供另一种解法：利用等价无穷小的传递性得

$$f(x)-a=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}-1=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1+x}{x}=(1+x)\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

$$\sim\frac{x-\sin x}{x\sin x}\sim\frac{x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2}=\frac{\frac{1}{6}x^3+o\left(x^3\right)}{x^2}\sim\frac{1}{6}x$$

所以$k=1$

28.【解答】方法一：因为

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)$，

$\cos 2x=1-\frac{1}{2!}(2x)^2+o(x^2)=1-2x^2+o(x^2)$

$\cos 3x=1-\frac{1}{2!}(3x)^2+o(x^2)=1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)$，

所以

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-2x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)$$

$$=1-\left(1-\frac{5}{2}x^2+o(x^2)\right)\cdot\left(1-\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)=1-\left(1-7x^2+o(x^2)\right)=7x^2+o(x^2)\sim 7x^2,$$

由题设可得，$a=7$，$n=2$。

方法二：由积化和差公式可得

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1-\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x)\cos 2x\quad=1-\frac{1}{2}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 4x\cdot\cos 2x$$

$$=1-\frac{1}{4}(1+\cos 4x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)\quad=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x),$$

下面采用两种方式求参数a,n。

其一，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)$

$$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(2x)^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(1-\frac{1}{2!}(4x)^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(1-\frac{1}{2!}(6x)^2+o\left(x^2\right)\right)\right]$$

$$=7x^2+o\left(x^2\right)\sim 7x^2$$

所以$a=7$，$n=2$。

其二，由$1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x)}{ax^n}$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}(2\sin 2x+4\sin 4x+6\sin 6x)}{anx^{n-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x+4\cos 4x+9\cos 6x}{an(n-1)x^{n-2}}=\frac{14}{n(n-1)a}\lim_{x\to 0}x^{2-n}$$

得

$$\begin{cases}2-n=0,\\ \dfrac{14}{n(n-1)a}=1,\end{cases}$$

解得 $n=2$， $a=7$ 。

方法三：因为

$$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x=1-\cos x+\cos x\cdot\left(1-\cos 2x\right)+\cos x\cdot\cos 2x\cdot\left(1-\cos 3x\right),$$

所以

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x\cdot(1-\cos 2x)+\cos x\cdot\cos 2x(1-\cos 3x)}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}}{ax^{n-2}}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\cos 2x\frac{1-\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\cos 2x\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}=7,$$

所以，$1=\frac{7}{a}\lim_{x\to 0}x^{2-n}$，故$\begin{cases}2-n=0\\ \frac{7}{a}=1\end{cases}$，解得 $n=2$ ， $a=7$ 。

方法四：

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{\ln[\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x]}}{ax^n}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x}{ax^n}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{ax^n}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax^{n-2}}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]+\ln[1+(\cos 2x-1)]+\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 2x-1)]}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos 3x-1)]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(3x)^2}{x^2}=-7$$

故$1=\dfrac{7}{a}\lim\limits_{x\to 0}x^{2-n}$，从而$\begin{cases}2-n=0\\ \dfrac{7}{a}=1\end{cases}$，解得$n=2$，$a=7$。

【注】类似于上面的方法四，我们还有下面的方法：

由于$u\to 0$时，$u\sim\ln\left(1+u\right)$，所以有，

$$1-\cos x\cos 2x\cos 3x=-\left(\cos x\cos 2x\cos 3x-1\right)\sim-\ln\left[1+\left(\cos x\cos 2x\cos 3x-1\right)\right]$$
$$=-\ln\cos x\cos 2x\cos 3x=-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)$$

又由于$\ln\cos x=\ln\left[\left(\cos x-1\right)+1\right]\sim\left(\cos x-1\right)\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，所以$\ln\cos x=-\dfrac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$；

同理有$\ln\cos 2x=-\dfrac{4}{2}x^2+o\left(x^2\right)$，$\ln\cos 3x=-\dfrac{9}{2}x^2+o\left(x^2\right)$，　　从而

$$-\left(\ln\cos x+\ln\cos 2x+\ln\cos 3x\right)=-\left[\left(-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(-\frac{4}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)+\left(-\frac{9}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)\right]$$

$$=7x^2+o\left(x^2\right)\sim 7x^2$$

故　$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\sim 7x^2\left(x\to 0\right)$。因此$n=2$，$a=7$。

29.【答案】（C）.

【解答】由$\cos x-1=x\sin\alpha(x)$得$\sin\alpha(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$。又由于$|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，所以

$\alpha(x)=\arcsin\dfrac{\cos x-1}{x}$；又因为当$x\to 0$时，$\dfrac{\cos x-1}{x}\sim\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=-\dfrac{1}{2}x$，所以

$\alpha(x)=\arcsin\dfrac{\cos x-1}{x}\sim\dfrac{\cos x-1}{x}\sim-\dfrac{1}{2}x$。所以，当$x\to 0$时，$\alpha(x)$是与$x$同阶但是不等价的无穷小。故答案选（C）。

30.【答案】（B）.

【解答】当 $x \to 0^+$ 时，$\ln^\alpha(1+2x) \sim (2x)^\alpha = 2^\alpha x^\alpha$， $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}}$，由题设可

知$\begin{cases} \alpha > 1, \\ \dfrac{2}{\alpha} > 1, \end{cases}$ 所以，$1 < \alpha < 2$。故答案选（B）。

31.【答案】（D）.

【解答】方法一：

由泰勒公式得，$x \to 0$ 时 $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$。所以

$p(x) - \tan x = a + bx + cx^2 + dx^3 - \left(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) = a + (b-1)x + cx^2 + (d - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3)$。

由 $p(x) - \tan x = o(x^3)$ 得，$\begin{cases} a = 0, \\ b - 1 = 0, \\ c = 0, \\ d - \dfrac{1}{3} = 0. \end{cases}$，所以$\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \\ c = 0, \\ d = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$。故答案选（D）。

方法二：

由 $0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3}$ 得，$\lim\limits_{x \to 0}(a + bx + cx^2 + dx^3 - \tan x) = 0$，从而

$a = 0$，又

$0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2}$，从而

$\lim\limits_{x \to 0}\left(b + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x\right) = b - 1 = 0$，解得 $b = 1$。

再由
$$0 = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2cx + 3dx^2 - \sec^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x \to 0} \frac{2cx + 3dx^2 - \tan^2 x}{x^2}$$
$$= \frac{1}{3}\lim_{x \to 0}\left(\frac{-\tan^2 x}{x^2} + \frac{3dx^2}{x^2} + \frac{2cx}{x^2}\right) = \frac{1}{3}(-1 + 3d) + \frac{1}{3}\lim_{x \to 0}\frac{2c}{x},$$

得$\begin{cases} c = 0 \\ -1 + 3d = 0 \end{cases}$，所以$\begin{cases} c = 0 \\ d = \dfrac{1}{3} \end{cases}$。综上所述：$a = 0$，$b = 1$，$c = 0$，$d = \dfrac{1}{3}$。

故答案选（D）.

32. 【解答】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{b}{n^a}}=\frac{1}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{\mathrm{e}}{b}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^a}=\frac{-\mathrm{e}}{2b}\lim_{n\to\infty}n^{a-1}$$

由当 $n\to\infty$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 为等价无穷小知，$\frac{-\mathrm{e}}{2b}\lim\limits_{n\to\infty}n^{a-1}=1,$ 所以 $a=1$，

$-\frac{\mathrm{e}}{2b}=1$，解得 $b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。故 $a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

【注】我们还可以利用下面两种方式求 a，b。请同学们细细体会。

（1）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\xi}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)$，其中 ξ 是介于 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 与 1 之间。故当 $n\to\infty$ 时，$\xi\to1$，从而

$$\mathrm{e}^{\xi}\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\sim\mathrm{e}\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1\right)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2n},$$

故，$-\frac{\mathrm{e}}{2n}=\frac{b}{n^a}$，解得 $a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

（2）$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}-1\right)=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1}-1\right)$

$$=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)\sim\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim-\frac{\mathrm{e}}{2n}(n\to\infty),$$

从而 $-\frac{\mathrm{e}}{2n}=\frac{b}{n^a}$，解得 $a=1$，$b=-\frac{\mathrm{e}}{2}$。

33.【答案】C

【解答】因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^3}-1)\mathrm{d}t}{x^7}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(\mathrm{e}^{x^6}-1)\cdot2x}{7x^6}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x^7}{7x^6}=0$，所以当 $x\to0$ 时，$\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^3}-1)\mathrm{d}t$ 是 x^7 的高阶无穷小，故应选（C）。

【注】这里再向同学们补充介绍两种方法。

①由$\left[\int_0^{x^2}(\mathrm{e}^{t^3}-1)\mathrm{d}t\right]'=\left(\mathrm{e}^{x^6}-1\right)\cdot 2x\sim 2x^7$ 可得$\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{t^3}-1\right)\mathrm{d}t\sim\frac{1}{4}x^8$；

② $\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{t^3}-1\right)\mathrm{d}t=\int_0^{x^2}\left(t^3+\cdots\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}x^8+\cdots\sim\frac{1}{4}x^8$，所以$\int_0^{x^2}\left(\mathrm{e}^{t^3}-1\right)\mathrm{d}t=o(x^7)$。

34.【答案】 $y=2x+1$

【解答】方法一：由于

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left((2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(2x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}2x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2x\cdot\frac{1}{x}\right)-1=2-1=1。$$

故斜渐近线方程为$y=2x+1$。

方法二：当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to 0$，从而$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$，

所以$y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=(2x-1)\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+1+\left(-\frac{1}{x}+2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+1+\alpha$

由于当$x\to\infty$时，$-\frac{1}{x}\to 0,2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)=2\cdot\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\to 0$，所以$\alpha=-\frac{1}{x}+2x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$

故斜渐近线方程为$y=2x+1$。

35.【答案】 $y=\frac{1}{5}$

【解答】由于$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4\sin x}{x}}{5-\frac{2\cos x}{x}}$。又当$x\to\infty$时，$\frac{1}{x}\to 0$，

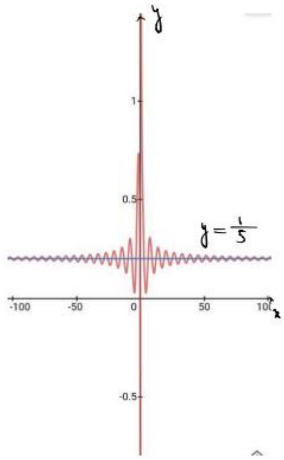
$|4\sin x|\le 4$，$|2\cos x|\le 2$，从而

$\lim_{x\to\infty}\frac{4\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(4\sin x)\right]=0,\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}(2\cos x)\right]=0$，于是

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{4\sin x}{x}}{5-\dfrac{2\cos x}{x}}=\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}。$$

所以曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{5}$。

【注】①为了方便同学们理解，我们画出该函数及其水平渐近线的图像，如图。



②同学们可能会想到使用洛必达法则计算

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1+4\cos x}{5+2\sin x}$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4\sin x}{5+2\cos x}$ 不存在，所以这里不能使用洛必达法则。

36.【答案】D

【解答】先求垂直渐近线

函数 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(\mathrm{e}^x+1)$ 在 $x=0$ 点处无定义，在其它点处均连续。由于

$\lim\limits_{x\to0} y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to0}\ln(\mathrm{e}^x+1)=\infty$，

所以 $x=0$ 为该曲线的一条垂直渐近线；

再求斜渐近线（水平渐近线）

方法一：由于 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln(\mathrm{e}^x+1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{x}$

$$=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+1)}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(e^x+1\right)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)-\ln e^x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x+1}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right)=0。$$

所以该曲线有一条斜渐近线 $y=x$;

由于 $k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=0$

$b=\lim_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=0+0$,

故 $y=0$ 为该曲线的水平渐近线。

方法二:当 $x\to+\infty$ 时,由于

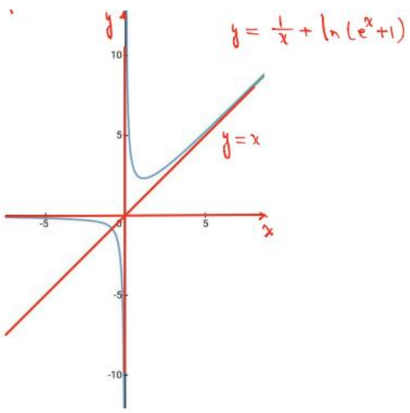
$$y=\frac{1}{x}+\ln(e^x+1)=\ln\left[e^x\left(e^{-x}+1\right)\right]+\frac{1}{x}=\ln e^x+\ln\left(e^{-x}+1\right)+\frac{1}{x}=x+\alpha,$$

其中 $\alpha=\ln\left(e^{-x}+1\right)+\frac{1}{x}\to0+0=0$,所以该曲线有一条斜渐近线 $y=x$;

当 $x\to-\infty$ 时,由于 $y=\frac{1}{x}+\ln(e^x+1)\to0+0=0$,故 $y=0$ 为该曲线的水平渐近线。

综上所述,该曲线有三条渐近线,分别为 $y=0,y=x,x=0$。故答案选(D)。

【注】为了方便同学们理解,我们画出该曲线及三条渐近线的图像,如



37.【答案】C

【解答】对于选项(A):由于 $y=x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,所以该曲线无垂直渐近线。

又由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin x-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在,

从而该曲线无斜渐近线及水平渐近线,所以该曲线无渐近线。

对于选项(B): 由于 $y=x^2+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以该曲线无垂直渐近线。又由于

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\infty+0=\infty$，从而该曲线没有斜渐近线及水平渐近线,所以该曲线无渐近线。

对于选项(C): $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义，在其余点处均连续。由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}=0+\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}\neq\infty$，从而该曲线无垂直渐近线;

由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sin\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$,从而该曲线有斜渐近线 $y=x$ 。

对于选项(D): $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义， $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}x^2+\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$

$=0+\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}\neq\infty$，故该曲线无垂直渐近线;

又由于 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty,$

从而该曲线无斜渐近线及水平渐近线，故该曲线无渐近线。

综上所述,答案选（C）。

38. 【答案】（D）.

【解答】由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(a+\mathrm{e}^{bx}\right)=a+\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{bx}=\infty$，从而 $b<0$ 。设 $g(x)=a+\mathrm{e}^{bx}$，则 $g(x)$ 的值域为 $(a,+\infty)$ 。又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其分母 $g(x)\neq0$，从而 $a\geq0$ 。故答案选(D)。

39. 【答案】-2.

【解答】因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} ae^{2x}=a$， $f(0)=a$.由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$，即得 $a=-2$ 。

40. 【解答】首先，函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$ 上连续。

由于 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}\right)=\dfrac{1}{\pi}+\lim\limits_{x\to1^-}\left(\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}\right)$

$$\underline{\underline{x=1+t}}\ \frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^-}\left(\frac{1}{\sin\pi(1+t)}+\frac{1}{\pi t}\right)=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^-}\left(\frac{1}{\pi t}-\frac{1}{\sin\pi t}\right)\ \underline{\underline{u=\pi t}}\ \frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^-}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{\sin u}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^-}\frac{\sin u-u}{u\sin u}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^-}\frac{\sin u-u}{u^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^-}\frac{\cos u-1}{2u}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}u^2}{2u}=\frac{1}{\pi}$$

要使 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续，只需定义 $f(1)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{1}{\pi}$ 。

41. 【解答】 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{3ax^2}{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{1-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-6a;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=4\lim_{x\to0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}4\lim_{x\to0^+}\frac{ae^{ax}+2x-a}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}4\lim_{x\to0^+}\frac{a^2e^{ax}+2}{2}=2a^2+4;$$

①当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即

$-6a=2a^2+4=6$，解得，$a=-1$。

所以当 $a=-1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

②当 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq f(0)$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，即

$-6a=2a^2+4\neq 6$，

解得 $a=-2$。所以当 $a=-2$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

【注】在求 $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f(x)$ 时，也可以使用泰勒公式。

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax^3}{x-\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)}=-6a,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2!}+o(x^2)\right)+x^2-ax-1}{\frac{x^2}{4}}$$

$$=4\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+\frac{a^2}{2})x^2+o(x^2)}{x^2}=2a^2+4。$$

42、【答案】（D）.

【解答】 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x})\overset{u=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=a$。

（1）当 $a=0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0=g(0)$。此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

（2）当 $a\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=a\neq 0=g(0)$。此时 $g(x)$ 在 $x=0$ 点不连续。

故 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值相关。

故答案选（D）。

43. 【答案】0

【解答】当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0}{1}=0$；

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx-x}{nx^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x-\frac{x}{n}}{x^2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{x}$。

所以， $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x\neq 0,\\ 0,x=0.\end{cases}$。因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点。

44.【答案】A

【解答】在 $[-\pi,\pi]$ 上， $f(x)$ 无定义的点为 $x=-\dfrac{\pi}{2},0,1,\dfrac{\pi}{2}$，其余点处均连续。

因为 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(e^{\frac{1}{x}}+e\right)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=\dfrac{(e^{\frac{-2}{\pi}}+e)}{\dfrac{-\pi}{2}(e^{\frac{-2}{\pi}}-e)}\cdot\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，

故 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\overset{u=e^{\frac{1}{x}}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u+e}{u-e}=1,\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\overset{u=e^{\frac{1}{x}}}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u+e}{u-e}=-1,$

故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃间断点)；

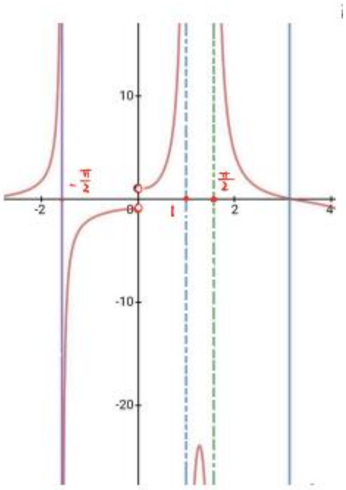
因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right)=\tan 1\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=\infty$，

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\dfrac{e^{\frac{2}{\pi}}+e}{\dfrac{\pi}{2}(e^{\frac{2}{\pi}}-e)}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，

故 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点。综上所述，答案选（A）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图。



45.【答案】B

【解答】因为 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，所以

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

又因为 $g(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，所以 $x=0$ 是 $g(x)$ 的可去间断点。故答案选(B)。

46.【答案】B

【解答】函数 $f(x)$ 在 $x=-1,0,1$ 处无定义，在其余点处均连续。

因为 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\infty$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{|x|}$，

其中 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}\cdot\dfrac{x}{-x}=-1$，

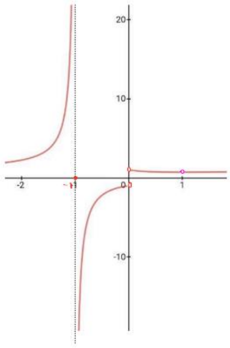
故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点；

因为 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

综上所述： $f(x)$ 的无穷间断点只有 $x=-1$。

故答案选（B）。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该函数的图像，如图



47.【答案】$\dfrac{1}{1-2a}$.

【解答】

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n(1-2a)+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}。$$

48.【解答】因为

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+(3-x_n)}{2}=\frac{3}{2},(n=1,2,\ldots),$$

所以数列$\{x_n\}$有上界。因为

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}},(n=2,3,\ldots)$$ 其中

$0<x_1<3$，$0<x_{n+1}\le\dfrac{3}{2},(n=1,2,\ldots)$。

所以 $$x_{n+1}-x_n=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\ge 0,(n=1,2,\ldots)。$$

即数列$\{x_n\}$当$n\ge 2$时单调递增且有上界，故由单调有界法则可知数列$\{x_n\}$的极限存在。

令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，在$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n(3-x_n)}$$

所以$l=\sqrt{l(3-l)}$，解得$l=\dfrac{3}{2}$或$l=0$，因为$x_n>0$，所以$l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ge x_2>0$

因此$l=\dfrac{3}{2}$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{3}{2}$。

【注】在此题中，证明数列$\{x_n\}$单调时，除了可以采用作差以外，还可以采用作商的方法：　由于$0<x_n\le\frac{3}{2}(n=2,3,\cdots)$，所以

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{(3-x_n)x_n}}{x_n}=\sqrt{\frac{3-x_n}{x_n}}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\ge\sqrt{\frac{3}{\frac{3}{2}}-1}=1(n=2,3,\cdots),$$

故$0<x_n\le x_{n+1}(n=2,3,\cdots)$。

49.【答案】（B）.

【解答】$I=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\dots(1+\frac{n}{n})^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})=2\int_0^1\ln(1+x)dx$，

$=2\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(1+x)\overset{u=1+x}{=}2\int_1^2\ln u\mathrm{d}u=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x$。

故本题答案选（B）。

【注】①$I=2\int_1^2\ln x\mathrm{d}x=\left(2x\ln x\Big|_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)=2(2\ln 2-1)=4\ln 2-2$。

②$I=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)$，

上式右端可视为$f(x)=2\ln x$在$[1,2]$上的特殊划分$1<1+\frac{1}{n}<1+\frac{2}{n}<\dots<1+\frac{n}{n}=2$下取$\xi_i=1+\frac{i}{n}\in\left[1+\frac{i-1}{n},1+\frac{i}{n}\right],i=1,2,\dots,n$的一个和式的极限，$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}=\frac{1}{n}$，

故$I=\int_1^2 2\ln x\mathrm{d}x$。

50、【证明】（Ⅰ）这里用三种方法证明：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法一：令$f(x)=\ln x$，由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi)[(n+1)-n]=f'(\xi)=\frac{1}{\xi},$$

因为$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$，所以$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法二：由于$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，故只需证明

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$。

令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$。

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$；又由于 $f(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$；

故$\ln(1+x)<x$（$x>0$）。

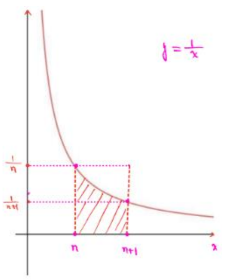
令 $g(x)=(1+x)\ln(1+x)-x$，则 $g'(x)=\ln(1+x)>0$，$x>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，又 $g(0)=0$，因此当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，从而$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)(x>0)$。

综上所述：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

方法三：

首先$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\ln x\Big|_n^{n+1}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，又由于 $f(x)=\frac{1}{x}$在$[n,n+1]$上单调递减，所以$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x<\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$，且$\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，(如图)

故$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。



（Ⅱ）先证明$\{a_n\}$单调。

$$a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

由（I）知 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,所以 $a_{n+1}-a_n<0$，即 $a_{n+1}<a_n$，故$\{a_n\}$单调递减。

再证明$\{a_n\}$有下界。由$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$得,

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n$$
$$=\ln(2)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln\left(2\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0,$$

所以$\{a_n\}$有下界，由单调有界法则知$\{a_n\}$收敛。

【注】在(II)中也可以用如下方法证明$\{a_n\}$有界:

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n>\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\ln n$$
$$=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0。$$

51.【答案】（B）.

【解答】由 $a_n>0$ 知，$S_n-S_{n-1}=a_n>0(n\geq 2)$，所以$\{S_n\}$单调递增。当$\{S_n\}$有界时，由单调有界法则知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在，设$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$，即$\{a_n\}$收敛于 0；当$\{a_n\}$收敛时，$\{S_n\}$不一定有界，例如：取 $a_n=1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，但 $S_n=n\to+\infty$。综上所述：$\{S_n\}$有界是$\{a_n\}$收敛的充分非必要条件。

故答案选（B）。

52.【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解答】

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{1^2+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}+\ldots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}。$$

53.【解答】（1）由于 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得唯一驻点 $x=1$。

方法一：列表讨论如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	最小值	$\uparrow$

因此 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，且最小值 $f(1)=1$。

方法二：由于 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}$，且 $f''(1)=-1+2=1>0$，从而 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，又因为 $x=1$ 为 $f(x)$ 唯一的驻点，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的最小值点，且最小值 $f(1)=1$。

（2）由（1）知 $\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1$，又因为 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，所以 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1\leq \ln x_n+\frac{1}{x_n}$，

故 $\frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{x_n}$，由于 $x_n>0$，所以 $x_{n+1}>x_n$。因此 $\{x_n\}$ 单调递增。又由于

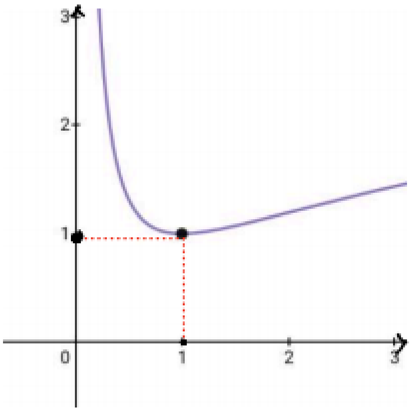
$\ln x_n<\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，所以 $x_n<\mathrm{e}$，从而数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界，故由单调有界法则

知，数列 $\{x_n\}$ 极限存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由于 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\right)\leq 1,$$

所以 $\ln a+\frac{1}{a}\leq 1$，又由于 $\ln a+\frac{1}{a}\geq 1$，故 $\ln a+\frac{1}{a}=1$，从而 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$。

【注】为方便同学们理解，我们由(1) 中方法一的讨论画出函数 $f(x)$ 的图像(如图)



54.【答案】（D）.

【解答】设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

对于选项（A），$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = 0 \Leftrightarrow \sin a = 0 \Rightarrow a = k\pi\left(k\in Z\right)$，所以（A）错误；

对于选项（B）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0 \Leftrightarrow a+\sqrt{|a|}=0 \Rightarrow a=0$ 或 -1，所以（B）错误；

对于选项（C）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+{x_n}^2)=0 \Leftrightarrow a+a^2=0 \Rightarrow a=0$ 或 -1，所以（C）错误；

对于选项（D）：$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0 \Leftrightarrow a+\sin a=0$，由于 $f(x)=x+\sin x$ 满足：

$f'(x)=1+\cos x\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，又由于 $f(0)=0$，所以 $a=0$。

综上所述，答案选（D）。

55. 【解答】（1）先证明数列$\{a_n\}$的单调性。下面给出两种方法。

方法一：由于当 $x\in(0,1)$ 时，有 $x^{n+1}<x^n$，故 $x^{n+1}\sqrt{1-x^2}<x^n\sqrt{1-x^2}, x\in(0,1)$，

由定积分的性质知

$$\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x,$$

故 $a_{n+1}<a_n$，从而数列$\{a_n\}$单调递减。

方法二： $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t,\left(n=0,1,2,\cdots\right)$，

由于 $\sin^{n+1}t<\sin^n t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\sin^{n+1}t\cos^2 t<\sin^n t\cos^2 t, t\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

故 $a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}t\cos^2 t\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t=a_n$，从而数列$\{a_n\}$单调递减。

再证明$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\ldots)$。这里我们给出两种方法。

方法一：当 $n\ge 2$ 时，$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx=\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\cdot x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{1}{3}(n-1)\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\cdot x^{n-2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}x^{n-2}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n-1}{3}\left(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{n-1}{3}\left(a_{n-2}-a_n\right)。$$

从而 $3a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_n)$，故 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$。

方法二：　由于 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t dt$，所以，当 $n\ge 2$ 时，

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t\cos^2 t d\cos t=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}t d\cos^3 t$$

$$=-\frac{1}{3}\sin^{n-1}t\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}t\cos^4 t dt=\frac{1}{3}(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\left(1-\sin^2 t\right)\cos^2 t dt$$

$$=\frac{1}{3}(n-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}t\cos^2 t dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t dt\right]=\frac{1}{3}(n-1)(a_{n-2}-a_n),$$

从而 $3a_n=(n-1)(a_{n-2}-a_n)$，故 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\,(n=2,3,\cdots)$。

综上所述，数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$

（2）由（1）知，$a_n<a_{n-1}$，又由于 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}>\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}$，所以

$\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-1}<a_n<a_{n-1}$，从而 $\dfrac{n-1}{n+2}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$，

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$。

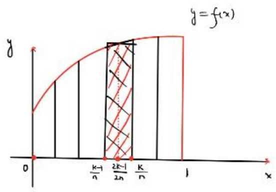
56.【答案】B

【解答】注意 $\dfrac{2k-1}{2n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k-1}{n}+\dfrac{k}{n}\right)$ 为区间 $\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right]$ 的中点(如图)，故

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$，立即可得（A）错误，（B）正确。

选项（C）和（D）是将$[0,1]$区间进行$2n$等分，从而$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$，所以（C），（D）都是错误的。

综上所述，答案选（B）。



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

【注】在考试中，作为一种解答选择题的方法，同学们可以尝试特例法，在本题中，取$f(1)=1$，通过计算$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$及各选项，可快速将（A）（C）（D）排除。