第 3 讲 不定积分强化练习参考答案

1.【答案】1

【解】因为 $f'(x)=2(x-1), x\in[0,2]$，所以对 $\forall x\in[0,2]$ 有

$f\left(x\right)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}\left(x-1\right)=\left(x-1\right)^2+c$。由于 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f\left(0\right)=0$，从而 $c=-1$， 故 $f(x)=(x-1)^2-1, x\in[0,2]$。

又因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以

$f(7)=f(2\times4-1)=f(-1)=-f\left(1\right)=-\left(-1\right)=1$。

2.【答案】D

【解】当 $x<1$ 时 $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=\int 2(x-1)\mathrm{d}(x-1)=(x-1)^2+c_1$，

当 $x\geq1$ 时，$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+c_2$ 。

由于 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数，所以 $F(x)$ 在 $x=1$ 处连续。

因为 $$F(1^-)=\lim_{x\to1^-}F(x)=\lim_{x\to1^-}[(x-1)^2+c_1]=c_1,$$

$F(1^+)=\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x\ln x-x+c_2)=c_2-1$，

所以 $c_1=c_2-1$，令 $c_1=c$，则 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+c, x<1,\\ x(\ln x-1)+1+c, x\geq1,\end{cases}$ 取 $c=0$ 可得 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1)+1, x\geq1。\end{cases}$

故答案选（D）。

3.【解】方法一：令 $\ln x=t$, 则 $x=\mathrm{e}^t$，由 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 得 $f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，所以，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(-\mathrm{e}^{-x})=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+\int\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

由于

$$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}\mathrm{de}^x\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int\frac{1}{u(1+u)}\mathrm{d}u=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\ln|u|-\ln|1+u|+C$$

$$=\ln\mathrm{e}^x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C\text{，}$$

故 $$\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C\text{。}$$

方法二： $$\int f(x)\mathrm{d}x\underset{t=\mathrm{e}^x}{\overset{x=\ln t}{=}}\int f(\ln t)\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\frac{\ln(1+t)}{t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\ln(1+t)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t}\right)$$

$$=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int\frac{1}{(1+t)t}\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=-\frac{\ln(1+t)}{t}+\ln|t|-\ln|1+t|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}+x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C\text{。}$$

4.【解】方法一： $\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\arctan\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{de}^{-2x}$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\mathrm{de}^x$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{de}^x\text{，}$$

由于

$$\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{de}^x\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u=-\frac{1}{u}-\arctan u+c=-\mathrm{e}^{-x}-\arctan\mathrm{e}^x+c_1,$$

所以,原式 $=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right)+c$ 。

方法二：令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，从而

$$\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan t}{t^2}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\int\arctan t\mathrm{d}\frac{1}{t^2}$$

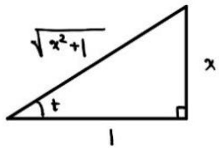
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{t^2}\arctan t+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}-\arctan t\right)+c=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right)+c$$

5.【解】令 $x=\tan t$，则 $\mathrm{d}x=\sec^2t\mathrm{d}t$，(如图)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\int \frac{1}{(2\tan^2 t+1)\sec t}\cdot \sec^2 t\mathrm{d}t=\int \frac{\sec t}{2\tan^2 t+1}\mathrm{d}t$$

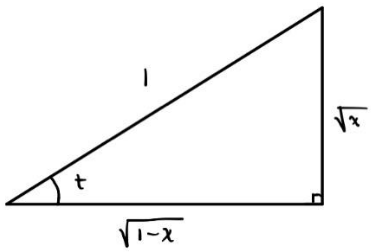
$$=\int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}\sin t}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+c=\arctan \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c\text{。}$$



6.【解答】方法一：令 $x=\sin^2 t, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin t=\sqrt{x}, \mathrm{d}x=2\sin t\cos t\mathrm{d}t,$

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{\sin^2 t}}{\sqrt{\cos^2 t}}\cdot \frac{t}{\sin t}2\sin t\cos t\mathrm{d}t=2\int t\cdot \sin t\mathrm{d}t$$

$$=2\int t\mathrm{d}(-\cos t)=2\left(-t\cos t+\int \cos t\mathrm{d}t\right)=2(-t\cos t+\sin t)+c=2\left(-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)+c\text{。}$$



方法二：由 $f(\sin^2 x)=\frac{x}{\sin x}$ 可得 $f(u)=\frac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$，所以

$$I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x \overset{x=\sin^2\theta}{\underset{\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)}{=}} \int \frac{\arcsin(\sin\theta)}{\cos\theta}2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int \theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=2(-\theta\cos\theta+\sin\theta)+c=2\left(-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right)+c\text{。}$$

$\theta\downarrow$	$+\quad 1$	$-\quad 0$
$\sin\theta\uparrow$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$

7.【解】令 $\arctan x=t,$，则 $x=\tan t, \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$

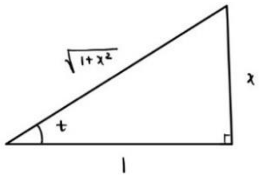
$$\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int \frac{\tan t\mathrm{e}^t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int \frac{\tan t\mathrm{e}^t}{\sec t}\mathrm{d}t=\int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

因为

$\int \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t = \int \sin t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \sin t - \int \cos t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t \sin t - \int \cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \sin t - \mathrm{e}^t \cos t - \int \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t$，

所以$\int \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$，

故 $\int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \sin t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left(\sin t - \cos t\right) + c = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{2}\left(\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c$。



8.【答案】$\frac{1}{2}\ln^2 x$

【解析】方法一：令$\mathrm{e}^x = t$，则$x = \ln t$，由$f'(\mathrm{e}^x) = x\mathrm{e}^{-x}$得$f'(t) = \frac{\ln t}{t}$，所以

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$，

由于$f(1) = 0$，所以$c = 0$，故$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$。

方法二：$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x \overset{x=\mathrm{e}^t}{\underset{t=\ln x}{=}} \int f'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}x = \int t\mathrm{e}^{-t}\cdot\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\ln^2 x + c$，

由于$f(1) = 0$，所以$c = 0$，故$f(x) = \frac{1}{2}\ln^2 x$。

9.【解】方法一：令$\mathrm{e}^x = t$，则$x = \ln t$，$\mathrm{d}x = \frac{1}{t}$，

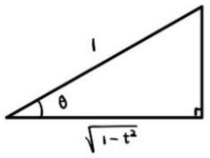
$$\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int \frac{\arcsin t}{t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int \arcsin t\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t}\arcsin t + \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t,$$

由于

$$\int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \overset{t=\sin\theta}{=} \int \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\cdot\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int \csc\theta\mathrm{d}\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{t} - \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + c = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + c$$

所以，原式$= -\frac{1}{t}\arcsin t + \ln\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t} + C = -\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x + \ln\left(1-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\right) - x + c$。

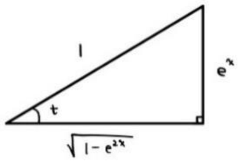


方法二：令 $\arcsin e^x = t$，则 $e^x = \sin t, x = \ln\sin t, dx = \dfrac{\cos t}{\sin t}dt$，

$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \int \frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{\sin t}dt = \int t\cdot\csc t\cdot\cot t dt = \int t d(-\csc t) = -t\csc t + \int \csc t dt$$

$$= -t\csc t + \ln|\csc t - \cot t| + c = -(\arcsin e^x)\cdot\frac{1}{e^x} + \ln\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{e^x} + c$$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x + \ln\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right) - x + C\text{。}$$



方法三：$\displaystyle\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = \int \arcsin e^x d(-e^{-x}) = -e^{-x}\arcsin e^x + \int e^{-x}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

$$= -e^{-x}\arcsin e^x + \int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx,$$

下面计算 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$：令 $\sqrt{1-e^{2x}} = t$，则

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(1-t^2\right), dx = \frac{-t}{1-t^2}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{-t}{1-t^2}dt = \int \frac{-1}{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right) + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + c = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}{e^{2x}}\right) + c = \ln\left(1-\sqrt{1-e^{2x}}\right) - x + c$$

故 $$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx = -e^{-x}\arcsin e^x + \ln(1-\sqrt{1-e^{2x}}) - x + c\text{。}$$

10.【解】方法一：设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\frac{1}{t^2-1}$，所以

$$\int\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\mathrm{d}x=\int\ln(1+t)\mathrm{d}\frac{1}{t^2-1}=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t,$$

下面计算 $\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$：

设
$$\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}=\frac{1}{(t-1)(t+1)^2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}$$

则
$$1=A(t+1)^2+B(t-1)(t+1)+C(t-1),$$

令 $t=1$ 得 $A=\frac{1}{4}$。对比 t^2 的系数得 $A+B=0$，所以 $B=-\frac{1}{4}$。再比较常数项得 $1=A-B-C,$ 所以 $C=-\frac{1}{2}$,从而

$$\int\frac{1}{(t^2-1)(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|+\frac{2}{t+1}\right]+c_1$$

$$\text{故原式}=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}\right|-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}-c_1$$

$$=x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right]+c\text{。}$$

方法二：令 $x=\tan^2 t$，则

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\ln\left(1+\frac{\sec t}{\tan t}\right)\mathrm{d}\tan^2 t=\int\ln\left(1+\csc t\right)\mathrm{d}\tan^2 t$$

$$=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)-\int\tan^2 t\frac{-\csc t\cdot\cot t}{1+\csc t}\mathrm{d}t=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)+\int\tan t\cdot\frac{\csc t}{1+\csc t}\mathrm{d}t$$ 下

$$=\tan^2 t\cdot\ln\left(1+\csc t\right)+\int\frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)\cos t}\mathrm{d}t$$

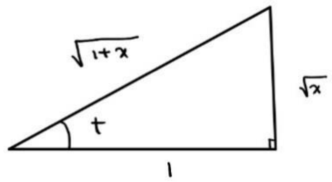
面计算：$I=\int\frac{\sin t}{\left(1+\sin t\right)\cos t}\mathrm{d}t$

$$I=\int\frac{\sin t}{(1+\sin t)\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin t\cos t}{(1+\sin t)\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int\frac{\sin t}{(1+\sin t)^2(1-\sin t)}\mathrm{d}\sin t\overset{u=\sin t}{=}\int\frac{u}{(1+u)^2(1-u)}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}-\frac{2}{(1+u)^2}\right]\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+u}+c_1=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin t}+c$$

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\tan^2 t\cdot\ln(1+\csc t)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sin t}+c$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\right|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{1+x}}}+c==x\ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})+\frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right.$$



【注】这里 $\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$。

11.【解】方法一：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin t+2\ln t}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}t+4\int\ln t\mathrm{d}t$$

由于

$$\int\arcsin t\mathrm{d}t=t\cdot\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=t\cdot\arcsin t+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-t^2)=t\cdot\arcsin t+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+c_1,$$

$$\int\ln t\mathrm{d}t=t\ln t-\int 1\mathrm{d}t=t\ln t-t+c_2,$$

所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2t\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+4t\ln t-4t+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C.$$

方法二：

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\left(\arcsin\sqrt{x}+\ln x\right)\mathrm{d}\sqrt{x}\overset{u=\sqrt{x}}{=}2\int\left(\arcsin u+2\ln u\right)\mathrm{d}u$$

$$=2\int\arcsin u\mathrm{d}u+4\int\ln u\mathrm{d}u$$

由于

$$\int \arcsin u\mathrm{d}u = u\cdot\arcsin u - \int\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = u\cdot\arcsin u + \frac{1}{2}\int(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-u^2) = u\cdot\arcsin u + (1-u^2)^{\frac{1}{2}} + c_1,$$

$$\int \ln u\mathrm{d}u = u\ln u - \int 1\mathrm{d}u = u\ln u - u + c_2,$$

所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2u\arcsin u + 2\sqrt{1-u^2} + 4u\ln u - 4u + C$$

$$= 2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

12.【解】方法一：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2), \mathrm{d}x=\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x = \int(1+t^2)^2\cdot(\arctan t)\cdot\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int(\arctan t)\cdot 2t(1+t^2)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int(\arctan t)\mathrm{d}(1+t^2)^2 = \frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t - \frac{1}{2}\int(1+t^2)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t - \frac{1}{2}\int(1+t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{e^x-1} + C。$$

方法二： $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x = \int\arctan\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \int\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^x-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^x}{1+\left(e^x-1\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x,$$

由于

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x = \int\frac{e^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}(e^x-1) \overset{u=e^x-1}{=} \int\frac{u+1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \int(\sqrt{u}+\frac{1}{\sqrt{u}})\mathrm{d}u = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(e^x-1)^{\frac{1}{2}} + C_1,$$

故 $$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1} - \frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}} + C。$$

13. 【解】方法一：

$$I=\int \mathrm{e}^{x}\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}\overset{u=\mathrm{e}^{x}}{=}\int \arcsin\sqrt{1-u^{2}}\mathrm{d}u$$
$$=u\arcsin\sqrt{1-u^{2}}-\int u\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-u^{2}}\right)^{2}}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}(-2u)\mathrm{d}u=u\arcsin\sqrt{1-u^{2}}+\int\frac{u}{\sqrt{1-u^{2}}}\mathrm{d}u$$
$$=u\arcsin\sqrt{1-u^{2}}-\frac{1}{2}\int\left(1-u^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(1-u^{2}\right)=u\arcsin\sqrt{1-u^{2}}-\sqrt{1-u^{2}}+c=\mathrm{e}^{x}\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+c。$$

方法二：

$$I=\int \mathrm{e}^{x}\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x=\int \arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{x}\overset{u=\mathrm{e}^{x}}{=}\int \arcsin\sqrt{1-u^{2}}\mathrm{d}u$$
$$\overset{u=\cos\theta}{=}\int \arcsin(\sin\theta)\mathrm{d}\cos\theta=\int\theta\mathrm{d}\cos\theta=\theta\cos\theta-\int\cos\theta\mathrm{d}\theta=\theta\cos\theta-\sin\theta+c$$
$$=u\cdot\arcsin\sqrt{1-u^{2}}-\sqrt{1-u^{2}}+c=\mathrm{e}^{x}\arcsin\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}-\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}+c$$