第 2 讲 导数与微分强化练习参考答案

1.【答案】B

【解】对于选项(A):

由于$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\dfrac{1-\cos h}{h^2}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\cdot\frac{\frac{1}{2}h^2}{h^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(1-\cos h)-f(0)}{1-\cos h}\overset{t=1-\cos h>0}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{1}{2}f'_+(0);$$

所以$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$存在是右导数$f'_+(0)$存在的充要条件，是$f'(0)$存在的必要不充分条件，故(A)错误;

对于选项(B): $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\cdot\dfrac{-h}{h}$

$$=-\lim_{h\to0}\frac{f(1-e^h)-f(0)}{1-e^h}\overset{t=1-e^h}{=}-\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=-f'(0)。$$

故$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$存在是$f(x)$在$x=0$处可导的充要条件，故（B）正确;

对于选项(C): 若$f(x)$在$x=0$处可导，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}=f'(0)\lim_{h\to0}\frac{h-\sin h}{h^2}$$

$=f'(0)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1-\cos h}{2h}=f'(0)\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{1}{2}h^2}{2h}=0$, 故$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$存在。

反之，若$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=A$存在，则

$$A=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-\sin h}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot\frac{h-[h-\frac{1}{3!}h^3+o(h^3)]}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}\cdot(\frac{1}{6}h),$$

由于$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{6}h=0$ 。所以当$h\to0$时，$\dfrac{f(h-\sin h)-f(0)}{h-\sin h}$可能存在也可能不存在，所以

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在不是 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件，故（C）不正确；

对于选项 (D)，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)+f(0)-f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=2f'(0)-f'(0)=f'(0)\text{。}$$

反之，若 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=A$ 存在，但是当 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)}{h}$ 与 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}$ 都不存在时，极限 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 可以存在，所以 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在不是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件，故（D）不正确。

综上所述，答案选（B）。

【注】①如果取 $f(x)=|x|$，那么

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{|h-\sin h|}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{\left|h-[h-\frac{1}{6}h^3+o(h^3)]\right|}{h^2}=0$$

存在，但是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，由此可得(C)不正确。

②如果取 $f(x)=\begin{cases}1,x\neq0\\0,x=0\end{cases}$，它在 $x=0$ 处不可导。但是 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在，由此可得（D）不正确。

2.【答案】D

【解】因为 $y=f(x^2)$，所以 $y'=2xf'(x^2)$，则 $\mathrm{d}y=2xf'(x^2)\Delta x$。由题意可知，

当 $x=-1$，$\Delta x=-0.1$ 时，$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=-1\\\Delta x=-0.1}}=\left[2xf'(x^2)\Delta x\right]\Big|_{\substack{x=-1\\\Delta x=-0.1}}=-2\cdot f'(1)\cdot(-0.1)=0.1$，

所以 $f'(1)=0.5$。

3..【答案】$\lambda>2$

【解】当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^\lambda\cos\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}\text{。}$$

由于当 $x \to 0$ 时 $\cos\frac{1}{x}$ 极限不存在，但 $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$ 有界。故当 $\lambda > 1$ 时 $f'(0)=0$ 存在，

当 $\lambda \le 1$ 时 $f'(0)$ 不存在，所以 $\lambda > 1$。

当 $x \ne 0$ 时，

$$f'(x) = \lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x} + x^{\lambda}\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x} + x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x},$$

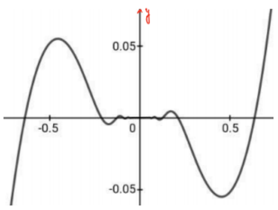
再由 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)=0$，于是

$$0 = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x} + x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right) = 0 + \lim_{x\to 0} x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x},$$

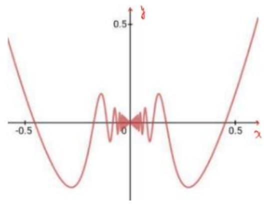
从而，$\lim\limits_{x\to 0} x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x} = 0$，可得 $\lambda - 2 > 0$，即 $\lambda > 2$。

【注】为了方便同学们理解，我们以 λ=3 为例画出 $f(x) = \begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 及其导数

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的图像。如图



(a) $f(x) = \begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



(b) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2\cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

4.【答案】D

【解】因为 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$，故 $x=0$ 处 $g(x)$ 无定义。由于 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(0)=0$。

又由于 $f'(0)$ 存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$。

从而 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点，故答案选(D)。

5.【解】(1)当 $x \in [-2,0)$ 时，$x+2 \in [0,2)$，

$f(x) = kf(x+2) = k(x+2)[(x+2)^2-4] = k(x+2)(x^2+4x)$。

(2)由于 $f(0)=0$，于是

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{k(x+2)(x^2+4x)}{x}=8k,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)}{x}=-4,$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充要条件是 $f'_-(0)=f'_+(0)$，即 $8k=-4$，故当 $k=-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

6.【答案】C

【解】当 $|x|>1$ 时，有 $|x|^{3n}<1+|x|^{3n}<2\cdot|x|^{3n}$，从而

$$\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2\cdot|x|^{3n}},\text{即}|x|^3<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}<\sqrt[n]{2}|x|^3,$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}|x|^3=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}|x|^3=|x|^3$。故由夹逼准则知当，$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=|x|^3$；

当 $|x|\le 1$ 时，有 $1\le 1+|x|^{3n}\le 2$，从而 $1\le\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\le\sqrt[n]{2}\to 1$，由夹逼准则知当，$|x|\le 1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=1$。所以 $f(x)=\begin{cases}-x^3,x<-1\\1,-1\le x\le 1,\\x^3,x>1\end{cases}$ 则 $x\ne -1$ 及 $x\ne 1$ 时，$f(x)$ 均可导。

因为 $$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1-1}{x-1}=0,$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2}{1}=3,$$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^-}\frac{-x^3-1}{x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{-3x^2}{1}=-3,$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-1}{x+1}=0。$$

所以 $f'_-(1)\ne f'_+(1)$，$f'_-(-1)\ne f'_+(-1)$，故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 以及 $x=1$ 处均不可导。

综上所述，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恰有两个不可导点。

【注】①请同学们注意以下重要且常用的结果:

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 均为非负常数，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{{a_1}^n+{a_2}^n+\cdots+a_k}=\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k\}$。

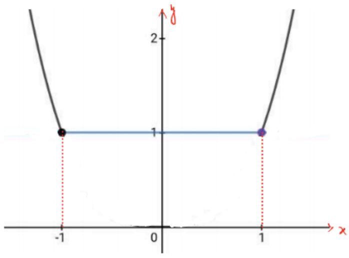
事实上，不妨$a_1=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则有

$a_1{}^n\le a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k{}^n\le a_1{}^n+a_1{}^n+\cdots+a_1{}^n=ka_1{}^n$，

从而，$a_1\le\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k}\le\sqrt[n]{k}a_1\to a_1\left(n\to\infty\right)$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_k}=a_1=\max\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_k\}$。

②为了方便同学们理解，我们画出函数$f(x)$的图像，如图。



7.【答案】C

【解】由$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$且$\lim\limits_{h\to0}h^2=0$可知，$\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=0$，又$f(x)$在$x=0$处连续，故

$0=\lim\limits_{h\to0}f(h^2)=f(0)$。

又因为 $1=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}\overset{t=h^2}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'_+(0)$ 。从而$f(0)=0$

且$f'_+(0)=1$存在。 故答案选(C)。

【注】这里$f'_-(0)$不一定等于1，例如：取$f(x)=|x|$，则$f(x)$满足题设条件，但

$f'_-(0)=-1$。

8.【答案】D

【解】对于选项(A)：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$存$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，又

由$f(x)$在$x=0$处连续可得$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，故命题(A)正确；

对于选项(B)：由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在$\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=0$，又由$f(x)$在$x=0$处

连续可得，$0=\lim\limits_{x\to0}[f(x)+f(-x)]=f(0)+f(0)=2f(0)$，所以$f(0)=0$，故命题（B）

正确。

对于选项(C):由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续可得

$f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，所以 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 。故命题（C）正确。

对于选项(D)：由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)+f(0)-f(-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]$ 可得，当 $f'(0)$ 存在时，

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$ 。

但反之不然，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x}\right]$ 存在时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ 与

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}$ 有可能同时不存在。例如，取 $f(x)=|x|$，则

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ 不存在，即 $f'(0)$ 不存在。

故命题(D)错误。

综上所述，答案选（D）。

【注】①当 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$ 时，仿照（C）的分析过程可得：

$f(x_0)=0$，且 $f'(x_0)=A$ 。这个结论在选择题和填空题中可直接使用；

②设 $m\neq n$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，则

$$f'(x_0)=A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0+n\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim\left[m\cdot\frac{f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)}{m\Delta x}-n\cdot\frac{f(x_0+n\Delta x)-f(x_0)}{n\Delta x}\right]$$

$$=mf'(x_0)-nf'(x_0)=(m-n)A$$ 。

9.【答案】A

【解】方法一：利用导数定义可得

$$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\ldots(e^{nx}-n)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(e^{2x}-2)\ldots(e^{nx}-n)}{x}$$
$$=\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\ldots(e^{nx}-n)=(-1)(-2)\ldots[-(n-1)]=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$。

方法二：记 $(e^{2x}-2)(e^{3x}-3)\ldots(e^{nx}-n)=g(x)$ ，则 $f(x)=(e^{x}-1)g(x)$，

因为 $$f'(x)=e^{x}\cdot g(x)+(e^{x}-1)\cdot g'(x)$$ ，

所以 $$f'(0)=g(0)=(-1)(-2)\ldots\left[-(n-1)\right]=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$ 。

方法三：由多个可导函数的乘积的求导公式：

$$\left[f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)\right]=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots+f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x)$$

得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left[\left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)\right]'\\&=\left(e^{x}-1\right)'\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)+\left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-2\right)'\cdots\left(e^{nx}-n\right)+\cdots+\left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)'\\&=e^{x}\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)+\left(e^{x}-1\right)\left(2e^{2x}\right)\cdots\left(e^{nx}-n\right)+\cdots+\left(e^{x}-1\right)\left(e^{2x}-2\right)\cdots\left(ne^{nx}\right),\end{aligned}$$

所以 $f'(0)=1(1-2)(1-3)\cdots(1-n)+0+\cdots+0=(-1)^{n-1}(n-1)!$。

故答案选(A)。

【注】这里我们以三个函数为例来推导以下多个可导函数的乘积的求导公式：

$$\begin{aligned}\left[f_1(x)f_2(x)f_3(x)\right]'&=\left[f_1(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)\right]'\\&=f_1'(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)+f_1(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)'\\&=f_1'(x)\left(f_2(x)f_3(x)\right)+f_1(x)\left(f_2'(x)f_3(x)+f_2(x)f_3'(x)\right)\\&=f_1'(x)f_2(x)f_3(x)+f_1(x)f_2'(x)f_3(x)+f_1(x)f_2(x)f_3'(x)\end{aligned}$$ 。

10.【答案】A

【解】首先 $f(\frac{2}{n})=f(0)+f'(0)\cdot\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$，下面求出 $f(0),f'(0)$ 。

当 $x=0$ 时，代入方程得，$1-\ln y=1$，所以 $y=1$，故 $f(0)=1$。

方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 两边同时对 x 求导得，$-\sin(xy)\cdot[xy'+y]+\frac{y'}{y}-1=0$，

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得，$y'\big|_{x=0}=1$，即 $f'(0)=1$。从而，$f(\frac{2}{n})=1+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})$。于是

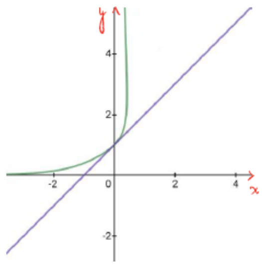
$$\lim_{n\to\infty}n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}n[1+\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})-1]=2$$ 。

【注】①本题也可以直接利用导数定义：（与 18 题方法一做法类似）

$$\lim_{n\to\infty} n[f(\frac{2}{n})-1]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2\text{。}$$

但需事先确定 $f(0)=1$。

②由 $f(0)=1, f'(0)=1$ 可得该曲线在$(0,1)$处的切线方程为 $y=x+1$。为了便于同学们理解，我们画出该曲线在$(0,1)$附近的图像及在$(0,1)$处的切线，如图



11.【答案】D

【解】函数图像如图所示。

先讨论连续性：

首先 $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} x=0$，下面计算 $\lim_{x\to0^+} f(x)$。

当 $x\in(0,1]$ 时，存在唯一的正整数 n，使得 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，且 $x\to0^+ \Leftrightarrow n\to+\infty$。

故 $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$。又由于 $f(0)=0$，从而

$\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

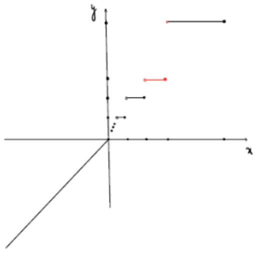
再讨论可导性：

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x-0}{x}=1,\ f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x},$$

由于 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，所以 $\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}\to1, \frac{\frac{1}{n}}{x}\ge\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$，由夹逼准则可得，

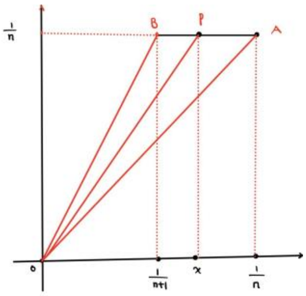
$$f_+'(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}=1\text{。}$$

从而 $f_-'(0)=f_+'(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f'(0)=1$。



【注】当 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$ 时，

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{n+1}{n}\to 1,\ \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{1}{n}}{x}\geq\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ 的几何意义如图所示：



图中 $P(x,f(x)),A\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),B\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$，其中 $f(x)=\frac{1}{n}$，显然有如下斜率大小关系：

$$k_{OA}\leq k_{OP}<k_{OB},$$

即 $1\leq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<\frac{n+1}{n}\to 1$，从而由夹逼准则知 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$。

12.【答案】D

【解】对于选项（A）:由 $f(x)=|x|\sin|x|=\begin{cases}x\sin x, & x\geq 0\\ x\sin x, & x<0\end{cases}=x\sin x$ 得

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x}=0$。

对于选项（B）:由 $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}=\begin{cases}x\sin\sqrt{x}, & x\geq 0\\ -x\sin\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ 得

$f_+'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\sin\sqrt{x}}{x}=0$，

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{(-x)\sin\sqrt{-x}}{x}=0,$$

故 $f'(0)=0$。

对于选项（C）:由 $f(x)=\cos|x|$ 得

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0。$$

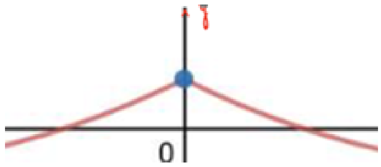
对于选项（D）:由 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}=\begin{cases}\cos\sqrt{x}, & x\ge0\\ \cos\sqrt{-x}, & x<0\end{cases}$ 得

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2}{x}=-\frac{1}{2},$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{-x})^2}{x}=\frac{1}{2}。$$

因为 $f'_{+}(0)\ne f'_{-}(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在。

【注】为了方便同学们理解，我们画出选项(D)中的函数在 $x=0$ 附近的图像，如图。



函数 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导。

13.【解】方法一：由 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导知，当 $x\to0$

$$f(1+\sin x)=f(1)+f'(1)\sin x+o(\sin x)=f(1)+f'(1)(x+o(x))+o(x)$$

$$=f(1)+f'(1)x+o(x),$$

$$f(1-\sin x)=f(1)+f'(1)(-\sin x)+o(\sin x)=f(1)-f'(1)(x+o(x))+o(x)$$

$$=f(1)-f'(1)x+o(x)。$$

由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 知，

$$8x+\alpha(x)=\left[f(1)+f'(1)x+o(x)\right]-3\left[f(1)-f'(1)x+o(x)\right]$$

$$=-2f(1)+4f'(1)x+o(x)。$$

所以 $\begin{cases}-2f(1)=0,\\ 4f'(1)=8,\end{cases}$ 得 $f(1)=0$， $f'(1)=2$。

又由于 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0$， $f'(6)=f'(1)=2$，故 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $y=2x-12$。

方法二：由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 及 $f(x)$ 连续可得

$\lim\limits_{x\to 0}\left[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[8x+\alpha(x)\right]=0$，

所以 $f(1)-3f(1)=0$，得 $f(1)=0$。再由 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$ 得

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}=8$，

所以 $$\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\cdot\frac{f(1-\sin x)-f(0)}{-\sin x}\right]=8,$$

由 $f'(1)$ 存在知， $f'(1)+3f'(1)=8$；所以 $f'(1)=2$。又因为 $f(x+5)=f(x)$，所以 $f(6)=f(1)=0$， $f'(6)=f'(1)=2$。故 $(6,f(6))$ 处的切线方程为 $y-0=2(x-6)$，即 $y=2x-12$。

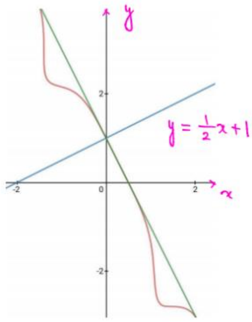
14.【答案】 $y=\dfrac{1}{2}x+1$

【解】由题意可知 $y(0)=1$，方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 两边同时对 x 求导可得

$$\left(2+y'\right)\mathrm{e}^{2x+y}+\left(y+xy'\right)\sin\left(xy\right)=0,$$

$y=1$代入上式可得，$\left(2+y'\right)\mathrm{e}=0$，所以 $y'(0)=-2$，从而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的法线斜率为 $-\dfrac{1}{y'(0)}=\dfrac{1}{2}$。故所求的法线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像和在 $\left(0,1\right)$ 处的法线与切线图像。(如图)



15.【解】作极坐标变换$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$,这里 $r=1-\cos\theta$，所以曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=(1-\cos\theta)\cos\theta,\\ y=(1-\cos\theta)\sin\theta,\end{cases}$$

当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$，$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$。因为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=[(1-\cos\theta)\cos\theta]'=-\sin\theta+\sin 2\theta$，

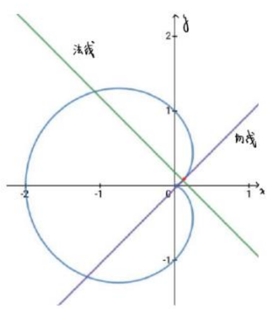
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=[(1-\cos\theta)\sin\theta]'=\cos\theta-\cos 2\theta$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}=\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}$。从而所求切线的

斜率为 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=\left.\frac{\cos\theta-\cos 2\theta}{-\sin\theta+\sin 2\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}}=1$，所求法线斜率为-1，

故所求的切线方程为 $y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})$，即 $y=x+\frac{5}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

所求的法线方程为 $y-(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4})=-[x-(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4})]$，即 $y=-x-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$。

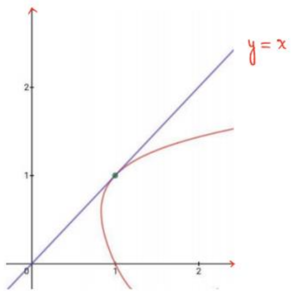
【注】曲线 $r=1-\cos\theta$ 是心形线，为了方便同学们理解，我们画出该曲线及所求的切线与法线，如图



16.【答案】 $y=x$

【解】方程两端同时对 x 求导，得 $y+xy'+\dfrac{2}{x}=4y^3\cdot y'$ 。将 $x=1$， $y=1$代入得，$1+y'+2=4y'$，解得 $y'(1)=1$，从而，点 $(1,1)$ 处切线斜率为 1。所求切线方程为 $y-1=x-1$，即 $y=x$ 。

【注】为方便同学们理解，我们画出该隐函数在点 $(1,1)$ 附近的图像和相应的切线(如图)



17.【答案】 $y=x-1$

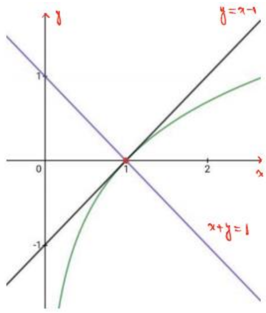
【解】设曲线切点为 $P(x_0,y_0)$，由 $y=\ln x$ 得 $y'=\dfrac{1}{x}$，在 $P(x_0,y_0)$ 处的切线斜率

$k_1=y'\big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{x_0}$ 。

由于直线 $x+y=1$的斜率为 $k_2=-1$，故由题设可知， $\dfrac{1}{x_0}=1$ 。所以 $x_0=1, y_0=\ln 1=0$，

于是可得所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出相应的图像，如图。



18.【答案】 $y=x+1$

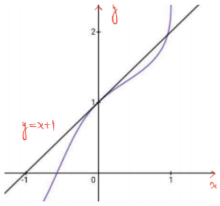
【解】由题意可知 $y(0)=1$，方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 两边对求导可得

$(y+xy')\cos xy+\dfrac{y'-1}{y-x}=1$，　①

将 $x=0$， $y=1$代入方程①可得$1+y'-1=1$， 所以 $y'(0)=1$，则曲线在点（0，1）处的切线斜率为 1

故所求切线方程为 $y=x+1$。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像及所求切线的图像(如图)：



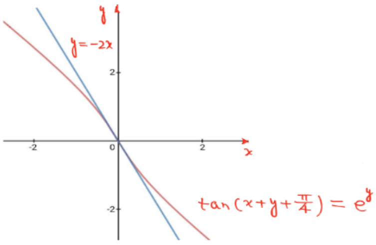
19.【答案】 $y=-2x$

【解】方程 $\tan(x+y+\dfrac{\pi}{4})=e^y$ 两边对 x 求导可得

$\sec^2(x+y+\dfrac{\pi}{4})(1+y')=e^y\cdot y'$，

将 $x=0$， $y=0$ 代入上式可得 $2(1+y'(0))=y'(0)$，所以 $y'(0)=-2$ 。所求切线方程为： $y-0=-2(x-0)$，即 $y=-2x$ 。

【注】为了方便同学们理解，我们画出该隐函数在 $x=0$ 附近的图像和在 $(0,0)$ 处的切



线图像。如图所示：

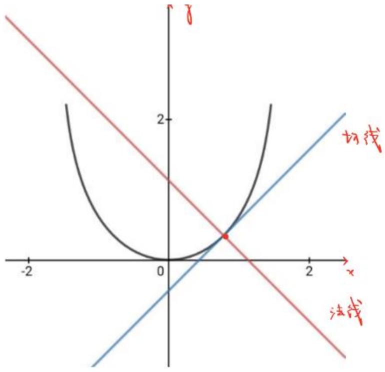
20.【答案】 $y=-x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$

【解】因为 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(\ln\sqrt{1+t^2})'}{(\arctan t)'}=\frac{[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]'}{\frac{1}{1+t^2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=t,$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=1$。$t=1$时， $x=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$， $y=\dfrac{1}{2}\ln 2$，

故所求法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}\ln 2=-1\cdot(x-\dfrac{\pi}{4})$，即 $y=-x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln 2$ 。

【注】为了便于同学们理解，我们画出该参数方程表示的曲线及所求的法线，如图。



21.【答案】 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

【解】由极坐标系中的点与直角坐标系中的点的关系知曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases},$$

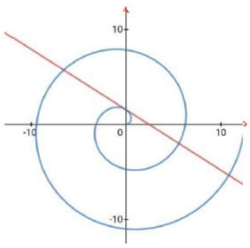
当 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 时，对应直角坐标系下的坐标为 $(x,y)=(0,\dfrac{\pi}{2})$，且该点切线的斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{\pi},$$

从而曲线在点 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 处切线的直角坐标方程为:

$y-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{2}{\pi}(x-0)$，即 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$。

【注】该曲线是一种螺旋线，为了方便同学们理解，我们画出该曲线及所求的切线图像，如图



22.【答案】 $\dfrac{3\pi}{2}+2$

【解】因为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(t-\sin t)'=1-\cos t$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(1-\cos t)'=\sin t$，

所以 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=\left.\frac{\sin t}{1-\cos t}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-1$$

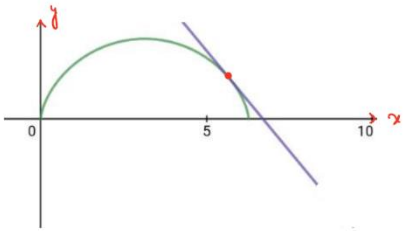
则在 $t=\frac{3\pi}{2}$ 对应点的切线斜率 $k=-1$。

因为 $t=\frac{3\pi}{2}$，所以 $x=1+\frac{3\pi}{2}$，$y=1$，即得切点为 $(1+\frac{3\pi}{2},1)$，从而切线方程为

$y-1=-(x-1-\frac{3\pi}{2})$，即 $y=-x+2+\frac{3\pi}{2}$。

令 $x=0$，得 $y=2+\frac{3\pi}{2}$，故切线在 y 轴上的截距为 $2+\frac{3\pi}{2}$。

【注】本题中的曲线是一种摆线。为了方便同学们理解，我们画出该曲线的一拱及 $t=\frac{3\pi}{2}$ 对应点的切线，如图。



23.【答案】$(\ln 2-1)\mathrm{d}x$

【解】方法一：

当 $x=0$ 时，$2^0=0+y$，故 $y=1$。方程 $2^{xy}=x+y$ 两边同时对 x 求导得

$2^{xy}(y+xy')\ln 2=1+y'$，

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得 $y'(0)=\ln 2-1$，所以

$\left.\mathrm{d}y\right|_{x=0}=y'(0)\mathrm{d}x=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$。

方法二：两端同时取微分得，$\mathrm{d}(2^{xy})=\mathrm{d}(x+y)$，利用一阶微分形式的不变性可得，

$2^{xy}\ln 2\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，从而 $2^{xy}\ln 2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$。又当 $x=0$ 时，$y=1$，将其代入上式得 $\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，解得 $\mathrm{d}y=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$，所以 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$。

【注】在本题中，可将$2^{xy}=x+y$两边取对数变形为 $xy\ln 2=\ln(x+y)$，再两边同时对x求导得$(xy'+y)\ln 2=\dfrac{1+y'}{x+y}$，将$x=0$，$y=1$代入得$y'(0)=\ln 2-1$。所以$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=y'(0)\,\mathrm{d}\,x=(\ln 2-1)\mathrm{d}x$。

24.【解】将$x=0$代入方程$\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$可得$\mathrm{e}^y=1$，所以$y(0)=0$。

方程$\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$两边关于x求导得:

$\mathrm{e}^y\cdot y'+6y+6xy'+2x=0$，　　　　　　①

将$x=0$，$y=0$代入方程①可得$y'=0$。方程①两边关于x求导得:

$\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''+6y'+6y'+6xy''+2=0$　，　　②

将$x=0$，$y=0$，$y'=0$代入方程②可得$y''+2=0$，所以$y''(0)=-2$。

25.【答案】$-\pi\mathrm{d}x$

【解】由于

$$y'=\left[(1+\sin x)^x\right]'=\left[\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}\right]'=\mathrm{e}^{x\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin x)+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right],$$

故
$$y'\big|_{x=\pi}=\mathrm{e}^{\pi\ln(1+\sin x)}\left[\ln(1+\sin\pi)+\frac{\pi\cos\pi}{1+\sin\pi}\right]=-\pi,$$

从而
$$\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=-\pi\cdot\mathrm{d}x。$$

26.【答案】C

【解】由$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$得$h'(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}\cdot g'(x)$，将$h'(1)=1,g'(1)=2$代入上式可得$1=\mathrm{e}^{1+g(1)}\times 2$，解得$g(1)=-1-\ln 2$。故答案选(C)

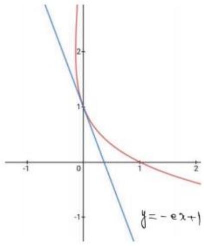
27.【答案】$-\mathrm{e}$

【解】当$x=0$时，$y=1-0\cdot\mathrm{e}^0=1$，方程$y=1-x\mathrm{e}^y$两边同时对x求导得，

$y'=-\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^y\cdot y'$，

将$x=0$，$y=1$代入上式得$y'(0)=-\mathrm{e}$。

【注】由$y'(0)=-\mathrm{e}$可求得该曲线在$x=0$处的切线方程为$y=-\mathrm{e}x+1$。(如图)



28.【答案】$2\mathrm{e}^{3}$

【解】由 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 得 $f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}$， $f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}$。

又由于 $f(2)=1$，所以 $f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^{3}$。

【注】本题中可通过求解微分方程写出 $f(x)$ 的表达式。

事实上，记 $y=f(x)$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{y}$，所以 $\int \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int \mathrm{d}x$ ，得 $-\mathrm{e}^{-y}=x+c$。从而， $y=-\ln(-x-c)$，又由 $f(2)=1$ 得 $y=-\ln(-x+2+\mathrm{e}^{-1})$。故 $f(x)=-\ln(-x+2+\mathrm{e}^{-1})$。

29.【答案】$\dfrac{(-2)^{n}n!}{3^{n+1}}$

【解】方法一：由 $y=\dfrac{1}{2x+3}=(2x+3)^{-1}$ 得，

$y'=2\cdot(-1)\cdot(2x+3)^{-2}$， $y''=2^{2}\cdot(-1)\cdot(-2)(2x+3)^{-3}$ ，

$y'''=2^{3}\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(2x+3)^{-4}$ ，

$\cdots\ y^{(n)}=2^{n}(-1)(-2)\cdots(-n)(2x+3)^{-n-1}=(-2)^{n}n!(2x+3)^{-n-1}$ ，所以

$$y^{(n)}(0)=[(-2)^{n}n!(2x+3)^{-n-1}]\Big|_{x=0}=\frac{(-2)^{n}n!}{3^{n+1}}\ 。$$

方法二：因为函数 $y=\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}x\right)}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$y=\frac{1}{3}\left[1+\left(-\frac{2}{3}x\right)+\left(-\frac{2}{3}x\right)^{2}+\cdots+\left(-\frac{2}{3}x\right)^{n}\right]+o(x^{n}),$$

所以
$$\frac{1}{3}(-1)^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=\frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

故 $$y^{(n)}(0)=\frac{(-2)^n n!}{3^{n+1}}。$$

30.【答案】D

【解】方法一：因为 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2$，所以

$f'(x)=4x^3-9x^2+4x=x(4x^2-9x+4)$，又因为 $4x^2-9x+4=0$ 有两个不同实根

$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{17}}{8}$，且 $x=0$ 是 $f'(x)$=0 的根，则方程 $f'(x)$=0 有 3 个不同实根，故 $f'(x)$ 恰有 3 个零点，从而答案选(D)。

方法二：由于函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$ 上满足 $f\left(0\right)=f\left(1\right)=f\left(2\right)=0,$ 由罗尔定理知至少存在两点 $\xi_1\in(0,1),\xi_2\in(1,2)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，又由于

$$f'(0)=\left[2x(x-1)(x-2)+x^2\left((x-1)(x-2)\right)'\right]\Big|_{x=0}=0,$$

故 $f'(x)$ 至少存在 3 个零点，又 $f'(x)$ 为三次多项式，故 $f'(x)$ 至多有三个零点，从而

$f'(x)$ 有三个零点。故答案选(D)。

31.【答案】-3

【解】将 $x=0$ 代入方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 可得 $\mathrm{e}^y=1$，所以 $y(0)=0$。

方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 两边关于 x 求导可得，

$y+xy'+\mathrm{e}^y\cdot y'=1$， ①

将 $x=0,y=0$ 代入方程① 可得 $y'(0)=1$，方程① 两边关于 x 求导可得

$y'+y'+xy''+\mathrm{e}^y\cdot(y')^2+\mathrm{e}^y\cdot y''=0$， ②

将 $x=0,y=0$， $y'(0)=1$ 代入方程② 可得， $2+1+y''=0$，所以， $y''(0)=-3$。

32.【答案】$-2^n(n-1)!$

【解】方法一：

因为 $y'=(1-2x)^{-1}(-2),y''=(-1)(-2)^2(1-2x)^{-2},y'''=(-1)(-2)(-2)^3(1-2x)^{-3}$，

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!(-2)^n(1-2x)^{-n},$$

所以 $$y^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!。$$

方法二：泰勒公式法

由泰勒公式可得 $$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}+o\left(x^n\right)。$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right),$$

所以 $$(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

故 $$f^{(n)}(0)=-2^n(n-1)!。$$

【注】这里我们再介绍一种分解法：$\ln(1-2x)=\ln\left[2\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]=\ln2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$，

利用$\left[\ln\left(a-x\right)\right]^{(n)}=\left[\left(\ln\left(a-x\right)\right)'\right]^{(n-1)}=\left(-\frac{1}{a-x}\right)^{(n-1)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}$可得：

$\left[\ln(1-2x)\right]^{(n)}=\left[\ln2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]^{(n)}=\left[\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{\left(\frac{1}{2}-x\right)^n}$，所以 $f^{(n)}(0)=$

$-2^n(n-1)!$。

33.【答案】C

【解】因为

$$f'(x)=\left[\ln\left|(x-1)(x-2)(x-3)\right|\right]'=\frac{\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]'}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

由 $f'(x)=0$ 解得驻点为 $$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{12}}{6}=2\pm\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

【注】① $\ln\left|g(x)\right|$ 的导数特点：

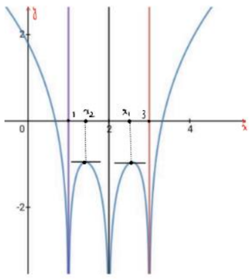
当 $g(x)>0$ 时，$(\ln\left|g(x)\right|)'=\left[\ln g(x)\right]'=\frac{g'(x)}{g(x)}$；

当 $g(x)<0$ 时，$(\ln|g(x)|)'=\left[\ln(-g(x))\right]'=\dfrac{-g'(x)}{-g(x)}=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$。

总之，当 $g(x)$ 可导且 $g(x)\neq 0$ 时，$\left[\ln|g(x)|\right]'=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$。

② 本题中并没有要求求出驻点的值，由 $f'(x)=0$ 得 $\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]'=0$，记 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$，则 $g'(x)$ 为二次多项式且 $g(1)=g(2)=g(3)=0$，故由罗尔中值定理知，$\exists\xi_1\in(1,2),\exists\xi_2\in(2,3)$，使得 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$，且 $g'(x)$ 只有这两个零点，故 $f(x)$ 有两个驻点。

③ 为了方便同学们理解，我们画出函数 $f\left(x\right)$ 的图像及驻点，同时可以看到，该曲线有三条垂直渐近线：$x=1,x=2,x=3$。如图



34.【答案】$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$

【解】由于 $$f(x)=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{t}\ln(1+3t)}=x\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{x}{t}\cdot 3t}=x\mathrm{e}^{3x},$$

所以 $$f'(x)=(x\mathrm{e}^{3x})'=\mathrm{e}^{3x}+x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot 3=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}。$$

35.【答案】$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【解】方法一：首先求得 $f(f(x))$ 的表达式

$$f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)} & f(x)\geq 1,\\ 2f(x)-1 & f(x)<1\end{cases}$$

由 $f(x)\geq 1$ 得 $\begin{cases}x\geq 1\\ \ln\sqrt{x}\geq 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ 2x-1\geq 1\end{cases}$，解得 $x\geq \mathrm{e}^2$；

由 $f(x)<1$ 得 $\begin{cases}x\geq 1\\ \ln\sqrt{x}<1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<1\\ 2x-1<1\end{cases}$，解得 $x<1$ 或 $1\leq x<\mathrm{e}^2$，故

$$f(f(x))=\begin{cases}4x-3 & x<1,\\ 2\ln\sqrt{x}-1 & 1\le x<\mathrm{e}^2,\\ \ln\sqrt{\ln\sqrt{x}} & x\ge \mathrm{e}^2\end{cases}$$

所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=(2\ln\sqrt{x}-1)'\Big|_{x=\mathrm{e}}=(\ln x-1)'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

方法二：因为 $y=f(f(x))$ 是由 $y=f(u),u=f(x)$ 复合所得的函数，且 $x=\mathrm{e}$ 时，

$u=f(x)=\ln\sqrt{x}$ 在 $u=f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}$ 处可导， $y=f(u)=2u-1$ 在 $u=\frac{1}{2}$ 处也可导。

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}\right)=\left[(2u-1)'\Big|_{u=\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[(\ln\sqrt{x})'\Big|_{x=\mathrm{e}}\right]=2\cdot\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'\Big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

方法三：直接使用导数的定义

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=\mathrm{e}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[f(\mathrm{e}+\Delta x)]-f[f(\mathrm{e})]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\ln\sqrt{\mathrm{e}+\Delta x})-f(\ln\sqrt{\mathrm{e}})}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2\ln\sqrt{\mathrm{e}+\Delta x}-1)-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{e}+\Delta x)-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left[\mathrm{e}(1+\frac{\Delta x}{\mathrm{e}})\right]-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+\ln(1+\frac{\Delta x}{\mathrm{e}})-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{\Delta x}{\mathrm{e}})}{\Delta x}=\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

36.【答案】$\sqrt{2}$

【解】因为 $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(\sin t)'=\cos t,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(t\sin t+\cos t)'=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t,$$

所以 $$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{t\cos t}{\cos t}=t,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{(t)'}{\cos t}=\sec t,$$

故 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}。$$

37.【答案】$\frac{1}{2}$

【解】由于 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，$\frac{1}{1+ax^2} = \frac{1}{1-\left(-ax^2\right)} = 1 - ax^2 + o(x^2)$，所以

$$f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x[1 - ax^2 + o(x^2)] = (a - \frac{1}{3})x^3 + o(x^3) \text{。}$$

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 3 阶泰勒公式为：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3),$$

比较 x^3 的系数，得 $\frac{1}{3!}f'''(0) = a - \frac{1}{3}$，所以 $a = \frac{1}{6}f'''(0) + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$。

38.【答案】$-\frac{1}{8}$

【解】由

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-\sin t(1+\mathrm{e}^t) - (\cos t)\cdot \mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2} \cdot \frac{1}{1+\mathrm{e}^t} = -\frac{(1+\mathrm{e}^t)\cdot \sin t + \mathrm{e}^t \cos t}{(1+\mathrm{e}^t)^3},$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{8} \text{。}$$

39.【答案】0

【解】方法一：由于 $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$，$x^3$ 的系数为 0，

又 $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + o(x^4),$$

故 $\frac{f^{(3)}(0)}{3!} = 0$，解得 $f^{(3)}(0) = 0$。

方法二：由于 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f'(x)$ 为奇函数，$f''(x)$ 为偶函数，$f^{(3)}(x)$ 为奇函数。

故 $f^{(3)}(0) = 0$。

【注】本题也可以直接求出 $f^{(3)}(x)$,但计算量较大。请同学们动手试一试。

40.【答案】$-\sqrt{2}$

【解】由于 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$， $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\cdot(1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}})=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，

所以
$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=\frac{1}{t}。$$

又
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}=-\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3},$$

从而
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-\left.\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}。$$

41.【答案】A

【解】方法一：由 $f(x)=x^2\ln(1-x)$ 得，

$$f^{(n)}(x)=C_n^0[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+C_n^1[\ln(1-x)]^{(n-1)}(x^2)'+C_n^2[\ln(1-x)]^{(n-2)}(x^2)''+\cdots+C_n^n(\ln(1-x))(x^2)^{(n)}$$
$$=[\ln(1-x)]^{(n)}x^2+n[\ln(1-x)]^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2!}[\ln(1-x)]^{(n-2)}\cdot 2,$$

所以，

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)[\ln(1-x)]^{(n-2)}\Big|_{x=0}=n(n-1)[-\frac{(n-3)!}{(1-x)^{n-2}}]\Big|_{x=0}=-n(n-1)\big((n-3)!\big)=-\frac{n!}{n-2}$$

方法二： 由 $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^{n-2}}{n-2}+o(x^{n-2})$，

得 $f(x)=x^2\ln(1-x)=-x^3-\dfrac{x^4}{2}-\cdots-\dfrac{x^n}{n-2}+o(x^n)$。

又由于
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

所以，$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\dfrac{1}{n-2}$，故 $f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$。故答案选（A）。

【注】请同学们注意以下常用的常识性结论：

$$\left[\ln(a-x)\right]'=-\frac{1}{a-x},\left[\ln(a-x)\right]^{(n)}=\left(\left[\ln(a-x)\right]'\right)^{(n-1)}=-\left(\frac{1}{a-x}\right)^{(n-1)}=-\frac{(n-1)!}{(a-x)^n}。$$

42.【答案】$\frac{2}{3}$

【解】 由于 $y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{4t\mathrm{e}^t+2t}{2\mathrm{e}^t+1}=\frac{2t(2\mathrm{e}^t+1)}{2\mathrm{e}^t+1}=2t$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2}{2\mathrm{e}^t+1}$，

故 $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=0}=\frac{2}{3}。$$

43.【答案】$\frac{\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)}{2\mathrm{e}}$

【解】 $y'=(\cos\mathrm{e}^{-\sqrt{x}})'=-\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)'=-\left(\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}(-\frac{1}{2\sqrt{x}})=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\sin\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$，

从而 $$y'\Big|_{x=1}=\frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot\sin\mathrm{e}^{-1}}{2}=\frac{\sin\left(\mathrm{e}^{-1}\right)}{2\mathrm{e}}。$$

44.【考点定位】可微的必要条件；可微的充分条件；偏导数的连续。

【答案】A

45.【考点定位】 等价无穷小替换；极限四则运算法则；洛必达法则。

【解】（I）

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}f(x,y)=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{1+xy}-\frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right)=\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}-\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(1-y\sin\frac{\pi x}{y}\right)$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(y\sin\frac{\pi x}{y}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(y\frac{\pi x}{y}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{\pi x}{\arctan x}。$$

（II）

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}+\frac{\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arctan x}\right)+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x}{\arctan x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\arctan x-x}{x\arctan x}\right)+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x}{x}=\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\arctan x-x}{x^2}\right)\overset{\frac{0}{0}}{=}\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{2x}\right)=\pi+\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{-x^2}{1+x^2}}{2x}\right)=\pi。$$

46.【考点定位】偏导数的定义。

【答案】B

【解】 $f_x{}'(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，

$$f_y{}'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{e^{\sqrt{y^4}}-1}{y-0}=\lim_{y\to0}\frac{e^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{y^2}{y}=0,$$

故 $f_x{}'(0,0)$ 不存在， $f_y{}'(0,0)=0$ ，因此答案选(B)。

47.【考点定位】偏导数的定义；二阶偏导数的定义；二重极限；二次极限。

【答案】 B

【解】对于①：由于 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-0}{x}=1$，所以①正确。

对于②：$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f_x{}'(0,y)-f_x{}'(0,0)}{y}$，下面分别计算 $f_x{}'(0,0), f_x{}'(0,y)$：

同①的计算可得 $f_x{}'(0,0)=1;\ f_x{}'(0,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xy-y}{x}=\infty\left(y\neq0\right)$，

所以 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在。故②错误。

对于③：由于 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq0\\ x, & y=0\\ y, & x=0\end{cases}$，所以 $|f(x,y)|=\begin{cases}|xy|, & xy\neq0\\ |x|, & y=0\\ |y|, & x=0\end{cases}$，从而

$|f(x,y)|\le|xy|+|x|+|y|$。由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(|xy|+|x|+|y|\right)=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$。

故③正确；

对于④：先计算累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ 的里层极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x,y),\left(y\neq0\right)$：当 $y\neq0$ 时，

$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}xy=0$。所以 $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f\left(x,y\right)=\lim\limits_{y\to0}0=0$。故④正确。

综上，正确的个数是 3，选(B).

48.【考点定位】多元复合函数的偏导数

【解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\dfrac{1}{y}+g'\left(\dfrac{y}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y\left(xf_{11}''-\frac{x}{y^2}\cdot f_{12}''\right)-\frac{1}{y^2}f_2'+\frac{1}{y}\left(xf_{21}''-\frac{x}{y^2}\cdot f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=f_1'\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2'\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}''\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}''\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}g''\left(\frac{y}{x}\right)。$$

49.【考点定位】全微分；隐函数的偏导数。

【解】$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\left[f_1'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]\mathrm{d}x+\left[f_2'+f_3'\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}y$，下面求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

方法一：方程$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$两端同时对$x$求偏导得$\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\mathrm{e}^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$，解得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}$；方程$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$两端对$y$求偏导得$-\mathrm{e}^y-y\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}+z\mathrm{e}^z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}$。

方法二：记$F(x,y,z)=x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y-z\mathrm{e}^z$，因为

$$F_x'=(x+1)\mathrm{e}^x,F_y'=-(y+1)\mathrm{e}^y,F_z'=-(z+1)\mathrm{e}^z,$$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}$，

方法三：方程$x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$两端求微分得$\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^x\right)-\mathrm{d}\left(y\mathrm{e}^y\right)=\mathrm{d}\left(z\mathrm{e}^z\right)$，

所以$x\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-y\mathrm{d}\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=z\mathrm{d}\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^z\mathrm{d}z$，解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\mathrm{d}x-\dfrac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}\mathrm{d}y$，

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}。$$

故 $$\mathrm{d}u=\left(f_1'+\frac{x+1}{z+1}\mathrm{e}^{x-z}\cdot f_3'\right)\mathrm{d}x+\left(f_2'-\frac{y+1}{z+1}\mathrm{e}^{y-z}f_3'\right)\mathrm{d}y。$$

50.【考点定位】多元复合函数的偏导数。

【解】$\dfrac{\partial g}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot x$， $\dfrac{\partial g}{\partial y}=f_1'\cdot x-y\cdot f_2'$，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y\left(f''_{11}\cdot y+x\cdot f_{12}''\right)+f_2'+x\left(yf_{21}''+xf_{22}''\right)$$

$= y^2 f''_{11} + 2xyf_{12}'' + f_2' + x^2 f_{22}''$，

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x\left(xf_{11}'' - yf_{12}''\right) - f_2' - y\left(xf_{21}'' - yf_{22}''\right) = x^2 f_{11}'' - 2xyf_{12}'' + y^2 f_{22}'' - f_2'$，

又由于$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$，即 $f_{11}'' + f_{22}'' = 1$，所以

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = y^2 f''_{11} + 2xyf_{12}'' + x^2 f_{22}'' + f_2' + x^2 f_{11}'' - 2xyf_{12}'' + y^2 f_{22}'' - f_2'$

$$= (x^2 + y^2) f_{11}'' + (x^2 + y^2) f_{22}'' = (x^2 + y^2)(f_{11}'' + f_{22}'') = x^2 + y^2$$ 。

51.【考点定位】隐函数求偏导。

【答案】2

【解】方法一：方程$z = \mathrm{e}^{2x-3z} + 2y$两边同时对$x$求偏导得$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{2x-3z}\left(2 - 3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$；两边同时对$y$求偏导得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{e}^{2x-3z}\left(-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) + 2$，

解得$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，故$3\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} + \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} = 2$。

方法二：$z = \mathrm{e}^{2x-3z} + 2y$变为$z - \mathrm{e}^{2x-3z} - 2y = 0$，记$F(x, y, z) = z - \mathrm{e}^{2x-3z} - 2y$

则$F_x' = -2\mathrm{e}^{2x-3z}, F_y' = -2, F_z' = 1 + 3\mathrm{e}^{2x-3z}$，所以$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x'}{F_z'} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y'}{F_z'} = \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$。故$3\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} + \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} = 2$。

方法三：$z = \mathrm{e}^{2x-3z} + 2y$两边同时取微分得$\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{2x-3z}(2\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}z) + 2\mathrm{d}y$，解得

$\mathrm{d}z = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}x + \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}\mathrm{d}y$，故$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}}$。

故$3\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{6\mathrm{e}^{2x-3z}}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} + \dfrac{2}{1+3\mathrm{e}^{2x-3z}} = 2$。

52.【考点定位】高阶偏导

【答案】$-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$

【解】令 $\begin{cases} u = xg(y), \\ v = y, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x = \dfrac{u}{g(v)}, \\ y = v. \end{cases}$ 代入 $f[xg(y),y] = x + g(y)$ 得

$f(u,v) = \dfrac{u}{g(v)} + g(v)$，因此 $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{1}{g(v)}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = -\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$。

53.【考点定位】复合函数的一阶偏导及二阶偏导

【解】由 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$ 得，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xf_1' + ye^{xy} f_2'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2yf_1' + xe^{xy} f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2x\left[f_{11}'' \cdot (-2y) + f_{12}'' \cdot xe^{xy} \right] + \left[e^{xy} + xye^{xy} \right] f_2' + ye^{xy}\left[f_{21}'' \cdot (-2y) + f_{22}'' \cdot xe^{xy} \right]$$

$$= -4xyf_{11}'' + 2x^2 e^{xy} f_{12}'' - 2y^2 e^{xy} f_{21}'' + xye^{2xy} f_{22}'' + (1+xy)e^{xy} f_2'$$

$$= -4xyf_{11}'' + (2x^2 - 2y^2)e^{xy} f_{12}'' + xye^{2xy} f_{22}'' + (1+xy)e^{xy} f_2'$$ 。

54.【考点定位】偏导数；全微分。

【解】 方法一：由 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} + xe^{x+y} + \ln(1+y)$ 得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = e + e = 2e$；

由 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{x+y} + \dfrac{1+x}{1+y}$ 得 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = e + 2$，从而

$$\left.dz\right|_{(1,0)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} dy = 2e dx + (e+2) dy$$。。

方法二：在求函数在一点的偏导数时，我们也可利用代入法：求关于 x 的偏导数时先将 y 的值代入，再对 x 求导数；求关于 y 的偏导数时先将 x 的值代入，再对 y 求导数。

将 $y=0$ 代入 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$，得 $z(x,0) = xe^x$，从而

$z_x'(x,0) = (xe^x)' = (1+x)e^x$，所以 $z_x'(1,0) = 2e$；同理 $z(1,y) = e^{1+y} + 2\ln(1+y)$，从而

$z_y'(1,y) = e^{1+y} + \dfrac{2}{1+y}$，所以 $z_y'(1,0) = e + 2$ 。

故 $\left.dz\right|_{(1,0)} = 2e dx + (e+2) dy$。

55.【考点定位】隐函数的偏导数；全微分的概念。

【解】(I) 方法一：$x^2 + y^2 - z = \varphi(x+y+z)$ 变形为 $x^2 + y^2 - z - \varphi(x+y+z) = 0$ 。

记 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - \varphi(x+y+z)$，则 $F_x' = 2x - \varphi'$，$F_y' = 2y - \varphi'$，$F_z' = -1 - \varphi'$ 。

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$，

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y$ 。

方法二：方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边对 x 求偏导得，$2x-\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'\cdot\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$，

解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}$；方程两边对 y 求偏导得，$2y-\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}$ 。

故 $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y$ 。

方法三：方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 两边取微分得，$\mathrm{d}(x^2+y^2-z)=\mathrm{d}\varphi(x+y+z)$，所以

$$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z),$$

解得

$$\mathrm{d}z=\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}x+\frac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\mathrm{d}y。$$

（II）由（I）知 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}-\dfrac{2y-\varphi'}{1+\varphi'}\right)=\dfrac{2}{1+\varphi'}$，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\cdot\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1+\varphi')^2}=\frac{-2\varphi''}{(1+\varphi')^2}\left[1+\frac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right]=\frac{-2\varphi''(x+y+z)\cdot(1+2x)}{\left[1+\varphi'(x+y+z)\right]^2}。$$

56.【考点定位】偏导数的计算。

【答案】$1+2\ln 2$ 。

【解】方法一： 当 $y=0$ 时， $z=(x+1)^x=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=\left[\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\right]'\Big|_{x=1}=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}\right]\Big|_{x=1}=\mathrm{e}^{\ln 2}(\ln 2+\dfrac{1}{2})=1+2\ln 2$，

方法二： 由于 $z=\mathrm{e}^{x\ln(x+\mathrm{e}^y)}$，从而 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x\ln(x+\mathrm{e}^y)}\left[\ln(x+\mathrm{e}^y)+\dfrac{x}{x+\mathrm{e}^y}\right]$，

将 $x=1,y=0$ 代入得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,0)}=1+2\ln 2$ 。

57.【考点定位】复合函数的高阶偏导。

【解】 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=u_\xi\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+u_\eta\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial x}=u_\xi+u_\eta$， $\dfrac{\partial u}{\partial y}=u_\xi\cdot\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+u_\eta\cdot\dfrac{\partial\eta}{\partial y}=au_\xi+bu_\eta$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\right)+\left(u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}\right)=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(u_{\xi\xi}\cdot a+u_{\xi\eta}\cdot b\right)+\left(u_{\eta\xi}\cdot a+u_{\eta\eta}\cdot b\right)=au_{\xi\xi}+\left(a+b\right)u_{\xi\eta}+bu_{\eta\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=a\left(u_{\xi\xi}\cdot a+u_{\xi\eta}\cdot b\right)+b\left(u_{\eta\xi}\cdot a+u_{\eta\eta}\cdot b\right)=a^2u_{\xi\xi}+2abu_{\xi\eta}+b^2u_{\eta\eta},$$

将上述结果代入等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得,

$$\left(5a^2+12a+4\right)u_{\xi\xi}+\left[10ab+12\left(a+b\right)+8\right]u_{\xi\eta}+\left(5b^2+12b+4\right)u_{\eta\eta}=0,$$

由题设可知, $\begin{cases}5a^2+12a+4=0\\10ab+12\left(a+b\right)+8\neq 0\\5b^2+12b+4=0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-2\end{cases}$, 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{2}{5}\end{cases}$。

综上所述, $a=-\frac{2}{5},b=-2$ 或 $a=-2,b=-\frac{2}{5}$。

【注】进一步我们可以求出函数 u 的表达式。由 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$ 得 $\frac{\partial u}{\partial\xi}=\varphi\left(\xi\right)$, 从而

$u=\int\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+\Psi(\eta)=\Phi(\xi)+\Psi(\eta)=\Phi\left(x-2y\right)+\Psi\left(x-\frac{2}{5}y\right)$, 其中 Φ,Ψ 具有二阶连续导数。

58.【考点定位】复合函数的偏导数。

【答案】0

【解】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)$,

所以 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)-f'\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)=0$。

59.【考点定位】隐函数求偏导。

【答案】$2-2\ln 2$

【解】方法一: $\left(z+y\right)^x=xy$ 两边取对数 $x\ln\left(z+y\right)=\ln x+\ln y$, 所以

$$x\ln\left(z+y\right)-\ln x-\ln y=0, \quad ①$$

当 $x=1,y=2$ 时, $\ln\left(z+2\right)-\ln 2=0$, 所以 $z=0$。下面用三种方式求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$。

其一：记 $F(x,y,z)=x\ln(z+y)-\ln x-\ln y$，则

$$F_x'=\ln(z+y)-\frac{1}{x},F_z'=\frac{x}{z+y},$$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=-\frac{F_x'(1,2,0)}{F_z'(1,2,0)}=-\frac{\ln 2-1}{\frac{1}{2}}=2-2\ln 2\text{。}$$

其二：方程①两边对 x 求偏导得 $\ln(z+y)+x\cdot\frac{1}{z+y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x}=0$，将 $x=1,y=2,z=0$ 代入上式得 $\ln 2+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}-1=0$，故 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$。

其三：当 $y=2$ 时，①变为 $x\ln(z+2)-\ln x-\ln 2=0$，两边对 x 求导得 $\ln(z+2)+\frac{x}{z+2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}=0$，将 $x=1,z=0$ 代入得 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=2-2\ln 2,$ 即 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2-2\ln 2$。

方法二：对于方程 $(z+y)^x=xy$，当 $x=1,y=2$ 时，$z+2=2$，所以 $z=0$。与方法一类似，我们可以用三种方式求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$，这里展式其中一种，记 $F(x,y,z)=(z+y)^x-xy$，则 $F_x=(z+y)^x\ln(z+y)-y,\ F_z=x(z+y)^{x-1}$，故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=-\frac{F_x(1,2,0)}{F_z(1,2,0)}=-\frac{2\ln 2-2}{1}=2-2\ln 2\text{。}$$

60.【考点定位】全微分的概念；隐函数的偏导数；微分四则运算法则。

【答案】$-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$

【解】将 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 代入方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 可得 $\mathrm{e}^z+z=1$，所以 $z=0$。下面用三种方法求全微分 $\mathrm{d}z|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$。

方法一：方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边对 x 求偏导得，$2y\mathrm{e}^{2yz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+1+\frac{\partial z}{\partial x}=0$， ①

将 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 代入方程①，可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$。

方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边对 y 求偏导得，$2z\mathrm{e}^{2yz}+2y\mathrm{e}^{2yz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2y+\frac{\partial z}{\partial y}=0$， ②

将 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 代入方程②，可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}$，

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$。

方法二：$\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 变为 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}=0$，记 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z-\frac{7}{4}$。

由于 $F_x=1,\ F_y=\mathrm{e}^{2yz}2z+2y,\ F_z=\mathrm{e}^{2yz}2y+1,$ 所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{F_x\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{F_z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{F_y\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}{F_z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)}=-\frac{1}{2},$$

故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$。

方法三：方程 $\mathrm{e}^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 两边求微分得，$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2yz})+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z=0$，

所以 $2\mathrm{e}^{2yz}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)+\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0$， ①

将 $x=y=\frac{1}{2},z=0$ 代入①，可得 $2\mathrm{d}z+\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0$，故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}=-\frac{1}{2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y$。

61.【考点定位】全微分的计算；一阶微分形式不变性；隐函数求偏导。

【答案】$-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【解】$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}\mathrm{d}y$。

方法一：方程 $(x+1)z-y^2=x^2f\left(x-z,y\right)$ 变为 $(x+1)z-y^2-x^2f\left(x-z,y\right)=0$，

当 $x=0,y=1$ 时，$z=1$.记 $F(x,y,z)=\left(x+1\right)z-y^2-x^2f\left(x-z,y\right)$，则

$F_x'=z-2xf\left(x-z,y\right)-x^2f_1'\left(x-z,y\right),F_y'=-2y-x^2f_2'\left(x-z,y\right),$

$F_z{}' = (x+1) + x^2 f_1{}'(x-z,y)$,

从而可得 $F_x{}'(0,1,1) = 1, F_y{}'(0,1,1) = -2, F_z{}'(0,1,1) = 1,$

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} = -\frac{F_x{}'(0,1,1)}{F_z{}'(0,1,1)} = -1, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = -\frac{F_y{}'(0,1,1)}{F_z{}'(0,1,1)} = 2,$

故 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$ 。

方法二：方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 两边同时对 x 求偏导得

$$z + (x+1)\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf(x-z,y) + x^2 f_1{}'(x-z,y)\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

将 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式得。方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 两边同时对 y 求偏导得

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2\left[f_1{}'(x-z,y)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + f_2{}'(x-z,y)\right],$$

将 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式得 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 2,$ 故 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)} \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)} \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$ 。

方法三：方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 两边同时取全微分得

$$(x+1)\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y = x^2\mathrm{d}f(x-z,y) + f(x-z,y)\cdot 2x\mathrm{d}x,$$

将 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式得 $\mathrm{d}z + \mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y = 0$，故 $\mathrm{d}z|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$ 。

62.【考点定位】复合函数的导数与高阶导数。

【解】 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1{}'(\mathrm{e}^x, \cos x)\mathrm{e}^x + f_2{}'(\mathrm{e}^x, \cos x)(-\sin x)$，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = f_1{}'(\mathrm{e}^x, \cos x)\mathrm{e}^x + [f_{11}{}''(\mathrm{e}^x, \cos x)\mathrm{e}^x + f_{12}{}''(\mathrm{e}^x, \cos x)(-\sin x)]\mathrm{e}^x$$

$$+ f_2{}'(\mathrm{e}^x, \cos x)(-\cos x) + [f_{21}{}''(\mathrm{e}^x, \cos x)\mathrm{e}^x + f_{22}{}''(\mathrm{e}^x, \cos x)(-\sin x)](-\sin x),$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = f_1{}'(1,1)$， $\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} = f_1{}'(1,1) + f_{11}{}''(1,1) - f_2{}'(1,1)$ 。

63.【考点定位】复合函数的偏导数。

【答案】 z

【解】 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf'\left(\frac{y^2}{x}\right)\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)=-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$，

$\frac{\partial z}{\partial y}=f\left(\frac{y^2}{x}\right)+y\cdot f'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x}=f\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^2}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$。

故 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2x\left(-\frac{y^3}{x^2}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)+yf\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)$

$$=-\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)+yf\left(\frac{y^2}{x}\right)+\frac{2y^3}{x}f'\left(\frac{y^2}{x}\right)=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)=z$$。

64.【考点定位】复合函数的偏导数

【答案】 $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$

【解】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\cos x\cdot f'(\sin y-\sin x)+y$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos y\cdot f'(\sin y-\sin x)+x$，所以

$$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\cos x}\left(\cdot y-\cos x\cdot f'(\sin y-\sin x)\right)+\frac{1}{\cos y}\cdot\left(x+\cos y\cdot f'(\sin y-\sin x)\right)$$

$$=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$$。

65.【考点定位】复合函数的偏导数；二阶偏导数。

【解】因为 $\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y)$，

$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y)$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=-f_{11}''(x+y,x-y)-f_{12}''(x+y,x-y)-f_{21}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\\&=-f_{11}''(x+y,x-y)-2f_{12}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y),\end{aligned}$$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}&=1-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{12}''(x+y,x-y)-f_{21}''(x+y,x-y)+f_{22}''(x+y,x-y)\\&=1-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{22}''(x+y,x-y)\end{aligned}$$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=-f_{11}''(x+y,x-y)+f_{12}''(x+y,x-y)+f_{21}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\\&=-f_{11}''(x+y,x-y)+2f_{12}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)\end{aligned}$$,

所以 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y)$。

66.【考点定位】偏导数；全微分。

【答案】$(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

【解】方法一：因为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{y+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=\dfrac{\pi-1}{1+0}=\pi-1,$

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{x+\cos(x+y)}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}\right|_{(0,\pi)}=\dfrac{-1}{1}=-1,$

所以 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$。

方法二：当 $x=0$ 时，$z=\arctan(\sin y)$，

所以 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}=\left[\arctan(\sin y)\right]'\Big|_{y=\pi}=\left.\dfrac{\cos y}{1+\sin^2 y}\right|_{y=\pi}=-1;$

当 $y=\pi$ 时，$z=\arctan(\pi x+\sin(x+\pi))=\arctan(\pi x-\sin x)$，所以

$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}=\left[\arctan(\pi x-\sin x)\right]'\Big|_{x=0}=\left.\dfrac{\pi-\cos x}{1+(\pi x-\sin x)^2}\right|_{x=0}=\pi-1;$

故 $\mathrm{d}z|_{(0,\pi)}=\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,\pi)}\cdot\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,\pi)}\cdot\mathrm{d}y=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$