第5讲 微分与积分的应用

函数、偏函数

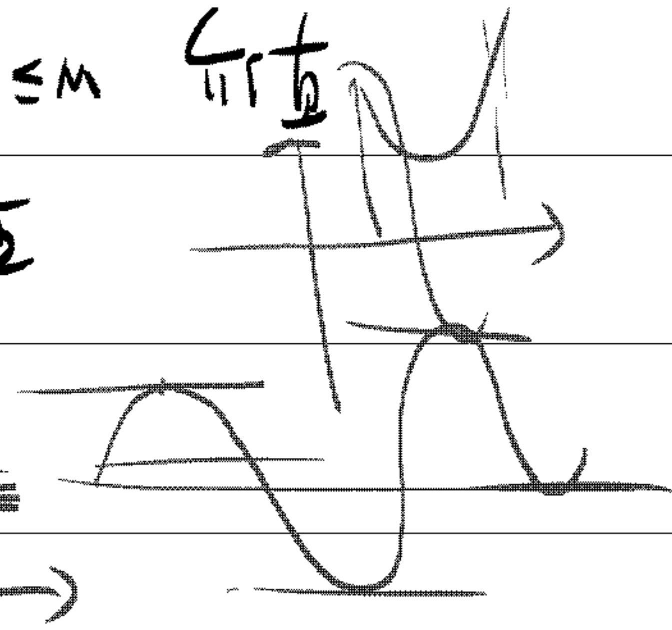
主要内容：

1. 中值定理及不等式
2. 极值、极值点
3. 最值
4. 函数零点f(x)=0根的问题
5. 曲率（一、二）
6. 定积分与重积分的应用
7. 微分方程
8. 差分方程（三）
9. 经济应用（三）
10. 级数 $\begin{cases} \text{幂级数} \\ \text{常数项级数} \end{cases}$（一、三）

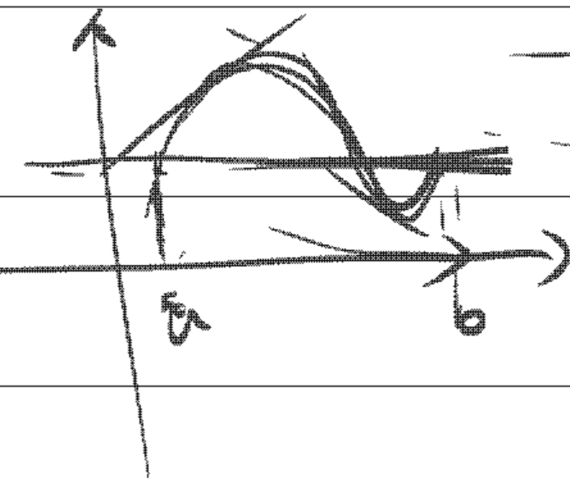
§1. 中值问题与不等式的证明

1.1 基本定理

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\begin{cases} ① \ m, M \\ ② \ m \le f(\xi) \le M \quad \text{介值} \\ ③ \ \text{零点存在性} \end{cases}$



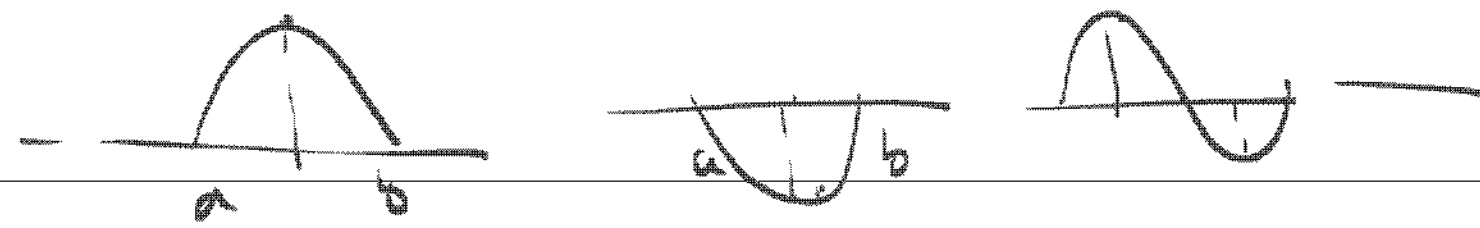
2. Fermat



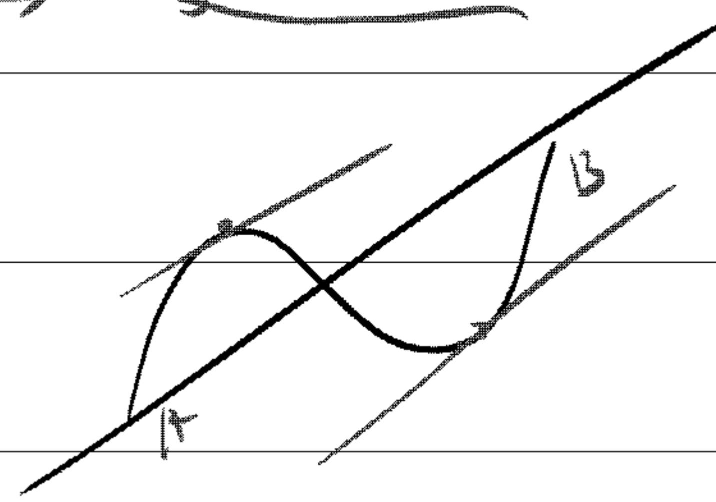
可导点 x_0，且为极值点

$\Longrightarrow k = f'(x_0) = 0$

3. Rolle



$\begin{cases} f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续} \\ f(x) \text{ 在 } (a,b) \text{ 内可导} \\ f(a) = f(b) \end{cases} \Longrightarrow \underline{f'(\xi) = 0}$



K_{AB}

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

4. Lagrange

$\begin{cases} f(x) \text{ 在 } [a,b] \text{ 上连续} \\ f(x) \text{ 在 } (a,b) \text{ 内可导} \end{cases} \Longrightarrow f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

5. Cauchy $\quad \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

6. Taylor 定理（带 Lagrange 余项）

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

7. 积分中值定理.

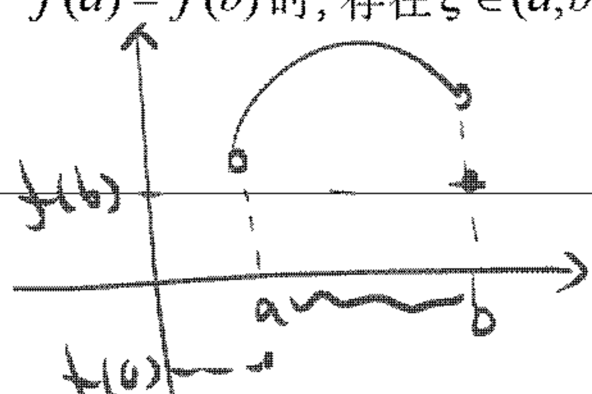
题型1 基本定理

【例 1】下列命题：

①设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

②设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$；

$f(a)\ f(b) < 0$



③设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

④如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上均连续，在开区间 (a,b) 内均可导，且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内每点处均不为零，则由拉格朗日中值定理得存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$， $g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a)$，从而得到

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)(b-a)}{g'(\xi)(b-a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

其中错误的个数为（D）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【例 2】设函数 $f(x)$ 在区间 I 上 3 阶可导，当 $x_0 \in I$ 时，对任意 $x \in I$ 且 $x \neq x_0$，都有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+R_2(x)$. 证明：存在 $\xi \in (x_0, x)$ 或 (x, x_0)，使得 $R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3$.

Pf: $R_2(x) = f(x) - [f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2]$

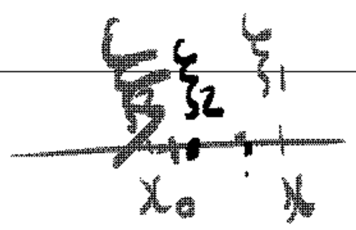
$R_2(x_0)=0$ $\quad -f'(x_0)$

$R_2'(x)=f'(x)-f''(x_0)(x-x_0)$, $\quad R_2'(x_0)=0$

$R_2''(x)=f''(x)-f''(x_0)$ $\qquad R_2''(x_0)=0$

$R_2'''(x)=f'''(x)$

令 $g(x)=(x-x_0)^3$，则有 $g(x_0)=0$, $g'(x_0)=0$, $g''(x_0)=0$, $g'''(x)=6$.



$$\frac{R_2(x)}{g(x)}=\frac{R_2(x)-R_2(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{R_2'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{R_2'(\xi_1)-R_2'(x_0)}{g'(\xi_1)-g'(x_0)}$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{R_2''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\frac{R_2''(\xi_2)-R_2''(x_0)}{g''(\xi_2)-g''(x_0)}$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{R_2'''(\xi)}{g'''(\xi)}=\frac{f'''(\xi)}{6}$$

即 $\frac{R_2(x)}{g(x)}=\frac{f'''(\xi)}{6}$，也即 $R_2(x)=\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$

$f(x) = \boxed{\text{-- -- —}} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

【例 3】(1) 求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的一阶泰勒公式

$e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2!}x^2$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2!}x^2;$$

(2) 证明不等式 $e^x > 1 + x \ (x \neq 0)$; 由(1) $\Rightarrow$ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}e^\xi x^2 > 1+x$ $(x\neq 0)$

(3) 在 (1) 中取 $x=1$，求出相应的 ξ;

$e = 2 + \frac{1}{2}e^\xi \Rightarrow e^\xi = 2(e-2) \Rightarrow \xi = \ln(2e-4)$

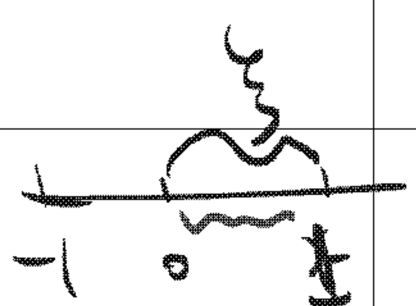
(4) 求 $f(x)=e^x$ 在在 $x=0$ 处的带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

(5) 利用 (4) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e$.

(4) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$

(5) 取 $x=1$ 代入 (4) 得



$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

$\xi \in (0,1)$

$$\Rightarrow 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e - \frac{e^\xi}{(n+1)!}$$

由于 $\frac{e^0}{(n+1)!} < \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!}$

且 $\lim \frac{1}{(n+1)!} = \lim \frac{e}{(n+1)!} = 0$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(e - \frac{e^\xi}{(n+1)!}\right)$

$= e$

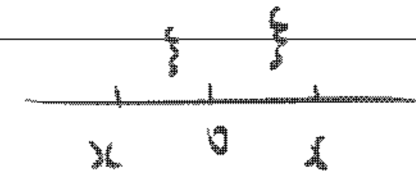
【例 4】设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$。

（1）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

（2）证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使 $a^3 f''(\eta)=3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$。

$f''(x)$

【解】(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$



$\xi\in(0,x)$ 或 $\xi\in(x,0)$

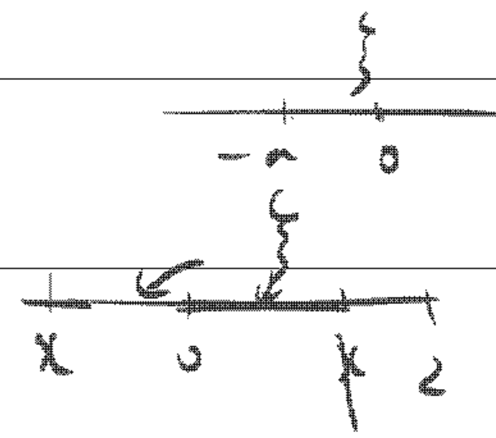
$=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$ 介于 0 与 x 之间

$\int_{-a}^{a}$

(2) 令 $\int_0^x f(t)dt=F(x)$，$F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$

由题设可知 $F(x)$ 在 $[-a,a]$ 上三阶可导，由带拉格朗日余项的麦克劳林公式得

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+\frac{F'''(\xi)}{3!}x^3$$



$$=f(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\frac{f''(\xi)}{3!}x^3$$

$$=\frac{1}{2}f'(0)x^2+\frac{1}{3!}f''(\xi)x^3$$

所以 $\int_{-a}^{0} f(x)dx=-F(-a)=-\cancel{\frac{1}{2}f'(0)a^2}+\frac{f''(\xi_1)}{3!}a^3$，$\xi_1\in(-a,0)$

$\int_{0}^{a} f(x)dx=\overbrace{F(a)}=\cancel{\frac{1}{2}f'(0)a^2}+\frac{1}{3!}f''(\xi_2)a^3$，$\xi_2\in(0,a)$

$\int_{-a}^{a} f(x)dx$

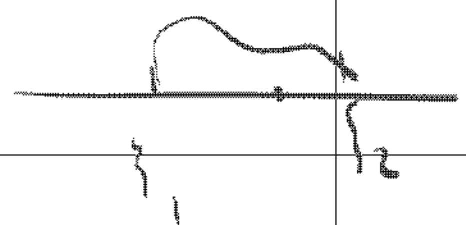
则 $=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

$$=F(a)-F(-a)=\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{3!}a^3=\frac{\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2}}{3}a^3$$

又因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上必存

在 最小值 m，最大值 M，即 $m \le f''(\xi_1),\ f''(\xi_2) \le M$

从而 $2m \le f''(\xi_1) + f''(\xi_2) \le 2M$



故，$m \le \dfrac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \le M$

由介值定理可得 $\exists\, \eta \in [\xi_1, \xi_2] \subset [-a, a]$ s.t.

$$f''(\eta) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$$

故，$a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

$f''(x)$

$x=\eta$

$f''(\eta)$

方法二： $a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$

$$\Leftrightarrow f''(\eta) = \frac{3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx}{a^3} \Leftrightarrow m \le \frac{3\int_{-a}^{a} f(x)\,dx}{a^3} \le M$$

其中 $m = \min\limits_{[-a,a]} f''(x)$，$M = \max\limits_{[-a,a]} f''(x)$

$f<g$

$\int_a^b f\,dx < \int_a^b g\,dx$

由(1)可知 $f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi) x^2$

则 $f'(0)x + \frac{1}{2} m x^2 \le f(x) = f'(0)x + \frac{1}{2} f''(\xi) x^2 \le f'(0)x + \frac{1}{2} M x^2$

$$\Longrightarrow \int_{-a}^{a} [\underbrace{f'(0)x}_{0} + \tfrac{1}{2} m x^2]\,dx \le \int_{-a}^{a} f(x)\,dx \le \int_{-a}^{a} [\underbrace{f'(0)x}_{0} + \tfrac{1}{2} M x^2]\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{ma^3}{3} \le \int_{-a}^{a} f(x)\,dx \le \frac{Ma^3}{3}$$

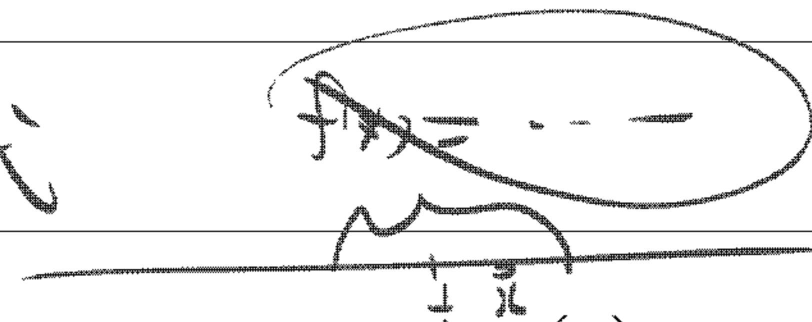
$$\Longrightarrow m \le \frac{3 \cdot \int_{-a}^{a} f(x)\,dx}{a^3} \le M$$

由介值定理，$\exists \eta \in [-a, a]$ s.t.

$$f''(\eta) = \frac{3 \cdot \int_{-a}^{a} f(x)dx}{a^3}$$

即 $a^3 f''(\eta) = 3 \cdot \int_{-a}^{a} f(x)dx$

题型2 利用中值定理证明不等式



【例 5】设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有三阶导数，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

$f'(x_0)$ $f''(x_0)$ $f'''(x_0)$

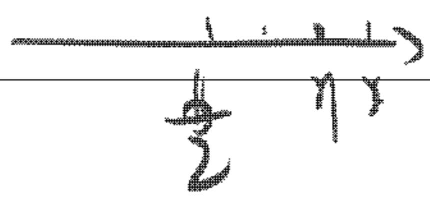
求证：存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $|f'''(\xi)| \geq 24$.

思路 泰勒展开 → 取点代 → 解方程 → $\begin{cases} \text{证不等式，用介值} \\ \text{证不等式，放缩.} \end{cases}$

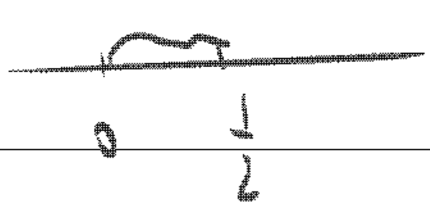
证：将 $f(x)$ 在 $x_0 = \frac{1}{2}$ 处 Taylor 展开

$$f(x) = f(\tfrac{1}{2}) + \cancel{f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})} + \frac{1}{2} f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2$$

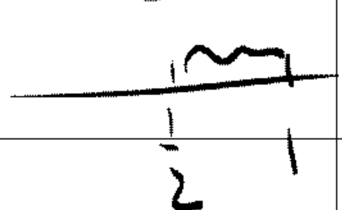
$$+ \frac{1}{6} f'''(\eta) \cdot (x-\tfrac{1}{2})^3, \quad \cdots ① \quad \eta \text{介于}x\text{与}\tfrac{1}{2}\text{之间}$$



取 $x=0$，$x=1$ 分别代入 ① 得



$$1 = f(0) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{8} f''(\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{48} f'''(\xi_1), \quad ② \quad 0 < \xi_1 < \tfrac{1}{2}$$



$$2 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{8} f''(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{48} f'''(\xi_2) \quad ③ \quad \tfrac{1}{2} < \xi_2 < 1$$

由 ③ − ② $\Rightarrow$

$|a|+|b| \geq |a \pm b|$

$$2-1 = \frac{1}{48}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

从而

$$|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)| \geq |f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)| = 48$$

记 $\max\{|f'''(\xi_1)|, |f'''(\xi_2)|\} = |f'''(\xi)|$

则 $48 \leq |f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)| \leq 2|f'''(\xi)|$

故，$|f'''(\xi)| \geq \frac{48}{2} = 24.$

【例 6】设 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数，且 $f''(x)>0$，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是区间 I 上 n 个互异的点，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 均大于 0，且 $\boxed{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1}(n \geq 2)$，证明：

$f(x_0)$

（I）$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i) > f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)$；　（II）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i) > f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$.

R: 记 $x_0 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n$

由 Taylor 公式得

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

由于 $f''(x)>0$，所以 $\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2>0$，$(x \neq x_0)$

从而 $\underline{f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$，$(x \neq x_0)$

分别取 $x = x_1, x_2, \cdots x_n$，不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n > \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_1 + \cdots + \lambda_n x_1 = x_1$$

$$x_0 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n < \lambda_1 x_n + \cdots + \lambda_n x_n = x_n$$

于是由 $f(x_1) > f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$f(x_2) > f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0)$

$\cdots$

$f(x_n) > f(x_0) + f'(x_0)(x_n - x_0)$

得

$\lambda_1 f(x_1) > \lambda_1 f(x_0) + \lambda_1 f'(x_0)(x_1 - x_0)$

$\lambda_2 f(x_2) > \lambda_2 f(x_0) + \lambda_2 f'(x_0)(x_2 - x_0)$

$\cdots$

$x_0 = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$

$\lambda_n f(x_n) > \lambda_n f(x_0) + \lambda_n f'(x_0)(x_n - x_0)$

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) > f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) > f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \quad (\text{詹生不等式})$$

(2) 由 (1) 可知 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ 时

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) > f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right).$$

【例 7】若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2) > \varphi(1)$，$\varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x)dx$，则至少存在一点 $\xi \in (1,3)$，使得 $\varphi''(\xi) < 0$。

$\tau \in [2,3]$

[分析] $\varphi(2)-\varphi(1)>0 \Rightarrow \varphi'(\xi_1)>0\ (<0)$

$\varphi(2)-\int_2^3\varphi(x)dx \Rightarrow \varphi'(\xi_2)>0\ (<0)$

$$\Rightarrow \frac{\varphi'(\xi_1)-\varphi'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=\varphi''(\xi)<0\ (>0)$$

[注] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Longrightarrow \int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$, $\xi\in[a,b]$

改: - - — - $\Longrightarrow \exists\xi\in(a,b)$, $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$.

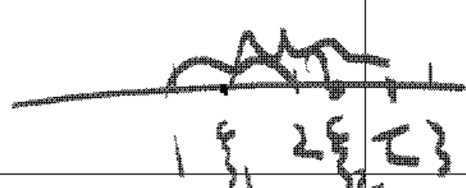
设 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $x\in[a,b]$

由 Lagrange …, $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$

即 $f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx-0}{b-a}$

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

Pf: 由积分中值定理, $\exists\tau\in(2,3)$ s.t.



$\int_2^3\varphi(x)dx=\varphi(\tau)\cdot(3-2)=\varphi(\tau)$, 从而 $\varphi(2)>\varphi(\tau)$

因为 $\varphi(x)$ 二阶可导, 所以由 Lagrange 中值定理

$\exists\xi_1\in(1,2)$ s.t. $\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}=\varphi(2)-\varphi(1)>0$

$\exists\xi_2\in(2,\tau)$ s.t. $\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\tau)-\varphi(2)}{\tau-2}<0$

于是, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$ s.t.

$$\varphi''(\xi) = \frac{\varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} < 0$$

[例 9] $\underbrace{\ln^2 b - \ln^2 a}_{f(b)-f(a)} > \frac{4}{e^2}(b-a)$, $(e<a<b<e^2)$

分析: $f(x) = \ln^2 x$, $x \in [a, b]$

[例10] $a>e$, $0<x<y<\frac{\pi}{2}$, $a^y - a^x > (\cos x - \cos y) a^x \ln a$

分析: $\frac{a^y - a^x}{\cos y - \cos x} < -a^x \ln a$

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)}$$

附: 令 $f(t) = a^t$, $g(t) = \cos t$, $t \in [x, y]$

利用 Cauchy 中值定理, $\exists\, \xi \in (x, y) \subset (0, \frac{\pi}{2})$

s.t. $\frac{a^y - a^x}{\cos y - \cos x} = \frac{a^\xi \ln a}{-\sin \xi}$

$$\Longrightarrow a^y - a^x = (\cos x - \cos y) \cdot a^\xi \ln a \cdot \frac{1}{\sin \xi}$$

因为 $a^x < a^\xi$, $0 < \sin \xi < 1$

所以 $a^y - a^x = (\cos x - \cos y) \ln a \, a^\xi \cdot \frac{1}{\sin \xi}$

$$> (\cos x - \cos y) \ln a \cdot a^x \cdot 1$$

【例 8】已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 具有二阶导数，且 $f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

$f(0)=f(1)$　　$f(1)=1$

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$。

0　　1

$f(x)$　0, 1

Pf (1) 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,1]$

方法一：

由 Lagrange，$\exists c\in(0,1)$, $F'(c)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}$

即 $f(c)=\frac{\int_0^1 f(t)dt-0}{1}=\int_0^1 f(t)dt=1$

由 Rolle 定理，$\exists\ \xi\in(c,1)$ s.t. $f'(\xi)=0$

方法二：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上必有最大值 M，且 $f(\xi)=M$.

因为 $f(0)=0$, $f(1)=1$，所以 $f(x)$ 不是常数.

从而 $1=\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 M\,dx=M$.

故，$\xi\in(0,1)$，于是由 Fermat 定理得 $f'(\xi)=0$.

(2) 由 (1) 中的方法二可知 $f(\xi)=M>1$

将 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 点展开

$f(x)=f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)+\frac{1}{2}f''(c)(x-\xi)^2$

由 $f(0)=0$, $f'(\xi)=0$

$0=f(0)=f(\xi)+\frac{1}{2}f''(\eta)\xi^2$,　$\eta\in(0,\xi)$

$-2\,\frac{f''}{\xi^2} > +1$ <-2

从而 $f''(\eta) = \frac{-2f(\xi)}{\xi^2}$ <-2

<-2

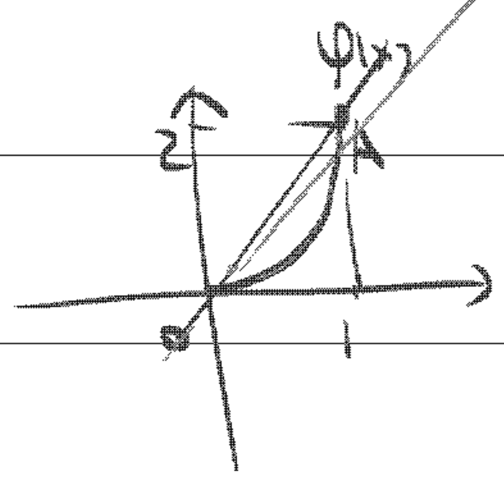
ξ^2

方法二：用反证法

假设 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f''(x)\geq -2$，即 $(f(x)+x^2)''\geq 0$

令 $\varphi(x)=f(x)+x^2$，则 $\varphi''(x)$ 在 $(0,1)$ 上是凹函数

且 $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=f(1)+1=2$



所以 $\varphi(x)\leq 2x$ $x\in(0,1)$

$\Rightarrow \int_0^1 \varphi(x)dx \leq \int_0^1 2x\,dx = 1$

$\Rightarrow \int_0^1 [f(x)+x^2]dx \leq 1$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 x^2dx \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3}\leq 1$ 矛盾

假设不成立，故，必 $\exists\eta\in(0,1)$ s.t. $f''(\eta)<-2$

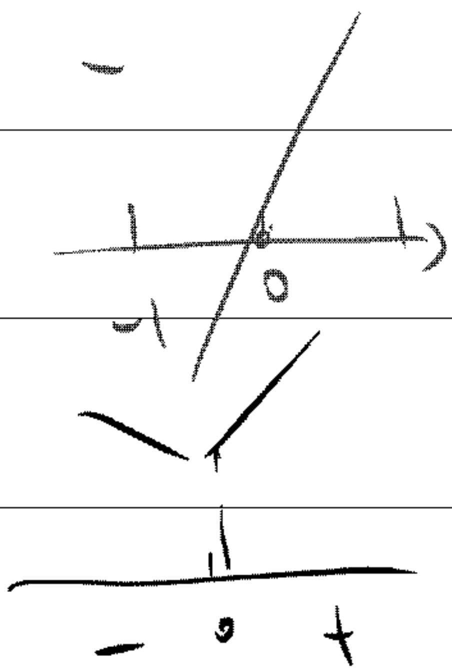
题型4 利用单调性证明不等式

[注] $f\geq 0\ (\leq 0) \Leftarrow f(x)$ 单调性 $\Leftarrow f'(x)$ 正负 $\Leftarrow f(x)$

[18|20] (1) $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x \geq 1+\frac{x^2}{2}$, $(-1<x<1)$

$f(x) = x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}$, $x\in(-1,1)$

$f'(x)\begin{cases}<0 & x<0 \\ =0 & x=0 \\ >0 & x>0\end{cases}$ $\cos x<0$ $[\xi, ?]$



令 $f'(x) = $ — ———　　　　$x\in(0,1)$

$f'(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} - \sin x - x$,　　$f(0)=0$

$\underline{f''(x)} = \frac{4}{(1-x^2)^2} - \cos x - 1 > 4 - (\cos x + 1) \geq 2$　　$f'(0)=0$

则 $f'(x)\begin{cases}<0 & x<0 \\ =0 & x=0 \\ >0 & x>0\end{cases}$

从而 $f(x) \geq f(0) = 0$，故 ---

方法三：　$f(x) = \underline{f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2}$

$= \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \geq \frac{1}{2}\cdot 2x^2 = x^2 \geq 0$

(2)　$0<a<b<\pi$　　$\underbrace{b\sin b + 2\cos b + \pi b}_{f(b)} > \underbrace{a\sin a + 2\cos a + \pi a}_{f(a)}$

分析：$f(x) = x\sin x + 2\cos x + \pi x$,　$x\in[a,b]$

(3)　$0<a<b$,　$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$

分析：$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$

$\Longleftrightarrow \ln b - \ln a < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$, $(b>a)$

$\Longleftrightarrow \ln x - \ln a < \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$, $(x>a)$

$$\Leftrightarrow \quad \ln x - \ln a - \frac{x-a}{\sqrt{ax}} < 0, \quad (x>a)$$

令 $\varphi(x) = \ln x - \ln a - \dfrac{x-a}{\sqrt{ax}}, \quad (x>a)$

题型5 积分不等式的证明

【例 21】设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^x f(t)dt \ge \int_a^x g(t)dt$，$x\in[a,b)$，$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b g(t)dt$。证明：$\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$。

积分的计算

分析：$\int_a^b x f(x)\,dx - \int_a^b x g(x)\,dx \le 0$ $\qquad (\int_a^x f(t)dt)'dx = f(x)dx$

$\Leftrightarrow \int_a^b x[f(x)-g(x)]\,dx \le 0$ $\qquad \int_a^b x\, d[\int_a^x f(t)dt]$

$$\int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b x\, d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = \left[x\int_a^x f(t)dt\right]\Big|_a^b - \int_a^b \left(\int_a^x f(t)dt\right)dx$$

$\int_a^b F(x)dx$

— — —

Pf: 令 $\int_a^x f(t)dt = F(x)$, $\int_a^x g(t)dt = G(x)$, $x\in[a,b]$

由条件可得 $F(x) \ge G(x)$, $x\in[a,b]$

且 $F(a) = G(a) = 0$, $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$

$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt \Leftrightarrow F(b) = G(b)$

$$\int_a^b xf(x)dx = \int_a^b xF'(x)dx = \int_a^b x\,dF(x) = xF(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)dx = bF(b) - \int_a^b F(x)dx$$

$$\int_a^b x g(x)dx = \int_a^b x G'(x)dx = \int_a^b x\, dG(x) = xG(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)dx$$

$$= bG(b) - \int_a^b G(x)dx$$

则 $\int_a^b xf(x)dx - \int_a^b xg(x)dx = \int_a^b G(x)dx - \int_a^b F(x)dx$

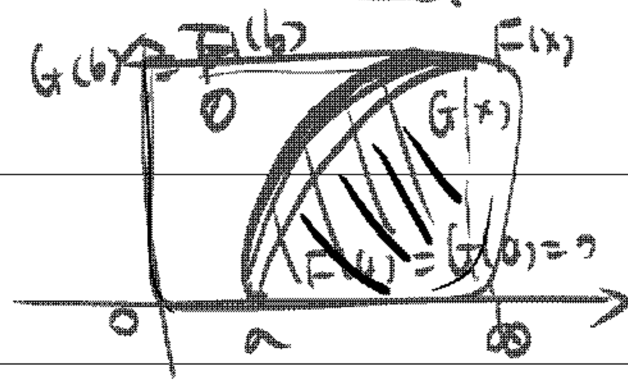
$$= \int_a^b [G(x) - F(x)]dx \le 0$$

故 $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx$.

[注] $\int_a^b xf(x)dx \le \int_a^b xg(x)dx \Leftrightarrow \int_a^b xF'(x)dx \le \int_a^b xG'(x)dx$

$\Leftrightarrow bF(b) - \int_a^b F(x)dx \le bG(b) - \int_a^b G(x)dx$

$S_1 < S_2$



【例 22】设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\ge 0$，$g'(x)\ge 0$。证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx \ge f(a)g(1)$。

方法一：

$$\int_0^a g(x)f'(x)dx = \int_0^a g(x)d[f(x)]$$

$$= g(x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)g'(x)dx$$

$$= f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)dx$$

则右 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx$

$$= f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)dx \qquad \ge f(a)g(1)$$

于是 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)$ $\qquad \underline{f(a)g(1) - f(a)g(a)}$

$$= f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)$$

$$= \int_a^1 f(x)g'(x)dx + \underline{f(a)[g(a)-g(1)]} \qquad \overset{?}{\geq} 0$$

$$= \int_a^1 f(x)g'(x)dx - \int_a^1 f(a)\cdot g'(x)dx \qquad \underline{g(a)-g(1)}$$

$$= \int_a^1 [\underline{f(x)-f(a)}]\underset{+}{g'(x)}dx \qquad = \underline{\int_a^1 g'(x)dx}$$

由于 $f'(x) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$

所以当 $a \leq x \leq 1$ 时, $f(x) - f(a) \geq 0$

从而 $[f(x)-f(a)]g'(x) \geq 0$

故 $\underline{\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)}$

$$= \int_a^1 [f(x)-f(a)]g'(x)dx \geq 0$$

所以 —— $\geq f(a)g(1)$. #

方法二：令 $\varphi(a) = \int_0^a g(x)f'(x)dx + \underline{\int_0^1 f(x)g'(x)dx} - f(a)g(1) \overset{?}{\geq} 0$, $a \in [0,1]$

求导得

$$\varphi'(a) = g(a)f'(a) - g(1)f'(a) = \underline{f'(a)}[g(a)-g(1)]$$

由于 $f'(a) \geq 0$, $g'(x) \geq 0$, 所以当 $a \in [0,1]$ 时, $g(a) - g(1) \leq 0$

从而 $\varphi'(a) = f'(a)[g(a)-g(1)] \leq 0$

则 $\varphi(a)$ 在 $a\in[0,1]$ 上单减

从而 $\varphi(a) \geq \varphi(1)$

即 $\int_0^a g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(a)g(1)$

$\geq \int_0^1 g(x)f'(x)dx + \int_0^1 f(x)g'(x)dx - f(1)g(1)$

$= \int_0^1 [f(x)g(x)]'dx - f(1)g(1)$

$= f(x)g(x)\Big|_0^1 - f(1)g(1)$

$= f(1)g(1) - f(1)g(1) = 0$

【例 25】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导数，求证：

$$\max_{[a,b]}|f(x)| \leq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

$= |f(x_0)|$

[注] ① $a\leq b$, $\int_a^b |f(x)|dx \geq \left|\int_a^b f(x)dx\right|$; ② N-L公式 $f(x_2)-f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx$

分析: $\max_{[a,b]}|f(x)| = |f(x_0)|$

$\boxed{b-a = \int_a^b 1dx}$

$(b-a)|f(x_0)| \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx$

$(b-a)$

$\int_a^b |f(x_0)|dx \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| + (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx$

$\left|\int_a^b f(x_0)dx\right| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx$

$||a|-|b|| \leq |a-b|$

$|A| - |B|$

$\left|\int^b [f(x_0) - f(x)]dx\right|$

$$\left|\int_a^b f(x_0)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x_0) - f(x)]dx\right|$$

$|a|-|b|$

$\le |a-b|$

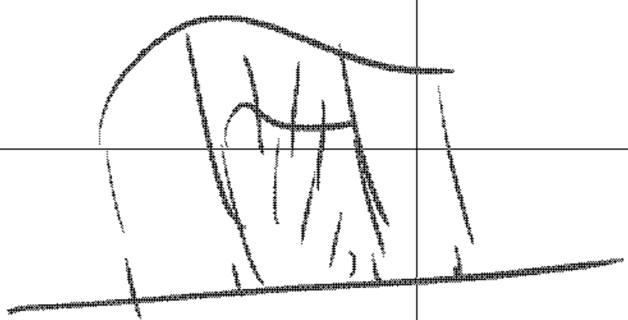
$$\int_a^b [\int_x^{x_0} f'(t)dt]dx$$

Pf: 设 $\max\limits_{[a,b]} |f(x)| = |f(x_0)|$ $\quad \le (b-a)$

因为 $\left|\int_a^b f(x_0)dx\right| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b [f(x_0)-f(x)]dx\right|$

又因为 $\left|\int_a^b [f(x_0)-f(x)]dx\right| \le \int_a^b [\int_x^{x_0} |f'(t)|dt]dx$

$(x, x_0) \subset (a,b)$



$$\le \int_a^b [\int_a^b |f'(t)|dt]dx$$

$$= (b-a)\cdot\int_a^b |f'(x)|dx$$

所以 $\left|\int_a^b f(x_0)dx\right| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx$

即 $(b-a)|f(x_0)| - \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le (b-a)\int_a^b |f'(x)|dx$

故, $\max\limits_{[a,b]} |f(x)| \le \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|dx$.

Cauchy不等式

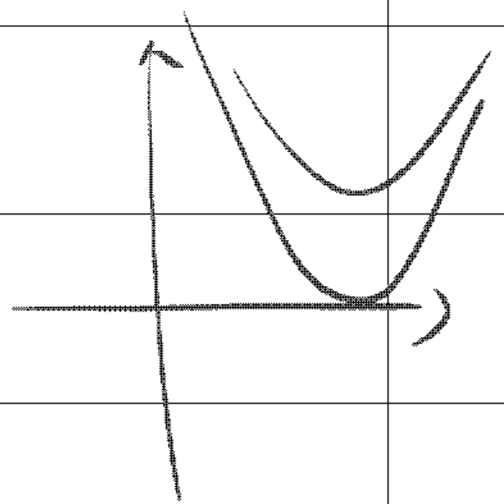
【例 23】设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

f^2 $\quad g^2$ $\quad f\cdot g$ $\quad (f+g)^2 = f^2+g^2+2fg$

$$\underbrace{[\int_a^b f\cdot g\,dx]^2}_{B} - \underbrace{(\int_a^b f^2dx)}_{A}\cdot\underbrace{(\int_a^b g^2dx)}_{C} \le 0$$

≤ 0



Pf: 设 $\varphi(t) = [f(x)+tg(x)]^2$

$$\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2 dx = \int_a^b f^2(x)dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)dx + t^2\int_a^b g^2(x)dx \geq 0$$

即 $\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]t^2 + \left[2\int_a^b f(x)g(x)dx\right]t + \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$, ($t\in R$)

则 判别式 $\Delta = \left[2\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 - 4\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \leq 0$

从而 $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$.

【例 24】设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且同为单调不减（或同为单调不增）函数，证明：

$x<y$ $\quad [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geq 0$

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b dy \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Pf: 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 单调性相同，则对 $\forall x, y$，有

$$[f(x)-f(y)]\cdot[g(x)-g(y)] \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left[\int_a^b [f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]dx\right]dy \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]dy + \int_a^b\left[\int_a^b f(y)g(y)dx\right]dy$$

$$\geq \int_a^b\left[\int_a^b f(x)g(y)dx\right]dy + \int_a^b\left[\int_a^b f(y)g(x)dx\right]dy$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b \underbrace{\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]dy}_{\phi} \geq 2\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(y)dy$$

$$\Rightarrow (b-a)\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

题型3 $f(x), f'(x), f^{(n)}(x)\ (n\geq 2)$ 的中值问题

[注] 1° 辅助函数的构造 ✓

2° 双中值问题

3° Rolle定理重复使用 ✓ $f'(\xi)=0$

4° 利用Fermat定理 证 $f'(\xi)=0$

5° 利用积分中值定理

6° 利用带Lagrange余项的Taylor定理证明高阶导中值问题

【例 11】设 $a>0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=0$，证明：

存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

分析: $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi) \Leftarrow f(x)=\dfrac{b-x}{a}f'(x)$

$\boxed{\dfrac{y'}{y}=(\ln y)'}$

$\Leftarrow f'(x)=\dfrac{a}{b-x}f(x)$

$\Leftarrow \dfrac{f'}{f}=\dfrac{a}{b-x}$

$\Leftarrow [\ln f(x)]' = -a\,[\ln(b-x)]'$

$\Leftarrow [\ln f(x) + a\ln(b-x)]' = 0$

$\Leftarrow [\ln f(x)\cdot(b-x)^a]' = 0$

$\Leftarrow \ln f(x)(b-x)^a = C_1$

$\Leftarrow \boxed{f(x)(b-x)^a} = e^{C_1} = C$

辅助函数

Pf: 作辅助函数 $F(x) = \underline{(b-x)^a f(x)}$, $x\in[a,b]$

…… $F(a) = F(b) = 0$

由Rolle定理, $\exists\, \xi\in(a,b)$ s.t. $F'(\xi)=0$

……

【例 12】设函数 $f(x)$，$g(x)$，在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$．证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$．

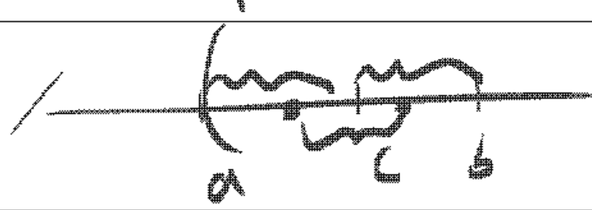
$f(\xi_1)-g(\xi_2)$

$M-M=0$

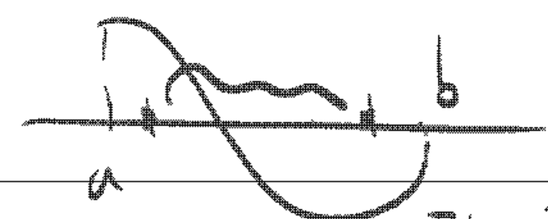
$f''(x)-g''(x)=0$ $\boxed{x=\xi}$

$F'=F'=0$

[注] 证 $F''(\xi)=0$, 先证 $F(a)=F(b)=F(c)$

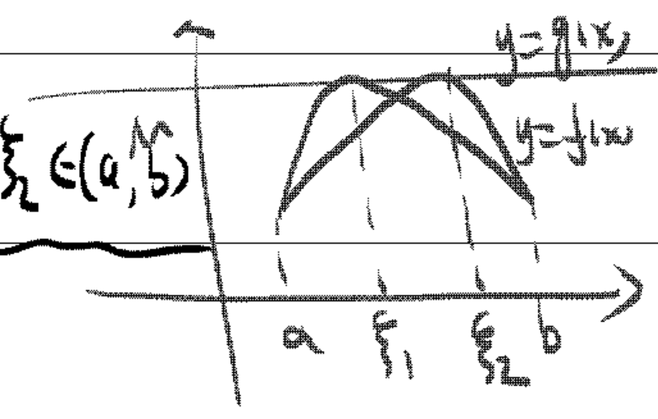


Pf: 设 $F(x)=f(x)-g(x)$



$F(a)F(b)<0$

不妨记 M 为 $f(x)$, $g(x)$ 的最大值.



且 $f(\xi_1)=M$, $g(\xi_2)=M$, $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$

① 若 $\xi_1=\xi_2$, 取 $\xi_1=c$, 则有

$F(c) = f(c) - g(c) = f(\xi_1) - g(\xi_2) = M - M = 0$

② 若 $\xi_1 \neq \xi_2$，$F(\xi_1) = f(\xi_1) - g(\xi_1) = M - g(\xi_1) \geq 0$

$F(\xi_2) = f(\xi_2) - g(\xi_2) = f(\xi_2) - M \leq 0$

不妨设 $\xi_1 < \xi_2$，由零点定理 $\exists c \in [\xi_1, \xi_2]$ s.t. $F(c) = 0$

综上，必有 $c \in (a,b)$ s.t. $F(c) = F(a) = F(b) = 0$

…… …… ……

【例 13】设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x)\mathrm{d}x (k>1)$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$。

$y' = (1-\frac{1}{x})y$

$\frac{dy}{y} = (1-\frac{1}{x})dx$

$\int \frac{1}{y}dy = \int (1-\frac{1}{x})dx$

$\ln|y| = x - \ln|x| + C_1$

$= \ln \frac{e^x}{|x|} + C_1$

$\ln|y| = \ln e^{C_1} \cdot \frac{e^x}{|x|}$

$y = \pm e^{C_1} \cdot \frac{e^x}{x}$

$x y \cdot e^{-x} = C$

【分析】① 辅助函数 $f'(x) = (1-\frac{1}{x})f(x)$

$\frac{f'}{f} = 1 - \frac{1}{x}$

$(\ln y)' = (x - \ln x)'$

$F(x) = xe^{-x}f(x)$

② 找 $F(x_1) = F(x_2)$

$F(0) = 0 \overset{F(\eta)}{=}$，$F(1) = \frac{1}{e}f(1) = F(\eta)$

$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x)dx \xlongequal{\text{积分中值定理}} k \cdot \frac{1}{k} \cdot \eta \cdot e^{1-\eta} f(\eta)$

$$\Rightarrow f(1) = \eta \cdot e^{1-\eta} f(\eta) \Rightarrow \underline{\eta \cdot e^{-\eta} f(\eta)} = e^{-1} f(1)$$

$$\Rightarrow F(\eta) = F(1)$$

【例 16】已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi \in (0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(1) $F(x) = f(x) + x - 1$，$F(0)=-1$，$F(1)=1$

用零点定理

(2) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$。

(2) $f'(\eta) = \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi} = \frac{f(\xi)}{\xi}$

$f'(\zeta) = \frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$

$= \frac{1-f(\xi)}{1-\xi}$

0 η ξ ζ 1

$f(\xi) = 1-\xi$

$\Longrightarrow f'(\eta) f'(\zeta) = 1$

【例 18】设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $b>a>0$。

证明：$\exists \xi,\ \eta \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \eta f'(\eta) \frac{\ln \frac{b}{a}}{b-a}$.

双中值

$\Downarrow$ 分类整理

$f'(\xi)$

a b

$f'(\eta)$

$$\begin{cases} L: & f'(\xi) \\ C: & \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \checkmark \end{cases}$$

$f'(\xi) = \eta f'(\eta) \cdot \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$

$\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}}$

ξ

$$\frac{f'(\eta)}{\frac{1}{\eta}} = \frac{f(b)-f(a)}{\ln b - \ln a}$$

C

$$\Rightarrow f(b)-f(a) = \eta f'(\eta)\cdot \ln\frac{b}{a}$$

L

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) \quad \cdots$$

$\Rightarrow \cdots$

ξ, η, τ

【例 17】设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$，

证明：$\exists \xi$，$\eta \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \boxed{\dfrac{e^b - e^a}{b-a}} e^{-\eta}$.

L；$g(x) = e^x$

$\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}$ → C：$\dfrac{f'}{g'}$

① $\boxed{\dfrac{f'(\eta)}{e^\eta}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{e^b - e^a}$

② $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$

$\Rightarrow \dfrac{f'(\eta)}{e^\eta} = \dfrac{f'(\xi)(b-a)}{e^b - e^a}$

【例 15】设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$。

若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

证 (1) $f'(x)>0 \xRightarrow{x\in(a,b)} f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ ∃ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a) = 0$

（1）在 (a,b) 内 $f(x)>0$。

中值问题

（2）在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx} = \dfrac{2\xi}{f(\xi)}$。

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(2x-a) = f(a)$

（3）在 (a,b) 内存在与(2)中点 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2) = \dfrac{2\xi}{\xi - a}\int_a^b f(x)dx$。 故 $f(a)=0$

从而 $f(x)>f(a)=0$, $x\in(a,b)$

(2) 令 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=x^2$

则 $F(x)$, $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导,

且 $F'(x)=f(x)>0$,

由 Cauchy …… ……

$\exists\, \xi\in(a,b)$ s.t. $\dfrac{G(b)-G(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{G'(\xi)}{F'(\xi)}$

即 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$

(3) 分析:

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\Longleftrightarrow \frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{(\xi-a)f'(\eta)}$$

$$\xLongleftrightarrow{\text{由(2)}} \frac{2\xi}{f'(\eta)(\xi-a)}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$$

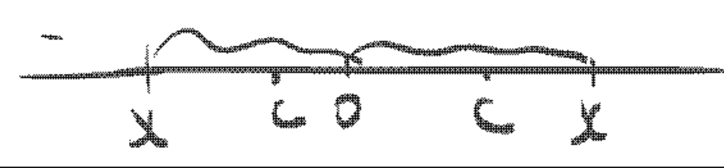
$$\Longleftrightarrow f'(\eta)(\xi-a)=f(\xi) \xLongleftrightarrow{f(a)=0} f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$$

$b-a$

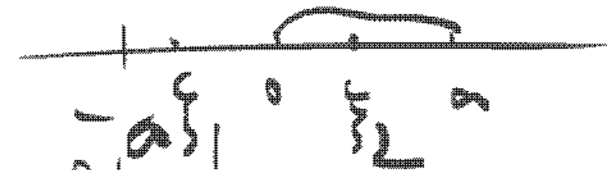
【例 19】设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数，证明：若 $f(0)=0$，则存在 $\xi\in(-a,a)$ 使得 $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$.

pf: 由带 Lagrange 余项的麦克劳林公式得

存在 c 介于 0 与 x 之间



使得



$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2 = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2$$

取 $x=-a$, $x=a$ 分别代入，得

$$f(-a) = \cancel{-af'(0)} + \frac{1}{2}f''(\xi_1)a^2 \quad \cdots ① \quad \xi_1\in(-a,0)$$

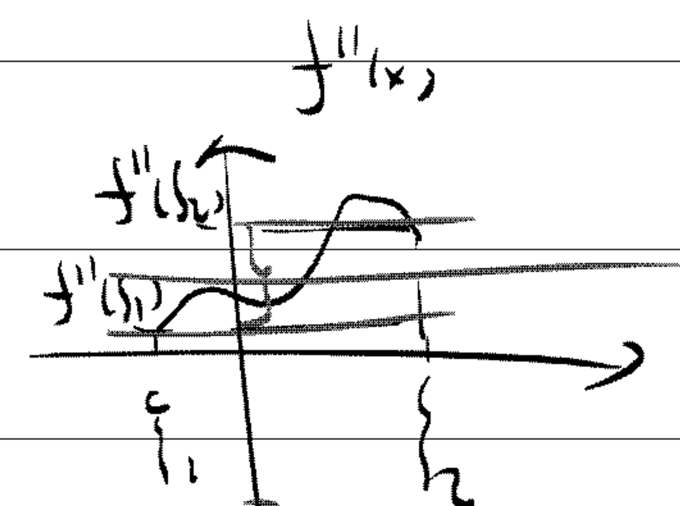
$$f(a) = \cancel{af'(0)} + \frac{1}{2}f''(\xi_2)a^2 \quad \cdots ② \quad \xi_2\in(0,a)$$

由①,② $\Rightarrow$ $$\frac{f(a)+f(-a)}{a^2} = \frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$$

$f''(\xi)$

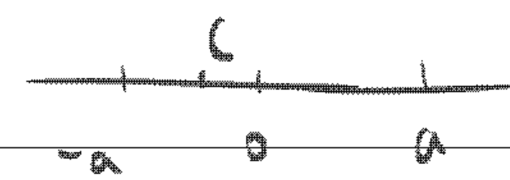
因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，

所以由介值定理，



$\exists\, \xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-a,a)$

s.t. $$\frac{1}{2}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)] = f''(\xi) = \frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$$ #



提示 $\begin{cases} \text{方法二: } \varphi(x) = f(x+a) - f(x) \\ \text{方法三: } F(x) = f(x) - 2f(\frac{x-a}{2}) + f(-a) \end{cases}$

$\varphi'(c) = \dots$

$\Rightarrow f'(c+a) - f'(c) = \cdots$

$\Downarrow$

$f''(\xi) = \cdots$

$$G(x) = \frac{(x+a)^2}{4}$$ 用 Cachy

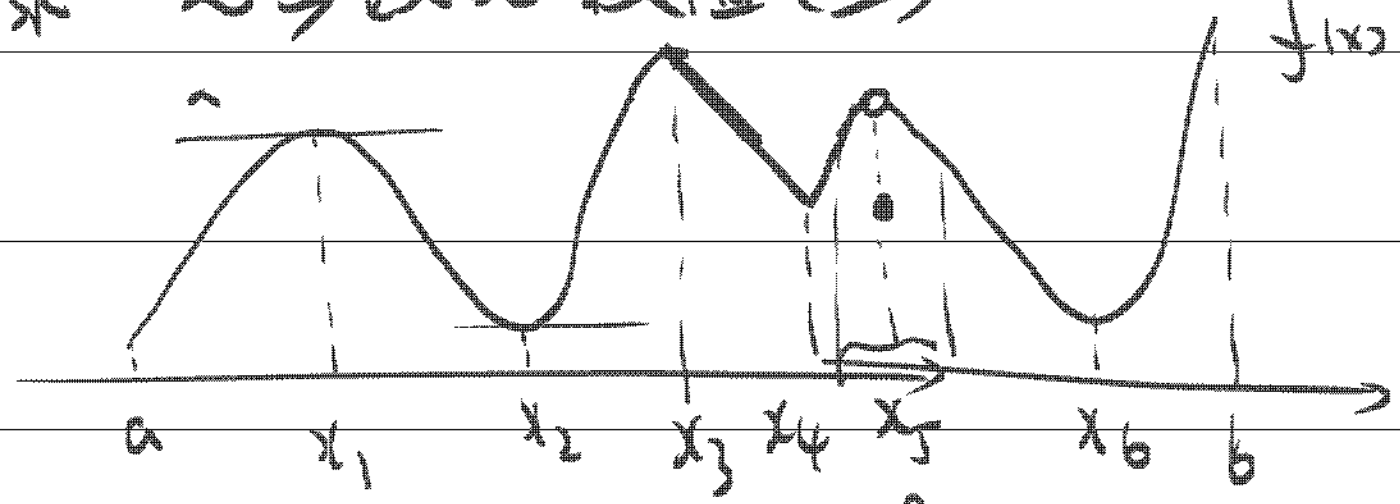
$\longrightarrow$ 再 Lagrange

§2. 函数的极值点与极值

题型6 求一元函数的极值(点)

[注]

1° 定义



$\forall x \in \mathring{U}(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$ $(< f(x_0))$

2° 条件

① 必要：当 $f'(x_0)$ 存在时，$f(x_0)$ 为极值 $\Rightarrow$ $f'(x_0)=0$

即 x_0 为驻点

② 充分

第一：$f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内可导，在 x_0 点连续

$f'(x)\begin{cases} >0\ (<0) & x<x_0 \\ <0\ (>0) & x>x_0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ x_0 为极值点

第二：$f'(x_0)=0$，$f''(x_0) > 0\ (<0)$

$\Rightarrow$ $f(x_0)$ 为极小值(极大值)

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_n(x)$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_n(x) \begin{cases} >0 \\ <0 \end{cases}$$

[注] 判定极值点步骤

step1 找点 $\begin{cases} \text{不可导点} \times \\ \text{驻点} \checkmark \end{cases}$ step2 用充分条件判定

【例26】求函数 $f(x)=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的单调区间。

【例27】解答下列关于函数极值、极值点的问题：

（1）设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导且 $f(x_0)=g(x_0)=0$，$f'(x_0)g'(x_0)<0$，判定 x_0 是函数 $f(x)g(x)$ 的极大值点？说明理由。

记 $F(x)=f(x)g(x)$ $\quad F(x)-F(x_0)>0\ (<0)$

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}<0\ (>0)$

$g'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{x-x_0}>0\ (<0)$

$\Longrightarrow$ $x\to x_0$时，$\frac{f(x)g(x)}{(x-x_0)^2}<0 \Rightarrow$ $x\to x_0$时 $f(x)g(x)<0$

$\Rightarrow F(x)<0=F(x_0)$

$\Longrightarrow$ x_0为 $F(x)=f(x)g(x)$ 的极大点 $x\in \mathring{U}(x_0)$

（2）设 $f(x)=e^{\sin x}+e^{\cos x}$，证明：函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在惟一的极值点。

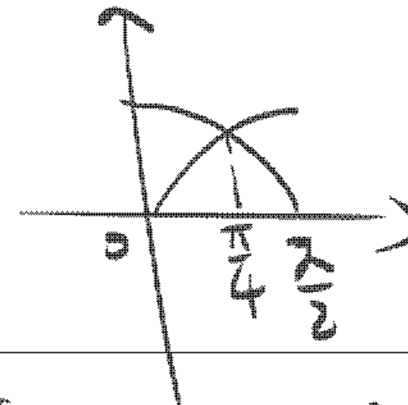
Pf: 求导得 $f'(x)=\boxed{e^{\sin x}\cos x-e^{\cos x}\sin x=0}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}$为解

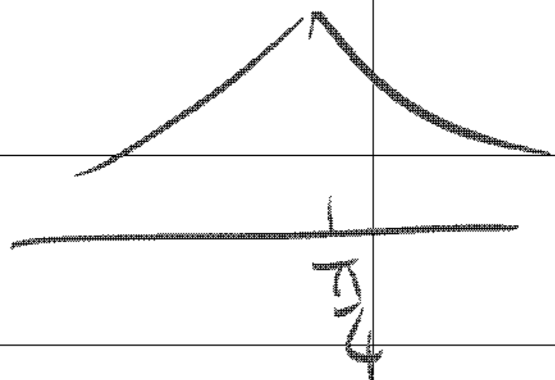
令 $g(t)=\frac{e^t}{t}$ $\quad t\in(0,1)$

$g'(t)=\frac{e^t}{t^2}(t-1)<0$

$g(t)$ 在 $(0,1)$ 上递减



当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时, $\sin x<\cos x \Rightarrow \frac{e^{\sin x}}{\sin x} > \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$



$\Rightarrow f'(x) = \underline{e^{\sin x}\cos x - e^{\cos x}\sin x} > 0$

当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ $\cos x<\sin x \Rightarrow \frac{e^{\sin x}}{\sin x} < \frac{e^{\cos x}}{\cos x} \Rightarrow e^{\sin x}\cos x - e^{\cos x}\sin x = f'(x) < 0$

故, $x=\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的唯一的极值点。

（3）已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=1$，试判定 $x=0$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由。

$\to 0$ $x \to 0$

解) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f'(x)}{x}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f'(x)]=0$

$f(0)=0$, $f'(x)$ 连续 ...

$\Longrightarrow f'(0)=0$

$\Rightarrow f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} = 1-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$

$= 1-f'(0) = 1 > 0$

$\Longrightarrow x=0$ 为极小点.

（4）设 $f(x)=2\cos x+e^{x}+e^{-x}$，试判定 $x=0$ 是否为函数 $f(x)$ 的极值点，并说明理由。

分析: $f'(x) = \underline{-2\sin x + e^{x} - e^{-x}} \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow x=0$ 为驻点

$$f''(x) = -2\cos x + e^{x} + e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 2\sin x + e^{x} - e^{-x}, \quad f^{(4)}(x) = 2\cos x + e^{x} + e^{-x}$$

$$f'''(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 4$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) = \frac{1}{3!}x^4 + o(x^4) > 0$$

$\Rightarrow f(0)$ 为极小值

[注] 极值点 第二充分性的推广形式：

若 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$

则 ① 当 n 为奇数时，x_0 不是极值点

② 当 n 为偶数时，x_0 必为极值点.

【例 28】已知可导函数 $y = y(x)$ 满足 $ae^{x} + y^2 + y - \ln(1+x)\cos y + b = 0$，且 $y(0) = 0$，$y'(0) = 0$.

(I) 求 a, b (II) $x=0$ 是否为极值点

分析：(I) 由 $y(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0$.

由 $y'(0) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$ 故 $a = 1$, $b = -1$

(II) 求导两次可得

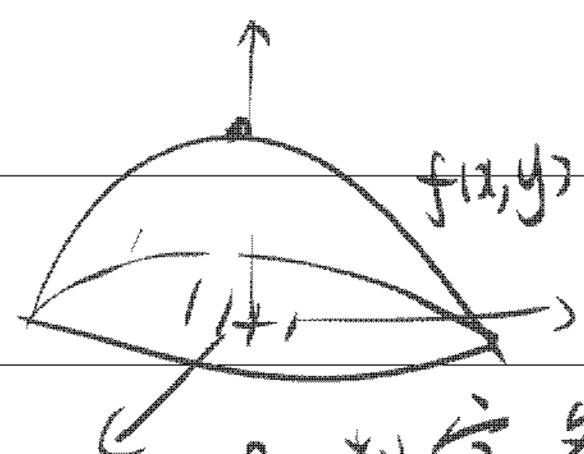
$$e^x+2(y')^2+2yy''+y''+y''\ln(1+x)\cdot\sin y+\frac{y'\sin y}{1+x}+(y')^2\ln(1+x)\cos y+\frac{\cos y}{(1+x)^2}+\frac{y'\sin y}{1+x}=0$$

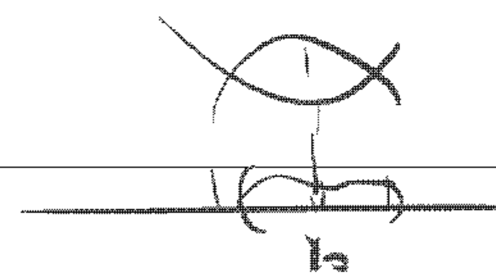
将 $x=0,\ y=0,\ y'=0$ 代入 得 $y''(0)=-2$

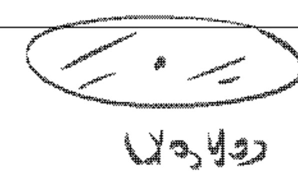
题型7 求多元函数的极值(点)

[注] 1° 定义 $\forall P\in \mathring{U}(P_0)$ $f(P)>f(P_0)$ $(<f(P_0))$

$\Rightarrow$ P_0 为 $f(x,y)$ 的极小点(极大点)







2° 判定条件

① 必要条件: $f'_x(x_0,y_0)$, $f'_y(x_0,y_0)$ 都存在, 且 (x_0,y_0) 为极值点 $\Longrightarrow$ $f'_x(x_0,y_0)=0$ 且 $f'_y(x_0,y_0)=0$

(x_0,y_0) 称为驻点

② 充分条件: 设 (x_0,y_0) 是驻点, $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0,y_0)=B$, $f''_{yy}(x_0,y_0)=C$

i) $\Delta=AC-B^2>0$, $A>0$ $\Rightarrow$ (x_0,y_0) 是极小点

ii) $\Delta=AC-B^2>0$, $A<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ 是极大点.

iii) $\Delta=AC-B^2<0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ 不是极值点.

【例 30】设函数 $f(x),g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0)>0,g(0)<0$，且 $f'(0)=g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）

(A) $f''(0)<0,g''(0)>0$ (B) $f''(0)<0,g''(0)<0$

(C) $f''(0)>0,g''(0)>0$ (D) $f''(0)>0,g''(0)<0$

分析: ① 求 $A,B,C \Rightarrow \Delta=AC-B^2$

② 当 $\Delta>0$ 且 $A>0$ 时 $\Rightarrow (0,0)$ 为极小点.

解) $A=f''(0)g(0)$.

$B=f'(0)g'(0)=0$

$C=f(0)g''(0)$.

$(0,0)$ 点为极小点的充分条件是 $\begin{cases} A>0 \\ AC-B^2>0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} f''(0)g(0)>0 \\ g(0)f(0)g''(0)f''(0)>0 \end{cases}$

又 $f(0)>0$, $g(0)<0$, 故, $f''(0)<0$, $g''(0)>0$ 选 (A).

【例 29】求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

[解] step1 求驻点 $(0,0)$、$(1,1)$、$(\frac{2}{3}, \frac{10}{27})$

step2 求 A、B、C

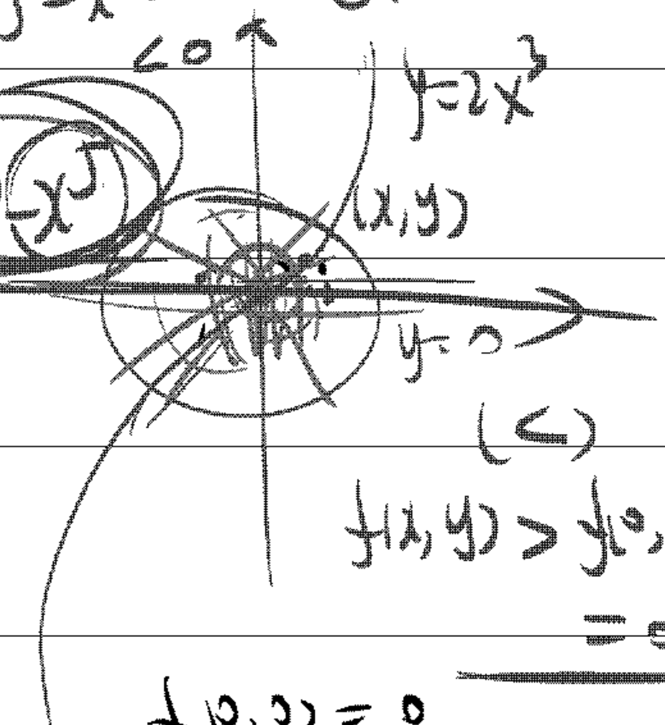
$f''_{xx} = 20x^3 - 2y - 6xy$, $f''_{xy} = -2x - 3x^2$, $f''_{yy} = 2$

① 当 $x = y = 0$ 时, $AC - B^2 = 0$ → 转为用定义法

$f(x,y) = \boxed{(y - x^2)(y - x^3)}$ $f = -x^5 > 0$, < 0 0.001

取 $y = 2x^3$

$(2x^3 - x^2)x^3 = 2x^6 - x^5$



$x > 0$, $f(x,y) < 0 = f(0,0)$

$x < 0$, $f(x,y) > 0 = f(0,0)$

故 $(0,0)$ 不是极值点

$f(0,0) = 0$

$f(x,y) \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$

② $x = 1$, $y = 1$ 时, $AC - B^2 = -1 < 0$

③ $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{10}{27}$, $AC - B^2 = \frac{8}{27} > 0$, $A = \frac{100}{27} > 0$

$f(\frac{2}{3}, \frac{10}{27}) = -\frac{4}{729}$ 极小值.

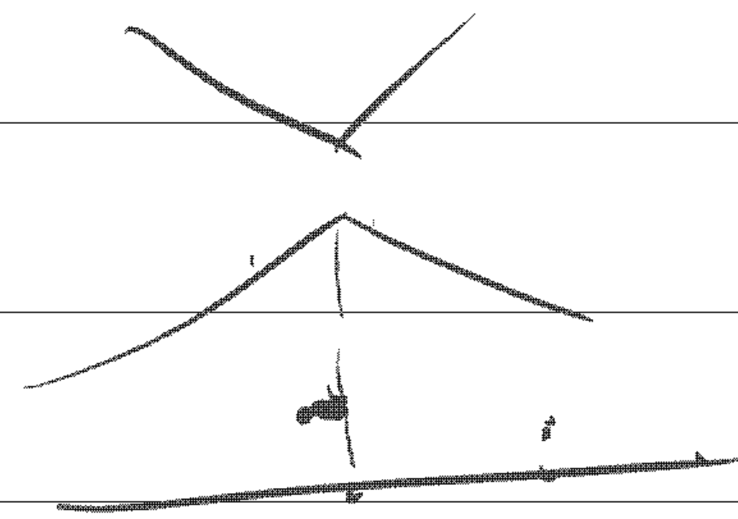
【例 31】已知函数 $z = z(x,y)$ 由方程 $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$ 确定，求 $z = z(x,y)$ 的极值。

驻点 $(-1,-1)$, $z = 1$

$A=-\frac{2}{3}$, $B=0$, $C=-\frac{2}{3}$

$AC-B^2=\frac{4}{9}>0$, $z=z(-1,-1)=1$ 为极大值。

§3. 函数的最值



题型8 求一元函数的最值

[注] 1° 在 $[a,b]$ 上求最值

step1 找点 $\begin{cases} \text{驻点} \\ \text{不可导点} \\ x=a,\ x=b \end{cases}$ step2 比函数值大小

2° 在 (a,b) 内求最值

step1 找点 $\begin{cases} \text{驻点 } x_1, x_2 \cdots \\ \text{不可导点} \end{cases}$ step2 比大小 $f(x_1), f(x_2) \cdots$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

【例 32】求下列函数的最值:

(1) $f(x)=x^p+(1-x)^p$, $x\in[0,1]$, $(p>1)$

分析: 求导 $f'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}$, $(0<x<1)$

由 $f'(x)=0 \Rightarrow x^{p-1}=(1-x)^{p-1} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 是唯一驻点 $x^{p-1}=(1-x)^{p-1}$

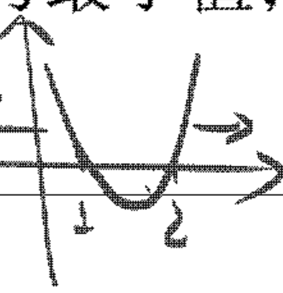
$f(0)=1$, $f(1)=1$, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$ $\quad (\frac{x}{1-x})^{p-1}=1$

$\frac{x}{1-x}=1$

$f_{max}=1$, $f_{min}=\frac{1}{2^{p-1}}$ $\quad x=\frac{1}{2}$

（2）求函数 $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ 在 $[-3,4]$ 上的最大值与最小值；

x^2-3x+2



分析: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2, & -3\le x\le 1 \text{ or } 2\le x\le 4 \\ -x^2+3x-2, & 1<x<2 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x-3, & -3<x<1 \text{ or } 2<x<4 \\ -2x+3, & 1<x<2 \end{cases}$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ 是驻点

比较: $f(-3)=20$, $f(1)=0$, $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{4}$, $f(2)=0$, $f(4)=6$

$f_{max}=20$, $f_{min}=0$

（3）$f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}, x\in(0,1]$；

分析: $f'(x)=\dfrac{-x^2+(1+x)\ln^2(1+x)}{x^2(1+x)\cdot\ln^2(1+x)}$

记 $\varphi(x)=-x^2+(1+x)\ln^2(1+x)$, $\varphi(0)=0$

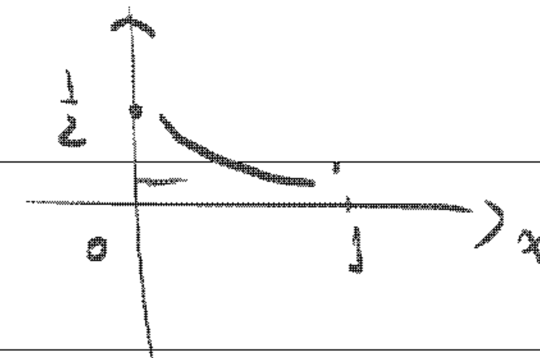
$\varphi'(x)=-2x+\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)$ $\quad \varphi'(0)=0$

$$\varphi''(x) = -2 + \frac{2\ln(1+x)}{1+x} + \frac{2}{1+x} = 2\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{1+x} < 0.$$

由 $\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)x^2$

$$= \frac{1}{2}\varphi''(\xi)x^2 < 0 \quad 可得 \quad f'(x) < 0$$

从而 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上递减



并且 $f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2}$$

故 $\frac{1}{\ln 2} - 1 \le f(x) < \frac{1}{2}$

（4）设 $a>0$，求函数 $f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$ 的最值。

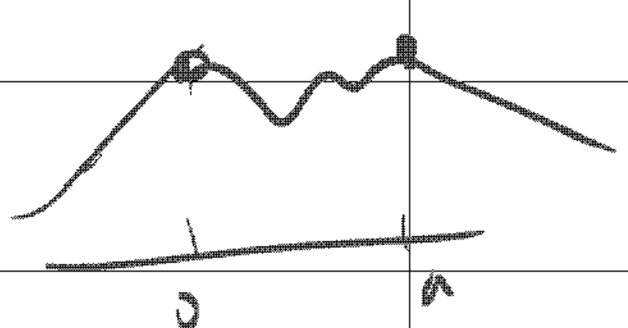
$1+\frac{1}{1+a}$

$x\in(-\infty,+\infty)$

【分析】

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+a-x}, & x\le 0 \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+a-x}, & 0\le x\le a \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x-a} & x\ge a \end{cases}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+a-x)^2}, & x<0 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+a-x)^2}, & 0<x<a \\ -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(1+x-a)^2}, & x>a \end{cases}$$



$\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递增，在 $(a,+\infty)$ 上递减.

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的最大值为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值

由 $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} + \dfrac{1}{(1+a-x)^2} = 0 \qquad x\in[0,a]$

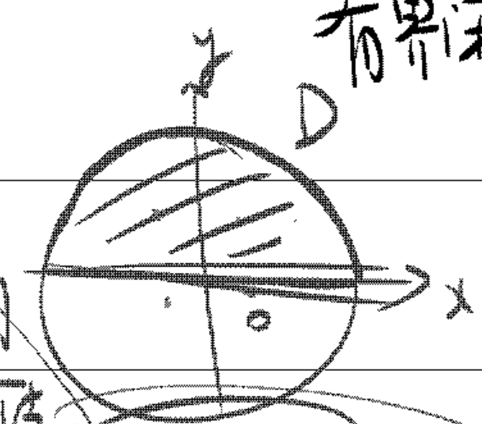
$\Rightarrow \quad (1+a-x)^2 - (1+x)^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

$f\left(\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{4}{2+a}, \quad f(0) = f(a) = \dfrac{2+a}{1+a}$

由 $f\left(\dfrac{a}{2}\right) < f(0) \Rightarrow \underline{\underline{f_{max}}} = \dfrac{2+a}{1+a}$

题型9 求多元函数的最值.

【例 34】求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid \underbrace{x^2+y^2\le 4, y\ge 0}_{\text{有界闭区域}}\}$ 上的最大值和最小值。



分析: 有界闭区域 D $\begin{cases} ① \text{ 内部：找驻点} \\ ② \text{ 边界上} \begin{cases} \text{i) 拉格朗日} \\ \text{ii) 参数法} \quad x^2+y^2=4,\ y\ge 0 \\ \text{iii) 边界方程代入法} \quad y=0,\ -2\le x\le 2 \end{cases} \end{cases}$

【解】 先求 $f(x,y)$ 在 D 内的驻点

令 $\begin{cases} f'_x = 2x-2xy^2=0 \\ f'_y = 4y-2x^2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-y^2)=0 \\ y(2-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow$ 驻点为

$(-\sqrt{2},1)$ 及 $(\sqrt{2},1)$

$f(-\sqrt{2},1) = f(\sqrt{2},1) = 2$

再求边界上的所有可能的最值点

① 在边界 $y=0, (-2\le x\le 2)$ 上，$f(x,0) = x^2 \in [0,4]$

② 在边界 $x^2+y^2=4, (0<y\le 2)$

作 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda) = x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$

因式分解

$(\ )(\ )=0$

令
$$\begin{cases} L'_x = 2x-2xy^2+2\lambda x=0 \\ L'_y = 4y-2x^2y+2\lambda y=0 \\ L'_\lambda = x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+\lambda-y^2)=0 \\ y(2+\lambda-x^2)=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

当 $x=0$ 时，$y=2, \lambda=-2$

当 $x\neq 0$ 时，
$$\begin{cases} 1+\lambda-y^2=0 \\ 2+\lambda-x^2=0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \Rightarrow 3+2\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, y=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

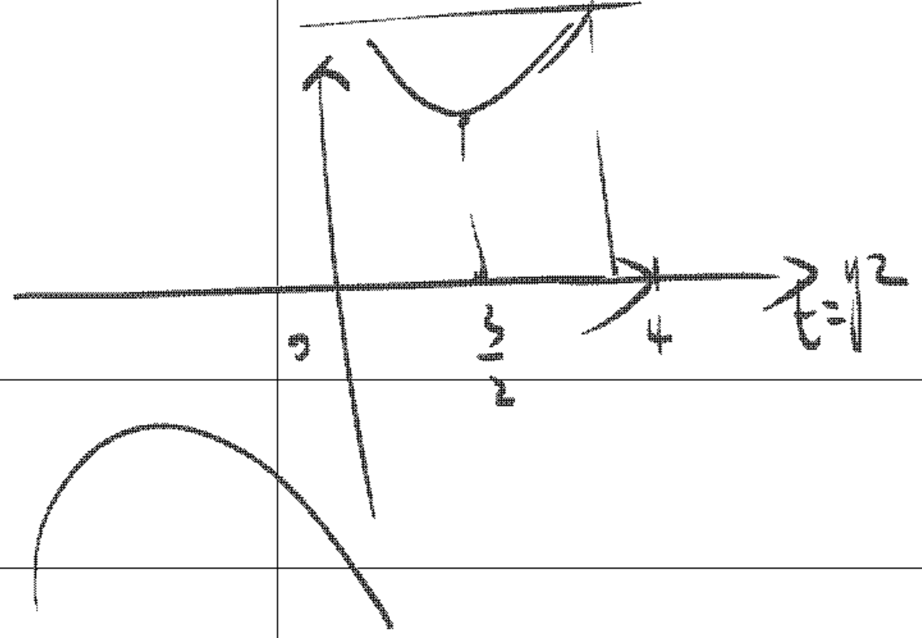
$f(0,2)=8$，$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{5}{2}+2\cdot\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{7}{4}$

综上，$f(x,y)$ 在 D 上的最小值为 $f(0,0)=0$，最大值为 $f(0,2)=8$.

[注] $f(x,y)$ 在边界 $x^2+y^2=4\ (0<y\le 2)$ 上的最值的求法不唯一.

由 $x^2+y^2=4 \Rightarrow x^2 = 4-y^2\ (0<y\le 2)$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2+2y^2-x^2y^2$

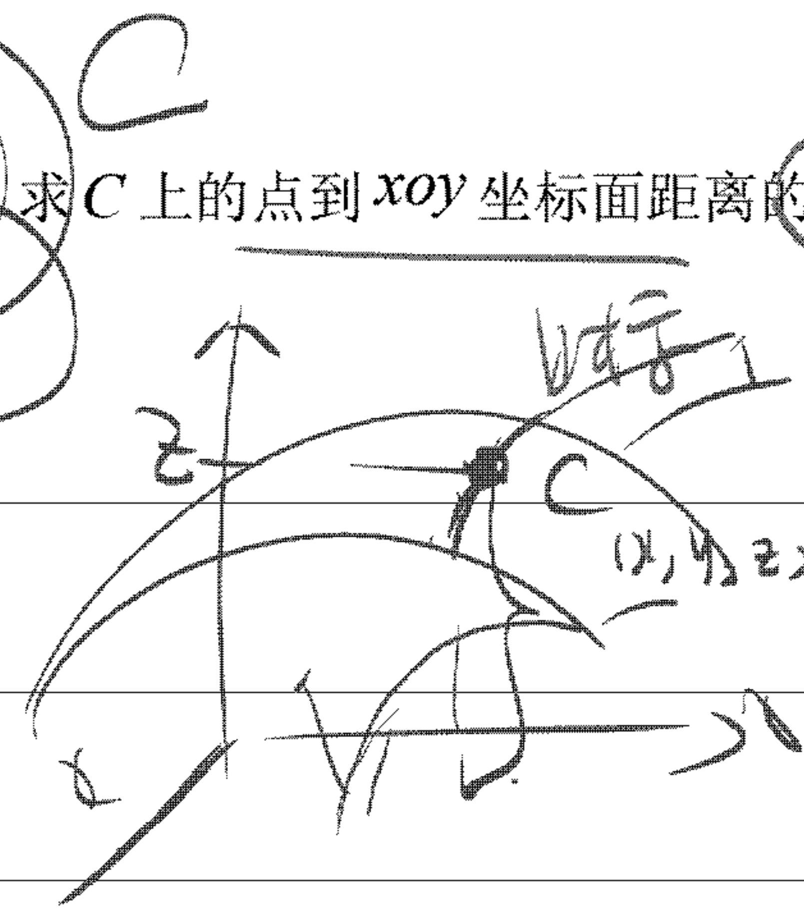


$$= (4-y^2) + 2y^2 - (4-y^2)y^2$$

$$= y^4 - 3y^2 + 4 = \left(y^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow f(0, \pm 2) = 8, \quad f\left(\pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{7}{4}$$

【例 33】已知曲线 $C:\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z = 6 \\ 4x + 2y + z = 30 \end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值。



【解】 C上点P(x,y,z)到xoy面的距离 $d = |z| = \sqrt{z^2}$

问题转化为 在条件

$$\begin{cases} x^2+2y^2-z-6=0, \\ 4x+2y+z-30=0 \end{cases}$$

下 目标函数 $d^2 = z^2$ 的最大值.

方法一：用 Lagrange 乘数法

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu) = z^2 + \lambda(x^2+2y^2-z-6) + \mu(4x+2y+z-30)$

由 $\begin{cases} L'_x = 2\lambda x + 4\mu = 0 & ① \\ L'_y = 4\lambda y + 2\mu = 0 & ② \\ L'_z = 2z - \lambda + \mu = 0 & ③ \\ L'_\lambda = x^2+2y^2-z-6 = 0 & ④ \\ L'_\mu = 4x+2y+z-30 = 0 & ⑤ \end{cases}$

由 ①, ② $\Rightarrow \begin{cases} \lambda x = -2\mu \\ \lambda y = -\frac{1}{2}\mu \end{cases}$

i) 若 $\lambda = 0$, 则 $\mu = 0$, 由 ③ $\Rightarrow z = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+2y^2=6 \\ 4x+2y=30 \end{cases}$ $y = 15-2x$

$\Rightarrow 3x^2 - 40x + 148 = 0 \Rightarrow$ 无解

ii) 若 $\lambda \neq 0$, 则 $\begin{cases} x = -\dfrac{2\mu}{\lambda} \\ y = -\dfrac{\mu}{2\lambda} \end{cases} \Rightarrow x = 4y$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 18y^2 = z+6 \\ 18y = 30 - z \end{cases} \Rightarrow 18y^2 + 18y = 36$$

$$\Rightarrow y = 1,\ z = 12 \text{ or } y = -2,\ z = 66$$

故, $d_{max} = |z| = 66$.

方法二: 由 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2y^2 = 6+z & ① \\ 4x+2y = 30-z & ② \end{cases}$

由② $\Rightarrow y = \dfrac{30-z}{2} - 2x$ 代入 ①

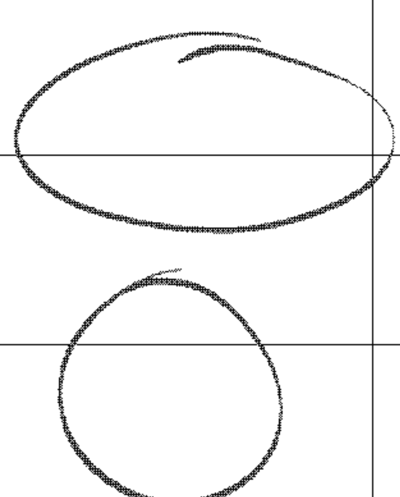
$$\Rightarrow x^2 + 2\left[\left(15 - \tfrac{1}{2}z\right) - 2x\right]^2 = 6+z$$

$$\Rightarrow 9x^2 - (120-4z)x + \left(\frac{z^2}{2} - 31z + 444\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \Delta = (120-4z)^2 - 36\left(\frac{z^2}{2} - 31z + 444\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow (z-12)(z-66) \leq 0 \Rightarrow 12 \leq z \leq 66 \Rightarrow d_{max} = 66$$

方法三: 由 $\begin{cases} x^2+2y^2-z=6 \\ 4x+2y+z=30 \end{cases} \Rightarrow x^2+2y^2+4x+2y=36$



$$\Longrightarrow (x+2)^2 + 2\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{2}$$

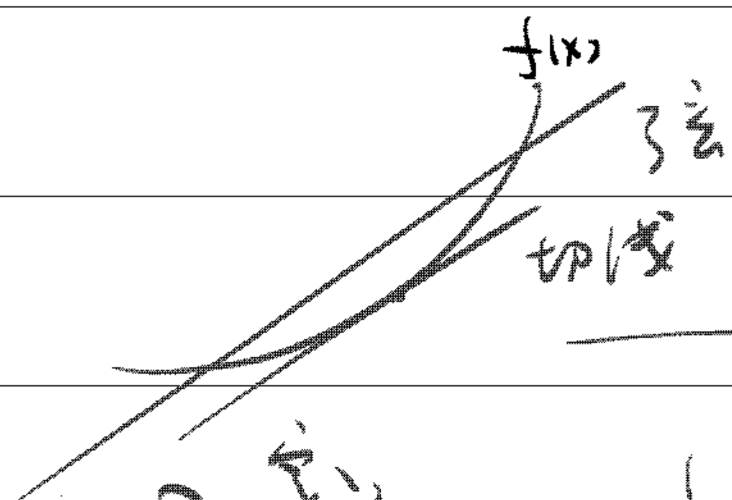
令 $\begin{cases} x+2 = \dfrac{9}{\sqrt{2}}\cos t \\ y+\frac{1}{2} = \dfrac{9}{2}\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ 代入 $4x+2y+z=30$

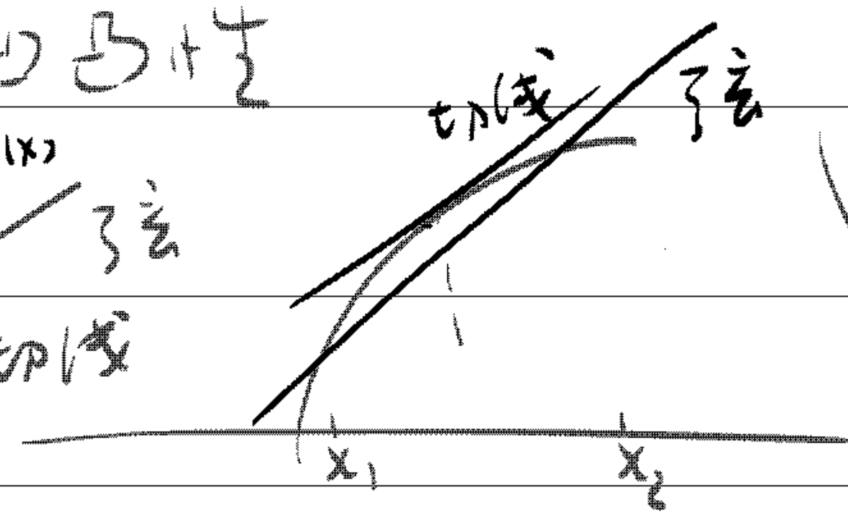
$$\Rightarrow \quad z = 39 - 18\sqrt{2}\cos t - 9\sin t$$

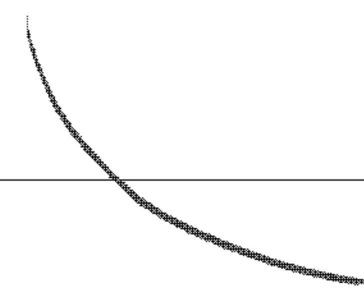
$$\Rightarrow z = 39 - 27\sin(t+\varphi) \Rightarrow 12 \le z \le 66$$

§4.1 曲线的凹凸性与拐点

[注] 1° 凹凸性



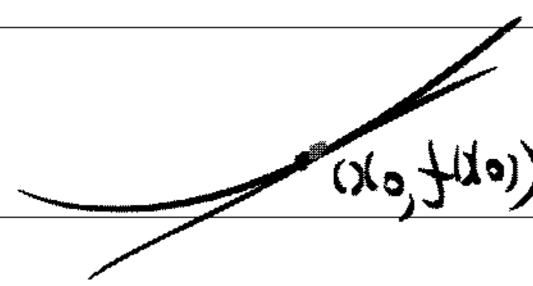




① 定义 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$ 凸

$<$ 凹

② 位置关系



$y=f(x)$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

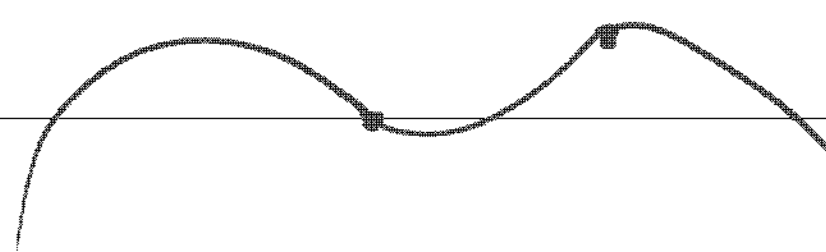
$f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

③ 判定定理 $f''(x)>0,\ x\in I \Rightarrow f(x)$在$I$上是凹的

$f''(x)<0,\ x\in I \Rightarrow$ ——— 凸的

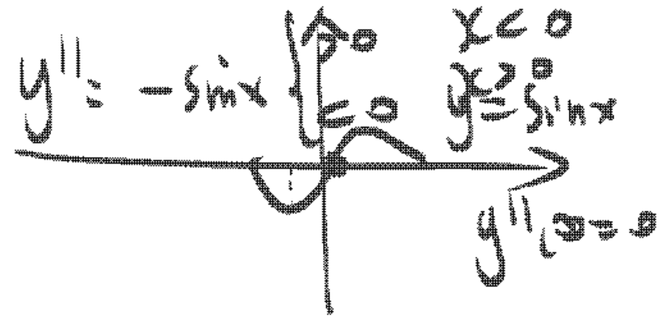
2° 拐点

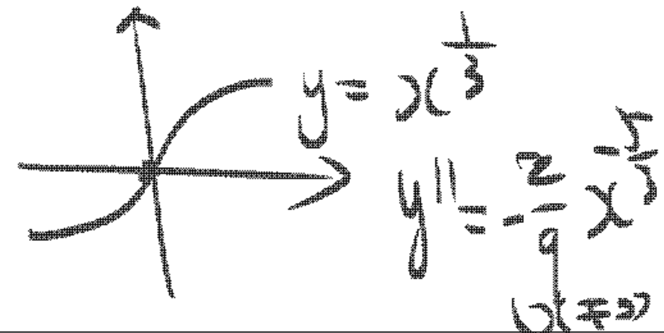
① 定义



若$f(x)$在x_0处连续，在x_0两侧凹凸性相反，则$(x_0,f(x_0))$为拐点.

② 判定条件





i) 必要条件：设 $f''(x_0)$ 存在，且 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点 $\Rightarrow f''(x_0)=0$

ii) 充分条件

- 第一充分性：设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 $\mathring{U}(x_0)$ 内二阶可导，若 $f''(x)\begin{cases}>0(<0) & x<x_0\\ <0(>0) & x>x_0\end{cases}$，则 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点
- 第二充分性：$f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$ $\Longrightarrow (x_0, f(x_0))$ 是拐点

题型9 函数凹凸性的判定

【例 35】设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（ ）

$\Leftrightarrow g(x) = (f(1)-f(0))x+f(0)$

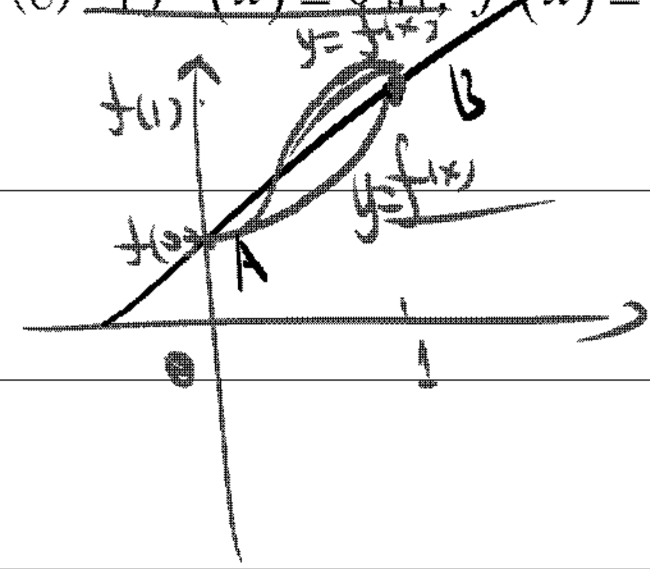
(A) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

(B) 当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

$\Leftrightarrow g(x)-f(0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}(x-0)$

(C) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

(D) 当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

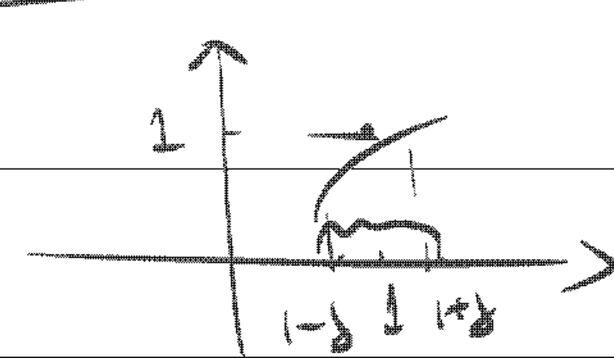


【例 36】求函数 $y=f(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性。

$y''<0$ (>0)

邻域

分析：求 $y''(1)=-\frac{1}{8}<0$



$y''(x)$ 连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} y''(x) = -\frac{1}{8} < 0$

$\Longrightarrow \underbrace{x \in \mathring{U}(1,\delta)}_{附近}$ 时，$y''(x) < 0$

题型10 曲线拐点的条件

【例 37】若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b =$ ___3___。

$$\begin{cases} y''(-1) = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

【例 38】在满足以下条件的函数中，点 $(0, f(0))$ 不是拐点的有几个（ ）

$f'''(x)$ 连续

① 设 $\delta > 0$，$f(x)$ 在 $(-\delta, \delta)$ 有连续的三阶导数，$f'(0) = f''(0) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'''(x)}{|x|} = 2$；

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f'''(x) = 0 = f'''(0) \\ x \in \mathring{U}(0), \quad f'''(x) > 0 \Rightarrow f''(x) \uparrow \Rightarrow f''(x) \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ = 0 & x = 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\Rightarrow (0, f(0))$ 是拐点

② $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有三阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x^2} = 1$；

③ $f(x)$ 在 $x = 0$ 的邻域二阶可导且 $f'(0) = 0$，$\left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right) f''(x) - xf'(x) = e^x - 1$.

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3

② $f'(0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{f'(x) - f'(0)}{x}}{x} = 1 \Rightarrow f''(0) = 0$

$\Rightarrow 1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}$

$= \frac{1}{2} f'''(0)$

$\Rightarrow f'''(0) = 2 \neq 0 \Rightarrow (0, f(0))$ 是拐点

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + o(x^3)$

$$= f(0) + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \Rightarrow f(x) - f(0) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

③ $f'(0)=0$,

$$f''(x) = \frac{e^x - 1 + x f'(x)}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} f''(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+xf'(x)}{\frac{1}{3}x} = 3 + \lim_{x\to 0} 3f'(x)$$
$$= 3 = f''(0)$$

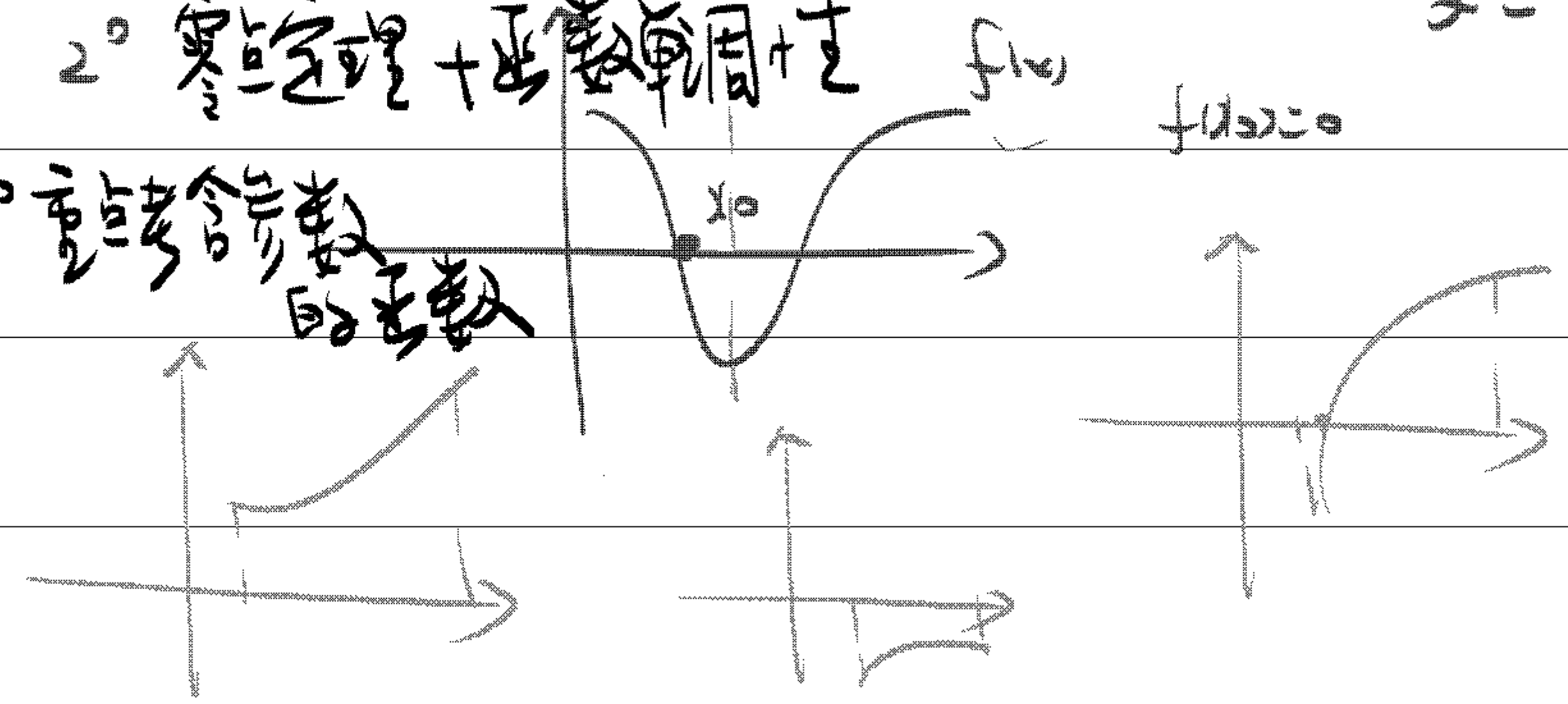
不是拐点

§5. 函数的零点或方程根的讨论

注 1° 函数 $f(x)$ 的零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $f(x)=0$ 的根 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点横坐标

2° 零点定理 + 函数单调性

3° 重点考含参数的函数

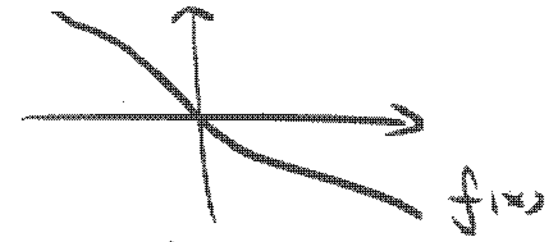


题型11 讨论函数零点的个数或方程根的个数

【例 39】求方程 $k\arctan x - x = 0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数。

【解】令 $f(x) = k\arctan x - x$

$$f'(x)=\frac{(k-1)-x^2}{1+x^2}$$



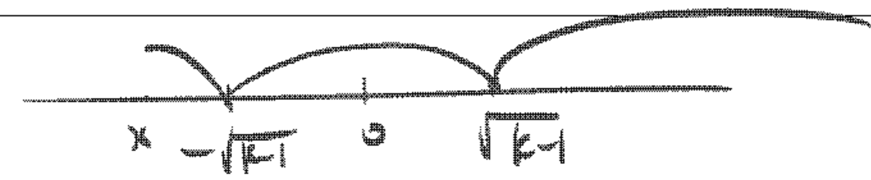
① 若 $k-1\le 0$ 即 $k\le 1$ 时，$f'(x)\le 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递减

由于 $f(0)=0$，故，此时方程 $f(x)=0$ 有唯一实根 $x=0$

② 若 $k-1>0$ 即 $k>1$ 时，令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{k-1}$

$(k-1)-x^2$

列表讨论

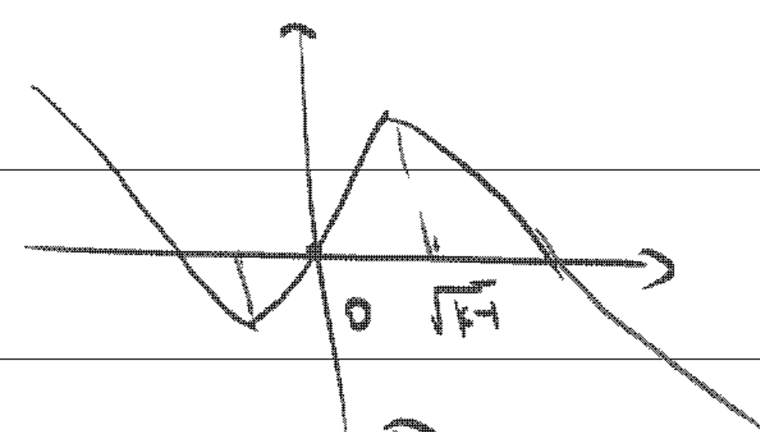


x	$(-\infty,-\sqrt{k-1})$	$-\sqrt{k-1}$	$(-\sqrt{k-1},\sqrt{k-1})$	$\sqrt{k-1}$	$(\sqrt{k-1},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(k\arctan x-x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(k\arctan x-x)=-\infty,\quad f(0)=0$$

此时，方程恰有三个实根。

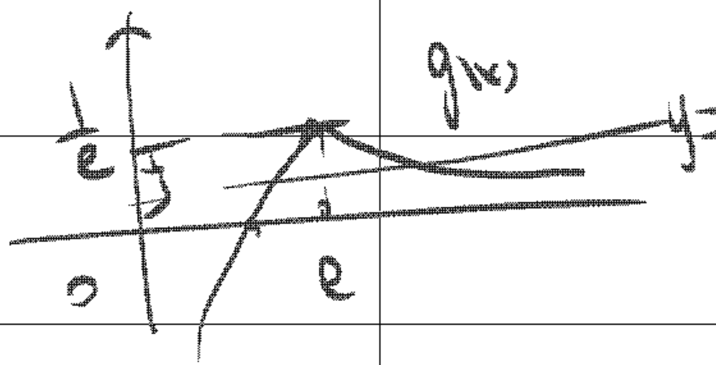


【例 40】设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有两个零点，求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围。

解：分离参数法.

由条件可知 $b\neq 0$

于是 $f(x)=ax-b\ln x=0 \Leftrightarrow ax=b\ln x \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{\ln x}{x}$



令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

由 $g'(x)=0 \Rightarrow x=e$，列表

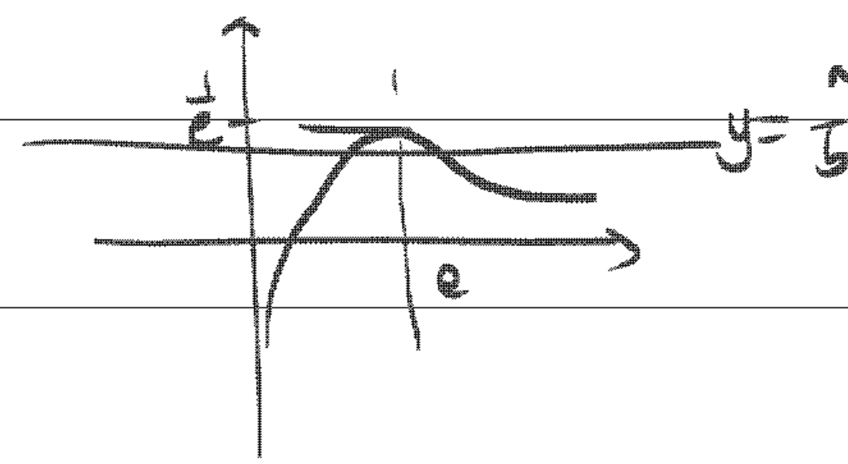
x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\uparrow$	最大值点	$\downarrow$

$g(e)=\frac{1}{e}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

所以，$f(x)$ 有两个零点

$\Leftrightarrow 0<\frac{a}{b}<\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow \frac{b}{a}>e$



【例 41】已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}=g(x)$ 的一个原函数 $f(0)=0$。

$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ $f(x)-\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=C=f'(x)$

(1) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点。

【分析】① $\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$；② 零点定理

③ $\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0) \Rightarrow f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$

④ 两次积分 $\begin{cases} \text{分部积分} \\ \text{二重积分} \end{cases}$

【解】(I) 由题设，$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(0)$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}\,dt \qquad = \int_0^{x} \frac{\cos t}{2t-3\pi}\,dt$$

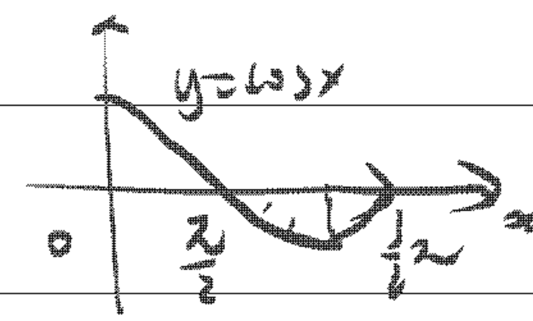
则 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx = x f(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi} - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x f'(x)\,dx$

$$= \frac{3}{2}\pi \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos x}{2x-3\pi}\,dx - \int_0^{\frac{3}{2}\pi} x\cdot\frac{\cos x}{2x-3\pi}\,dx$$

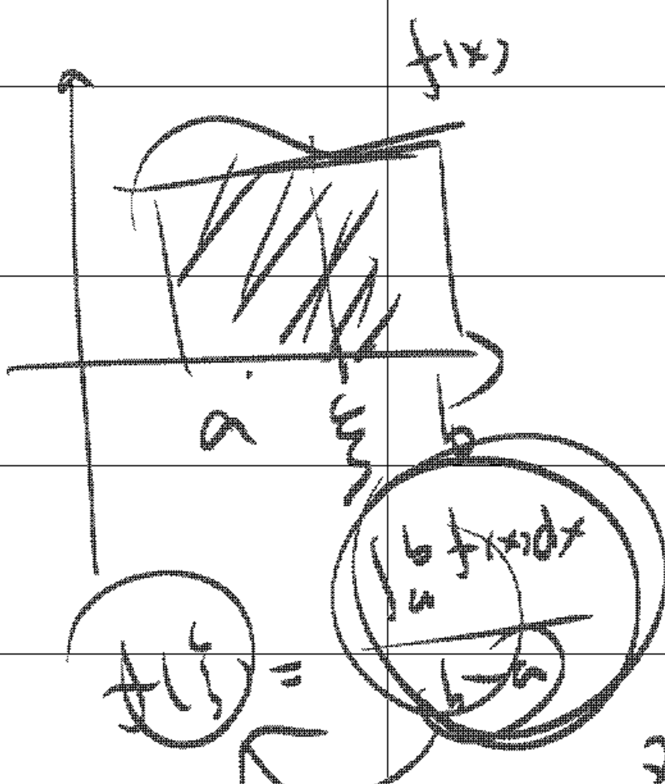
$$= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\frac{\cos x}{2x-3\pi} = -\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos x\,dx = \frac{1}{2}$$

故，平均值 $\bar{y} = \dfrac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx}{\frac{3}{2}\pi} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\pi} = \dfrac{1}{3\pi}$

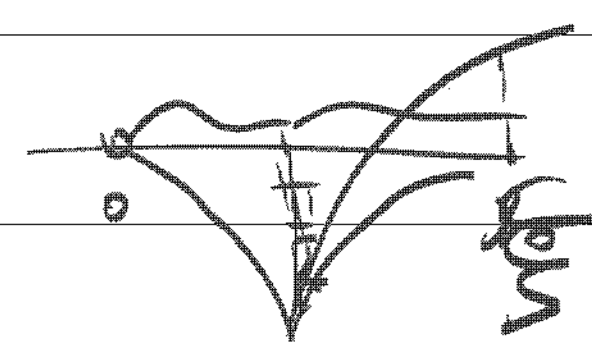
(Ⅱ) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$，$x \in (0, \frac{3}{2}\pi)$



令 $f'(x)=0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ 是唯一驻点



x	$(0, \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	最小值点	$\uparrow$



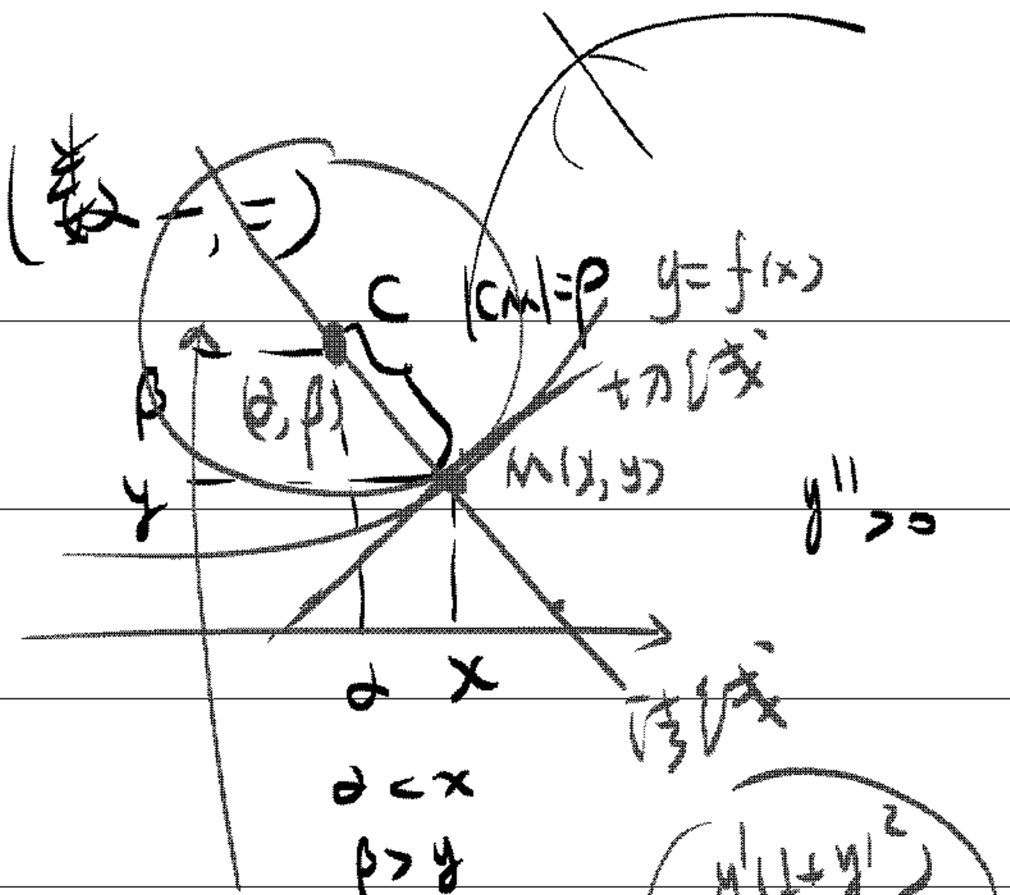
又由于 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上无零点，且 $f(\frac{\pi}{2}) < f(0) = 0$

由积分中值定理，$\exists \xi \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ s.t. $f(\xi) = \dfrac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx}{\frac{3}{2}\pi - 0} = \dfrac{1}{3\pi} > 0$

由零点定理可知 $\exists \xi_0 \in (\frac{\pi}{2}, \xi) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ s.t. $f(\xi_0) = 0$

又因为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ 上递增，故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ 内只有一个零点 ……

§6、曲率与曲率圆（数一、二）



$y''>0$

$\alpha<x$

$\beta>y$

① 曲率 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$

② 曲率半径 $\rho=\dfrac{1}{K}$，曲率中心 (α,β)

$$\begin{cases}\alpha = x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta = y+\dfrac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$$

曲率圆方程

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$$

【例 44】曲线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 对应点的曲率为 $\underline{\quad 2/3 \quad}$。

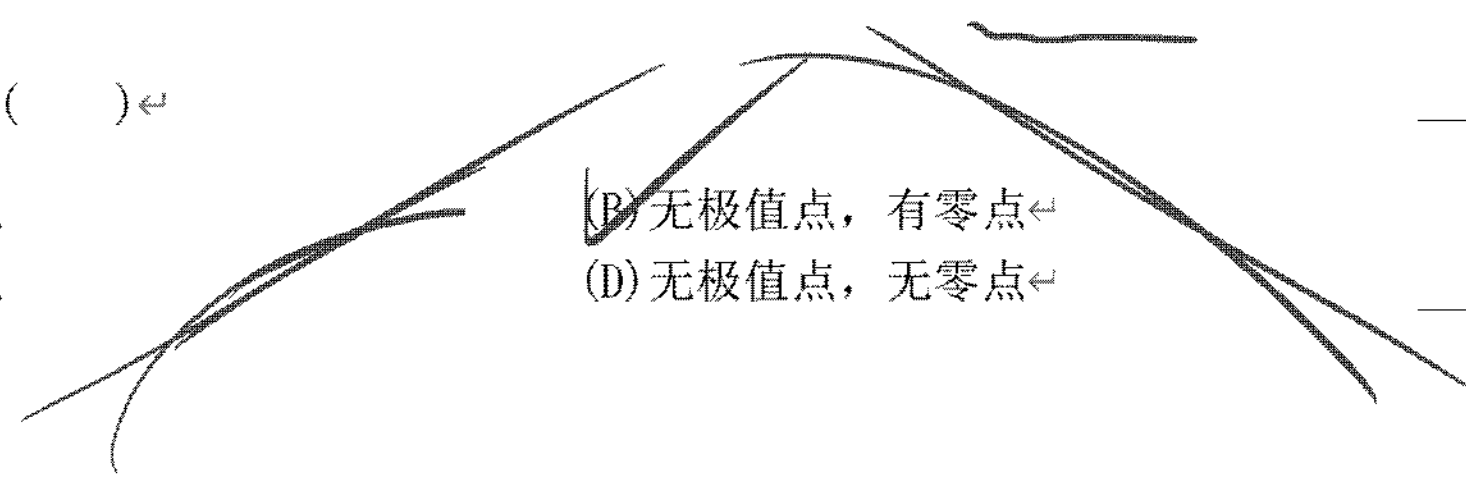
分析：$K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$ $\quad y'(x)$ $\quad y''(x)$

$y'(x)=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$，$y''(x)=\dfrac{d\,y'_x/dt}{dx/dt}$

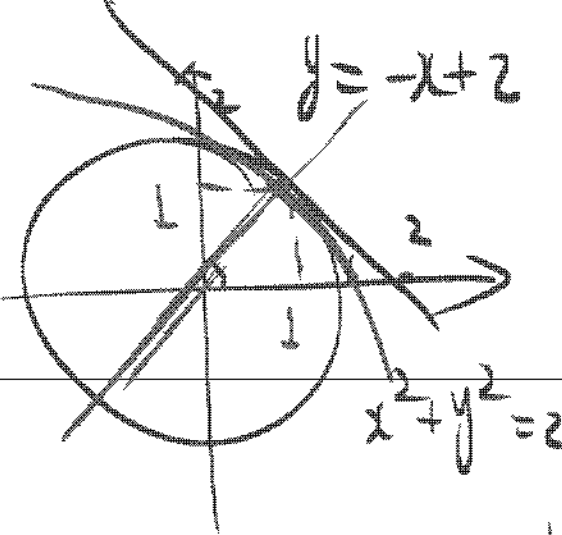
【例 45】若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内（　）

(A) 有极值点，无零点　　(B) 无极值点，有零点

(C) 有极值点，有零点　　(D) 无极值点，无零点



$f''(x)<0$



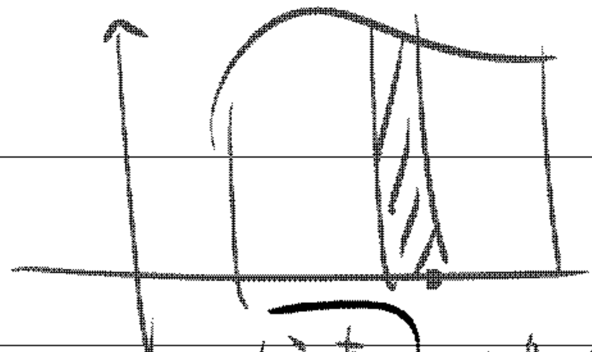
$f(x) < -x+2$

$f(2) < -2+2=0$

$f(1)=1$ $\quad f'(1)=-1 \Rightarrow f'(x)<f'(1)=-1<0$

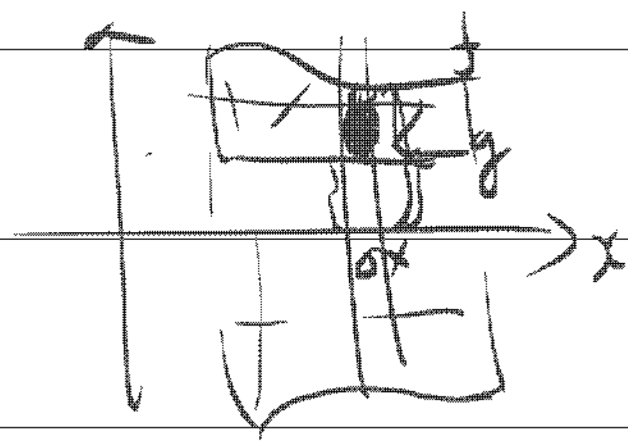
$\Rightarrow f(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调 $(1<x<2)$

§7. 定积分与重积分的应用



$\Longrightarrow A=\int_a^b f(x)dx$

元素 $\Delta A = \underline{f(x)dx}$, $x\in[a,b]$



元素 $dV = \pi f^2 dx - \pi g^2 dx$

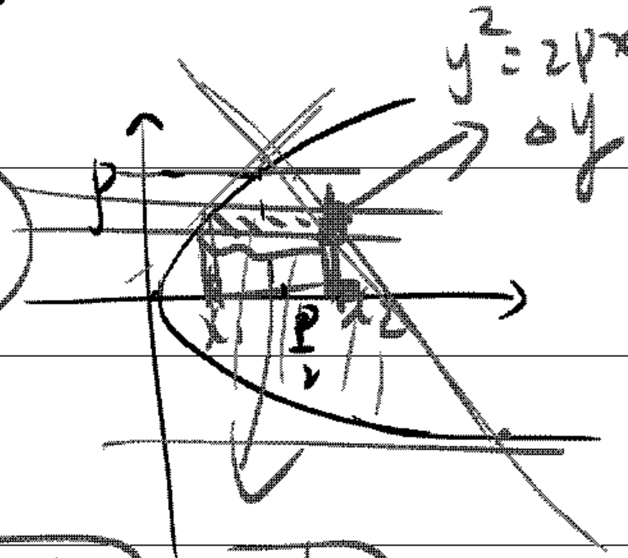
$= \underline{\pi(f^2-g^2)dx}$, $x\in[a,b]$

$V=\int_a^b \pi(f^2-g^2)dx$

先求元素 $dU = \underline{f(x)dx}$, $x\in[a,b]$ $\longrightarrow U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$

题型13 利用定积分求面积

[例46] $y^2=2px$ $\quad (\frac{p}{2}, p)$



分析: ① 求法线 $x=-y+\frac{3}{2}p$

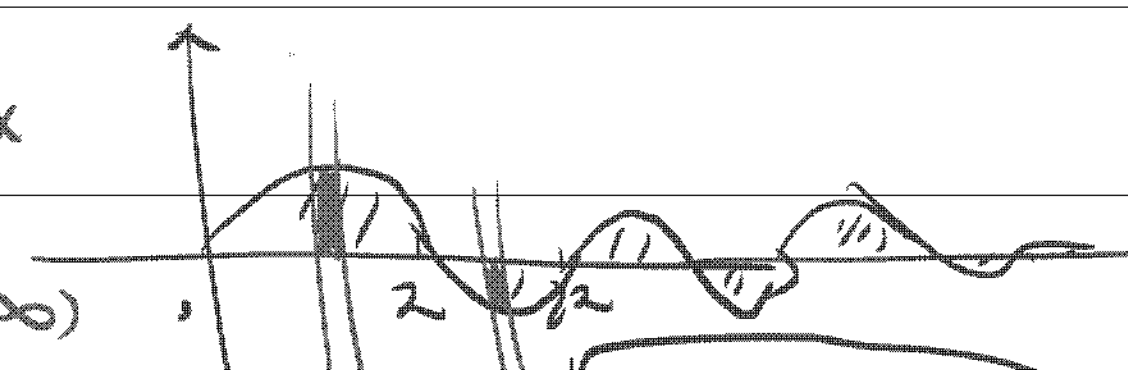
② 写面积元素

$$\Delta A = \underbrace{\left|\left(\tfrac{3}{2}p-y\right)-\tfrac{1}{2p}y^2\right|}_{长}\ \underbrace{dy}_{宽}, \quad y\in[-3p, p]$$

③ 积分

$$A=\int_{-3p}^{p}\left(\tfrac{3}{2}p-y-\tfrac{1}{2p}y^2\right)dy = \frac{16}{3}p^2$$

[例47] $y=e^{-x}\sin x \ (x\geq 0)$ 与 x 轴



[分析] $\Delta A = |e^{-x}\sin x|\,dx$

$x\in[0,+\infty)$

$$A=\int_0^{+\infty}|e^{-x}\sin x|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx \xlongequal{x=n\pi+t} \int_0^{\pi}e^{-(n\pi+t)}|\sin(n\pi+t)|\,d(n\pi+t)$$

$$=e^{-n\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin t\,dt$$

$$=e^{-n\pi}\cdot\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

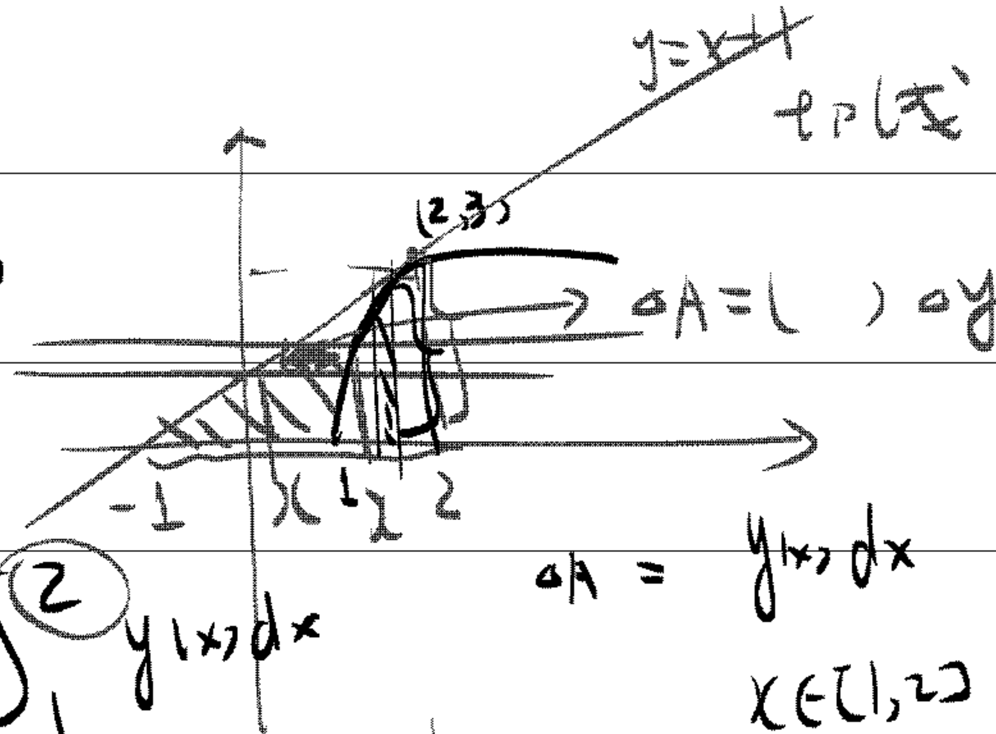
$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi} \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) \qquad e^{-\pi} \quad e^{-2\pi}$$

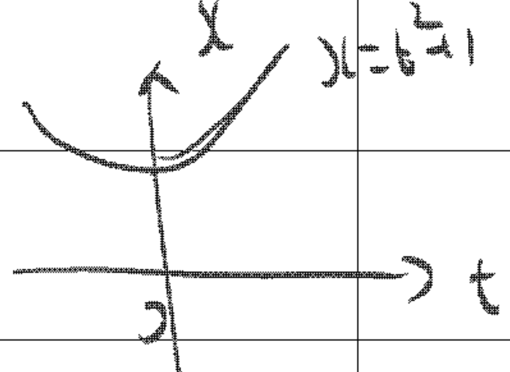
$$= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

$$= \frac{1+e^{\pi}}{2(e^{\pi}-1)}$$

【例48】 $L \begin{cases} x = t^2+1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$

切线 $y = x+1$





法一: $S = \frac{9}{2} - \int_1^2 y(x)\,dx$

换元 $x = t^2+1$, $y = 4t - t^2$: $\frac{9}{2} - \int_0^1 (4t - t^2)\,d(t^2+1)$

$= \frac{7}{3}$

$y = x+1$

$x =$

法二: 记曲线为 $x = x(y)$

$$S = \int_0^3 [x(y) - (y-1)]\,dy$$

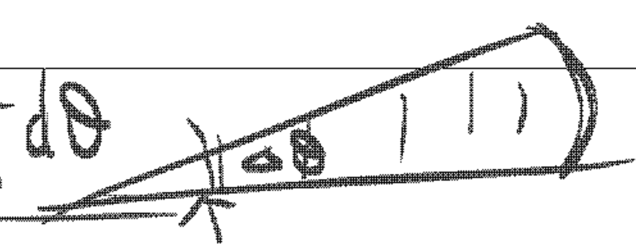
$$= \int_0^3 (1-y)\,dy + \int_0^3 x(y)\,dy$$

$$= -\frac{3}{2} + \int_0^1 (t^2+1)\,d(4t - t^2)$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot d\theta$$

[注] $\begin{cases} \text{元素的长方形：} \Delta A = \text{底} \times \text{高} \\ \text{元素的扇形：} \Delta A = \frac{1}{2} r^2 d\theta \end{cases}$



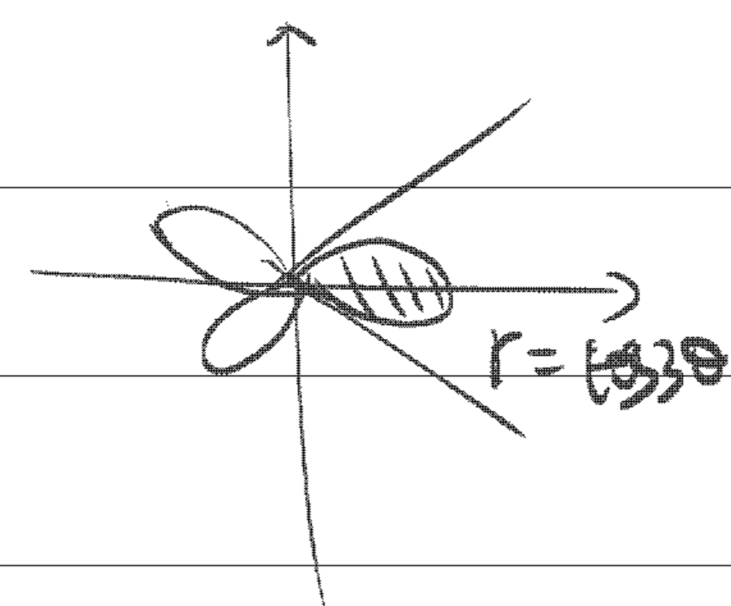
[例149] $r = \cos 3\theta \quad \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

解: $\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot (\cos 3\theta)^2 d\theta, \quad \theta \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$

$$\Rightarrow A = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cos^2 3\theta \, d\theta$$

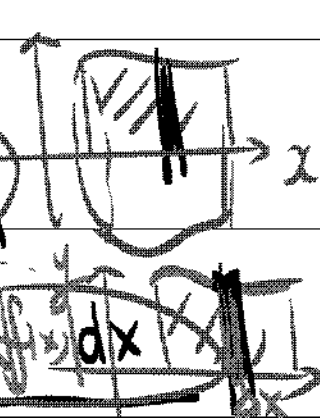
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta \, d\theta \overset{3\theta = t}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \frac{1}{3} dt$$

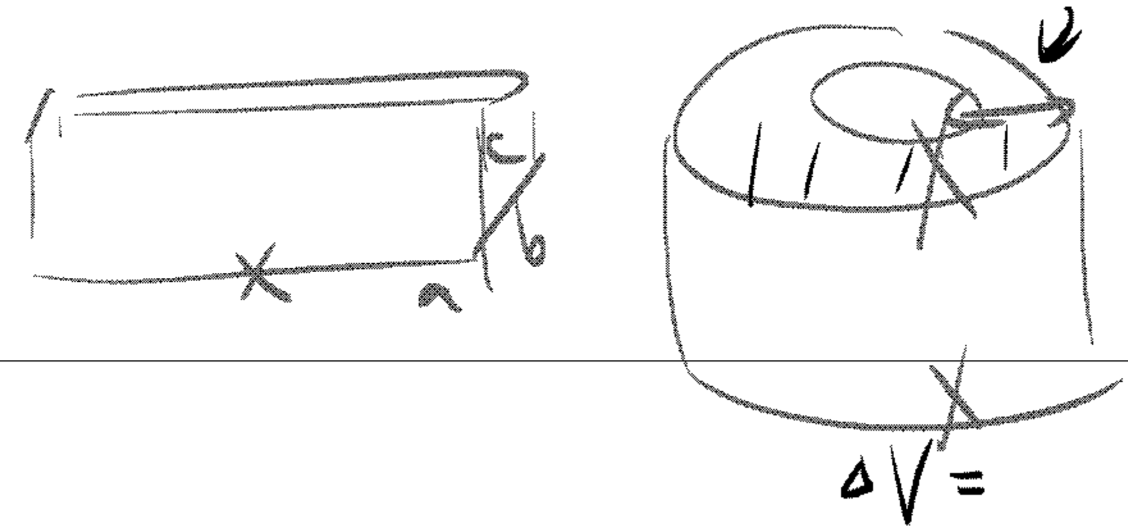
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$



题型14 求旋转体体积

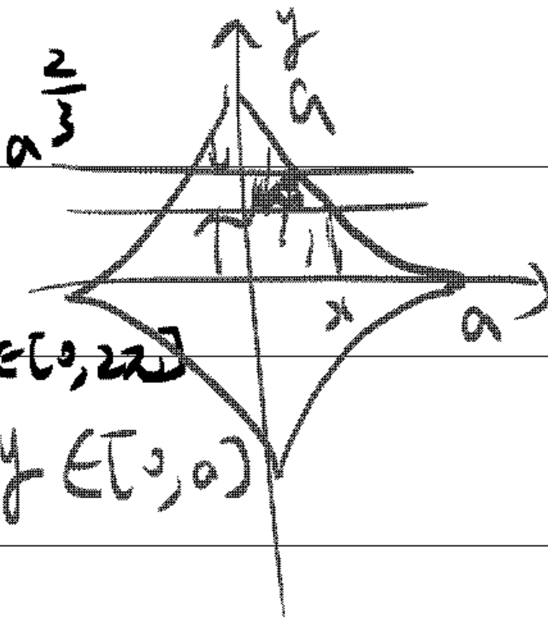
[注] 体积元素 ΔV $\begin{cases} ① \text{ 圆柱体积 } S_{\text{底}} \cdot h = \pi R^2 \cdot h \\ ② \text{ 薄壳体积 } 2\pi R f(x) dx \end{cases}$





【例 50】求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 绕 y 轴旋转所得旋转体的体积。

[注] 星形线 $\begin{cases} \text{直角坐标方程} & x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}} \\ \text{参数方程} & \begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi] \end{cases}$



$y\in[0,a]$

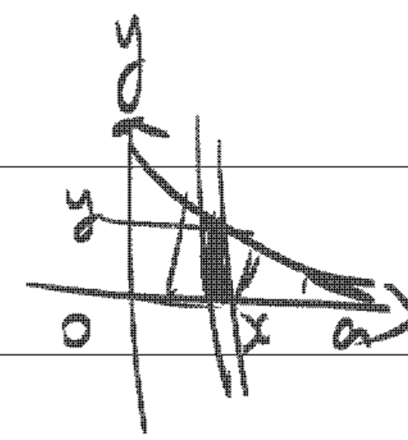
[分析] 体积元素

$$\Delta V = 2\pi x^2\,dy$$

$$V=\int_0^a 2\pi x^2\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi a^2\cos^6 t\cdot d(a\sin^3 t)$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos^7 t\,dt$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^7 t\,dt = \frac{32}{105}\pi a^3$$



法二：对 x 积分

$$V = 2\int_0^a 2\pi x\cdot y\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\cdot a\cos^3 t\cdot a\sin^3 t\,d(a\cos^3 t) = \cdots$$

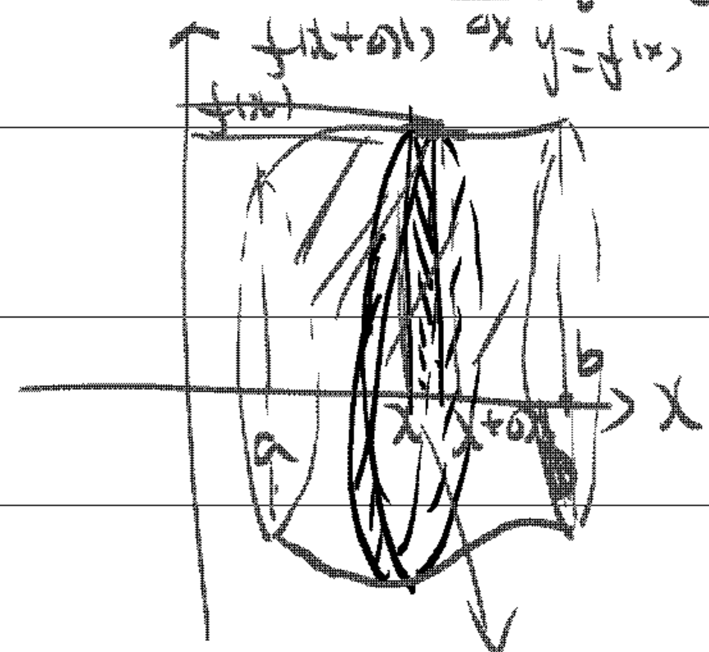
【例 51】计算由摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 在 $0\le t\le 2\pi$ 的一拱与 x 轴所围图形分别绕轴、y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

$V_x = 5\pi^2 a^3$; $V_y = 6\pi^3 a^3$.

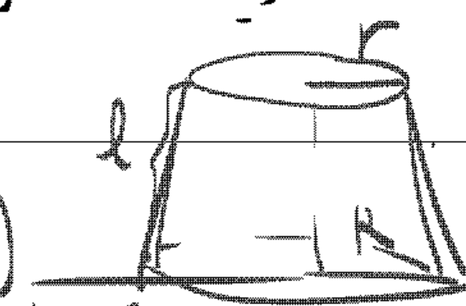
题型15 利用定积分求旋转曲面的面积（数一、二）

Δy, Δx $\approx\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$



ΔS 圆台 $=\pi(R+r)l$.



$\Delta S\approx\pi[f(x)+f(x+\Delta x)]$

$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 圆台

$=\pi\cdot(2f(x)+\Delta y)\cdot\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$\Delta x\to 0$

$\Delta y\to 0$

$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\pi(2f(x)+\Delta y)\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$

$(\Delta x\to 0)$

$\Delta S\approx 2\pi f(x)\sqrt{1+(y')^2}\cdot dx$

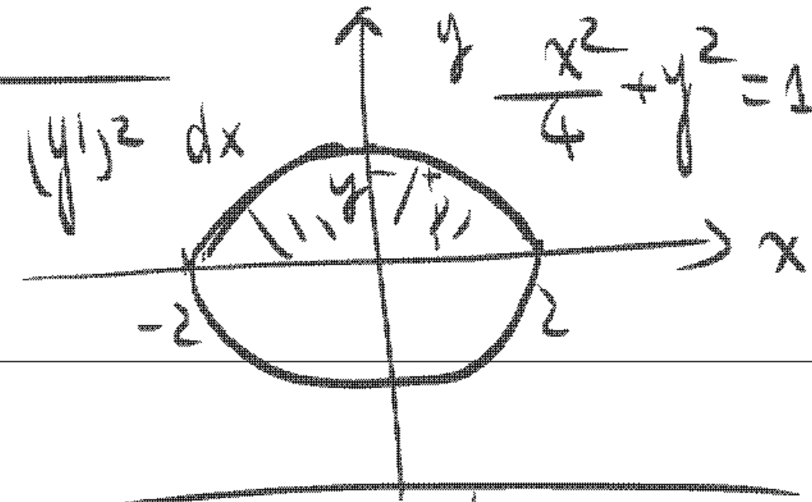
$x\in[a,b]$

公式 $\begin{cases} S=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx & y=f(x),\ x\in[a,b] \\ S=\int_\alpha^\beta 2\pi y(t)\boxed{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt} & \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} t\in[\alpha,\beta] \end{cases}$

$\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2$

【例 52】求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 绕 x 轴旋转所得旋转体的表面积。

利用公式 $S = 2\int_0^2 2\pi y \sqrt{1+(y')^2}\,dx$



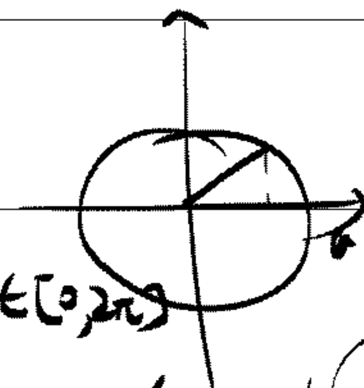
$y = \pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

$$S = 4\pi\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{-\frac{1}{2}x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right)^2}\,dx$$

$$= \pi\int_0^2 \sqrt{16-3x^2}\,dx = \cdots = 2\pi + \frac{8}{9}\sqrt{3}\pi^2$$

方法二：

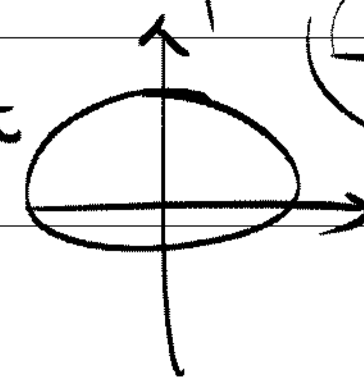
$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} t\in[0,2\pi]$$



$x^2+y^2=a^2$

$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sqrt{(-2\sin t)^2+(\cos t)^2}\,dt$$



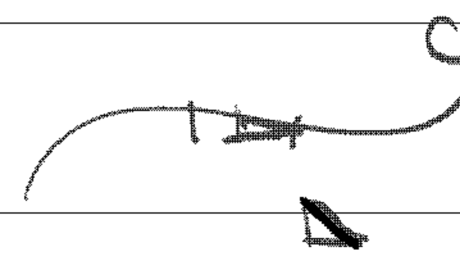
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos\theta \\ \frac{y}{b} = \sin\theta \end{cases}$

$$= \cdots = 2\pi + \frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2$$

题型16 利用定积分求弧长（数一、二）

[注] 1° $c: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$



$$l = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt}_{\text{弧微分}}$$

2° $C: y=f(x),\ x\in[a,b]$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$3°$ $C: \rho=\rho(\theta), \quad \theta\in[\alpha,\beta]$ $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta$$

【例 53】设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任一点 $M(x,y)(x\geq 1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值。（在直角坐标轴系下曲率公式为 $K=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$）.

【分析】 $\rho(x)=\dfrac{1}{K}=\dfrac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{1}{2}(4x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$s(x)=\int_1^x\sqrt{1+[(\sqrt{t})']^2}\,dt=\int_1^x\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt$$

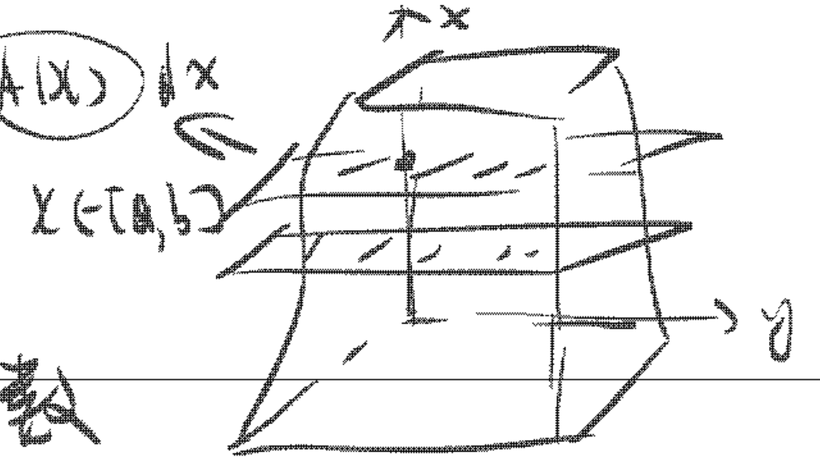
$\begin{cases} \rho=\rho(x) \\ s=s(x) \end{cases}$ 参数式求 $\dfrac{d\rho}{ds}$，$\dfrac{d^2\rho}{ds^2}$ 代入

$$3\rho\cdot\frac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2=9.$$

题型17 利用定积分求平行截面面积已知立体体积。

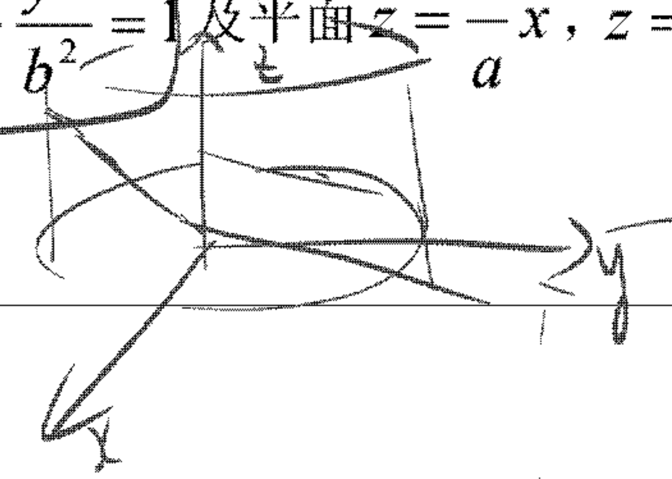
公式：$V=\int_a^b \underbrace{A(x)}_{\text{截面面积函数}}\cdot dx$

$\Delta V = A(x)\,dx$



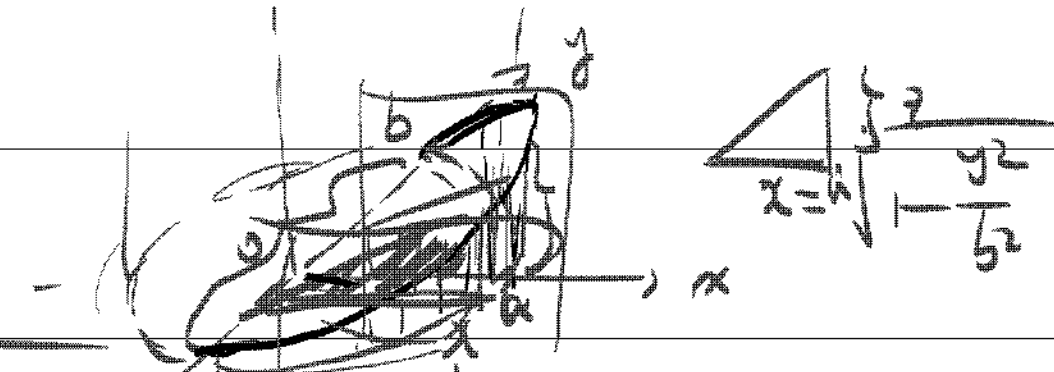
$=\frac{c}{a}\cdot a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} = c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$

【例·54】求椭圆柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$及平面$z=\frac{c}{a}x$，$z=0$所围成立体（$z\ge 0$）的体积。



$z=0$

$z=\frac{c}{a}x$



【解】 截面面积

$A(y)=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot c\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ $\quad y\in[-b,b]$

$V=\int_{-b}^{b} A(y)\cdot dy = \frac{2}{3}abc$