第 4 讲 定积分与重积分强化练习参考答案

1、【答案】B

【解】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，所以

$\ln(\sin x)<\ln(\cos x)<\ln(\cot x)$，故$I<K<J$。

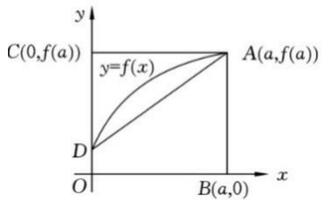
2、【答案】C

【解】$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$。

由图可知$a\cdot f(a)$为矩形$ABOC$的面积，由定积分的几何意义知$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$表示曲边梯形

$ABOD$的面积。从而$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$表示曲边三角形$ACD$面积。

故答案选（C）。



3、【答案】D

【解】我们有如下常用结论：设$f(x)$连续，则

①若$f(x)$为奇函数，则$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为偶函数；②若$f(x)$为偶函数，则

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为奇函数。

事实上，当$f(x)$为奇函数时，令$H(x)=F(x)-F(-x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，

则有$H'(x)=f(x)-\left[-f(-x)\right]=f(x)+f(-x)=0$，又由于

$H(0)=F(0)-F(0)=0$，故

$H(x)=0,$即得$F(x)=F(-x),$所以$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$为偶函数。

当$f(x)$为偶函数时，令$H(x)=F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$，

则有$H'(x)=f(x)+\left[-f(-x)\right]=f(x)-f(-x)=0$，又由于

$H(0)=F(0)+F(0)=0$，故

$H(x)=0$, 即得 $F(x)=-F(-x)$, 所以 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数。

对于选项(A)：被积函数 $f(t^2)$ 为偶函数，所以 $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$ 为奇函数；

对于选项(B)：被积函数 $f^2(t)$ 不一定是奇函数，也不一定是偶函数，所以 $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$ 不一定具有奇偶性；

对于选项(C)：令 $g(t)=t\left[f(t)-f(-t)\right]$，则

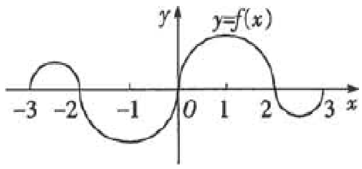
$g(-t)=(-t)\left[f(-t)-f(t)\right]=t\left[f(t)-f(-t)\right]=g(t)$，所以 $g(t)$ 为偶函数，从而

$\int_0^x t\left[f(t)-f(-t)\right]\mathrm{d}t$ 为奇函数；

对于选项(D)：令 $g(t)=t\left[f(t)+f(-t)\right]$，则 $g(-t)=(-t)\left[f(-t)+f(t)\right]=-g(t)$，所以 $g(t)$ 为奇函数，从而 $\int_0^x t\left[f(t)+f(-t)\right]\mathrm{d}t$ 为偶函数。

故答案选(D)。

4、【答案】C



【解】由 $f(x)$ 的图形知 $f(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 连续，所以

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数。从而 $F(-3)=F(3)$, $F(-2)=F(2)$，由定积分的几何意义知，

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}=\frac{3}{8}\pi,$$

$F(2)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{2}$，从而 $\frac{F(3)}{F(2)}=\frac{\frac{3}{8}\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{4}$，即 $F(3)=\frac{3}{4}F(2)=F(-3)$,故答案选(C)。

5、【答案】 $\frac{\pi}{4}$

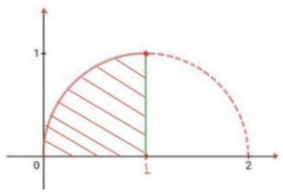
【解】方法一：

$$I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)$$

$$\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^0\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\overset{u=\sin\theta}{=}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\frac{1+\cos2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{\pi}{4}。$$

方法二：因为 $y=\sqrt{2x-x^2}, x\in[0,1]$ 即是 $(x-1)^2+y^2=1, x\in[0,1], y\in[0,1]$，

所以曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}, x\in[0,1]$ 是圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 的位于第一象限的四分之一圆弧(如图)。由定积分的几何意义得， $I=\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}$。



6、【答案】 $\frac{\pi}{2}$。

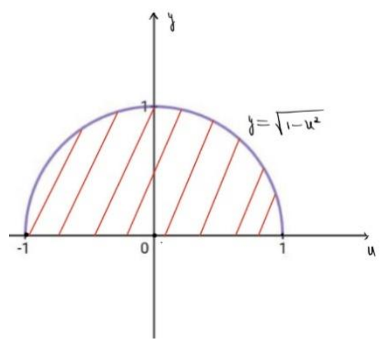
【解】方法一： $I=\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$，令 $x-1=\sin\theta$，则 $x=1+\sin\theta$。

从而 $$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\sqrt{1-\sin^2\theta}\mathrm{d}(1+\sin\theta)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin\theta)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=2\cdot\frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

方法二：

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1)\overset{u=x-1}{=}\int_{-1}^1(u+1)\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-1}^1 u\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u+\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u=0+\int_{-1}^1\sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u\overset{\text{几何意义}}{=}\frac{\pi}{2}。$$



7、【答案】 $\frac{\pi}{8}$

【解】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2x)\cos^2x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2x\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x\mathrm{d}x$。

下面分别计算 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x\mathrm{d}x, I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$。

$$I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x\mathrm{d}\xlongequal{\text{奇函数}}0;$$

我们用两种方式计算 $I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$:

方式一:

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin x\cos x\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin 2x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8};$$

方式二:

$$I_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x\xlongequal{\text{偶函数}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}-\frac{3!!}{4!!}\frac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{3\times 1}{4\times 2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}。$$

所以，原式 $=I_1+I_2=0+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}$。

【注】以下常用的结果称为瓦里士公式，要求同学们会推导并牢记:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为正奇数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数},\end{cases}$$

其中 $n!!=n\times(n-2)\times(n-4)\cdots\times 1$（$n$ 为奇数），$n!!=n\times(n-2)\times(n-4)\cdots\times 2$（$n$ 为偶数），

例如: $7!!=7\times 5\times 3\times 1=105, 6!!=6\times 4\times 2=48$。

8、【答案】 $-\frac{1}{2}$

【解】 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}(x-1)\xlongequal{u=x-1}\int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(u)\mathrm{d}u$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(u)\mathrm{d}u+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(u)\mathrm{d}u=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u\mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\mathrm{d}u\quad=0+(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}\quad。$$

（注意这里被积函数 ue^{u^2} 在 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 为奇函数）

9、【答案】 $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$

【解】方法一：令 $\frac{1}{x}=t$，则 $x=\frac{1}{t}$， $dx=d\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2}dt$ 。

$$I=\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^{\frac{1}{2}}t^3e^t(-\frac{1}{t^2})dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 te^t dt=(t-1)e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}\sqrt{e}。$$

方法二：

$$I=\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_1^2\frac{1}{x}de^{\frac{1}{x}}=-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2+\int_1^2 e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})$$

$$=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e+e^{\frac{1}{x}}\Big|_1^2=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}+e+e^{\frac{1}{2}}-e=\frac{\sqrt{e}}{2}。$$

10、【答案】 $\dfrac{\pi}{3}$

【解】令 $\sqrt{x-2}=t$，则 $x=t^2+2$， $dx=2tdt$，从而

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2tdt}{(t^2+9)t}=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}dt,$$

下面用两种方法计算 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}dt$：

方法一：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}dt=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1}d\frac{t}{3}=\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{t}{3}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{6};$

方法二：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+9}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+3^2}dt\overset{t=3\tan\theta}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{9\sec^2\theta}3\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}d\theta=\frac{\pi}{6}$。

故原式$=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$。

11、【答案】 $\frac{1}{2}\ln 2$

【解】 $I=\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-3)(x-1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{5}^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|\right)\Big|_{5}^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2\text{。}$$

12、【答案】D

【解】

对于选项（A）：因为 $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(2)=1$，所以 $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛。

对于选项（B）：因为

$$\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x^2=-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2},$$

所以 $\int_{0}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

对于选项（C）：因为 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\arctan x\mathrm{d}\arctan x=\frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}$，

所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

对于选项（D）：因为 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x==\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty$，所以 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散。

故答案选（D）。

13、【答案】$\frac{1}{\ln 3}$

【解】方法一：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{0}x\cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x\cdot 3^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}3^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 3}3^{-x^2}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\ln 3}\text{。}$$

方法二：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x\overset{\text{偶函数}}{=}2\int_{0}^{+\infty}x3^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}3^{-x^2}\mathrm{d}x^2\overset{u=x^2}{=}\int_{0}^{+\infty}3^{-u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\ln 3}\int_{0}^{+\infty}e^{-u\ln 3}\mathrm{d}(u\ln 3)\overset{u\ln 3=v}{=}\frac{1}{\ln 3}\int_{0}^{+\infty}e^{-v}\mathrm{d}v=\frac{1}{\ln 3}\Gamma(1)=\frac{1}{\ln 3}\text{。}$$

14、【解】记 $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}$

方法一：$I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2+\mathrm{e}^2}\overset{u=\mathrm{e}^x}{=}\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\mathrm{e}^2}=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\frac{u}{\mathrm{e}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}$。

方法二：令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$，所以

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{t+\mathrm{e}^2t^{-1}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{t^2+\mathrm{e}^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\left(\frac{t}{\mathrm{e}}\right)\Bigg|_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}。$$

15、【解】令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t,\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ 。从而

$$\int_0^1\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin^2 t\right)\cdot t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\cos 2t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\mathrm{d}\sin 2t=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{1}{4}t\sin 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\left(\frac{1}{8}\cos 2t\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{8}(-1-1)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{4}。$$

16、【答案】0

【解】方法一：利用分部积分法可得

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\int_0^1\sin nx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin nx\Bigg|_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cdot n\cdot\cos nx\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\int_0^1\cos nx\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Bigg|_0^1+n\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cdot n(-\sin nx)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}\sin n-n\mathrm{e}^{-1}\cos n+n\mathrm{e}^{-1}-n^2\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,$$

故 $$(n^2+1)\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}(\sin n+n\cos n)+n\mathrm{e}^{-1},$$

得 $$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n\cos n+\sin n}{\mathrm{e}(n^2+1)}+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n\cos n+\sin n}{\mathrm{e}(n^2+1)}+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{n}{\mathrm{e}(n^2+1)}\cos n-\frac{1}{\mathrm{e}(n^2+1)}\sin n+\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n}{\mathrm{e}(n^2+1)}\cos n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\mathrm{e}(n^2+1)}\sin n\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}}=0+0+0=0。$$

方法二：$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos nx=-\left(\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Bigg|_0^1\right)-\frac{1}{n}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x,$$

由于 $$\left|-\left(\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos nx\Bigg|_0^1\right)\right|=\left|\frac{-\mathrm{e}^{-1}\cos n}{n}+\frac{1}{n}\right|\le\left|\frac{-\mathrm{e}^{-1}\cos n}{n}\right|+\frac{1}{n}\le\frac{1+\mathrm{e}^{-1}}{n}\to 0,$$

$$\left|\frac{1}{n}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\cos nx\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{n}\int_0^1 \left|\mathrm{e}^{-x}\cos nx\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_0^1 \left|\mathrm{e}^{-x}\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_0^1 1\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \to 0,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = 0$。

【注】①在求$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x$的原函数时，我们还可采用推广的分部积分法

	$\sin nx \downarrow$	$+ \quad n\cos nx \quad -$	$-n^2\sin nx$
	$\mathrm{e}^{-x}\uparrow$	$-\mathrm{e}^{-x}$	e^{-x}

故 $$\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin nx - n\mathrm{e}^{-x}\cos nx - \int -n^2\mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x,$$

得 $$(n^2+1)\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}(\sin nx + n\cos nx),$$

所以$\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2+1}(\sin nx + n\cos nx)+c$，

因此

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n^2+1}(\sin nx + n\cos nx)\Big|_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{(n^2+1)}(\sin n + n\cos n) + \frac{\mathrm{e}^{-1}\cdot n}{n^2+1}。$$

②一般情形下，方法二可以推广为如下结论：设函数 $f(x)$ 在区间

$[a,b]$上连续可微，则有

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$。

以后在选择题与填空题中上述结论可以直接使用。为了让同学们能理解这个结论的来历，我们以（i）为例给出其证明。由连续函数的有界性，可设$|f(x)| \le M_1, |f'(x)| \le M_2$，

这里M_1, M_2为常数。

则有$\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{n}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\cos nx = \left(-\dfrac{f(x)\cos nx}{n}\right)\Big|_a^b + \dfrac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x$

$$= \left(-\frac{f(b)\cos nb}{n} + \frac{f(a)\cos na}{n}\right) + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

由于$\left|-\dfrac{f(b)\cos nb}{n} + \dfrac{f(a)\cos na}{n}\right| \le \left|\dfrac{f(b)\cos nb}{n}\right| + \left|\dfrac{f(a)\cos na}{n}\right| \le \dfrac{M_1}{n} + \dfrac{M_1}{n} = \dfrac{2M_1}{n} \to 0,$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(x)\cos nx\right|\mathrm{d}x \le \frac{1}{n}\int_a^b M_2\mathrm{d}x = \frac{M_2}{n}(b-a) \to 0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x=0$。

17、【答案】A

【解】记 $\varepsilon\left(a,b\right)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x,$ 则

$$\varepsilon\left(a,b\right)\ =\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2+a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x-2ax\cos x-2bx\sin x+2ab\sin x\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^{\pi}+2a^2\int_0^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x+2b^2\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x-4b\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x\ ,$$

又由于 $\int_0^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$， $\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,

$\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\left(-\cos x\right)=\left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=\pi+\left(\sin x\Big|_0^{\pi}\right)=\pi,$ 或者直接由

$\int_0^{\pi}xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$ 得 $\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\pi,$

所以

$$\varepsilon\left(a,b\right)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b=\pi\left[a^2+\left(b-2\right)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\right)$$

这里用两种方法求 a,b:

方法一：配方法

由 $\varepsilon\left(a,b\right)=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b=\pi\left[a^2+\left(b-2\right)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\pi^3-4\pi\right)$ 可知

当 $a=0,b=2,$ 时 $\varepsilon\left(a,b\right)$ 最小。此时 $a_1\cos x+b_1\sin x=2\sin x$，故答案选（A）。

方法二：二元函数求最值

由 $\varepsilon\left(a,b\right)=\frac{2}{3}\pi^3+\pi a^2+\pi b^2-4\pi b$ 可得， $\frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial a}=2\pi a,\frac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial b}=2\pi b-4\pi,$ 令

$\begin{cases}\dfrac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial a}=2\pi a=0,\\ \dfrac{\partial\varepsilon\left(a,b\right)}{\partial b}=2\pi b-4\pi=0,\end{cases}$ 解得 $\varepsilon\left(a,b\right)$ 的驻点(稳定点)为 $\begin{cases}a=0,\\ b=2,\end{cases}$ 由问题的实际背景知，当

$a=0,b=2,$ 时 $\varepsilon\left(a,b\right)$ 最小，故答案选（A）。

18、【答案】B

【解】因为$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d(\frac{1}{x})=\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_{-\infty}^{0}=\lim_{x\to 0^-}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)-\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)=0+1=1$,

所以反常积分①收敛;

因为$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\Big|_{0}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)-\lim_{x\to 0^+}\left(-e^{\frac{1}{x}}\right)=0+(+\infty)=+\infty$。,

所以反常积分②发散。综上所述，答案选(B)。

19、【解】(I) 如图，由于$|\cos t|\geq 0$，且$n\pi\leq x<(n+1)\pi$，由定积分不等式性质可知

$\int_0^x|\cos t|dt=\int_0^{n\pi}|\cos t|dt+\int_{n\pi}^{x}|\cos t|dt\geq\int_0^{n\pi}|\cos t|dt$，且

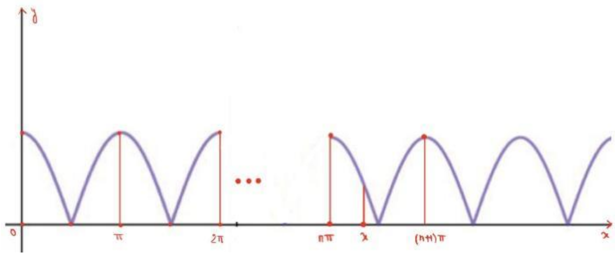
$\int_0^x|\cos t|dt=\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt-\int_x^{(n+1)\pi}|\cos t|dt<\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt$。

又由于$|\cos t|$是以π为周期的函数，所以

$\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=2n$,

$\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=(n+1)\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|dt=2(n+1)$,

故 $2n\leq S(x)<2(n+1)$。



(II) 由$n\pi\leq x<(n+1)\pi$可知，$\frac{1}{(n+1)\pi}<\frac{1}{x}\leq\frac{1}{n\pi}$。

又由 (I) 知$2n\leq S(x)<2(n+1)$, 所以$\frac{2n}{(n+1)\pi}<\frac{S(x)}{x}<\frac{2(n+1)}{n\pi}$,

因为$\lim_{x\to+\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{2}{\pi}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}=\frac{2}{\pi}$，所以由夹逼准则知$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}$。

【注】对于(II)，同学们可能想到使用$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{|\cos x|}{1}=\lim_{x\to+\infty}|\cos x|$$

不存在(也不是无穷大)，这说明洛必达法则不能使用。

20、【解】(Ⅰ)由于对任意的 x， $f(x)$ 连续，所以

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_0^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

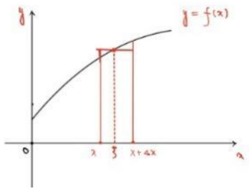
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x},$$

由积分中值定理可得，存在 ξ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间，使得 $\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$，如图，从而

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x),$$

故 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$。



(Ⅱ)这里采用两种方法证明 $G(x+2)=G(x)$。

方法一：由题设知 $f(x+2)=f(x)$，

$$G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\left[\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t\right]-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=2\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t,$$

又由于 $\int_2^{x+2}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{t=u+2}\int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，所以

$$G(x+2)=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=G(x),$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的函数。

方法二：令$H\left(x\right)=G\left(x+2\right)-G\left(x\right)$，则

$$H\left(x\right)=\left[2\int_0^{x+2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\left(x+2\right)\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]-\left[2\int_0^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t-x\int_0^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=2\left[\int_0^{x+2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]$$

从而，$H'\left(x\right)=2\left[f\left(x+2\right)-f\left(x\right)\right]=0$，因此$H\left(x\right)$为常数。又由于

$$H\left(0\right)=2\left[\int_0^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{0}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_0^{2}f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=0,$$

所以$H\left(x\right)=G\left(x+2\right)-G\left(x\right)=0,$即$G(x+2)=G\left(x\right)$。故$G(x)$是以 2 为周期的函数。

21、(1)证明：这里采用两种方法证明该结论。

方法一：$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{2+t}f(x)\mathrm{d}x$，

由于 $\int_2^{2+t}f(x)\mathrm{d}x\overset{x=u+2}{=}\int_0^t f(u+2)\mathrm{d}u=\int_0^t f(u)\mathrm{d}u=\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$，

所以 $\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_t^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$。

方法二：记$G(t)=\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x$，则$G'(t)=f(t+2)-f(t)=0$，故$G(t)$为常数，又因为

$G(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，所以$G(t)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$。

(2)由(1)知$\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，记$A=\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s$，则

$$\begin{aligned}G(x+2)-G(x)&=\int_0^{x+2}[2f(t)-A]\mathrm{d}t-\int_0^{x}[2f(t)-A]\mathrm{d}t=\int_x^{x+2}[2f(t)-A]\mathrm{d}t=2\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t-2A\\&=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2A=2\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^2 f(s)\mathrm{d}s=0,\end{aligned}$$

故$G(x+2)=G(x)$，所以$G(x)$是周期为 2 的周期函数。

22、【答案】D

【解】对于选项(A)：由$x^2+y^2=2y$得$x^2+\left(y-1\right)^2=1$，从而$y=1\pm\sqrt{1-x^2}$，所以区域

$D:\begin{cases}-1\le x\le 1\\1-\sqrt{1-x^2}\le y\le 1+\sqrt{1-x^2}\end{cases}$，故$\iint\limits_D f\left(xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f\left(xy\right)\mathrm{d}y$，因此($A$)错误。

对于选项(B)：由$x^2+y^2=2y$得$x^2=2y-y^2$，从而$x=\pm\sqrt{2y-y^2}$，所以区域

$D:\begin{cases}0\le y\le 2\\-\sqrt{2y-y^2}\le x\le\sqrt{2y-y^2}\end{cases}$，故$\iint\limits_D f\left(xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f\left(xy\right)\mathrm{d}x$，

因此(B)错误。

对于选项(C)和(D)：由$x^2+y^2=2y$得$r^2=2r\sin\theta$，$r=2\sin\theta,\theta\in\left[0,\pi\right]$，所以区域$D$的极

坐标表示为: $D\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\0\le r\le 2\sin\theta\end{cases}$，故

$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)r\mathrm{d}r$，因此($C$)错误，($D$)正确。

综上所述，答案选(C)。

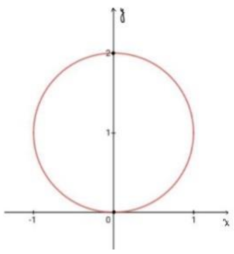
23、【答案】A

【解】如图，当 $x^2+y^2\le 1$时，$1\ge\sqrt{x^2+y^2}\ge\left(x^2+y^2\right)\ge\left(x^2+y^2\right)^2\ge 0$，

因为 $\cos t$ 在 $[0,1]$ 上单调递减所以 $\cos\sqrt{x^2+y^2}\le\cos\left(x^2+y^2\right)\le\cos\left(x^2+y^2\right)^2$，

故 $\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}\sigma>\iint\limits_D\cos\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma\ge\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，即

$I_3>I_2>I_1$，因此答案选(A)。



【注】利用极坐标，可以计算出 I_1,I_2

$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 r\cos r\mathrm{d}r=2\pi\left(r\sin r+\cos r\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\sin 1+\cos 1-1\right);$

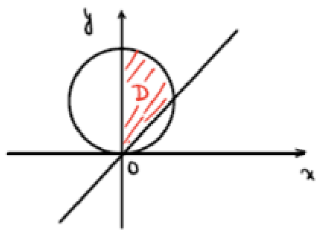
$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r^2\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\cos r^2\mathrm{d}r^2=\pi\left(\sin r^2\right)\Big|_0^1=\pi\sin 1$。

I_3 可以表示为 $I_3=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cos r^4\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\cos r^4\mathrm{d}r^2\overset{u=r^2}{=}\pi\int_0^1\cos u^2\mathrm{d}u$

24、【答案】$\dfrac{7}{12}$

【解】如图，由 $x^2+y^2=2y$ 得 $r^2=2r\sin\theta$，$r=2\sin\theta$，所以积分区域为

$D:\begin{cases}0\le r\le 2\sin\theta,\\\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$



$$I=\iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\bullet\cos\theta\bullet r\mathrm{d}r=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\bullet\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{12}。$$

25、【解】记 $I=\iint_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

方法一：积分区域为 $D:\begin{cases}-1\le y\le x,\\ -1\le x\le 1。\end{cases}$

$I=\iint_D y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{x}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}y$，由于

$$\int_{-1}^{x}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}y=\int_{-1}^{x}\left(1+xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}y^2}\right)\mathrm{d}\frac{y^2}{2}\overset{u=\frac{y^2}{2}}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}x^2}\left(1+xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{u}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+xe^{\frac{1}{2}x^2}\left(e^u\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{2}}\right)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+x\left(e^{x^2}-e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2}\right),$$

所以 $I=\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)+x\left(e^{x^2}-e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^2}\right)\right]\mathrm{d}x\overset{\text{奇偶性}}{=}2\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}$。

方法二：如图，将 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四个部分，其中 D_1,D_2 关于 x 轴对称，D_3,D_4 关于 y 轴对称。

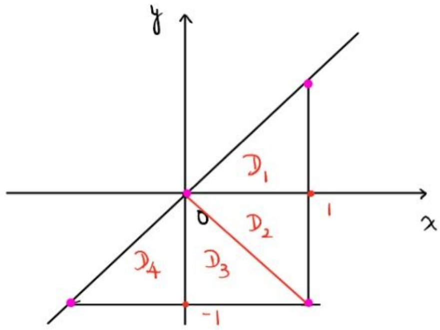
$$I=\iint_{D_1\cup D_2}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3\cup D_4}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 $\iint_{D_1\cup D_2}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}\left[y\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)+\left(-y\right)\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

$$\iint_{D_3\cup D_4}y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_3}\left[y\left(1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)+y\left(1+\left(-x\right)e^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_3}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-1}^{-x}y\mathrm{d}y=2\int_0^1\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x=-\frac{2}{3},$$

故 $I=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$。



26、【答案】 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

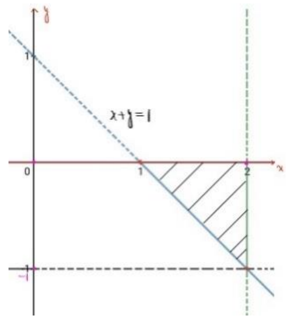
【解】对于累次积分 $\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x$，当 $-1\le y\le 0$ 时，$1\le 1-y\le 2$，所以

$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$。

$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{1-y}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分区域为 y 型区域 $\begin{cases}1-y\le x\le 2,\\ -1\le y\le 0。\end{cases}$ 如图，将其转化为 x 型区域

$D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1-x\le y\le 0\end{cases}$，所以

$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_2^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{1-x}^0 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$。



【注】关于积分换序及直角坐标与极坐标的相互转化

27、【答案】 a^2

【解】方法一：$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}y$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y-x)\mathrm{d}(y-x)$

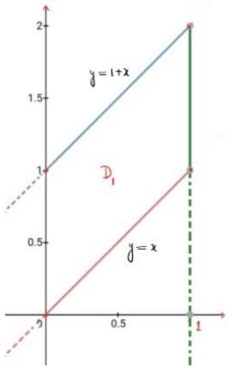
$\overset{u=y-x}{=}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{0} g(u)\mathrm{d}u+\int_0^1 g(u)\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty} g(u)\mathrm{d}u=0+a+0=a$，

故 $I=\int_{-\infty}^{+\infty} af(x)\mathrm{d}x=a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=a\int_0^1 a\mathrm{d}x=a^2$。

方法二：由于

$$f(x)g(y-x)=\begin{cases}a^2,0\le y-x\le 1,0\le x\le 1\\0,\text{其它}\end{cases}=\begin{cases}a^2,x\le y\le 1+x,0\le x\le 1\\0,\text{其它}\end{cases},$$

（如图所示）所以 $I=\iint\limits_{D_1}a^2\mathrm{d}\sigma=a^2S(D_1)=a^2\times 1=a^2$ 。



28、【答案】B

【解】方法一：由于

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x\overset{\text{积分换序}}{=}\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x$$

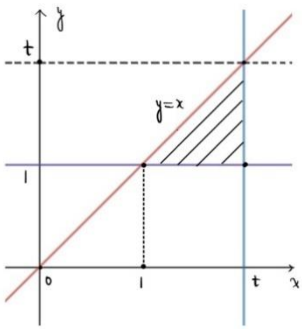
所以 $F'(t)=(t-1)f(t)$，从而 $F'(2)=f(2)$，故答案选（B）。

方法二：设 $G'(x)=f(x)$，则 $\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=G(t)-G(y)$，从而

$F(t)=\int_1^t[G(t)-G(y)]\mathrm{d}y=G(t)(t-1)-\int_1^t G(y)\mathrm{d}y$，所以

$$F'(t)=\int_1^t[G(t)-G(y)]\mathrm{d}y=G'(t)(t-1)+G(t)-G(t)=f(t)(t-1)$$

从而 $F'(2)=f(2)$，故答案选（B）。

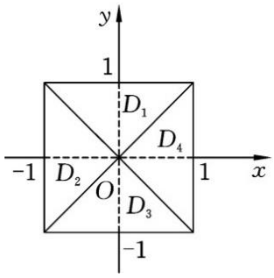


29、【答案】A

【解】设 $f(x,y)=y\cos x$，则 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，关于 y 是奇函数。

由于 D_2,D_4 关于 x 轴对称，由二重积分的对称性知 $I_2=I_4=0$，

又 $x\in[-1,1]$ 时 $\cos x>0$，所以 $\forall(x,y)\in D_1$ 时 $y\cos x>0$ 从而 $I_1>0$，$\forall(x,y)\in D_3$ 时 $y\cos x<0$，从而 $I_3<0$。故答案选(A)。



【注】这里I_1, I_3可以具体计算出来：

$$I_1=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-y}^{y} y\cos x\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\cos x\mathrm{d}x=\int_0^1 2y\sin y\mathrm{d}y=2\left(-y\cos y+\sin y\right)\Big|_0^1=2\left(\sin 1-\cos 1\right);$$

$$I_3=\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_{-y}^{y} y\cos x\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 y\mathrm{d}y\int_{-y}^{y}\cos x\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2y\sin y\mathrm{d}y=2\left(-y\cos y+\sin y\right)\Big|_{-1}^0=-2\left(\sin 1-\cos 1\right)。$$

30、【解】积分区域D如图所示，记D_1为积分区域 D 在第一象限的部分。 因为区域D关于x轴，y轴均对称，且$f\left(-x,y\right)=f\left(x,y\right)$，$f\left(x,-y\right)=f\left(x,y\right)$。所以$I=\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma$。

记D_1中满足$|x|+|y|\le 1$部分为D_{11}，D_1中满足$1\le|x|+|y|\le 2$部分为D_{12}，因为D_1可表示为$\begin{cases}0\le y\le 1-x\\ 0\le x\le 1\end{cases}$，所以

$$\iint\limits_{D_{11}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{12}。$$

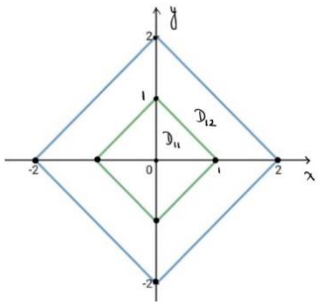
D_{12}的极坐标表示为$\begin{cases}0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le\dfrac{2}{\sin\theta+\cos\theta}\end{cases}$，所以

$$\iint\limits_{D_2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sec\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\overset{u=\theta-\frac{\pi}{4}}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec u\mathrm{d}u\overset{\text{偶函数}}{=}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec u\mathrm{d}u=\sqrt{2}\left[\ln\left|\sec u+\tan u\right|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)。$$

故 $I=\iint\limits_D f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma=4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$。



31、【解】区域 D 关于 x 轴对称，$D=D_1\bigcup D_2$。由 $\begin{cases}x=\sqrt{1+y^2}\\ x-\sqrt{2}y=0\end{cases}$ 解得 $A\left(\sqrt{2},1\right)$，

$$D_1:\begin{cases}0\le y\le 1\\ \sqrt{2}y\le x\le\sqrt{1+y^2}\end{cases}$$

$$I=\iint\limits_D(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\left[(x+y)^3+(x-y)^3\right]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}2\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}\sigma=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\text{。}$$

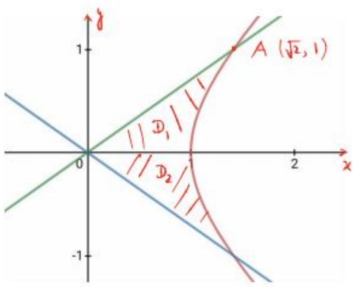
由于

$$\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right)\Bigg|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{4}\left(1+y^2\right)^2+\frac{3}{2}\left(1+y^2\right)y^2\right)-\left(y^4+3y^4\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+8y^2-9y^4\right),$$

故 $$I=\frac{1}{2}\int_0^1\left(1+8y^2-9y^4\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{8}{3}-\frac{9}{5}\right)=\frac{14}{15}\text{。}$$



32、【解】因为

$$\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^t\left[\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t\left[\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}(x+y)\right]\mathrm{d}x=\int_0^t\left[f(x+y)\Big|_0^{t-x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^t\left[f(t)-f(x)\right]\mathrm{d}x=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x,$$

又因为

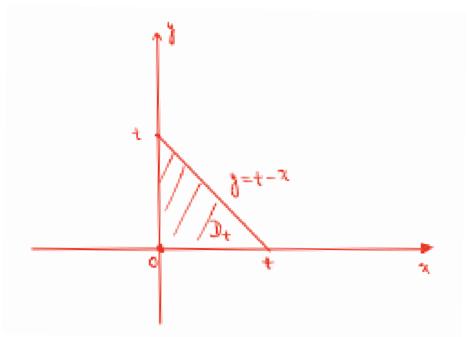
$\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(t)\iint\limits_{D_t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(t)S_{D_t}=\frac{1}{2}t^2f(t)$，其中 S_{D_t} 为区域 D_t 的面积。

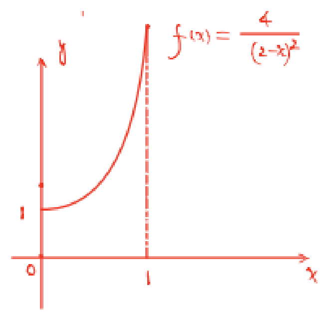
于是，方程 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可化为

$$tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}t^2f(t),\qquad ①$$

方程①两边对 t 求导得 $tf'(t)+f(t)-f(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2f(t)$，即 $f'(t)=\frac{2}{2-t}f(t)$。

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)}=\frac{2}{2-t}\mathrm{d}t$，两边积分 $\int\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}f(t)=\int\frac{2}{2-t}\mathrm{d}t$，解得 $f(t)=\frac{C}{(2-t)^2}$。因为 $f(0)=1$，所以 $C=4$，故 $f(t)=\frac{4}{(2-t)^2}$，即 $f(x)=\frac{4}{(2-x)^2}$。（如图所示）





33、【解】方法一：积分区域 D 关于 $y=x$ 对称。

记 $$f(x,y)=\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y},$$

$$I=\iint\limits_{D}\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\left[f(x,y)+f(y,x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_1^2 r\cdot\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_1^2 r\cdot\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi}\int_1^2\left(\pi r\right)\cdot\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}\pi r$$

$$\overset{u=\pi r}{=}\frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi} u\sin u\mathrm{d}u=\frac{1}{4\pi}\left[-u\cos u+\sin u\right]\Big|_{\pi}^{2\pi}=-\frac{3}{4}\text{。}$$

方法二: $I=\iint\limits_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^2\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\sin\left(\pi r\right)\cdot r\mathrm{d}r$

$$=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right)\cdot\left(\int_1^2 r\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}r\right),$$

由于 $$\int_1^2 r\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{\pi^2}\int_1^2\pi r\sin\left(\pi r\right)\mathrm{d}\left(\pi r\right)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi}u\sin u\mathrm{d}u=-\frac{3}{\pi},$$

又由于 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta\ \underline{\underline{\theta=\frac{\pi}{2}-t}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta,$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta+\frac{\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

因此 $$I=\frac{\pi}{4}\times\left(-\frac{3}{\pi}\right)=-\frac{3}{4}\text{。}$$

34、【解】设参数方程$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$所确定的函数为$y=y\left(x\right)$，积分区域可表示为

$$D\begin{cases}0\le y\le y\left(x\right)\\ 0\le x\le 2\pi\end{cases}\text{。}$$

记$I=\iint\limits_D(x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left[\left(xy+y^2\right)\Big|_0^{y(x)}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\left[xy(x)+y^2(x)\right]\mathrm{d}x\text{。}$$

由$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$可知，当$x=0$时，$t=0$，当$x=2\pi$时，$t=2\pi$，将其代入上述积分$I$得

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(t-\sin t\right)\left(1-\cos t\right)+\left(1-\cos t\right)^2\right]\left(1-\cos t\right)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t-\int_0^{2\pi} \sin t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 \mathrm{d}t$$

由于

$$\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} t\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t=16\int_0^{2\pi}\frac{t}{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^2 \mathrm{d}\frac{t}{2}\overset{u=\frac{t}{2}}{=}16\int_0^{\pi} u\sin^4 u\mathrm{d}u$$

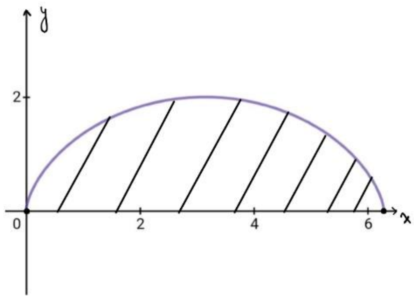
$$=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\mathrm{d}u=16\pi\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi^2,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t(1-\cos t)^2 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 \mathrm{d}(1-\cos t)\overset{u=1-\cos t}{=}\int_0^0 u^2\mathrm{d}u=0,$$

$$\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 \mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^3 \mathrm{d}t=16\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\frac{t}{2}\right)^3 \mathrm{d}\frac{t}{2}\overset{u=\frac{t}{2}}{=}16\int_0^{\pi}\sin^6 u\mathrm{d}u=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\mathrm{d}u$$

$$=32\times\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi,$$

故 $I=3\pi^2-0+5\pi=3\pi^2+5\pi$。



【注】这里除了多次使用瓦里士公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数。}\end{cases}$ 以外，还用到了以下两个重要且常用的结论，这两个结论在专题四中我们给出了详细的推导过程：

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x;\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x。$$