ДВУМЕРНОЕ НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Если каждая СВ системы подчиняется нормальному закону и они совместно независимы, то система подчиняется многомерному нормальному закону. Из этого следует, что $f(x, y)$ – плотность двумерного нормального закона, если ее интегрирование по всем возможным значениям одной СВ дает нормальный закон распределения другой:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

и такой же закон $f_Y(y)$ с параметрами m_y, σ_y.

Плотность двумерного нормального распределения

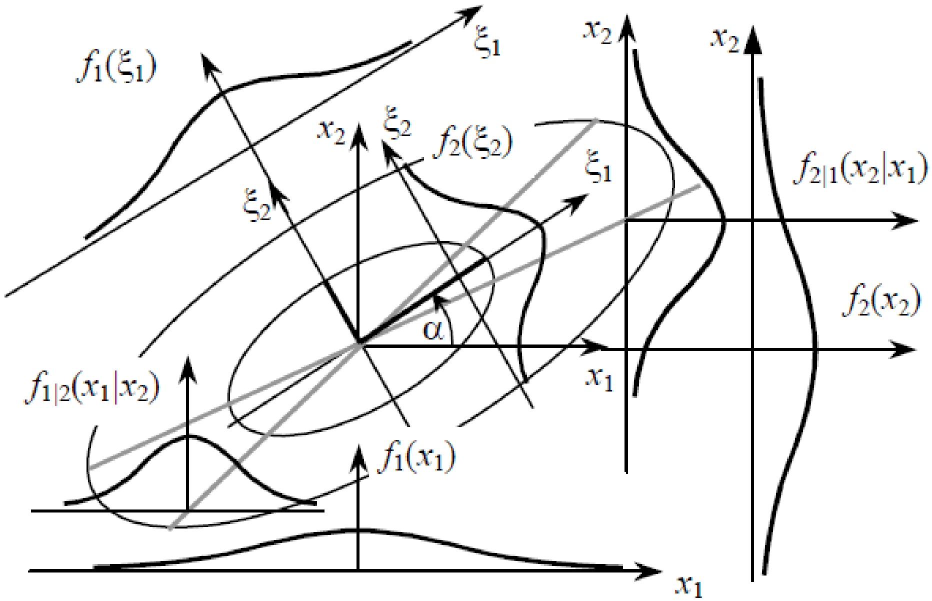
Если X, Y независимы, $f(x, y)$ можно получить из частных распределений:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}},$$

Эллипс, на котором показатель степени , а значит и плотность распределения, имеют постоянное значение,

$$B_k = \left\{ \xi_1, \xi_2 : \frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} = k^2 \right\}$$

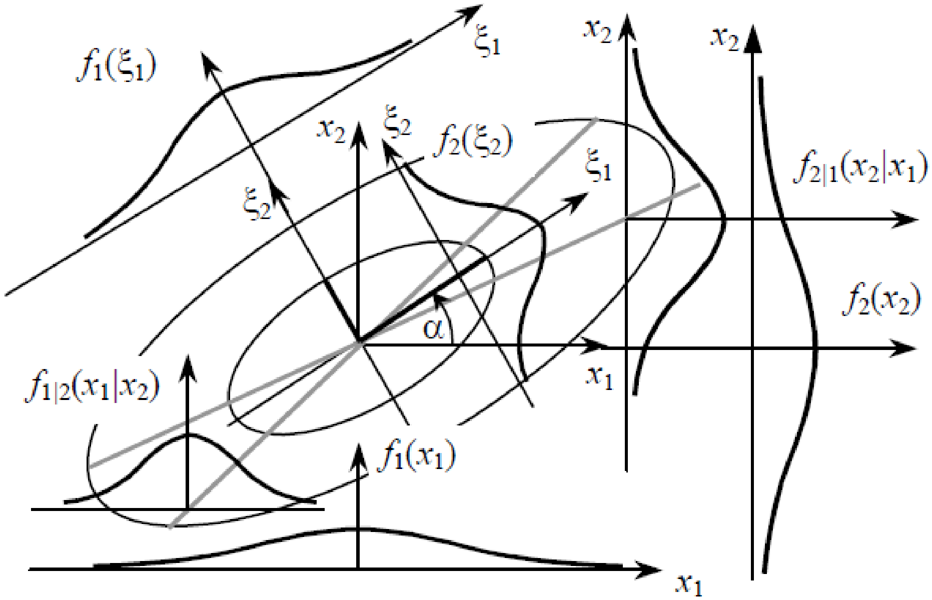
называется *эллипсом равной плотности*, ограниченная им область – *эллипсом рассеивания*, центр эллипса – *центром рассеивания*. Плотности $f_1(\xi_1)$ и $f_2(\xi_2)$ различны в разных точках эллипса с полуосями $k\sigma_1$, $k\sigma_2$ (рис.), но произведение $f_1(\xi_1)\, f_2(\xi_2) = f(\xi_1, \xi_2)$ постоянно при данном значении k.



. Двумерное нормальное распределение в главной (ξ_1, ξ_2) и произвольной (x_1, x_2) системах координат

Компоненты того же случайного вектора в произвольной системе координат x_1Ox_2, в которой направления осей не совпадают с главными осями рассеивания, уже не будут независимы (хотя бы потому, что линии регрессии не параллельны осям координат). Значение функции $f(x, y)$ совпадает с плотностью канонического нормального распределения в той же точке. Закон распределения $f(x, y)$ можно получить преобразованием канонического закона при повороте главных осей на некоторый угол α до совпадения с x_1Ox_2 :

$$f_X(\bar{x}) = f_\Xi(\bar{\xi})\Big|_{\bar{\xi}=C\bar{x}}, \quad \text{где } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \bar{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$



. Двумерное нормальное распределение в главной (ξ_1, ξ_2) и произвольной (x_1, x_2) системах координат

Квадратичную форму можно заменить матричным выражением, а произведение $\sigma_1\sigma_2$ выразить через определитель корреляционной матрицы:

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det D}} e^{-\frac{1}{2}\bar{\xi}^{\mathrm{T}} D^{-1}\bar{\xi}}.$$

Канонический двумерный нормальный закон в векторной форме легко обобщить на n-мерный нормально распределенный случайный вектор:

$$f(\bar{\xi}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\xi_i^2}{\sigma_i^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det D}} \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}^{\mathrm{T}} D^{-1}\bar{\xi}\right),$$

где $D^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$

В произвольной системе координат, в которой корреляционная матрица K не обязательно диагональная, а центр рассеивания находится в точке $\overline{m}$, плотность распределения имеет вид *нормального закона в общей форме*:

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} e^{-\frac{1}{2}(\overline{x}-\overline{m})^{\mathrm{T}} K^{-1} (\overline{x}-\overline{m})}.$$

Нормальное распределение системы (X, Y) в общем случае задается МО $m_x = M[X]$, $m_y = M[Y]$, а также дисперсиями D_x, D_y и корреляционным моментом K_{xy} или СКО σ_x, σ_y и коэффициентом корреляции r, определяющими корреляционную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} D_x & K_{xy} \\ K_{xy} & D_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

Выразив определитель det$K$ и обратную матрицу K^{-1} через параметры рассеивания

$$\det K = \sigma_x^2\sigma_y^2 - r^2\sigma_x^2\sigma_y^2 = (1-r^2)\sigma_x^2\sigma_y^2,$$

$$K^{-1} = \frac{1}{(1-r^2)\sigma_x^2\sigma_y^2}\begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -r\sigma_x\sigma_y \\ -r\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix},$$

при $n = 2$, получим плотность двумерного нормального распределения, заданного параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, r:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

В частности, при $r = 0$ формула превращается в нормальный закон двух независимых СВ, а при $m_x = m_y = 0$ – в каноническую форму двумерного нормального распределения.

Интегрирование совместной плотности по одной из переменных дает нормальное распределение другой СВ:

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}-r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Система двух нормально распределенных СВ задается пятью параметрами m_x, m_y, σ_x, σ_y, r. Если $r \neq 0$, то корреляционную матрицу можно привести к диагональному виду преобразованием $D = CKC^T$. Необходимый угол поворота α найдем из условия обращения в ноль недиагональных элементов матрицы D:

$$0 = D_{12} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{1i}K_{ij}c_{2i} = -\frac{1}{2}\sigma_x^2 \sin 2\alpha + r\sigma_x\sigma_y \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \sin 2\alpha,$$

откуда следует

$$tg 2\alpha = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}\right), \text{ при } \sigma_x \neq \sigma_y .$$

Если разница между главными СКО уменьшается до ноля, соотношение непротиворечиво (не определено) при нулевом коэффициенте корреляции или при $\alpha = \pi/4$. Рассеивание с параметрами $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и нулевым коэффициентом корреляции называют *круговым* (эллипс рассеивания принимает форму круга). В круговом рассеивании все направления главные. Рассеивание можно считать *практически круговым*, если разность между СКО составляет менее четверти от их среднего арифметического.

Координаты центра рассеивания в новой системе координат

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}.$$

Дисперсии можно получить как диагональные элементы матрицы $D = CKC^T$:

$$\sigma_1^2 = D_{11} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{1i} K_{ij} c_{1i} = \sigma_x^2 \cos^2\alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha,$$

$$\sigma_2^2 = D_{22} = \sum_{i,j=1}^{2} c_{2i} K_{ij} c_{2i} = \sigma_x^2 \sin^2\alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha.$$