2. *Исследование модели системы биометрической аутентификации с использованием методов кластерного анализа (дополнение: синтез декоррелирующего преобразования для биометрических параметров)*

Для произвольного класса (с нулевым математическим ожиданием) с коррелированными параметрами $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y \end{bmatrix}$ произвести декорреляцию, рассчитав матрицу декорреляционного преобразования $\mathbf{D}^{-1}$, предварительно последовательно выполнив расчет следующих эмпирических параметров:

- дисперсии σ_x^2, σ_y^2, коэффициенты корреляции и ковариации q_{xy}, r_{xy};

- матрицы корреляции и ковариации $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ и обратные матрицы $\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{R}^{-1}$;

- собственные числа матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ и обратных матриц $\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{R}^{-1}$, решив характеристические уравнения вида $\det \ \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} \ $;

- составить матрицы собственных чисел матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ и $\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{R}^{-1}$

$$\Lambda_{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\mathbf{A}} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\mathbf{A}} \end{bmatrix};$$

- числа обусловленности матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ и обратных матриц $\mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{R}^{-1}$ по формуле

$$\mathrm{cond}(\mathbf{A}) = \frac{\max \ \lambda_1^{\mathbf{A}}, \lambda_2^{\mathbf{A}}}{\min \ \lambda_1^{\mathbf{A}}, \lambda_2^{\mathbf{A}}};$$

- найти собственные векторы $\mathbf{d}^{\mathbf{Q}}, \mathbf{d}^{\mathbf{R}}$ (с точностью до постоянной) матриц $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$, соответствующие каждому собственному числу $\lambda_1^{\mathbf{A}}, \lambda_2^{\mathbf{A}}$, решив матричные уравнения вида

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{d} = 0; \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}(\lambda) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}};$$

- провести нормализацию собственных векторов по Евклиду;
- составить матрицу, столбцами которой являются собственные вектора, вида

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1^{\mathbf{Q}}(\lambda_1^{\mathbf{Q}}) & d_1(\lambda_2^{\mathbf{Q}}) \\ d_2(\lambda_1^{\mathbf{Q}}) & d_2(\lambda_2^{\mathbf{Q}}) \end{bmatrix};$$

- составить матрицу декоррелирующего преобразования $\mathbf{D}^{-1}$;
- выполнить проверку разложения $\mathbf{Q} = \mathbf{D} \Lambda^{\mathbf{Q}} \mathbf{D}^{-1}$;
- выполнить декоррелирующее преобразование ко всем элементам исходной выборки вида $\tilde{\mathbf{v}} = D^{-1} \mathbf{v}$;
- отобразить графически распределения $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$.