Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(национальный исследовательский университет)
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

М.А. Басараб, Н.С. Коннова

Теория игр
в системах защиты информации

Учебно-методическое пособие по дисциплине
«Исследование операций»
для специальностей:
10.05.01 Компьютерная безопасность
10.05.03 Информационная безопасность

Москва
Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана

2018

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18

Издание доступно в электронном виде
на портале *ebooks.bmstu.ru*

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»
Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия

Рецензент:

Пролетарский А.В. – руководитель научно-учебного комплекса: «Информатика и системы управления», доктор технических наук, профессор

Басараб М.А., Коннова Н.С.

Теория игр в системах защиты информации. Учебно-методическое пособие / М.А. Басараб, Н.С. Коннова. – Москва : Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2018. – 46 с. : ил.
ISBN

Рассмотрены различные разделы задач теории игр и статистических решений. Охватываются основные разделы исследования операций, включая теории конфликтных ситуаций. Также представлены методические указания для выполнения лабораторных работ по дисциплинам «Исследование операций».

Пособие предназначено для студентов и магистров МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность», «Информационная безопасность автоматизированных систем» и «Компьютерная безопасность», а также студентов и аспирантов других специальностей, интересующихся современными методами решения задач теории игр и решения ряда практических задач исследования операций.

УДК 519.8 (075.8)

ББК 22.18

ISBN

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018

Содержание

Предисловие

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и др. задач в области информационной безопасности часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений [1-3]. В зависимости от целевой функции и характера ограничений такого рода задачи можно условно разбить на два типа:

1. *Задачи оптимизации*. Предполагается, что ограничения известны, и необходимо найти экстремальное решение, доставляющее минимум либо максимум функционалу того или иного вида. Задачи конечномерной оптимизации с одной целевой функцией называются также задачами *математического программирования*.

2. Принятие решений в условиях неопределенности (задачи *теории игр*). Поиск оптимального решения (стратегии) осуществляется при априори неизвестных действиях другого игрока (игроков), имеющего собственные интересы, либо состояниях внешней среды («игра с природой»).

Настоящее учебно-методическое пособие содержит основные сведения из теории по темам, формирующим курсы теории игр и исследования операций, а также предложенный набор упражнений для закрепления изученного материала. Упражнения представлены и виде лабораторного практикума с подробным разъяснением хода выполнения и разобранным примером решения. Для удобства каждое упражнение содержит различные варианты работ. Лабораторный практикум включает в себя задачи по принятия решений в условиях неопределённости, теории матричных игр.

Ряд работ имеет содержательную интерпретацию в области информационной безопасности [3], как, например, выбор оптимального набора средств безопасности (задача о покрытии), моделирование действии инсайдера (матричная игра).

При выполнении лабораторных работ целесообразно воспользоваться либо готовыми программными пакетами математического моделирования (Matlab, MathCAD), электронными таблицами (MS Excel) либо собственными программами, написанными на языке программирования высокого уровня. При подготовке отчета по каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с таким понятием, как вычислительная сложность метода, уметь провести качественный анализ его с другими методами, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

В данном пособии рассматриваются задачи теории игр , где ключевым понятием является выбор стратегий поведения участниками конкретной игры. Рассматриваются проблемы выбора и принятия решений в условиях конфликта интересов различных игроков.

1. Основные понятия и методы решения задач теории игр

Игра описывается перечнем игроков, набором стратегий для каждого игрока и указанием выигрышей, или платежей, игроков для каждой комбинации стратегий (ситуации в игре). Существуют различные виды игр (индивидуальные и кооперативные; антагонистические и неантагонистические; параллельные и последовательные; конечные и бесконечные; с полной и неполной информацией и т.д.), а также разные формы их задания (нормальная, развернутая формы, характеристическая функция и др.). В большинстве рассматриваемых игр, кроме специально оговоренных классов, предполагается, что игроки делают свои ходы одновременно, т.е. в условиях неопределенности, неосведомленности о выборе стратегии соперником.

В нормальной, или стратегической, форме игра описывается платёжной матрицей. Строки определяют стратегии первого игрока, а столбцы – второго. На пересечении двух стратегий можно увидеть выигрыши, которые получат игроки.

1.1. Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии

В антагонистических играх сумма всех выигрышей равна сумме всех проигрышей для любого хода. Именно поэтому их еще называют играми с нулевой суммой. В платежных матрицах таких игр, как правило, записывается одно число: поскольку оно является как выигрышем одного игрока, так и проигрышем другого (или выигрышем с обратным знаком).

<u>Формулировка матричной игры.</u> В общем случае игра двух игроков, *A* и *B*, с нулевой суммой записывается в виде *матрицы стратегий*:

Стратегии	b_1	b_2	**...**	b_n

a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Здесь c_{ij} – выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) при реализации ими своих стратегий a_i $(i = 1,...,m)$, b_j $(j = 1,...,n)$ соответственно.

Минимальный гарантированный выигрыш игрока *A* называется *нижней ценой игры*. Он равен $\max\limits_i \min\limits_j c_{ij}$. При плохой игре игрока *B* выигрыш может быть и большим. Минимально возможный проигрыш игрока *B* равен $\min\limits_j \max\limits_i c_{ij}$ и называется *верхней ценой игры*.

<u>Теорема о минимаксе.</u> *Пусть* (c_{ij}) *– произвольная матрица* $m \times n$, *тогда*

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} \le \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij},$$

где

$$A = 1,...,m, \quad B = 1,...,n.$$

Если нижняя и верхняя цены игры равны, их значение называется *ценой игры*.

<u>Теорема о седловой точке</u>. *Пусть* (c_{ij}) *– произвольная матрица* $m \times n$, *тогда*

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij} = \min_{j \in B} \max_{i \in A} c_{ij},$$

где $A = \overline{1,m}$, $B = \overline{1,n}$, *тогда и только тогда, когда* (c_{ij}) *имеет седловую точку* (i_0, j_0), *для которой* $c_{i_0 j_0}$ *является одновременно минимальным элементом строки и максимальным элементом столбца, и* $\max\limits_{i \in A} \min\limits_{j \in B} c_{ij} = \min\limits_{j \in B} \max\limits_{i \in A} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$ *– цена игры.*

Стратегии обоих противников в задачах с седловой точкой называются *оптимальными* и не зависят от дополнительно полученной информации.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки используют *смешанные* стратегии, т.е. попеременно используют две или более стратегий.

По определению,

x^* – оптимальная частота выбора стратегии для игрока *A*,

y^* – оптимальная частота выбора стратегии для игрока *B*,

если

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y),$$

где *E* обозначает математическое ожидание выигрыша.

Рассмотрим произвольную игру с матрицей стратегий

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

Смешанная стратегия игрока *A* – это упорядоченная система *m* действительных неотрицательных чисел x_i ($i = 1, \dots, m$), такая что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

S_m – множество всех смешанных стратегий игрока *A*.

Аналогично определяется смешанная стратегия игрока *B*: y_j ($j = 1, \dots, n$):

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

S_n – множество всех смешанных стратегий игрока *B*.

Стратегия игрока *A*, когда

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = x_{i+2} = \dots = x_m = 0,$$

а

$$x_i = 1,$$

называется *i-й чистой стратегией*. Аналогично определяется *j*-я чистая стратегия игрока *B*.

Если смешанная стратегия игрока *A*

$$X = (x_1, ..., x_m),$$

а смешанная стратегия игрока *B*

$$Y = (y_1, ..., y_m),$$

то математическое ожидание выигрыша игрока *A* равно

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \, .$$

Если существуют стратегии

$$X^* \in S_m, \ Y^* \in S_n$$

такие, что для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ выполняется

$$E\left(X, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y\right),$$

то X^*, Y^* называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков *A*, *B*; $E\left(X^*, Y^*\right)$ – *цена игры* для игрока *A*; X^*, Y^* – решение игры или *стратегическая седловая точка*.

<u>Основная теорема прямоугольных игр (теорема Неймана или теорема о минимаксе).</u> *Пусть задана матрица стратегий (5.1) и выбраны стратегии* $X = (x_1, ..., x_m) \in S_m$, $Y = (y_1, ..., y_m) \in S_n$*; математическое ожидание выигрыша игрока A имеет вид*

$$E(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j \, ;$$

тогда существуют и равны между собой

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X,Y) = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X,Y) = E(X^*, Y^*),$$

где (X^*, Y^*) *– стратегическая седловая точка.*

<u>Сведение матричной игры к задаче ЛП.</u> Рассмотрим прямоугольную игру с нулевой суммой и матрицей стратегий (5.1). Пусть

$$\min_{Y \in S_n} E(X,Y) = g(X),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ имеем

$$E(X,Y) \ge g(X).$$

В частности, для любой чистой стратегии Y_j и любых $X \in S_m$ имеем

$$\begin{cases} E(X,Y_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \ge g(X), \quad j = 1,\dots,n, \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases}$$

Пусть $g(X) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства на $g(X)$ и положим

$$u_i = \frac{x_i}{g(X)}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \ge 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ u_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = \dfrac{1}{g(X)} \end{cases}$$

Задача игрока *A* заключается в том, чтобы

$$g(X) \to \max,$$

т.е.

$$\begin{cases} W(U) = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \ge 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ u_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{cases} \tag{5.2}$$

Для игрока *B* поступаем аналогично. Пусть

$$\max_{X \in S_m} E(X,Y) = h(Y),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$

$$E(X,Y) \le h(Y).$$

В частности, для любой чистой стратегии X_i и любых $Y \in S_n$ имеем

$$\begin{cases} E(X_i, Y) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \le h(Y), \quad i = 1, \ldots, m, \\ y_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{cases}$$

Пусть $h(Y) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства на $h(Y)$ и положим

$$v_j = \frac{y_j}{h(Y)}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \ge 1, \quad i = 1, \ldots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} v_j = \frac{1}{h(Y)}. \end{cases}$$

Задача игрока *B*:

$$h(Y) \to \min,$$

т.е.

$$\begin{cases} Z(V) = \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.3}$$

Задачи (5.2) и (5.3) – прямая и двойственная задачи ЛП:

$$\min W(U) = W(U^*) = \max Z(V) = Z(V^*).$$

Оптимальные стратегии определяются как

$$X^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*), \quad Y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*),$$

где

$$x_i^* = \frac{u_i^*}{W(U^*)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$y_j^* = \frac{v_j^*}{Z(V^*)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i^*}{W(U^*)} \geq \frac{1}{W(U^*)}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j^*}{Z(V^*)} \leq \frac{1}{Z(V^*)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Цена игры

$$E(X^*, Y^*) = \frac{1}{W(U^*)} = \frac{1}{Z(V^*)}.$$

Верно и обратное: если X^*, Y^* – оптимальные стратегии A и B, то

$$u_i^* = \frac{x_i^*}{g(X^*)}, \quad v_j^* = \frac{y_j^*}{h(Y^*)} \ -$$

оптимальные решения прямой и двойственной задач ЛП (5.2) и (5.3).

Лабораторная работа № 1

Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии

Цель работы

Изучить постановку антагонистической игры двух лиц в нормальной форме; найти решение игры за обоих игроков в смешанных стратегиях (стратегическую седловую точку).

Постановка задачи и методические указания

Для игры, заданной матрицей стратегий c_{ij}, требуется найти оптимальные смешанные стратегии обоих игроков, сведя матричную игру к задаче ЛП (прямой для одного игрока и двойственной для другого). Задачи ЛП следует решать симплекс-методом, приведя начальные, промежуточные и конечные симплекс-таблицы. Также по окончанию алгоритма полученные решения необходимо проверить на допустимость.

Пример выполнения работы

Пусть матрица стратегий имеет вид

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	3	9	6
a_2	2	6	2	3
a_3	7	2	6	5

Найдем смешанные стратегии для игрока *A*. Для этого составим систему уравнений:

$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 \geq g,$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq g,$$

$$9x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq g,$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq g,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

где g – минимальный выигрыш.

Разделим систему на функцию g:

$$u_1 + 2u_2 + 7u_3 \geq 1,$$

$$3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \geq 1,$$

$$9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \geq 1,$$

$$6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \geq 1,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1/g.$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$W = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \min;$$

$$u_1 + 2u_2 + 7u_3 \geq 1,$$

$$3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \geq 1,$$

$$9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \geq 1,$$

$$6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \geq 1,$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

Находим оптимальное решение:

$$u_1 = 1/57,\ u_2 = 7/57,\ u_3 = 2/19,$$

$$W = 14/57,$$

$$g = 1/W = 57/14.$$

Оптимальные стратегии:

$$x_1 = u_1\mathrm{g} = 1/57 \cdot 57/14 = 1/14,$$

$$x_2 = u_2\mathrm{g} = 7/57 \cdot 57/14 = 1/2,$$

$$x_3 = u_3\mathrm{g} = 2/19 \cdot 57/14 = 3/7.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока A равна

$$(1/14,\ 1/2,\ 3/7).$$

Для нахождения смешанной стратегии игрока B составим систему

$$y_1 + 3y_2 + 9y_3 + 6y_4 \leq h,$$

$$2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq h,$$

$$7y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 5y_4 \leq h,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1.$$

где h – максимальный проигрыш игрока B.

Разделим систему на h:

$$v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \le 1,$$

$$2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \le 1,$$

$$7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \le 1,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1/h.$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \to \max;$$

$$v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \le 1,$$

$$2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \le 1,$$

$$7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \le 1,$$

$$v_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Решение имеет вид

$$v_1 = 2/57,\ v_2 = 17/171,\ v_3 = 0,\ v_4 = 1/9,$$

$$Z = 14/57,$$

$$H = 1/Z = 57/14.$$

Частоты выбора стратегий:

$$y_1 = v_1h = 2/57\cdot 57/14 = 1/7,$$

$$y_2 = v_2h = 17/171\cdot 57/14 = 17/42,$$

$$y_3 = v_3h = 0,$$

$$y_4 = v_4h = 1/9\cdot 57/14 = 19/42.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока B равна

$$(1/7,\ 17/42,\ 0,\ 19/42).$$

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах строки матрицы соответствуют стратегиям игрока A, столбцы – стратегиям игрока B.

1.	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 & 9 & 17 \\ 11 & 5 & 6 & 9 & 18 \\ 12 & 7 & 13 & 16 & 15 \\ 11 & 7 & 2 & 13 & 7 \end{bmatrix}$	2.	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 14 & 14 & 13 & 11 \\ 17 & 6 & 14 & 4 & 3 \\ 18 & 16 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	3.	$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 6 & 15 & 10 \\ 3 & 3 & 15 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 16 & 0 & 10 \\ 16 & 18 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 17 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 4 & 16 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 11 & 19 \end{bmatrix}$	5.	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 17 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 10 & 16 \\ 4 & 19 & 11 & 15 & 2 \\ 17 & 19 & 6 & 17 & 16 \end{bmatrix}$	6.	$\begin{bmatrix} 6 & 17 & 16 & 18 & 15 \\ 18 & 8 & 16 & 8 & 8 \\ 6 & 13 & 18 & 4 & 3 \\ 15 & 14 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 17 & 9 & 18 \\ 16 & 18 & 13 & 13 & 12 \\ 11 & 1 & 5 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 15 & 19 & 4 \end{bmatrix}$	8.	$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 13 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 6 & 3 & 19 \\ 9 & 0 & 7 & 16 & 1 \end{bmatrix}$	9.	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 18 & 11 & 9 & 10 \\ 19 & 10 & 6 & 19 & 4 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 17 & 9 \\ 0 & 5 & 16 & 0 & 15 \\ 16 & 19 & 12 & 18 & 11 \\ 19 & 12 & 7 & 2 & 13 \end{bmatrix}$	11.	$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 14 & 16 & 11 \\ 2 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 16 & 19 & 5 \\ 2 & 10 & 12 & 17 & 3 \end{bmatrix}$	12.	$\begin{bmatrix} 13 & 15 & 7 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & 19 & 5 & 5 \\ 14 & 0 & 13 & 19 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 13 & 9 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 16 & 15 & 2 \\ 9 & 7 & 6 & 17 & 1 \\ 3 & 0 & 19 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	14.	$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 9 & 1 & 17 \\ 4 & 6 & 10 & 18 & 4 \\ 2 & 5 & 13 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 1 & 16 \end{bmatrix}$	15.	$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 16 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 15 & 3 \\ 11 & 18 & 17 & 0 & 14 \\ 7 & 12 & 17 & 19 & 0 \end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix} 16 & 17 & 8 & 15 & 17 \\ 0 & 3 & 19 & 8 & 2 \\ 13 & 19 & 7 & 15 & 9 \\ 11 & 15 & 2 & 16 & 2 \end{bmatrix}$	17.	$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 13 & 17 & 15 & 2 \\ 15 & 16 & 9 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 19 & 9 & 4 \end{bmatrix}$	18.	$\begin{bmatrix} 7 & 15 & 12 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 0 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 11 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 13 \end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 15 & 19 \\ 18 & 10 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & 15 & 8 & 1 \\ 3 & 15 & 15 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	20.	$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 9 & 17 & 11 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 13 & 9 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 14 & 19 & 14 \end{bmatrix}$	21.	$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 9 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 14 & 9 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 14 \\ 15 & 8 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
22.	$\begin{bmatrix} 13 & 7 & 8 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 18 & 11 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$	23.	$\begin{bmatrix} 7 & 19 & 1 & 19 & 8 \\ 7 & 18 & 5 & 2 & 6 \\ 15 & 3 & 16 & 19 & 4 \\ 5 & 12 & 19 & 14 & 18 \end{bmatrix}$	24.	$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 11 & 8 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 12 & 16 & 0 & 16 & 7 \\ 17 & 9 & 19 & 0 & 16 \end{bmatrix}$

25.	$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 18 & 4 & 15 \\ 16 & 13 & 19 & 3 & 19 \\ 12 & 1 & 1 & 19 & 12 \end{bmatrix}$	26.	$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 6 & 15 & 11 \\ 2 & 18 & 17 & 19 & 8 \\ 19 & 7 & 14 & 15 & 12 \\ 17 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$	27.	$\begin{bmatrix} 12 & 19 & 10 & 12 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 18 & 7 & 3 & 8 & 14 \\ 5 & 12 & 6 & 7 & 17 \end{bmatrix}$
28.	$\begin{bmatrix} 12 & 12 & 17 & 9 & 3 \\ 7 & 16 & 11 & 19 & 3 \\ 16 & 11 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$	29.	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 13 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 3 & 8 \\ 18 & 19 & 13 & 7 & 0 \\ 15 & 1 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	30.	$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 7 & 13 & 10 \\ 8 & 14 & 5 & 5 & 16 \\ 13 & 16 & 11 & 5 & 14 \\ 13 & 6 & 18 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры в смешанных стратегиях симплекс-методом за обоих игроков (прямая и двойственная задачи ЛП) с приведением начальной, всех промежуточных и заключительной симплекс-таблиц для обоих игроков; проверку решения.

Контрольные вопросы

1. Определение матричной игры с нулевой суммой.
2. Верхняя и нижняя цена игры. Теорема о минимаксе.
3. Цена игры. Теорема о седловой точке.
4. Основная теорема прямоугольных игр.
5. Смешанные стратегии.

1.2. Аналитический и численный (Брауна-Робинсона) методы решения антагонистической игры в смешанных стратегиях

Если в игре, заданной платежной матрицей, отсутствует седловая точка и требуется решение игры в смешанных стратегиях, то помимо сведения задачи в задаче линейного программирования (см. раздел 3.1), существуют также аналитический и различные численные методы решения.

В данном разделе мы подробнее остановимся на аналитическом (обратной матрицы) и Брауна-Робинсона методах нахождения смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Аналитический метод. Пусть задана $(m \times n)$-игра Г двух игроков, А и В, с матрицей стратегий **C**.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$ – смешанные стратегии игроков А и В соответственно. Тогда множества индексов $A_{\mathbf{x}} = \{i \mid i \in A, x_i > 0\}$, $B_{\mathbf{y}} = \{j \mid j \in B, y_j > 0\}$, где $A = \{1, 2, ..., m\}$, $B = \{1, 2, ..., n\}$, называются *спектрами стратегий* x и y соответственно. Таким образом, в спектр включаются только стратегии, реализуемые с ненулевыми вероятностями.

Чистая стратегия $i \in A$ $(j \in B)$ игрока А (В) называется *существенной*, если существует оптимальная стратегия $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*) \in S_m$ $(\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in S_n)$ этого игрока, для которой $x_i^* > 0$ ($y_j^* > 0$).

Спектр A^* (B^*) любой оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ $(\mathbf{y}^*)$ может состоять лишь из существенных стратегий.

Стратегия $\mathbf{x}$ $(\mathbf{y})$ игрока А (В) называется *вполне смешанной*, если ее спектр состоит из множества всех чистых стратегий игрока, т.е. $A_{\mathbf{x}} = A$ $(B_{\mathbf{y}} = B)$.

Ситуация равновесия в игре $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ называется *вполне смешанной*, если стратегии $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ – вполне смешанные.

Игра Γ называется *вполне смешанной*, если каждая ситуация равновесия в ней является вполне смешанной.

Теорема 1. *Вполне смешанная игра* $(m \times n)$*-игра* Γ *имеет единственную ситуацию равновесия* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *и квадратную матрицу* $(m = n)$ *; если цена игры* $\upsilon \neq 0$*, то матрица* **C** *невырожденная и*

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \ \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \ \upsilon = \frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{u} = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$.

<u>Итерационный метод Брауна – Робинсона.</u> В общем случае, для решения произвольной $(m \times n)$-игры Γ можно применить приближенные методы, простейшим из которых является метод Брауна–Робинсона.

Пусть в первой партии оба игрока произвольно выбирают некоторые чистые стратегии. Тогда в партии с номером *k* каждый игрок должен выбирать чистую стратегию, максимизирующую его ожидаемый выигрыш относительно наблюдаемой эмпирической смешанной стратегии противника, рассчитанную за предыдущие (*k*–1) партий.

Пусть в течение первых *k* шагов первый игрок использовал каждую *i*-ю стратегию $\tilde{x}_i[k]$ раз, а второй использовал каждую *j*-ю стратегию $\tilde{y}_j[k]$ раз. Тогда в следующей, (*k*+1)-й партии игроки будут использовать свои стратегии с номерами $i[k]$ $j[k]$, исходя из оптимизации оценок верхней и нижней цен игры:

$$\bar{\upsilon}[k] = \max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\underline{\upsilon}[k] = \min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Усредним эти оценки по *k* шагам алгоритма:

$$\frac{1}{k}\bar{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \frac{1}{k}\sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \frac{1}{k}\sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Тогда оценки смешанных стратегий игроков А и В определяются соответственно векторами

$$\tilde{\mathbf{x}}[k] = \left(\frac{\tilde{x}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{x}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{x}_m[k]}{k} \right), \qquad \tilde{\mathbf{y}}[k] = \left(\frac{\tilde{y}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{y}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n[k]}{k} \right).$$

Для оценки цены игры имеем

$$\max_k \frac{1}{k} \underline{\upsilon}[k] \le \upsilon \le \min_k \frac{1}{k} \overline{\upsilon}[k].$$

Величина

$$\varepsilon[k] = \min_k \frac{1}{k} \overline{\upsilon}[k] - \max_k \frac{1}{k} \underline{\upsilon}[k] \tag{2}$$

Может выступать в качестве оценки погрешности итерационного алгоритма. Верна также

Теорема 2.

$$\lim_{k\to\infty} \min_k \frac{1}{k} \overline{\upsilon}[k] = \lim_{k\to\infty} \max_k \frac{1}{k} \underline{\upsilon}[k] = \upsilon.$$

Лабораторная работа № 2

Решение матричных игр с нулевой суммой аналитическим (матричным) и численным (Брауна–Робинсона) методами

Цель работы

Изучить аналитический (метод обратной матрицы) и численный (метод Брауна–Робинсона) подходы [1] к нахождению смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Постановка задачи

Решите приведенную в варианте задания игру (найдите цену игры и оптимальные стратегии обоих игроков) методами обратной матрицы и Брауна-Робинсона. Сравните полученные результаты.

Пример выполнения

Пусть (3×3)-игра Г задана матрицей

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формулам (1) дает следующее аналитическое решение задачи:

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right),\ \upsilon = 1{,}5\,.$$

Реализуем теперь алгоритм Брауна–Робинсона. Пусть на первом шаге игроки выбрали стратегии x_1, y_1. Учитывая, что игрок A выбрал x_1, игрок B мог получить один из выигрышей $(2, 1, 3)$. А если игрок B выбрал y_1, то возможные выигрыши игрока A были $(2, 3, 1)$. Следовательно, на втором этапе игрокам следует выбрать стратегии x_2 и y_2 соответственно.

Результаты расчетов для первых 12 шагов приведены в таблице 1.

Таким образом, за 12 шагов получены следующие приближенные смешанные стратегии:

$$\tilde{\mathbf{x}}[12]=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{7}{12}\right),\quad \tilde{\mathbf{y}}[12]=\left(\frac{1}{12},\frac{7}{12},\frac{1}{3}\right),$$

а погрешность согласно (2) равна

$$\varepsilon[12]=\frac{1}{3}.$$

Таблица 1. Первые шаги алгоритма Брауна–Робинсона для примера

№пп	Выбор А	Выбор В	Выигрыш А			Проигрыш В			$\frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k]$	$\frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k]$
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	x_1	y_1	2	3	1	2	1	3	3	1
2	x_2	y_2	3	3	3	5	1	4	3/2	1/2
3	x_2	y_2	4	3	5	8	1	5	5/3	1/3
4	x_3	y_2	5	3	7	9	3	6	7/4	3/4
5	x_3	y_2	6	3	9	10	5	7	9/5	5/5
6	x_3	y_2	7	3	11	11	7	8	11/6	7/6
7	x_3	y_2	8	3	13	12	9	9	13/7	9/7
8	x_3	y_3	11	4	14	13	11	10	14/8	10/8
9	x_3	y_3	14	5	15	14	13	11	15/9	11/9
10	x_3	y_3	17	6	16	15	15	12	17/10	12/10
11	x_1	y_3	20	7	17	17	16	15	20/11	15/11
12	x_1	y_2	21	7	19	19	17	18	21/12	17/12

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах (таблица 2) строки соответствуют стратегиям игрока А, столбцы – стратегиям игрока В. Необходимо выполнить N итераций численного метода до достижения заданной точности ε.

Таблица 2. Матрицы стратегий игры (3×3)

№	Матрица стратегий	№	матрица стратегий	№	матрица стратегий	№	матрица стратегий
1	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 1 & 6 & 19 \\ 17 & 11 & 11 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 1 & 18 & 11 \\ 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 17 & 18 \\ 14 & 6 & 16 \\ 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 17 & 8 & 18 \\ 16 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 16 & 19 \\ 5 & 19 & 12 \\ 16 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 18 \\ 15 & 22 & 5 \\ 16 & 3 & 12 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 16 \\ 15 & 10 & 0 \\ 10 & 7 & 10 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 5 \\ 17 & 13 & 15 \\ 9 & 13 & 19 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 14 \\ 15 & 5 & 0 \\ 7 & 19 & 13 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 18 & 13 & 15 \\ 0 & 13 & 16 \\ 1 & 17 & 9 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 17 & 4 & 9 \\ 0 & 16 & 9 \\ 12 & 2 & 19 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ 5 & 13 & 6 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 16 & 5 & 13 \\ 15 & 20 & 10 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 10 \\ 8 & 14 & 6 \end{pmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры аналитически; этапы решения матричной игры в смешанных стратегиях численным методом Брауна–Робинсона за обоих игроков (в виде таблицы и графиков) до уровня погрешности $\varepsilon \le 0{,}1$; оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение смешанной стратегии.
2. Что такое существенная матричная игра?
3. Каковы условия применимости аналитического метода нахождения смешанных стратегий?
4. Какая основная идея итерационного метода нахождения смешанных стратегий?

Лабораторная работа № 3

Цель работы: найти оптимальные стратегии непрерывной выпукло-вогнутой антагонистической игры аналитическим и численным методами.

Постановка задачи и методические указания

Пусть функция выигрыша (*ядро*) антагонистической игры, заданной на единичном квадрате непрерывна:

$$H(x,y) \in C(\Pi),\ \Pi = [0,1]\times[0,1].$$

Тогда существуют нижняя и верхняя цены игры, и кроме того

$$h = \overline{h} \equiv \max_F \min_y E(F,y) = \min_G \max_x E(x,G) \equiv \underline{h},$$

а для среднего выигрыша игры имеют место равенства

$$E(x,G) = \int_0^1 H(x,y)\,\mathrm{d}G(y),\ E(F,y) = \int_0^1 H(x,y)\,\mathrm{d}F(x),$$

где $F(x), G(y)$ – произвольные вероятностные меры выбора стратегий для обоих игроков, заданные на единичном интервале.

Выпукло-вогнутая игра всегда разрешима в чистых стратегиях.

1 ***Аналитическое решение.*** Пусть функция ядра имеет вид

$$H(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey.$$

Если выполняются условия

$$H_{xx} = 2a < 0,\ H_{yy} = 2b > 0,$$

то игра является выпукло-вогнутой.

Для нахождения оптимальных стратегий найдем производные функции ядра по каждой переменной:

$$H_x = 2ax + cy + d,\ H_y = 2by + cx + e.$$

После приравнивания производных к нулю, получим

$$x = -\frac{cy+d}{2a},\ y = -\frac{cx+e}{2b}.$$

Учитывая, что x, y должны быть неотрицательными, для оптимальных стратегий соответственно имеем

$$\psi(y)=\begin{cases}-\dfrac{cy+d}{2a}, & y\ge -\dfrac{d}{c},\\ 0, & y<-\dfrac{d}{c}.\end{cases},\qquad \varphi(x)=\begin{cases}-\dfrac{cx+e}{2b}, & x\le -\dfrac{e}{c},\\ 0, & x>-\dfrac{e}{c}.\end{cases}$$

Совместное решение этой системы дает аналитическое решение

$$h=H(x^*,y^*)\,.$$

2 ***Численное решение.*** В общем случае для произвольной игры с непрерывным ядром можно использовать метод аппроксимации функции выигрышей на сетке.

Введем параметр разбиения N и

$$\forall N=1,2,\ldots,$$

зададим аппроксимацию функции ядра на единичном квадрате

$$H^{(N)}=(H_{ij}^{(N)})\,,\ H_{ij}^{(N)}=H(i/N,\,j/N)\,,\ i,j=0,\ldots,N\,.$$

Рассматривая каждую $H^{(N)}$ как матрицу конечной антагонистической игры двух лиц, найдем оптимальные смешанные стратегии (по теореме Неймана о минимаксе они всегда существуют):

$$X^{(N)}=(x_0^{(N)},\ldots,x_N^{(N)})\,,\ Y^{(N)}=(y_0^{(N)},\ldots,y_N^{(N)})\,.$$

Ожидаемый выигрыш при это будет равен

$$h^{(N)}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}H_{ij}^{(N)}x_i^{(N)}y_j^{(N)}\,,$$

а в пределе для исходной непрерывной задачи имеем

$$h=\lim_{N\to\infty}h^{(N)}\,.$$

Пример выполнения

Пусть задана игра

a	***b***	***c***	***d***	***e***

-3	3/2	18/5	-18/50	-72/25

Аналитическое решение. Функция ядра имеет вид:

$$H(x.y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey$$

Проверим выполнимость условий для принадлежности игры к классу выпукло-вогнутых:

$$H_{xx} = 2a = -6 < 0$$

$$H_{yy} = 2b = 3 > 0$$

$H_{xx} < 0$ и $H_{yy} > 0$, значит представленная игра выпукло-вогнутая. Для нахождения оптимальных стратегий найдём производные функции ядра по каждой переменной:

$$H_x = 2ax + cy + d = -6x + \frac{18}{5}y - \frac{18}{50}$$

$$H_y = 2by + cx + e = 3y + \frac{18}{5}x - \frac{72}{25}$$

После приравнивания производных к нулю получим:

$$x = -\frac{cy + d}{2a} = -\frac{\frac{18}{5}y - \frac{18}{50}}{-6} = \frac{\frac{18}{5}y - \frac{18}{50}}{6}$$

$$y = -\frac{cx + e}{2b} = -\frac{\frac{18}{5}x - \frac{72}{25}}{3}$$

Учитывая, что x и y должны быть неотрицательными, для оптимальных стратегий соответственно имеем:

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{\frac{18}{5}y - \frac{18}{50}}{6}, y \geq \dfrac{1}{10} \\ 0, y < \dfrac{1}{10} \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\frac{18}{5}x - \frac{72}{25}}{3}, x \leq \dfrac{4}{5} \\ 0, x > \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Найдем общее решение этих уравнений. Для этого подставим в выражение для y выражение для x:

$$y=-\frac{\frac{18}{5}\left(\frac{\frac{18}{5}y-\frac{18}{50}}{6}\right)-\frac{72}{25}}{3}=-\frac{\frac{18}{5}\left(\frac{180y-18}{300}\right)-\frac{72}{25}}{3}$$

$$=-\frac{\frac{3240y-324}{1500}-\frac{72}{25}}{3}=-\frac{3240y-324-4320}{4500}$$

$$=-\frac{3240y-4644}{4500}=\frac{-90y+129}{125}$$

$$125y=-90y+129$$

$$215y=129$$

$$y=\frac{3}{5}$$

Подставим получившееся значение для y в выражение для x:

$$x=\frac{\frac{18}{5}*\frac{3}{5}-\frac{18}{50}}{6}=\frac{108-18}{300}=\frac{3}{10}$$

Подставим получившееся значение x в выражение для y для проверки:

$$y=-\frac{\frac{18}{5}*\frac{3}{10}-\frac{72}{25}}{3}=\frac{144-54}{150}=\frac{3}{5}$$

Найдем седловую точку игры, подставив получившиеся значения x и y в функцию ядра:

$$H(x,y)=-3*\left(\frac{3}{10}\right)^2+\frac{3}{2}*\left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{18}{5}*\frac{3}{10}*\frac{3}{5}-\frac{18}{50}*\frac{3}{10}-\frac{72}{25}*\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{27}{100}+\frac{27}{50}+\frac{162}{250}-\frac{54}{500}-\frac{216}{125}$$

$$=\frac{-135+270+324-54-864}{500}=-\frac{459}{500}=-0{,}918$$

Численное решение. Для решения игры с непрерывным ядром используем метод аппроксимации функции выигрышей на сетке. С помощью программы найдём решения при различном шаге сетки для исходной задачи. Результат численного решения представлен ниже.

```
N=2
[[ 0.    -1.065 -1.38 ]
 [-0.93  -1.095 -0.51 ]
 [-3.36  -2.625 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.000 y=0.500 H=-1.065

N=3
[[ 0.    -0.793 -1.253 -1.38 ]
 [-0.453 -0.847 -0.907 -0.633]
 [-1.573 -1.567 -1.227 -0.553]
 [-3.36  -2.953 -2.213 -1.14 ]]
Есть седловая точка:
x=0.333 y=0.667 H=-0.907

N=4
[[ 0.    -0.626 -1.065 -1.316 -1.38 ]
 [-0.277 -0.679 -0.892 -0.919 -0.757]
 [-0.93  -1.106 -1.095 -0.896 -0.51 ]
 [-1.958 -1.909 -1.672 -1.249 -0.637]
 [-3.36  -3.086 -2.625 -1.976 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.250 y=0.750 H=-0.919

N=5
[[ 0.    -0.516 -0.912 -1.188 -1.344 -1.38 ]
 [-0.192 -0.564 -0.816 -0.948 -0.96  -0.852]
 [-0.624 -0.852 -0.96  -0.948 -0.816 -0.564]
 [-1.296 -1.38  -1.344 -1.188 -0.912 -0.516]
 [-2.208 -2.148 -1.968 -1.668 -1.248 -0.708]
 [-3.36  -3.156 -2.832 -2.388 -1.824 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.200 y=0.600 H=-0.948
```

```
N=6
[[ 0.    -0.438 -0.793 -1.065 -1.253 -1.358 -1.38 ]
 [-0.143 -0.482 -0.737 -0.908 -0.997 -1.002 -0.923]
 [-0.453 -0.692 -0.847 -0.918 -0.907 -0.812 -0.633]
 [-0.93  -1.068 -1.123 -1.095 -0.983 -0.788 -0.51 ]
 [-1.573 -1.612 -1.567 -1.438 -1.227 -0.932 -0.553]
 [-2.383 -2.322 -2.177 -1.948 -1.637 -1.242 -0.763]
 [-3.36  -3.198 -2.953 -2.625 -2.213 -1.718 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.333 y=0.500 H=-0.918

N=7
[[ 0.    -0.381 -0.7   -0.959 -1.156 -1.292 -1.367 -1.38 ]
 [-0.113 -0.42  -0.666 -0.851 -0.975 -1.037 -1.038 -0.978]
 [-0.348 -0.582 -0.754 -0.866 -0.916 -0.905 -0.833 -0.699]
 [-0.705 -0.866 -0.965 -1.003 -0.98  -0.895 -0.749 -0.542]
 [-1.185 -1.272 -1.298 -1.262 -1.166 -1.008 -0.789 -0.508]
 [-1.788 -1.801 -1.753 -1.644 -1.474 -1.243 -0.95  -0.596]
 [-2.513 -2.453 -2.331 -2.149 -1.905 -1.6   -1.234 -0.807]
 [-3.36  -3.227 -3.032 -2.776 -2.459 -2.08  -1.641 -1.14 ]]
Есть седловая точка:
x=0.286 y=0.571 H=-0.916

N=8
[[ 0.    -0.337 -0.626 -0.869 -1.065 -1.214 -1.316 -1.372 -1.38 ]
 [-0.092 -0.372 -0.606 -0.792 -0.932 -1.025 -1.071 -1.07  -1.022]
 [-0.277 -0.502 -0.679 -0.809 -0.892 -0.929 -0.919 -0.862 -0.757]
 [-0.557 -0.725 -0.846 -0.92  -0.947 -0.927 -0.861 -0.747 -0.587]
 [-0.93  -1.042 -1.106 -1.124 -1.095 -1.019 -0.896 -0.727 -0.51 ]
 [-1.397 -1.452 -1.461 -1.422 -1.337 -1.205 -1.026 -0.8   -0.527]
 [-1.958 -1.957 -1.909 -1.814 -1.672 -1.484 -1.249 -0.967 -0.637]
 [-2.612 -2.555 -2.451 -2.3   -2.102 -1.857 -1.566 -1.227 -0.842]
 [-3.36  -3.247 -3.086 -2.879 -2.625 -2.324 -1.976 -1.582 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.375 y=0.625 H=-0.927

N=9
[[ 0.    -0.301 -0.566 -0.793 -0.984 -1.137 -1.253 -1.333 -1.375 -1.38 ]
 [-0.077 -0.334 -0.554 -0.737 -0.883 -0.992 -1.064 -1.099 -1.096 -1.057]
 [-0.228 -0.441 -0.616 -0.755 -0.856 -0.921 -0.948 -0.939 -0.892 -0.808]
```

```
 [-0.453 -0.621 -0.753 -0.847 -0.904 -0.924 -0.907 -0.853 -0.761 -0.633]
 [-0.753 -0.876 -0.963 -1.013 -1.025 -1.001 -0.939 -0.841 -0.705 -0.533]
 [-1.126 -1.205 -1.247 -1.253 -1.221 -1.152 -1.046 -0.903 -0.723 -0.506]
 [-1.573 -1.608 -1.606 -1.567 -1.49  -1.377 -1.227 -1.039 -0.815 -0.553]
 [-2.095 -2.085 -2.039 -1.955 -1.834 -1.676 -1.481 -1.25  -0.981 -0.675]
 [-2.69  -2.636 -2.545 -2.417 -2.252 -2.05  -1.81  -1.534 -1.221 -0.87 ]
 [-3.36  -3.261 -3.126 -2.953 -2.744 -2.497 -2.213 -1.893 -1.535 -1.14 ]]
Седловой точки нет, решение методом Брауна-Робинсона:
x=0.222 y=0.556 H=-0.921

N=10
[[ 0.    -0.273 -0.516 -0.729 -0.912 -1.065 -1.188 -1.281 -1.344 -1.377 -1.38 ]
 [-0.066 -0.303 -0.51  -0.687 -0.834 -0.951 -1.038 -1.095 -1.122 -1.119 -1.086]
 [-0.192 -0.393 -0.564 -0.705 -0.816 -0.897 -0.948 -0.969 -0.96  -0.921 -0.852]
 [-0.378 -0.543 -0.678 -0.783 -0.858 -0.903 -0.918 -0.903 -0.858 -0.783 -0.678]
 [-0.624 -0.753 -0.852 -0.921 -0.96  -0.969 -0.948 -0.897 -0.816 -0.705 -0.564]
 [-0.93  -1.023 -1.086 -1.119 -1.122 -1.095 -1.038 -0.951 -0.834 -0.687 -0.51 ]
 [-1.296 -1.353 -1.38  -1.377 -1.344 -1.281 -1.188 -1.065 -0.912 -0.729 -0.516]
 [-1.722 -1.743 -1.734 -1.695 -1.626 -1.527 -1.398 -1.239 -1.05  -0.831 -0.582]
 [-2.208 -2.193 -2.148 -2.073 -1.968 -1.833 -1.668 -1.473 -1.248 -0.993 -0.708]
 [-2.754 -2.703 -2.622 -2.511 -2.37  -2.199 -1.998 -1.767 -1.506 -1.215 -0.894]
 [-3.36  -3.273 -3.156 -3.009 -2.832 -2.625 -2.388 -2.121 -1.824 -1.497 -1.14 ]]
Есть седловая точка:
x=0.300 y=0.600 H=-0.918
```

Таким образом, численно найдено решение задачи: `x≈0.300 y≈0.600 H≈-0.92`.

Варианты работы

N	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***
1	-5	5/12	10/3	-2/3	-4/3
2	-10	15/4	10	-4	-8
3	-4	4	8	-12/5	-28/5
4	-15	20/3	40	-12	-24
5	-3	12/5	6	-3/5	-24/5
6	-5	5/2	15	-3	-12
7	-3	3/2	5/2	-4	-11/5

8	-5	9/2	15	-9/2	-9
9	-6	32/5	16	-16/5	-64/5
10	-3	9	18	-9/5	-81/5
11	-5	5/6	10/3	-2/3	-2
12	-10	40/3	40	-16	-32
13	-4	2	8	-4/5	-32/5
14	-6	16/5	16	-16/5	-48/5
15	-15	9/2	24	-36/5	-84/5
16	-5	5/4	10/3	-2/3	-8/3
17	-4	10/3	16/3	-16/30	-112/30
18	-10	15	60	-12	-48
19	-15	15	75	-45/2	-105/2
20	-5	10/3	10	-2	-8

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение игры аналитически; 10 итераций численного решения задачи, итоговое численное решение; оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями.

Контрольные вопросы

1. Что такое ядро игры?

2. Почему выпукло-вогнутая игра всегда разрешима в чистых стратегиях?

3. Каковы условия выпуклости игры для одного игрока и вогнутости для другого?

1.3. «Игры с природой». Критерии принятия решений

В «игре с природой» вторым игроком является природа, которая действует («выбирает» стратегии) случайным образом. То есть она может или улучшать положение первого игрока, или ухудшать. Поэтому существует несколько критериев оценки результатов исследования игровой модели.

Критерий Бернулли (принцип недостаточного основания). Все состояния природы предполагаются равновероятными. Ищется стратегия, реализующая максимум математического ожидания выигрыша.

Критерий Вальда (пессимистический). В соответствии с этим критерием следует применять самую осторожную стратегию, которая сведет к минимуму вероятность (риск) проигрыша и доставит минимальную прибыль. Эта стратегия обеспечивается критерием:

$$\max \min a_{ij} .$$

То есть этот критерий совпадает с нижней ценой игры.

Критерий максимума (оптимистический). Этот критерий полагает, что природа будет максимально благосклонна к игроку. Можно выбирать самые авантюристические стратегии и они будут реализовываться:

$$\max \max a_{ij} .$$

Критерий Гурвица. Данный критерий занимает промежуточное значение между критерием Вальда и критерием максимума. Сам игрок определяет вероятность своего «везения» с помощью числового параметра $\alpha \in [0,1]$:

$$\max (\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha) \max a_{ij} .$$

Ответственное лицо, принимающее решение, определяет значение коэффициента α. Если потери могут быть весьма значительными, то значение коэффициента α приближается к единице.

Критерий Сэвиджа (критерий рисков). Этот критерий анализирует возможные *риски* от применения каждой из стратегий и выбирает такую стратегию, которая обеспечивает приемлемые потери. Риски по каждой стратегии определяются по формуле:

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}.$$

То есть из максимально возможного выигрыша вычитается выигрыш, полученный от использования выбранной стратегии. Смысл каждого элемента матрицы рисков состоит в том, что такие потери понесет фирма (точнее, недополученная прибыль), если для каждого текущего состояния природы будет выбрана неоптимальная стратегия. Оптимальная стратегия может быть определена по формуле:

$$\min(\max(\max a_{ij} - a_{ij})).$$

В качестве эмпирического интегрального критерия можно предложить использование различных рассмотренных выше критериев и выбор той стратегии, которая обеспечивает выигрыш в максимальном числе вариантов.

Лабораторная работа № 4
«Игры с природой». Критерии принятия решений

Цель работы

Изучить постановку «игры с природой»; научиться применять различные критерии (Бернулли, Вальда, максимума (оптимистическому), Гурвица, Сэвиджа) для выбора стратегии в условиях полной неопределенности.

Постановка задачи и методические указания

Для заданной по вариантам игры определить при помощи критериев Бернулли, Вальда, максимума (оптимистического), Гурвица, Севиджа оптимальные стратегии.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру с природой, описываемую матрицей стратегий:

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	12	3

Произведем расчет ожидаемых выигрышей для всех стратегий игрока по каждому из критериев: Бернулли (Б.), Вальда (В.), Гурвица (Г.), оптимистическому (опт.).

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	*Б.*	*В.*	*Г.*	*опт.*
a_1	5	8	7	5	4	**5,8**	**4**	6	8
a_2	1	10	5	5	6	5,4	1	5,5	10

a_3	2	4	3	6	2	3,4	2	4	6
a_4	3	5	4	12	3	5,4	3	**7,5**	**12**

Если воспользоваться критерием Бернулли, то следует руководствоваться стратегией a_1. Соответствующее математическое ожидание выигрыша при этом максимально и равно 5,8.

Пессимистическая стратегия (критерий Вальда) определяет выбор a_1 (нижняя цена игры равна 4).

Оптимистическая стратегия соответствует выбору a_4 (максимально возможный выигрыш 12).

Критерий Гурвица определим из условия равновероятной реализации пессимистической и оптимистической гипотез ($\alpha = 0,5$). Наилучшая стратегия: a_4 (ожидаемый выигрыш равен 7,5).

Составим теперь для рассматриваемой игры таблицу рисков. Например, если игрок выберет стратегию a_1, а природа реализует стратегию b_1, то игрок получит максимально возможную прибыль 5 (недополученная прибыль составит 0). Игрок угадал состояние природы. Но если природа реализует стратегию b_4, то игрок вместо максимально возможной прибыли 12 получит прибыль 5, а недополученная прибыль составит 7, так как

$$\min_i \max_j \left(\max_i c_{ij} - c_{ij} \right) = \min \{7, 7, 6, 5\} = 5 .$$

Таблица рисков имеет вид

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	7	2
a_2	4	0	2	7	0
a_3	3	6	4	6	4
a_4	2	5	3	0	3

Таким образом, оптимальная «рисковая» стратегия: a_4.

Окончательно, согласно принципу большинства, следует рекомендовать выбор стратегии a_4 – лучшей по трем из пяти рассмотренных критериев. Следующая по значимости стратегия: a_1 (лучшая по двум из пяти критериев).

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах строки платежной матрицы соответствуют стратегиям игрока, столбцы – состояниям природы. Найти стратегии игрока при реализации гипотез недостаточного основания (Бернулли), пессимизма (Вальда), оптимизма, смешанной (Гурвица) при α=0,5, рисков (Сэвиджа).

1.	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 16 & 9 & 17 \\ 11 & 5 & 6 & 9 & 18 \\ 12 & 7 & 13 & 16 & 15 \\ 11 & 7 & 2 & 13 & 7 \end{bmatrix}$	2.	$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 14 & 14 & 13 & 11 \\ 17 & 6 & 14 & 4 & 3 \\ 18 & 16 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$	3.	$\begin{bmatrix} 1 & 11 & 6 & 15 & 10 \\ 3 & 3 & 15 & 10 & 7 \\ 4 & 7 & 16 & 0 & 10 \\ 16 & 18 & 7 & 7 & 5 \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 16 & 3 & 14 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 17 & 0 & 12 \\ 10 & 3 & 4 & 16 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 11 & 19 \end{bmatrix}$	5.	$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 17 & 8 & 1 \\ 12 & 6 & 11 & 10 & 16 \\ 4 & 19 & 11 & 15 & 2 \\ 17 & 19 & 6 & 17 & 16 \end{bmatrix}$	6.	$\begin{bmatrix} 6 & 17 & 16 & 18 & 15 \\ 18 & 8 & 16 & 8 & 8 \\ 6 & 13 & 18 & 4 & 3 \\ 15 & 14 & 2 & 18 & 19 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 17 & 9 & 18 \\ 16 & 18 & 13 & 13 & 12 \\ 11 & 1 & 5 & 3 & 12 \\ 4 & 5 & 15 & 19 & 4 \end{bmatrix}$	8.	$\begin{bmatrix} 12 & 16 & 5 & 10 & 1 \\ 5 & 0 & 13 & 10 & 11 \\ 4 & 12 & 6 & 3 & 19 \\ 9 & 0 & 7 & 16 & 1 \end{bmatrix}$	9.	$\begin{bmatrix} 19 & 6 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 2 & 0 & 12 \\ 3 & 18 & 11 & 9 & 10 \\ 19 & 10 & 6 & 19 & 4 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 12 & 6 & 3 & 17 & 9 \\ 0 & 5 & 16 & 0 & 15 \\ 16 & 19 & 12 & 18 & 11 \\ 19 & 12 & 7 & 2 & 13 \end{bmatrix}$	11.	$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 14 & 16 & 11 \\ 2 & 11 & 12 & 10 & 5 \\ 5 & 3 & 16 & 19 & 5 \\ 2 & 10 & 12 & 17 & 3 \end{bmatrix}$	12.	$\begin{bmatrix} 13 & 15 & 7 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & 19 & 5 & 5 \\ 14 & 0 & 13 & 19 & 0 \\ 7 & 9 & 0 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

13.	$\begin{bmatrix} 10 & 11 & 16 & 15 & 2 \\ 9 & 7 & 6 & 17 & 1 \\ 3 & 0 & 19 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 13 & 10 & 6 \end{bmatrix}$	14.	$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 9 & 1 & 17 \\ 4 & 6 & 10 & 18 & 4 \\ 2 & 5 & 13 & 11 & 0 \\ 0 & 6 & 14 & 1 & 16 \end{bmatrix}$	15.	$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 16 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 3 & 15 & 3 \\ 11 & 18 & 17 & 0 & 14 \\ 7 & 12 & 17 & 19 & 0 \end{bmatrix}$
16.	$\begin{bmatrix} 16 & 17 & 8 & 15 & 17 \\ 0 & 3 & 19 & 8 & 2 \\ 13 & 19 & 7 & 15 & 9 \\ 11 & 15 & 2 & 16 & 2 \end{bmatrix}$	17.	$\begin{bmatrix} 18 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 13 & 17 & 15 & 2 \\ 15 & 16 & 9 & 17 & 11 \\ 2 & 3 & 19 & 9 & 4 \end{bmatrix}$	18.	$\begin{bmatrix} 7 & 15 & 12 & 7 & 12 \\ 9 & 8 & 0 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 11 & 10 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 12 & 13 \end{bmatrix}$
19.	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 & 15 & 19 \\ 18 & 10 & 6 & 10 & 12 \\ 5 & 5 & 15 & 8 & 1 \\ 3 & 15 & 15 & 12 & 0 \end{bmatrix}$	20.	$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 9 & 17 & 11 \\ 1 & 10 & 0 & 0 & 3 \\ 13 & 9 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & 14 & 19 & 14 \end{bmatrix}$	21.	$\begin{bmatrix} 15 & 19 & 9 & 4 & 12 \\ 9 & 5 & 14 & 9 & 9 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 14 \\ 15 & 8 & 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
22.	$\begin{bmatrix} 13 & 7 & 8 & 3 & 8 \\ 2 & 6 & 14 & 18 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 18 & 11 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & 14 \end{bmatrix}$	23.	$\begin{bmatrix} 7 & 19 & 1 & 19 & 8 \\ 7 & 18 & 5 & 2 & 6 \\ 15 & 3 & 16 & 19 & 4 \\ 5 & 12 & 19 & 14 & 18 \end{bmatrix}$	24.	$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 11 & 8 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 12 & 16 & 0 & 16 & 7 \\ 17 & 9 & 19 & 0 & 16 \end{bmatrix}$
25.	$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & 18 & 4 & 15 \\ 16 & 13 & 19 & 3 & 19 \\ 12 & 1 & 1 & 19 & 12 \end{bmatrix}$	26.	$\begin{bmatrix} 14 & 6 & 6 & 15 & 11 \\ 2 & 18 & 17 & 19 & 8 \\ 19 & 7 & 14 & 15 & 12 \\ 17 & 8 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$	27.	$\begin{bmatrix} 12 & 19 & 10 & 12 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 2 & 12 \\ 18 & 7 & 3 & 8 & 14 \\ 5 & 12 & 6 & 7 & 17 \end{bmatrix}$
28.	$\begin{bmatrix} 12 & 12 & 17 & 9 & 3 \\ 7 & 16 & 11 & 19 & 3 \\ 16 & 11 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 1 & 8 & 13 \end{bmatrix}$	29.	$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 13 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 3 & 8 \\ 18 & 19 & 13 & 7 & 0 \\ 15 & 1 & 3 & 10 & 8 \end{bmatrix}$	30.	$\begin{bmatrix} 12 & 13 & 7 & 13 & 10 \\ 8 & 14 & 5 & 5 & 16 \\ 13 & 16 & 11 & 5 & 14 \\ 13 & 6 & 18 & 12 & 4 \end{bmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; нахождение оптимальной стратегии в соответствии с критериями Вальда, максимума, Гурвица и Сэвиджа; выбор рекомендуемой стратегии по принципу простого большинства «побед».

Контрольные вопросы

1. Постановка «игры с природой».
2. Критерий недостаточного основания (Бернулли).
3. Критерии Вальда, максимума и Гурвица.
4. Критерий Сэвиджа. Риски.

1.4. Неантагонистические игры. Критерии выбора оптимальных стратегий в бескоалиционных играх нескольких игроков

Многие практические задачи принятия решения в условиях конфликта характеризуются большим числом участников и, как следствие, неантагонистичностью конфликтной ситуации. Если говорить о конфликте двух лиц и его моделях, то можно заметить, что он также не исчерпывается только антагонистическим случаем. Интересы игроков могут пересекаться, но не быть противоположными. Данные ситуации могут приводить к ситуациям, взаимовыгодным обоим игрокам (в антагонистических играх это невозможно), что делает осмысленным кооперирование (выбор согласованного решения), приводящее к увеличению выигрыша обоих игроков. Однако возможны конфликты, когда кооперация или соглашения невозможны по правилам игры. Поэтому в неантагонистических играх различают бескоалиционное поведение, когда соглашение между игроками запрещены правилами, и кооперативное поведение игроков, когда разрешается кооперация типа выбора совместных стратегий и совершения побочных платежей.

В данном разделе мы рассмотрим критерии выбора оптимальных стратегий в неантагонистических бескоалиционных играх и для удобства введем несколько определений.

Опр.: Система

$$\Gamma = (N, \{x_i\}_{i \ni N}, \{H_i\}_{i \ni N}),$$

в которой $N = \{1, 2, \dots, n\} -$ множество игроков, а X_i – множество стратегий игрока i, определённая на декартовом произведении множеств стратегий игроков $X = \Pi_{i=1}^{n} X_i$ (множество ситуаций игры), называется бескоалиционной игрой.

Бескоалиционная игра n лиц происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают свои стратегии x_i, из множеств стратегий X_i, $i = 1,2, \dots, n,$ в результате чего формируется ситуация $x = (x_i, \dots, x_n), x_i \in X_i$. После этого каждый игрок i получает выигрыш $H_i(x) = H_i(x_{1,} \dots, x_n)$ и игра заканчивается. Если множества чистых стратегий игроков X_i конечны, то игра называется конечной бескоалиционной игрой n лиц.

Равновесие по Нэшу. Ситуацией равновесия по Нэшу является линия поведения игроков, если она устойчива относительно индивидуального их отклонения. Т.е. ни одному игроку не выгодно менять свое мнение о выбранной стратегии при сохранении линии поведениями другими игроками, т.к. он первым же при этом и пострадает.

Опр.: Ситуация $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ называется ситуацией равновесия по Нэшу (в чистых стратегиях), если для всех $x_i \in X_i, i \in N$ справедливо неравенство:

$$H_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq H_i(x_i, x_{-i}^*)$$

Опр.: Совокупность всех равновесных по Нэшу ситуаций игры называется множеством равновесий Нэша.

Оптимальность по Парето. Состояние системы, при котором значение каждого частного критерия, описывающего состояние системы, не может быть улучшено без ухудшения положения других элементов.

Рассмотрим множество векторов $\{H(x)\} = \{H_1(x), \dots, H_n(x)\}, x \epsilon X, x = \Pi_{i=1}^{n} x_{i,}$ т.е. множество значений вектор-выигрышей игроков во всех возможных ситуациях $x \in X$.

Опр.: Ситуация $\bar{x}$ в бескоалиционной игре Г называется оптимальной по Парето, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеют место неравенства:

$$H_i(x) \geq H_i(x) \text{ для всех } i \in N \text{ и}$$

$$H_{io}(x) \geq \ H_{io}\overline{(x)} \text{ хотя бы для одного } i_o \in N.$$

Рассмотрим применение данных критериев выбора стратегий на примере нескольких классических игр.

Игра «Перекрёсток». Два автомобилиста двигаются по двум взаимно перпендикулярным дорогам и одновременно встречаются на перекрёстке. Каждый из них может остановится (1-я стратегия α_1 или β_1) и ехать (2-я стратегия α_2 или β_2).

Предполагается, что каждый из игроков предпочитает остановиться, а не пострадать в аварии, и проехать, если другой сделал остановку. Этот конфликт может быть формализован биматричной игрой с матрицей.

$$(A,B) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1{,}1) & (1-\varepsilon, 2) \\ (2{,}1-\varepsilon) & (0{,}0) \end{bmatrix} \end{array}$$

Равновесие Нэша: (1; 2) (2; 1)

Оптимальные по Парето: (1; 1) (1; 2) (2; 1).

Таким образом, для каждого игрока равновесной является стратегия «ехать», если другой игрок остановился, и наоборот, «остановиться», если другой выбрал стратегию «ехать». Однако выигрыш в две единицы каждый игрок может получить только при выборе стратегии «ехать», поэтому неизбежна борьба за лидерство.

Игра «Семейный спор». Рассматривается биматричная игра с матрицей

$$(A,B) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (4{,}1) & (0{,}0) \\ (0{,}0) & (1{,}4) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Существуют различные интерпретации этой игры, но наиболее известна следующая. Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из двух вечерних развлечений: футбольный матч (стратегия 1, более предпочтительная для мужчины, как видно из выигрышей в ситуации (α_1, β_1)) или театр (стратегия 2, более предпочтительная для женщины, что отражено в выигрышах ситуации (α_2, β_2)). Если их желания не совпадают, они остаются дома (α_1, β_2) или (α_2, β_1). Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, чем участвовать в развлечения (хотя и предпочтительном) одному, что отражается в нулевых выигрышах в ситуациях (α_1, β_2) и (α_2, β_1).

Равновесие Нэша: (4; 1) (1; 4);

Оптимальные по Парето: (4; 1) (1; 4)

Игра «Дилемма заключенного».

Интерпретация известной математической дилеммы такова: игроки являются пойманными преступниками, которые находятся под подозрением в совершении тяжкого преступления и содержатся раздельно. Если оба сознаются (стратегия 1), то будут осуждены на 5 лет каждый (ситуация (α_1, β_1)), если оба будут молчать (стратегия 2), то будут, за неимением доказательств, обвинены в незначительном преступлении и получат срок по 1 году (ситуация (α_2, β_2). Если признается один, а другой промолчит, то первый будет выпущен на свободу, а второй получит 10 лет (ситуации (α_1, β_2) и (α_2, β_1)). Таким образом, игра описывается матрицей

$$(A, B) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \beta_1 & \quad\beta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (-5,-5) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Парадокс игры в том, что стороннему наблюдателю очевидно выигрышной стратегией кажется "молчать", чтобы получить незначительный срок и выйти на свободу (ситуация (α_2, β_2)). Однако из этой ситуации велик соблазн отклониться каждому из игроков в пользу другой стратегии (говорить), чтобы получить больший выигрыш и выйти на свободу.

Поэтому в этой игре одна ситуация равновесия (α_1, β_1), которая даёт игрокам выигрыш $(-5, -5)$.

А остальные ситуации являются оптимальными по Парето.

Равновесие Нэша: (-5; -5);

Оптимальные по Парето: (-1; -1) (-10; 0) (0; -10).

Обратите внимание, что множество пересечений ситуаций, оптимальных по двум критериям, пусто.

Лабораторная работа № 5
Критерии выбора оптимальных стратегий в неантагонистических играх и свойства оптимальных решений

Цель работы

Изучить критерии выбора стратегий в неантагонистической бескоалиционной игре двух игроков на основе равновесия Нэша и оптимальности по Парето. Проверить данные критерии на примере известных игр (см. раздел 3.4). Исследовать свойства оптимальных решений неантагонистических бескоалиционных игр на примере биматричных $(2\,x\,2)$-игр.

Постановка задачи

1) Сгенерировать случайную биматричную игру (10x10). Найти ситуации, равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето, пересечение данных множеств. Произвести проверку реализованных алгоритмов на примере трёх известных игр: семейный спор, перекрёсток со смещением, дилемма заключённого.

2) Для заданной по варианту $\Gamma(A,B)$ – биматричной $(2\,x\,2)$-игры, пользуясь теоремами о свойствах оптимальных решений, найдите ситуации, равновесные по Нэшу, для исходной игры и для ее смешанного расширения.

Методические указания

Теорема: пусть $\Gamma(A,B)$ – биматричная $(m\,x\,m)$-игра, где A,B – невырожденные.

$$(A,B)=\begin{array}{cc} \begin{bmatrix}(\alpha_{11},\beta_{11}) & (\alpha_{12},\beta_{12})\\ (\alpha_{21},\beta_{21}) & (\alpha_{22},\beta_{22})\end{bmatrix} & \begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\end{matrix}\\ \begin{matrix}\qquad\tau_1 & \qquad\qquad\tau_2\end{matrix} & \end{array}$$

Если игра Г имеет вполне смешанную ситуацию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам:

$$x = v_2 u B^{-1},$$
$$y = v_1 A^{-1} u,$$
$$где$$
$$v_1 = 1/(uA^{-1}u), \quad v_2 = 1/(uB^{-1}u).$$

Возможны 3 случая:

1) Если в исходной игре Γ по крайней мере 1 игрок имеет строго доминирующую стратегию, тогда игра Γ и ее смешанное расширение $\overline{\Gamma}$ имеют единственную ситуацию равновесия по Нэшу.
2) Если игра Γ не имеет ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, то в игре существует вполне смешанная ситуация равновесия (x^*, y^*), согласно приведенной выше теореме.
3) Если игра Γ имеет две равновесные по Нэшу ситуации, в смешанном дополнении игры существует еще одна вполне смешанная ситуация равновесия (x^*, y^*).

Для дополнительной информации рекомендуется ознакомление с *§3.3.2, 3.3.3*, *3.4.1* и *3.7* из *[1]*.

Пример выполнения работы

Рассмотрим случайную биматричную игру:

(24/ 32)	(2/ 2)	(40/ 17)	(-46/-29)	(27/-42)	(-46/ -8)	(35/-20)	(-23/-16)	(-33/ 12)	(-50/ -1)
(-40/-11)	(28/-22)	(-15/-47)	(38/ 49)	(26/-25)	(-38/ 26)	(-35/ 35)	(-26/ 30)	(-37/ 23)	(-19/-30)
(-1/ 46)	(-36/-14)	(30/-17)	(-35/ 5)	(4/-22)	(7/-33)	(17/ -2)	(-6/-15)	(-8/-48)	(-33/-14)
(46/ 28)	(1/ -6)	(2/ 18)	(-48/-38)	***(45/ 49)***	(-3/-28)	(-29/ 37)	(-24/ 7)	(36/ 17)	(24/-19)
(-9/ 25)	(41/-48)	(-9/ 6)	(-17/-22)	(-30/ 12)	(-20/ -5)	(-44/ 32)	(41/-35)	(-43/ 42)	(9/-33)
(19/ 13)	(49/-37)	(0/-10)	(-30/ 39)	(-48/-16)	(38/ 42)	(-18/-31)	(-27/ -6)	(35/-16)	(11/-43)
(37/ 10)	(4/-38)	(-9/ 36)	(-7/-30)	(-21/ 5)	(-9/ -9)	(15/-30)	(-49/ 34)	(-23/ 43)	(-20/-15)
(-33/ 37)	(29/ 23)	(-29/ 5)	(24/ 17)	(-21/ 49)	(17/-30)	**(49/ 47)**	(41/ 8)	(-36/ 6)	(40/ 34)
(-40/ 9)	(24/-32)	(-45/ 41)	(49/ 34)	(1/-12)	*(47/ 43)*	(49/-11)	(-17/-39)	(26/ 24)	(-15/ -3)
(46/-49)	(9/ -5)	(28/ 36)	(-38/ 24)	(-11/-39)	(32/-41)	(9/-13)	(42/ 10)	(19/-18)	(37/ 4)

Стратегии первого игрока записаны по строкам, а второго – по столбцам.

Ситуации, равновесные по Нэшу, выделены курсивом и подчеркнуты.

Ситуации, оптимальные по Парето, выделены жирным и подчеркнуты.

Ситуации, и равновесные по Нэшу, и оптимальные по Парето, соответственно, выделены жирным курсивом и подчеркнуты.

Легко проверить, например, что кроме ситуаций (45, 49) и (49, 47) нет других ситуаций, в которых выигрыш одного из игроков можно было бы улучшить, не ухудшив при этом выигрыш другого. Следовательно, эти ситуации оптимально по Парето.

Аналогично с равновесием по Нэшу: на примере ситуации (47, 43) легко увидеть, что первому игроку не имеет смысла менять стратегию (строку матрицы) при фиксации выбора второго игрока (столбца), а второму игроку – не имеет смысла менять столбец в данной строке.

Рассмотрим биматричную игру:

(0/ 1) **(11/ 4)**
(7/ 8) (6/ 3)

Как видим, у этой игры есть две равновесные по Нэшу ситуации в чистых стратегиях (выделены жирным и подчеркнуты), поэтому в смешанном дополнении игры существует ещё одна вполне смешанная ситуация равновесия, которую мы можем рассчитать по формулам из методических указаний к заданию:

x=[0.625, 0.375], y=[0.417, 0.583]

Равновесные выигрыши v1=6.417, v2=3.625.

Варианты работы

Ниже приведены биматричные игры для второй части задания. Первая часть задания подразумевает генерацию случайной платежной матрицы.

$$(A,B) = \begin{bmatrix} (\alpha_{11},\beta_{11}) & (\alpha_{12},\beta_{12}) \\ (\alpha_{21},\beta_{21}) & (\alpha_{22},\beta_{22}) \end{bmatrix}:$$

1 $\begin{bmatrix} (5,0) & (8,4) \\ (7,6) & (6,3) \end{bmatrix}$ **2** $\begin{bmatrix} (6,7) & (8,4) \\ (2,1) & (9,3) \end{bmatrix}$ **3** $\begin{bmatrix} (3,1) & (5,0) \\ (9,6) & (2,3) \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} (4,7) & (5,2) \\ (0,2) & (7,3) \end{bmatrix}$ **5** $\begin{bmatrix} (5,8) & (7,4) \\ (11,7) & (6,9) \end{bmatrix}$ **6** $\begin{bmatrix} (3,8) & (2,4) \\ (1,3) & (12,5) \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} (0,1) & (9,2) \\ (4,6) & (6,3) \end{bmatrix}$ **8** $\begin{bmatrix} (4,7) & (8,3) \\ (2,1) & (10,6) \end{bmatrix}$ **9** $\begin{bmatrix} (5,1) & (10,4) \\ (8,6) & (6,9) \end{bmatrix}$

10 $\begin{bmatrix}(6,8) & (7,4)\\(0,1) & (9,3)\end{bmatrix}$ **11** $\begin{bmatrix}(3,0) & (5,4)\\(11,6) & (6,7)\end{bmatrix}$ **12** $\begin{bmatrix}(10,7) & (0,4)\\(2,1) & (9,3)\end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix}(4,1) & (6,2)\\(11,7) & (0,5)\end{bmatrix}$ **14** $\begin{bmatrix}(9,8) & (7,4)\\(2,1) & (10,3)\end{bmatrix}$ **15** $\begin{bmatrix}(0,10) & (9,1)\\(7,8) & (6,11)\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}(8,7) & (1,2)\\(2,0) & (3,4)\end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix}(1,5) & (6,4)\\(7,9) & (3,8)\end{bmatrix}$ **18** $\begin{bmatrix}(2,7) & (8,4)\\(1,1) & (11,3)\end{bmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; нахождение оптимальных ситуаций по Парето, устойчивых ситуаций по Нэшу, пересечения этих множеств; нахождение для игры по варианту всех равновесных ситуаций, в том числе в смешанном дополнении игры.

Контрольные вопросы

1. Определение равновесных ситуаций в игре.

2. Оптимальность по Парето в бескоалиционных неантагонистических играх нескольких игроков.

3. Нахождение равновесия в смешанных стратегиях.

4. Пусть $\Gamma(A, B)$ – биматричная $(m \times m)$-игра. Всегда ли существуют смешанные стратегии x^*, y^* игроков 1 и 2 соответственно, такие что (x^*, y^*) – ситуация равновесия по Нэшу?

1.5. Позиционные игры. Метод обратной индукции

Опр.: **Позиционная игра – это** *бескоалиционная игра*, моделирующая процессы последовательного принятия решений игроками в условиях меняющейся во времени и неполной информации.

Смысл позиционной игры заключается в последовательном переходе от одного состояния игры в другой, когда игроки выбирают одно из возможных действий согласно правилам игры, либо случайным образом (случайный ход).

Пример позиционных игр: игры в крестики-нолики, шашки, шахматы, карточные игры, домино и другое. Интересно заметить, что право выбора первого хода в этих играх определяется *случайным образом*.

Опр.: **Позиция** – состояние игры (отсюда и название – позиционные игры).

Опр.: **Альтернатива** – возможные выборы в каждой позиции.

Опр.: **Дерево игры** – множество позиций в виде древовидного упорядоченного множества.

Опр.: **Цепь** - каждая окончательная вершина определяет единственную цепь (последовательность идущих друг за другом звеньев), связывающую начальную вершину с данной.

Позиционная форма игры. Рассмотрим простейший пример – игру «крестики нолики» на поле 3 × 3.

Пронумеруем соответствующие клетки:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Обозначение игроков: **X** и **0.**

Дерево этой игры (в нём информационные множества одноточечные) будет иметь вид, как на рисунке 1, где цифры рёбер – это номера клеток, в которых ставится соответствующей **X** и **0**, а в вершине, обозначенный **N,** ход делает Природа, равновероятно (например, подбрасывается монетка), выбирая очерёдность хода. Также стоит учесть, что дерево отображает все возможные ходы независимо от их разумности.

Условная запись позиционной формы игры описывается с помощью нижеперечисленных элементов:

1. Список игроков;
2. Дерева игры;
3. Указания для каждой вершины номера игрока (или Природы *(случайный механизм)* – игрок номер 0), который делает ход в этой вершине;
4. Список ходов, доступных игроку в каждой вершине и соответствия между ходами и непосредственно следующими вершинами;
5. Информационные множества;
6. Указание выигравшей в каждой терминальной (окончательной) вершине;
7. Вероятное распределение на множестве ходов в каждой вершине, в котором ход делает Природа.

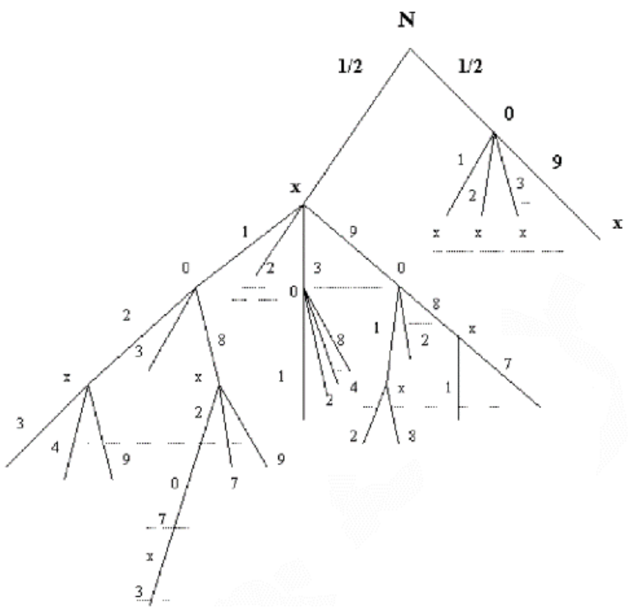

Рисунок 1

<u>Опр.:</u> Игра в позиционной форме называется **игрой с совершённой информацией,** если каждое информационное множество состоит из

единственной вершины *(пример игр с совершенной информацией: шахматы, шашки).* В противном случае игра называется **игрой с несовершенной информацией**.

Соответственно, различают позиционные игры:

1. Опр.: **С полной информацией** *(пример: шашки, шахматы)*.

Каждый игрок при своём ходе знает ту позицию дерева игры, в которой он находится.

2. Опр.: **С неполной информацией** *(пример: домино).*

В игре с неполной информацией Природа делает ход первой, и он ненаблюдаем по крайней мере одним из игроков. В противном случае игра является игрой с полной информацией.

В играх с неполной информацией, игрок, делающий ход, не знает точно, в какой именно позиции дерева игры он фактически находится. Этому игроку известно лишь некоторое множество позиций, включающее в себя его фактическую позицию. Такое множество позиций называется информационным множеством. Тем самым, в игре с неполной информацией игрок при своём ходе знает, в каком информационном множестве он находится, но ему неизвестно, в какой именно позиции этого множества.

Метод обратной индукции.

В динамических играх с полной и совершенной информацией удобно решать игру методом обратной индукции. В методе обратной индукции рассматриваются все последние вершины игры, в которых один из игроков делает выбор, исходя из его рациональности. Далее процесс повторяется для всех предшествующих вершин, пока не дойдет до начальной вершины.

Для детального разбора обратной индукции в конечной игре с совершенной информацией, следует начинать с определения оптимального «действия» в последних вершинах дерева, где принимается решение (т.е. тех вершинах, для которых последователи – это только терминальные вершины). Когда решение, принимаемое игроком такой вершины, не зависит уже от стратегического взаимодействия и поэтому является простой задачей принятия решения. После, можно уже можно обратиться к «предпоследней» вершине и найти оптимальное решение там, предвидя ход, который будет сделан в последней вершине и т.д.

Также дадим определение под-игры: под-игрой называется поддерево, которое начинается с некоторой вершины дерева данной игры, содержит все вершины, следующие за ней, и только их.

Выигрышем внутренней (нетерминальной) вершины назовем цену соответствующей под-игры.

Таким образом, суть метода обратной индукции – в постепенном "сворачивании" дерева от конечных вершин к начальной (корню). Для каждой вершины, начиная от терминальных, и заканчивая корнем, определяется ее выигрыш по следующим правилам:

- Если данная вершина является терминальной, цена под-игры соответствует выигрышу в данной веришне.
- Если данная вершина имеет только одного потомка, ее выигрыш соответствует выигрышу потомка.
- Если данная вершина, соответствующая ходу игрока N, имеет несколько потомков, то выигрыш вершины соответствует выигрышу того потомка, для которого выигрыш игрока N максимален.
- Если данная вершина – корень дерева, то ее выигрыш соответствует цене всей игры.

<u>Пример:</u>

Рассмотрим игру, заданную деревом, приведенным на рисунке 2.

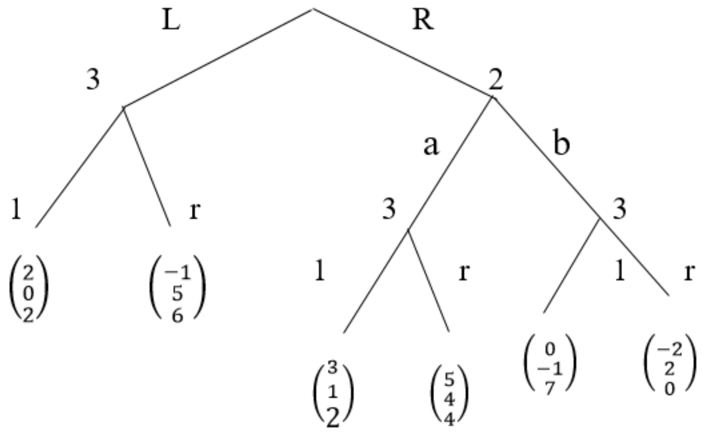

Рисунок 2 - Исходная игра

Обратная индукция дает нам ситуацию (σ_1, σ_2, σ_3):

σ_1 = R,

σ_2 = (a, если 1 играет r),

$$\sigma_3 = \begin{cases} r, \text{ если 1 играет l,} \\ r, \text{ если 1 играет r и 2 играет a,} \\ f, \text{ если 1 играет r и 2 играет b.} \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что это есть равновесие по Нэшу. Но есть и еще равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, в которых стратегии третьего игрока – это

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} f \\ r \\ f \end{pmatrix}$$

или

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} f \\ r \\ r \end{pmatrix}.$$

Однако можно проверить, что последние два равновесия Нэша не удовлетворяют принципу последовательной рациональности.

Общая теорема здесь выглядит следующим образом: *В любой конечной игре с совершенной информацией Γ_E существует ситуация равновесия по*

Нэшу в чистых стратегиях, которая может быть найдена с помощью обратной индукции. Более того, если ни один из игроков не имеет одинаковых выигрышей ни в одной из терминальных вершин, но существует единственное равновесие Нэша, которое может быть получено таким образом.

Редуцируем приведенную игру согласно правилам метода обратной индукции. Рассмотрим все вершины дерева, следующими для которых являются только терминальные вершины, и сделаем выбор за игрока, номер которого указан в узлах дерева (это игрок 3). Следовательно, выбирать будем по величине выигрыша, записанного в третьей позиции информационного множества терминальных вершин. После окончания процедуры выбора получим редуцированное дерево, изображенное на рисунке 3. После следующего шага метода обратной индукции (выбор за игрока 2) получим дерево на рисунке 4.

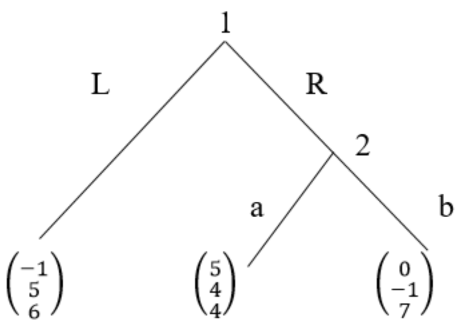

Рисунок 3 - Первая редуцированная игра

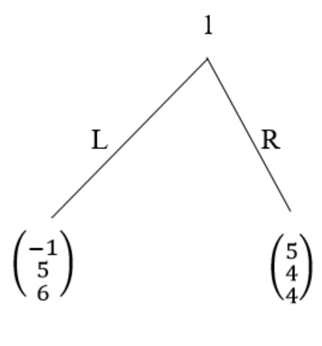

Рисунок 4 - Вторая редуцированная игра

На последнем шаге метода мы делаем выбор за игрока 1, которому, очевидно, рационально выбрать альтернативу, дающую выигрыш 5. Таким образом, игра решена и в ней найден оптимальный путь от корня до терминальной вершины по методу обратной индукции. Поскольку в терминальных вершинах совпадающих выигрышей не было, то такой путь единственный.

Лабораторная работа № 6

Решение позиционной игры с полной информацией методом обратной индукции

Цель работы

Изучить метод обратной индукции и его применение к решению конечных позиционных игр с полной информацией. Изучить свойства решений таких игр.

Постановка задачи

Найти решение конечношаговой позиционной игры с полной информацией. Для этого: сгенерировать и построить дерево случайной игры 2 или 3 игроков (на выбор) глубины не менее 7 и, используя метод обратной индукции, найти решение игры и путь (все пути, если он не единственный) к этому решению. Обозначить их на дереве.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру, заданную в позиционной форме в виде дерева, представленного на рисунке 1. Все вершины для удобства описания пронумерованы слева направо. Номер записан внутри обозначения вершины. В игре два игрока: A и B, у каждого – по две стратегии, поэтому дерево бинарное. Пусть первым ходим игрок A (ход в корне дерева), затем они ходят поочередно. Чтобы не загромождать рисунок, это на дереве не подписывалось у каждого узла, т.к. нетрудно определить, кто ходит в каждом из узлов, зная, чей ход первый.

Итак, метод обратной индукции заключается в установлении выигрышей для корня путём последовательного восхождения от листов (терминальных вершин). Выигрыш в узле, для обоих потомков которого выигрыши определены, устанавливаются равными выигрышам того потомка, при выборе которого игрок, осуществляющий ход, получит больший выигрыш.

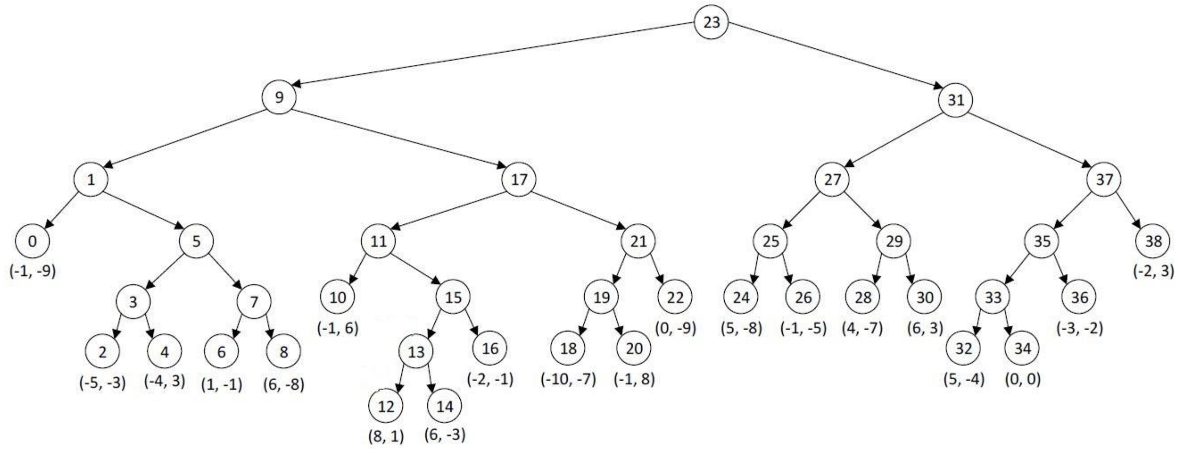

Рис. 1. Дерево исходной игры

Проследим ход метода обратной индукции. Напомним, что начинать нужно с узлов, следуют за которыми только терминальные вершины. Определим выигрыши для узла 13. В данном узле ход осуществляет игрок B. Поскольку выигрыш в узле 12 (1) больше выигрыша в узле 14 (–3), узлу 13 присваивается пара выигрышей (8, 1). Результат первого шага представлен на рис. 2.

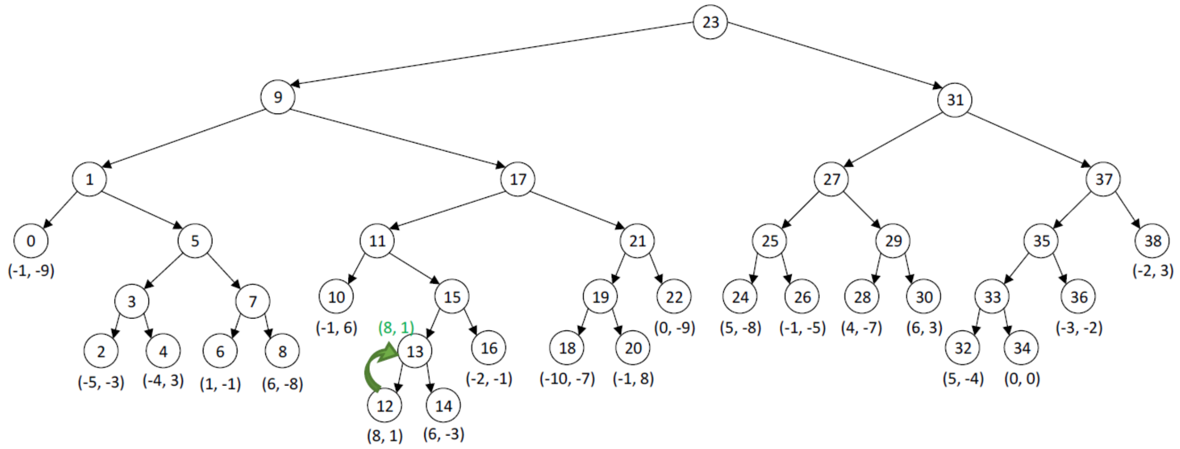

Рис. 2. Дерево игры на первой итерации обратной индукции

Аналогично определим пары выигрышей для узлов 3, 7, 15, 19, 33 с учётом того, что в данных узлах ходит игрок А. В узле 3 устанавливается пара выигрышей (–4, 3), т.к. $-4 > -5$, в узле 7 – (6, –8), т.к. $6 > 1$, в узле 15 – (8, 1), т.к. $8 > -2$ и т.д. (см. рис. 3, 4 и далее).

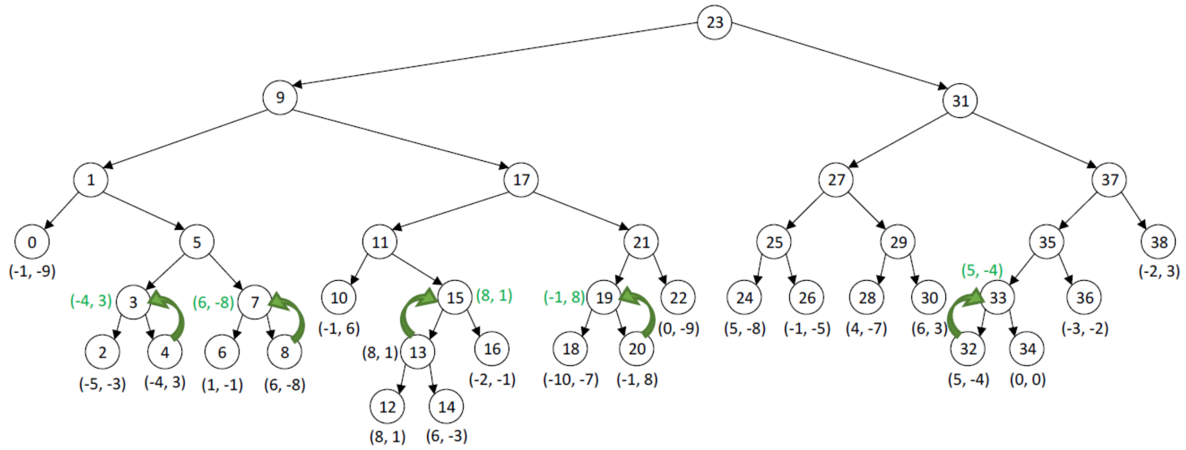

Рис. 3. Дерево игры на второй итерации обратной индукции

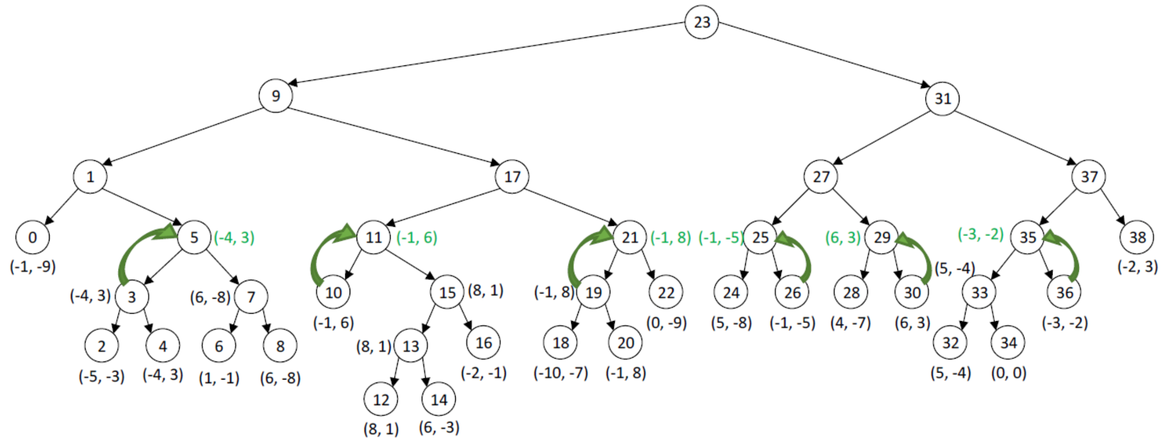

Рис. 4. Дерево игры на третьей итерации обратной индукции

Обратите внимание: на рис. 5 можно видеть, что в узле 17 для игрока А обе стратегии принесут одинаковый выигрыш и могут считаться оптимальными. Поэтому узлу 17 будет присвоено две пары выигрышей, и, следовательно, через этот узел будет проходить два пути: первый будет вести в узел 11, а второй – в узел 21.

На следующей итерации эти же пары выигрышей будут присвоены узлу 9 (рис. 6), т.к. для осуществляющего ход игрока B оба выигрыша в узле 17 будут больше выигрыша в узле 1 ($6 > -9$, $8 > -9$). В узле 31 также появляются две пары выигрышей, т. к. игрок B при выборе как узла 27, так и узла 37 получит выигрыш, равный 3.

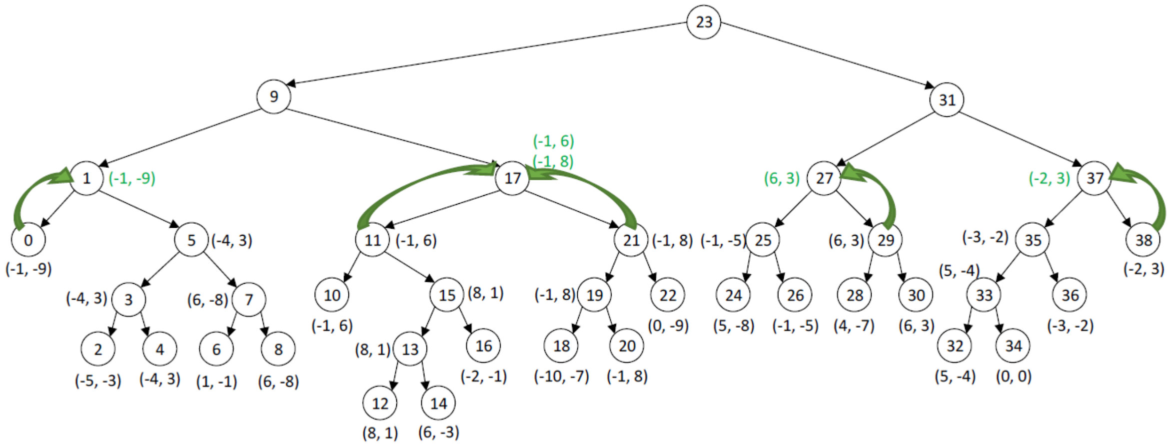

Рис. 5. Дерево игры на четвертой итерации обратной индукции

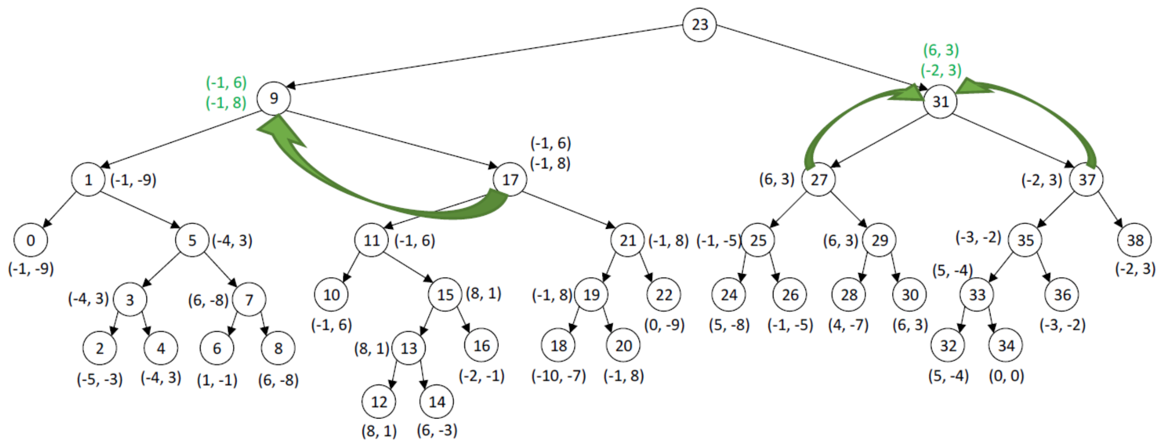

Рис. 6. Дерево игры на пятой итерации обратной индукции

На последней, шестой, итерации A осуществляет выбор между двумя узлами – 9 и 31, но т.к. в каждом узле по две пары выигрышей, всего может быть 4 различных ситуации. Таким образом, узлу 23 присваиваются 3 пары выигрышей – (6, 3), (– 1, 6), (– 1, 8). Поскольку узел 23 является корнем, получаем 3 разных пути обратной индукции с разными ценами игры (указаны у корня). Они отмечены на рис. 7 разными цветами.

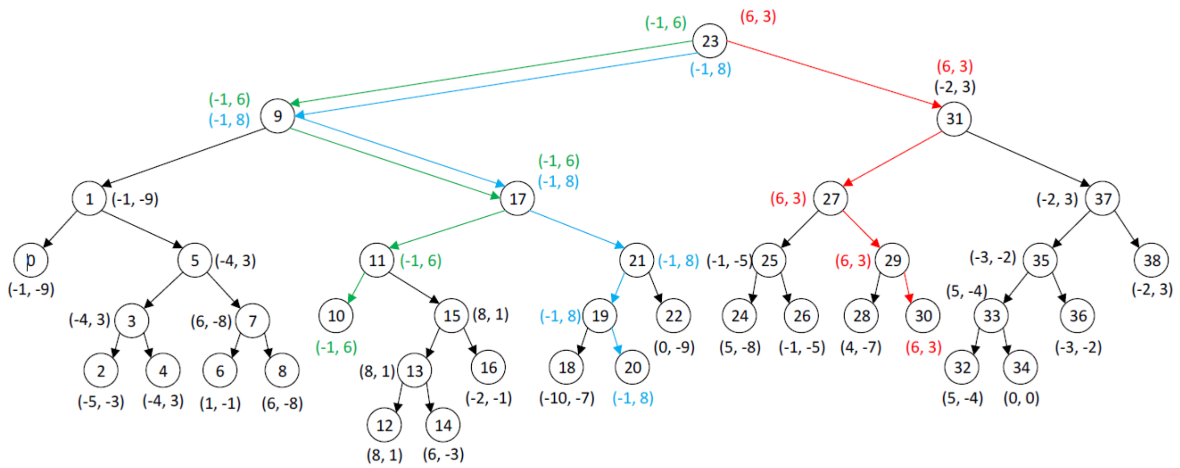

Рис. 7. Найденные пути методом обратной индукции

Варианты работы

Задание на данную лабораторную работу предполагает генерацию случайного дерева игры заданной глубины (на усмотрение преподавателя) со случайными значениями выигрышей в терминальных вершинах.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; построенное дерево исходной игры; все найденные методом обратной индукции пути на дереве позиционной игры; решение игры.

Контрольные вопросы

1. Определение позиционной формы игры. Игры с полной и неполной информацией.

2. Основные шаги метода обратной индукции решения позиционных игр.

3. Условия единственности пути на дереве позиционной игры, найденного по методу обратной индукции.

1.6. Рациональный дележ в кооперативных играх

Кооперативные игры – это игры, в которых группы игроков – коалиции – могут объединять свои усилия. Этим они отличаются от некооперативных (или бескоалиционных) игр, в которых коалиции неприемлемы и каждый обязан играть за себя. Обычно кооперативные игры задаются при помощи характеристической функции, которая показывает полезность каждого варианта коалиции, т.е. объединения усилий игроков. Рассмотрим свойства самих игр и их решений на примере, содержащем необходимые сведения из теории для выполнения лабораторной работы №11.

Задана кооперативная игра N игроков (в данной работе $N = 4$) с *характеристической функцией* (ХФ) $v(S): 2^N \to \mathbb{R}$, $S \subseteq I$, где S – произвольная коалиция, а $I = \{1, 2, \ldots, N\}$ – *тотальная* коалиция. Функция $v(S)$ определяет так называемую *полезность* коалиции S. Считается, что $v(\varnothing) = 0$.

Кооперативная игра называется *супераддитивной*, если

$$\forall S, T \subseteq I \ (S \cap T = \varnothing): \quad v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Кооперативная игра называется *выпуклой*, если

$$\forall S, T \subseteq I: \quad v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Рациональный *дележ* в кооперативной игре единственным образом определяется *вектором Шепли* $X(v) = \left(x_1(v), x_2(v), \ldots, x_N(v)\right)$ [1–3] с компонентами

$$x_i(v) = \frac{1}{N!} \sum_{S:\, i \in S} \left(|S| - 1\right)! \left(N - |S|\right)! \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right),$$

где $x_i(v)$ – распределение дележа i-му игроку ($i \in I$) в зависимости от ХФ; $|S|$ – количество игроков в коалиции S.

При этом выполняются условия:

а) *групповой рационализации*

$$\sum_{i \in I} x_i(v) = v(I);$$

б) *индивидуальной рационализации*

$$x_i(v) \ge v(\{i\}) \quad (i \in I).$$

Вектор Шепли удовлетворяет следующим аксиомам.

1) Аксиома линейности. Для любых двух кооперативных игр с одними и теми же игроками, но различными ХФ v, w и любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеем

$$x_i(v + w) = x_i(v) + x_i(w);$$
$$x_i(\lambda v) = \lambda x_i(v) \quad (i \in I).$$

2) Аксиома симметричности. Получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра w получена из игры v перестановкой игроков, то её вектор Шепли $X(w)$ есть вектор $X(v)$ с соответствующим образом переставленными элементами.

3) Аксиома «нулевого игрока». *«Нулевым игроком»* называется игрок, не вносящий ненулевого вклада ни в какую коалицию, т.е. игрок i такой, что $\forall S : i \in S$ имеем $v(S) - v(S \setminus \{i\}) = 0$. При рациональном дележе $x_i(v) = 0$.

4) Аксиома эффективности. Имеющееся в распоряжении тотальной коалиции благосостояние распределяется без остатка (условие групповой рационализации).

Лабораторная работа № 7

Кооперативные игры. Вектор Шепли

Цель работы

Изучить постановку кооперативной игры и найти оптимальное распределение выигрыша (дележ) между игроками путем вычисления компонент вектора Шепли.

Постановка задачи

Для заданной характеристической функцией игры по варианту выполнить:

1) Проверить кооперативную игру на супераддитивность и выпуклость. Если игра по варианту не супераддитивна, изменить характеристическую функцию таким образом, чтобы игра была супераддитивна. Продемонстрировать изменения и повторную проверку.

2) Составить программу вычисления компонент вектора Шепли и, в зависимости от варианта, рассчитать его.

3) Проверить условия индивидуальной и групповой рационализации.

Пример выполнения работы

Пусть $N = 3$, а ХФ имеет вид:

$$v(\text{Æ}) = 0;\ v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 1;\ v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 3;\ v(I) = 4.$$

Данная кооперативная игра является супераддитивной, т.к. (с учетом симметричности)

$$v(\{i,j\}) > v(\{i\}) + v(\{j\}) \quad (d_{i,j} = 0);$$
$$v(I) > v(\{i\}) + v(\{j\}) + v(\{k\}),$$
$$v(I) = v(\{i,j\}) + v(\{k\}) \quad (d_{i,j} + d_{i,k} + d_{j,k} = 0),$$

где $d_{i,j}$ – символ Кронекера.

Вместе с тем, игра не является выпуклой, т.к., к примеру, для коалиций $S = \{1,2\}$ и $T = \{2,3\}$ имеем

$$v(I) + v(\{2\}) < v(\{1,2\}) + v(\{2,3\}).$$

Рассчитаем долю первого игрока при рациональном дележе:

$$x_1(v) = \frac{1}{3!}\Big\{0!2!\big(v(\{1\}) - v(\varnothing)\big) +$$
$$+ 1!1!\Big[\big(v(\{1,2\}) - v(\{2\})\big) + \big(v(\{1,3\}) - v(\{3\})\big)\Big] + 2!0!\big(v(I) - v(\{2,3\})\big)\Big\} = \frac{4}{3}.$$

Очевидно, в силу симметричности, в данной задаче доли остальных двух игроков будут такими же:

$$x_1(v) = x_2(v) = x_3(v) = \frac{4}{3}.$$

При этом выполняются условия:

а) $x_1(v) + x_2(v) + x_3(v) = 4 = v(I)$ (групповая рационализация);

б) $x_i(v) = \frac{4}{3} > v(\{i\}) = 1 \quad (i = 1,2,3)$ (индивидуальная рационализация).

Варианты работы

	№ варианта																	
ХФ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
$v(\varnothing)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v(\{1\})$	4	4	3	1	3	4	4	2	3	3	3	2	3	4	2	4	1	2
$v(\{2\})$	1	3	4	1	2	2	3	1	3	1	4	3	3	1	3	4	2	3
$v(\{3\})$	3	2	1	3	3	2	2	1	1	2	4	4	2	1	2	4	1	4
$v(\{4\})$	1	3	2	3	2	1	2	2	2	4	4	1	4	1	4	2	1	4
$v(\{1,2\})$	6	8	7	4	6	7	7	4	7	4	8	6	6	7	6	9	4	6
$v(\{1,3\})$	8	6	5	4	6	7	7	4	6	5	7	7	5	7	5	9	2	6
$v(\{1,4\})$	6	7	6	6	5	5	6	4	7	8	7	4	8	7	7	6	3	7
$v(\{2,3\})$	5	5	5	4	6	4	6	2	4	3	9	7	6	3	6	10	4	7
$v(\{2,4\})$	3	7	7	4	4	4	6	4	7	5	8	5	9	2	8	7	4	8
$v(\{3,4\})$	5	6	3	7	7	3	4	4	3	6	9	6	8	2	8	7	2	8
$v(\{1,2,3\})$	9	10	10	9	10	11	11	7	10	7	13	12	9	10	9	15	7	11

$v(\{1,2,4\})$	8	12	10	9	10	9	10	8	10	10	13	9	12	10	11	12	6	11
$v(\{1,3,4\})$	10	10	9	8	9	10	11	8	9	11	13	9	10	10	10	12	5	12
$v(\{2,3,4\})$	7	9	9	8	10	7	10	6	7	8	14	10	12	6	12	14	6	12
$v(I)$	11	13	12	11	12	13	13	10	12	13	16	14	14	12	14	17	9	14

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; проверку на супераддитивность и выпуклость; фрагмент кода программы с расчетом компонент вектора Шепли; результат расчета варианта; проверку условий индивидуальной и групповой рационализации.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение кооперативной игры и ее характеристической функции.

2. Дайте определение выпуклой игры. Является ли любая выпуклая игра супераддитивной и наоборот?

3. Что означает дележ в кооперативной игре? Перечислите аксиомы рационального дележа.

4. На примере вариантов работы поясните аксиому линейности.

5. Поясните смысл условий групповой и индивидуальной рационализации.

6. Каким свойством обладает «нулевой игрок»?

7. Раскройте смысл вектора Шепли.

1.8. Информационное противоборство

Прежде чем дать определение *информационному противоборству*, следует начать с *информационного управления* в социальных сетях.

Опр.: **Информационное управление** – это целенаправленное воздействие на начальные мнения агентов с целью обеспечения требуемых (для субъекта, осуществляющего управление) значений для их итоговых мнений.

В модели социальной сети рассматриваются агенты ($i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$), составляющие эту сеть и их мнения x_i, зависящие от дискретного момента времени: $x_i = x_i(t), t = 0, 1, 2 \ldots$.

В каждый момент времени мнения агентов изменяются под влиянием мнений других агентов. Степень этого влияния определяется неотрицательной стохастической по строкам матрицей доверия $A = (a_{ij})$, где a_{ij} — степень доверия i-го агента j-му агенту (в том числе и самому себе).

Вектор мнений $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задан для начального момента времени ($\mathbf{x}(0)$) и изменяется следующим образом:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t-1) \tag{1}$$

этот закон можно записать иначе:

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t-1) \tag{2}$$

При достаточно долгом взаимодействии агентов, вектор мнений сходится к итоговому значению:

$$\mathbf{x} = A^{\infty}\mathbf{x}(0), \tag{3}$$

где $A^{\infty} = \lim\limits_{t\to\infty} A^t$

Если $\forall i, j \in N a_{ij} > 0$, то выполняется:

- Все строки матрицы A^{∞} одинаковы
- Итоговые мнения всех агентов одинаковы ($\forall i \in N, x_i = X$)

Обозначив строку матрицы A^{∞} через $\mathbf{r}$, получаем выражение:

$$X = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j(0) \tag{4}$$

Информационное управление подразумевает наличие нескольких игроков (в данном случае двух), которые могут влиять на начальные мнения некоторых агентов.

В таком случае для множества агентов влияния первого игрока $F \subseteq N$ устанавливается начальное мнение $u \in U$, а для множества агентов влияния второго игрока $S \subseteq N, F \cap S = \varnothing$ устанавливается начальное мнение $v \in V$, где U и V — некоторые отрезки $\mathfrak{R}^1$.

Обозначив:

$$r_F = \sum_{i \in F} r_i,$$

$$r_s = \sum_{j \in S} r_j,$$

$$X^0 = \sum_{k \in N \setminus (F \cup S)} r_k x_k(0),$$

получим альтернативную запись для выражения (4), иллюстрирующую вклад мнения агентов влияния:

$$X = r_F u + r_S v + X^0. \tag{5}$$

Это говорит о том, что итоговое мнение членов социальной сети будет линейно зависеть от управлений u и v, входящих соответственно с весами $r_f > 0$ и $r_s > 0$, где $r_F + r_s \leq 1$, которые определяются суммарной влиятельностью агентов влияния.

В качестве отступления, отметим, что отличным от рассматриваемого случая является ситуация, когда агенты влияния не меняют своих мнений: $a_{ij} = 0, j \neq i, i \in F \cup S$.

Опр.: **Информационное противоборство** – это социальная структура множества субъектов пользователей, как индивидуальных, так коллективных. Информационное противоборство представляет комплексное деструктивное воздействие на информационные системы и информационную инфраструктуру конкурирующей стороны с одновременной защитой собственной информации, информационных систем и информационной инфраструктуры от подобных воздействий. Объект информационного противоборства – информационно-коммуникационная система.

Имея зависимость $\boldsymbol{X(u,v)}$=$\boldsymbol{r_F u}$ +$\boldsymbol{r_s v}$+$\boldsymbol{X^0}$ итогового мнения агентов от управляющих воздействий, можно сформулировать теоретико-игровую модель взаимодействия игроков, осуществляющих эти воздействия. Для этого необходимо определить их целевые функции.

Предположим, что целевая функция первого (второго) игрока $f_F(u,v)$=$H_F(X(u,v))$ - $c_F(u)$, ($f_S(u,v) = H_S\big(X(u,v)\big) - c_S(v)$) определяется разностью между его «доходом», зависящим от итогового мнения агентов, и затратами на осуществление управления.

Совокупность $\Gamma = \{f_F(u,v),\ \ f_S(u,v)$, u$\in U, v \in V\}$ целевых функций и множеств допустимых действий двух игроков задают семейство игр, различия между которыми порождаются конкретизацией информированности игроков и порядка функционирования.

Если описание игры Г и выражение $\boldsymbol{X(u,v)}$=$\boldsymbol{r_F u}$ +$\boldsymbol{r_s v}$+$\boldsymbol{X^0}$ являются общим знанием среди игроков, которые выбирают свои действия однократно, одновременно и независимо, то получаем игру в нормальной форме, для которой можно искать и исследовать равновесия Нэша, их эффективность по Парето и тд. После фиксирования последовательностей выбора игроками своих действий, получим ту или иную иерархическую игру.

Опр.: **Иерархическая игра** (игра с иерархической структурой) является важнейшим подклассом неантагонистических многошаговых игр. Моделируют конфликтно-управляемые системы с иерархической структурой. В математической постановке иерархические игры классифицируются по числу уровней и характеру вертикальных связей.

Если отказаться от гипотезы об общем знании, получим рефлексивную игру.

Опр.: **Рефлексивная игра** – рассматривают ситуации с учётом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника. игра, в которой информированность агентов не является общим знанием, и агенты принимают решения на основе иерархии своих представлений. Рефлексивные игры позволяют моделировать поведение рефлексирующих объектов, исследовать зависимость выигрышей агентов от рангов их рефлексий, ставить и решать задачи рефлексивного управления; единообразно описывать многие явления, которые связаны с рефлексией.

Лабораторная работа № 8

Решение антагонистической игры информационного противоборства

Цель работы

Изучить теоретико-игровую модель информационного противоборства в социальных сетях. Промоделировать информационное управление в рамках игры и определить итоговое мнение агентов.

Постановка задачи

1. Для 10 агентов случайным образом сгенерировать стохастическую матрицу доверия.
2. Назначить всем агентам случайное начальное мнение из диапазона на усмотрение преподавателя. Провести моделирование для игры без влияния до получения устойчивого мнения. Привести ответ.
3. Случайным образом выбрать количество и номера (непересекающиеся) агентов влияния из общего числа агентов для первого и второго игроков. Назначить им начальные мнения первого и второго игрока. Остальным агентам (нейтральным) назначить случайные начальные мнения. Промоделировать информационное управление в рамках игры и определить итоговое мнение агентов.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру для 9 агентов. Сначала сгенерируем матрицу доверия, убедимся, что она стохастическая:

$$A = \begin{pmatrix} 0.111 & 0.178 & 0.003 & 0.074 & 0.152 & 0.131 & 0.145 & 0.101 & 0.104 \\ 0.045 & 0.125 & 0.076 & 0.086 & 0.112 & 0.11 & 0.207 & 0.125 & 0.112 \\ 0.006 & 0.214 & 0.095 & 0.038 & 0.038 & 0.142 & 0.162 & 0.275 & 0.032 \\ 0.168 & 0.164 & 0.094 & 0.094 & 0.007 & 0.105 & 0.15 & 0.075 & 0.143 \\ 0.046 & 0.258 & 0.093 & 0.113 & 0.07 & 0.006 & 0.18 & 0.113 & 0.122 \\ 0.198 & 0.175 & 0.07 & 0.039 & 0.187 & 0.022 & 0.064 & 0.12 & 0.125 \\ 0.196 & 0.077 & 0.134 & 0.151 & 0.047 & 0.223 & 0.139 & 0.017 & 0.017 \\ 0.049 & 0.201 & 0.009 & 0.099 & 0.077 & 0.296 & 0.056 & 0.006 & 0.207 \\ 0.068 & 0.036 & 0.155 & 0.138 & 0.148 & 0.058 & 0.226 & 0.019 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Затем сформируем случайным образом вектор начальных мнений агентов (без влияния), например, в диапазоне от 1 до 20, и произведем необходимое количество итераций до схождения матрицы (зададим точность $\varepsilon = 10^{-6}$), получим итоговое мнение агентов:

Изначальные мнения агентов:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 19 & 8 & 12 & 1 & 16 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Потребовалось итераций: 11
Результирующее мнение агентов (без влияния):

$$\mathbf{x}(t \to \infty) = \begin{pmatrix} 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 & 12.533 \end{pmatrix}$$

Теперь промоделируем игру с информационным влиянием. Случайным образом выберем количество и номера агентов первого игрока и аналогично количество и номера агентов второго игрока (они не должны пересекаться, т.к. эта ситуация выходит за рамки данной работы). Обратите внимание, что количество агентов влияния первого игрока не обязательно должно совпадать с количеством агентов влияния второго игрока. Затем сгенерируем случайным образом управление u для агентов влияния первого игрока (например, в диапазоне от 0 до 100), а также управление v агентов влияния второго игрока (соответственно, в противоположном диапазоне, $[-100, 0]$). Сформируем вектор начальных мнений агентов с учетом информационного влияния, нейтральным агентам назначим случайные стартовые мнения. Проведем моделирование:

Агенты первого игрока: (4, 5), агенты второго игрока: (1, 2).
Сформированное начальное мнение агентов первого игрока: 57
Сформированное начальное мнение агентов второго игрока: -63
Изначальные мнения с учётом сформированных:

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 15 & -63 & -63 & 8 & 57 & 57 & 16 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Потребовалось итераций: 12
Результирующее мнение:

$$\mathbf{x}(t \to \infty) = \begin{pmatrix} 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 & 5.202 \end{pmatrix}$$

Варианты работы

В данной работе предполагается генерация матрицы доверия и начального вектора мнений агентов случайным образом, что обеспечивает различные исходные данные расчетов для выполняющих задание.

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; сгенерированную матрицу доверия; начальный вектор мнений агентов для моделирования без управления; результат такого моделирования; номера агентов первого и второго игроков для информационного противоборства двух игроков, их управления, начальные мнения нейтральных агентов; результат моделирования с информационным управлением.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение и опишите основные свойства матрицы доверия.

2. Что такое информационное управление и как оно осуществляется?

3. Опишите принцип формирования итогового мнения агентов при моделировании информационного управления.

Расчетно-графическое домашнее задание

Задана платежная матрица прямоугольной игры с нулевой суммой.

1 Нормализовать матрицу (привести к матрице с неотрицательными элементами) и свести исходную игру к матричной игре размерности 2×2 следующими способами:

1.1 путем поглощения доминируемых стратегий;

1.2 путем удаления NBR-стратегий.

2 Найти смешанные стратегии игроков следующими методами:

2.1 графический метод;

2.2 аналитический метод;

2.3 графический метод (задача линейного программирования);

2.4 симплекс-метод (задача линейного программирования).

3 Рассчитать цену игры для исходной матрицы.

Варианты работы

1

4	-3	5	6	4
6	5	-3	4	7
6	5	-3	-3	5
-3	-3	4	4	4
7	6	4	5	6

2

5	3	0	4	-1
2	-1	2	1	1
1	1	2	1	2
4	2	0	3	-1
-1	0	2	1	1

3

1	4	6	2	2
4	-2	-1	4	5
1	5	5	0	1
1	4	4	1	1
1	6	7	2	1

4

8	8	6	7	8
7	7	6	4	9
10	8	9	10	8
3	6	9	-2	8
7	9	9	7	10

5

5	3	0	1	1

6

2	4	4	2	5

4	4	0	-1	0
-2	-3	3	3	4
3	3	0	0	0
6	5	0	1	0

2	2	1	-1	4
5	3	4	5	3
3	3	1	2	3
-2	1	4	-3	3

7

-1	2	0	0	4
-1	4	-1	0	5
-1	3	-1	-2	3
-1	2	-1	-1	2
2	-4	3	2	-3

8

2	2	1	0	2
1	1	-2	0	3
2	4	4	3	2
0	-3	-4	3	2
3	1	1	3	4

9

-5	-1	-1	-3	0
-4	1	0	-4	0
-6	-1	0	-5	0
-3	0	0	-3	0
2	-3	-4	3	-3

10

-4	-1	1	-3	-3
-4	-1	-1	-4	-4
-4	0	0	-5	-4
-1	-7	-6	-1	0
-4	1	2	-3	-4

11

0	-1	1	2	0
2	1	-1	0	3
2	1	-1	-1	1
-1	-1	0	0	0
3	2	0	1	2

12

-4	-6	3	-5	-4
-6	-4	-5	3	-7
-6	3	-5	3	-5
3	-4	3	-4	-4
-7	-5	-6	-4	-6

13

1	1	0	7	6
4	3	4	-1	-2
4	5	4	0	0
4	3	3	1	-1
4	4	4	1	1

14

0	-4	-5	-3	1
-2	-1	1	0	-1
-2	-1	-1	-1	-2
0	-3	-3	-2	1
-2	-1	-2	1	-1

15

4	2	3	4	2
1	2	0	2	2
1	4	3	1	3
-2	3	0	1	1
-4	2	3	-3	0

16

2	-1	3	4	2
4	3	-1	2	5
4	3	-1	-1	3
-1	-1	2	2	2
5	4	2	3	4

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. *Теория игр*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 432 с.
2. Оуэн Г. *Теория игр*. – М.: Изд. «ЛКИ», 2010. – 212 с.
3. Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы, методология.* – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
4. Черноруцкий И.Г. *Методы принятия решений.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
5. Грешилов А.А. *Математические методы принятия решений*. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 584 с.
6. Романовский И.В. *Дискретный анализ*. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 320 с.
7. Черноруцкий И.Г. *Методы принятия решений*. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
8. Ширяев В.И., Ширяев Е.В. *Принятие решений. Математические основы. Статические задачи*. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 208 с.
9. Акоф Р., Сасиени М. *Основы исследования операций*. – М.: Мир, 1971.
10. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. *Методы оптимизации*. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.
11. Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства*. – М.: Физматлит, 2010.
12. Ларичев О.И. *Теория и методы принятия решений*. – М.: Логос, 2000.
13. Лефевр В.А., Смолян Г.Л. *Алгебра конфликта*. – М.: КомКнига, 2007.

Басараб Михаил Алексеевич, Коннова Наталья Сергеевна

Учебно-методическое пособие

Теория игр

в системах защиты информации

Оригинал-макет подготовлен

в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана

В оформлении использованы шрифты

Студии Артемия Лебедева

Подписано в печать ______________ Формат_______________
Усл. печ. л.___ Тираж ______ экз. Заказ _______

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005,Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1,
press@bmstu.ru

Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005,Москва, 2-я Бауманская ул., д.5, стр.1,