Игровые модели планирования

- Модели с противодействием (конкуренция)
- Модели без противодействия (игры с природой)

Основные понятия:

- правила;
- стратегии.

Оптимальная стратегия – приносящая максимальный выигрыш.

Конечная игра – содержит конечное число возможных стратегий.

Игра с нулевой суммой – общая сумма выигрыша всех игроков равна нулю

Цель:

выработка оптимальной стратегии поведения, обеспечивающей гарантированный минимальный выигрыш либо сведение к минимуму проигрыша исходя из возможности выбора противниками наилучших стратегий

Стратегии игрока А:

$a_1, a_2, \ldots, a_m$ $\quad\quad\quad$ $(a_i,\ i=1,\ldots m)$

Стратегии игрока В:

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ $\quad\quad\quad$ $(b_j,\ j=1,\ldots n)$

Таблица стратегий (доход)

Стратегии	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Пример

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	4	3

<u>Мин. прибыли и макс. убытки</u>

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	MIN прибыль A
a_1	5	8	7	5	4	**<u>4</u>**
a_2	1	10	5	5	6	1
a_3	2	4	3	6	2	2
a_4	3	5	4	4	3	3
MAX убыток B	**<u>5</u>**	10	7	6	6	

Нижняя цена игры:

$$\max_i \min_j c_{ij} = 4$$

Верхняя цена игры:

$$\min_j \max_i c_{ij} = 5$$

Задача с седловой точкой

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	MIN прибыль А
a_1	4	8	7	5	4	**4**
a_2	1	10	5	5	6	1
a_3	2	4	3	6	2	2
a_4	3	5	4	4	3	3
MAX убыток В	**4**	10	7	6	6	

$$\max_i \min_j c_{ij} = \min_j \max_i c_{ij} = 4$$ - цена игры

Графический метод решения задач с нулевой суммой

Суть:

удаление дублирующих и поглощаемых строк и столбцов.

Дублирующие строки (столбцы) содержат одинаковые элементы.

Поглощаемые строки (столбцы) содержат самые плохие стратегии

Доминирующая (поглощающая) строка содержит элементы >= элементам другой строки (поглощаемой).

Доминирующий (поглощающий) столбец содержит элементы <= элементам другого столбца (поглощаемого).

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	4	3

$$a_1 >= a_4$$

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2

$$b_1 <= b_2, b_3, b_4$$

Стратегии	b_1	b_5
a_1	5	4
a_2	1	6
a_3	2	2

$$a_1 >= a_3$$

Стратегии	b_1	b_5
a_1	5	4
a_2	1	6

Пусть

x_1 – в-ть выбора A стр. a_1

$x_2 = 1 - x_1$ – в-ть выбора A стр. a_2

Ожидаемый выигрыш *A* при реализации *B* стратегии b_1:

$PA_{b1} = c_{11}x_1 + c_{21}x_2 = (c_{11} - c_{21})\, x_1 + c_{21} =$

$= (5 - 1)x_1 + 1 = 4x_1 + 1$

Ожидаемый выигрыш *A* при реализации *B* стратегии b_5:

$PA_{b5} = c_{15}x_1 + c_{25}x_2 = (c_{15} - c_{25})\, x_1 + c_{25} =$

$= (4 - 6)x_1 + 6 = -2x_1 + 6$

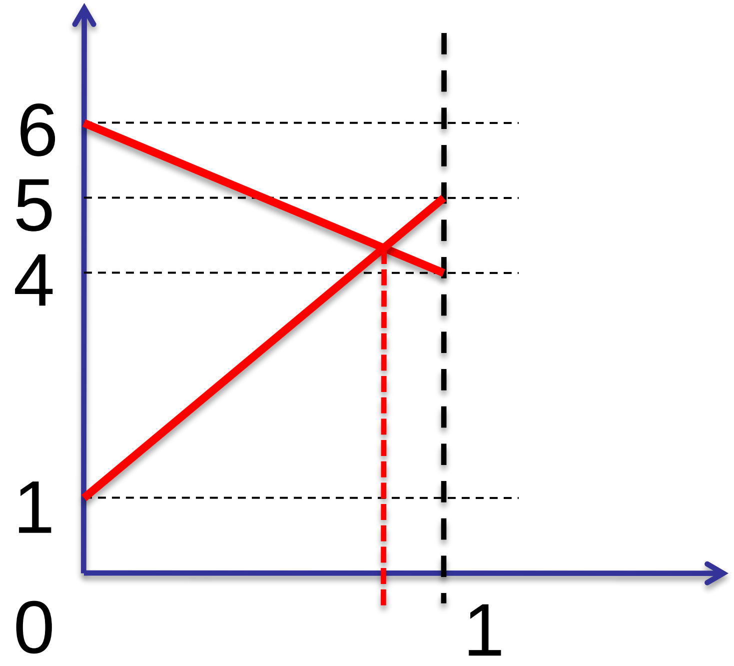
Оптимальная стратегия *A*:

$$PA_{b1} = PA_{b5}$$

$$4x_1 + 1 = -2x_1 + 6$$

$$x_1 = 5/6 \sim 0.83$$

$$X_2 = 1/6 \sim 0.17$$



Стратегии	b_1	b_5
a_1	5	4
a_2	1	6

Пусть

y_1 – в-ть выбора *B* стр. b_1

$y_5 = 1 - y_1$ – в-ть выбора *B* стр. b_5

Ожидаемый выигрыш *B* при реализации *A* стратегии a_1:

$PB_{a1} = c_{11}y_1 + c_{15}y_5 = (c_{11} - c_{15})\ y_1 + c_{15} =$

$= (5 - 4)y_1 + 4 = y_1 + 4$

Ожидаемый выигрыш *B* при реализации *A* стратегии a_2:

$PB_{a2} = c_{21}y_1 + c_{25}y_5 = (c_{21} - c_{25})\ y_1 + c_{25} =$

$= (1 - 6)y_1 + 6 = -5y_1 + 6$

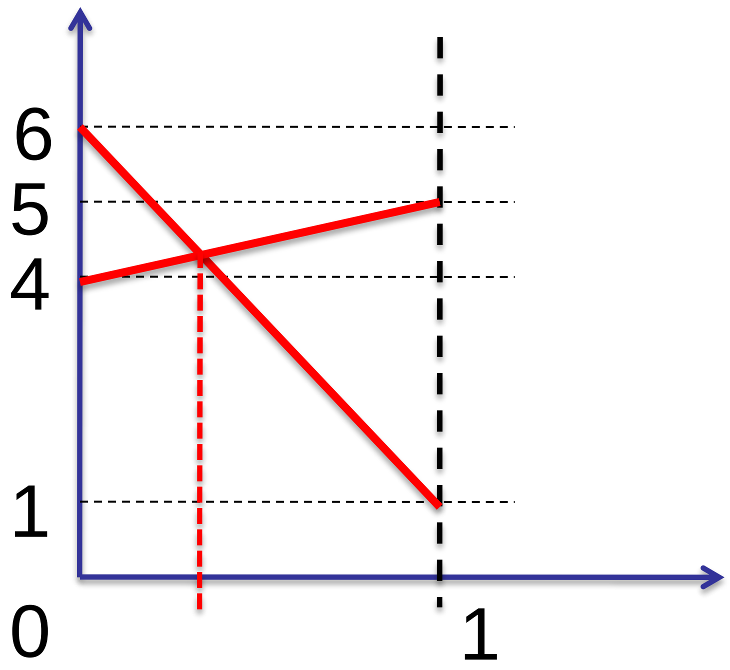
Оптимальная стратегия *B*:

$$PB_{a1} = PB_{a2}$$

$$y_1 + 4 = -5y_1 + 6$$

$$y_1 = 1/3 \sim 0.33$$

$$Y_5 = 2/3 \sim 0.67$$



Общий метод решения задач с нулевой суммой, без седловой точки

Общая таблица стратегий

Стратегии	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Найти:

смешанную стратегию игрока A:

$$S_A=p_1+p_2+\ldots+p_n$$

и

смешанную стратегию игрока B:

$$S_B=q_1+q_2+\ldots+q_m$$

$$
\begin{cases}
c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \ldots + c_{1n}q_n \geq \omega \\
c_{21}q_1 + c_{22}q_2 + \ldots + c_{2n}q_n \geq \omega \\
\ldots \\
c_{m1}q_1 + c_{m2}q_2 + \ldots + c_{mn}q_n \geq \omega
\end{cases}
$$

где

ω – гарантированный MIN выигрыш

Пусть $$\xi_1 = \frac{q_1}{\omega}, \quad \xi_2 = \frac{q_2}{\omega}, \quad \ldots \quad \xi_n = \frac{q_n}{\omega}$$

тогда
$$\begin{cases} c_{11}\xi_1 + c_{12}\xi_2 + \ldots + c_{1n}\xi_n \geq 1 \\ c_{21}\xi_1 + c_{22}\xi_2 + \ldots + c_{2n}\xi_n \geq 1 \\ \ldots \\ c_{m1}\xi_1 + c_{m2}\xi_2 + \ldots + c_{mn}\xi_n \geq 1 \end{cases}$$

где $$\xi_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i = \frac{1}{\omega}$$

Задача линейного программирования с целевой функцией

$$F(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \mathrm{MIN}$$

так как необходимо

$$\omega \to \mathrm{MAX}$$

<u>Решение</u>:

симплекс-метод (прямая задача для *B*, двойственная задача для *A*)

Игры с природой
(без противодействия)

Суть:

выбор стратегии игроком *B* (природа) случайным образом.

Критерии оценки результатов исследования игровой модели

- Вальде (пессимистический)
- максимума (оптимистический)
- Гурвица
- Сэвиджа

Критерий Вальде (пессимистический):

минимизация вероятности (риска) проигрыша или гарантированная минимальная прибыль:

$$\max_i \min_j c_{ij}$$

т.е. ***нижняя цена игры***

Критерий максимума (оптимистический): максимизация возможного выигрыша:

$$\max_i \max_j c_{ij}$$

(авантюрная стратегия)

Критерий Гурвица (эвристический):

$$\max_i \left(\alpha \min_j c_{ij} + (1-\alpha) \max_j c_{ij} \right)$$

$$\alpha \in [0,1]$$

(промежуточный между кр. Вальде и кр. максимума)

Критерий Сэвиджа (анализ рисков).

Матрица рисков:

$$r_{ij} = \max_{i} c_{ij} - c_{ij}$$

(риски – недополученная прибыль при неоптимальной стратегии для каждого текущего состояния природы)

Оптимальная стратегия:

$$\min_i \max_j r_{ij} =$$

$$= \min_i \max_j \left(\max_i c_{ij} - c_{ij} \right)$$

Таблица стратегий

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	12	3
max	5	10	7	12	6

Таблица рисков

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	7	2
a_2	4	0	2	7	0
a_3	3	6	4	6	4
a_4	2	5	3	0	3

Оптимальная стратегия a_4, т.к.

$$\min_i \max_j \left(\max_i c_{ij} - c_{ij} \right) =$$

$$= \min\{7, 7, 6, 5\} = 5$$