Метод обратной матрицы

Пусть задана $(m \times n)$-игра Г двух игроков, A и B, с матрицей стратегий $\mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in S_m$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in S_n$ – смешанные стратегии игроков A и B соответственно.

Тогда множества индексов $A_{\mathbf{x}} = \{i \mid i \in A, x_i > 0\}$, $B_{\mathbf{y}} = \{j \mid j \in B, y_j > 0\}$, где $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, называются **спектрами стратегий** **x** и **y** (в спектр включаются только стратегии, реализуемые с ненулевыми вероятностями.

Чистая стратегия $i \in A$ ($j \in B$) игрока А (В) называется **<u>существенной</u>**, если существует оптимальная стратегия $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*) \in S_m$ ($\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*) \in S_n$) этого игрока, для которой $x_i^* > 0$ ($y_j^* > 0$).

Спектр A^* (B^*) любой оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ ($\mathbf{y}^*$) состоит лишь из существенных стратегий.

Стратегия $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}$) игрока А (В) называется **<u>вполне смешанной</u>**, если ее спектр состоит из множества всех чистых стратегий игрока, т.е. $A_{\mathbf{x}} = A$ ($B_{\mathbf{y}} = B$).

Ситуация равновесия в игре $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ называется **<u>вполне смешанной</u>**, если стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ – вполне смешанные.

Игра Γ называется **<u>вполне смешанной</u>**, если каждая ситуация равновесия в ней является вполне смешанной.

Теорема 1. *Вполне смешанная игра* $(m \times n)$*-игра* Γ *имеет единственную ситуацию равновесия* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *и квадратную матрицу* $(m = n)$*; если цена игры* $\upsilon \neq 0$*, то матрица* **C** *невырожденная и*

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \upsilon = \frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{u} = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^m$.

Метод Брауна-Робинсон

В первой партии оба игрока произвольно выбирают некоторые чистые стратегии.

В партии k каждый игрок выбирает чистую стратегию, максимизирующую его ожидаемый выигрыш относительно наблюдаемой эмпирической смешанной стратегии противника, рассчитанной за предыдущие $(k{-}1)$ партий.

Пусть в течение первых k шагов первый игрок использовал каждую i-ю стратегию $\tilde{x}_i[k]$ раз, а второй использовал каждую j-ю стратегию $\tilde{y}_j[k]$ раз.

В следующей, (k+1)-й партии игроки используют свои стратегии с номерами $i[k]$ $j[k]$, исходя из оптимизации оценок верхней и нижней цен игры:

$$\overline{\upsilon}[k] = \max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\underline{\upsilon}[k] = \min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Усреднение по k шагам алгоритма:

$$\frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\max_{i\in A}\sum_{j\in B} c_{ij}\tilde{y}_j[k] = \frac{1}{k}\sum_{j\in B} c_{i[k+1]j}\tilde{y}_j[k],$$

$$\frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\min_{j\in B}\sum_{i\in A} c_{ij}\tilde{x}_i[k] = \frac{1}{k}\sum_{i\in A} c_{ij[k+1]}\tilde{x}_i[k].$$

(2)

Оценки смешанных стратегий игроков А и В определяются векторами

$$\tilde{\mathbf{x}}[k] = \left(\frac{\tilde{x}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{x}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{x}_m[k]}{k}\right), \qquad \tilde{\mathbf{y}}[k] = \left(\frac{\tilde{y}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{y}_2[k]}{k}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n[k]}{k}\right).$$

Пример

Пусть (3×3)-игра Г задана матрицей

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формулам

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \upsilon = \frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},$$

дает аналитическое решение

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\ \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{5}{8}\right),\ \upsilon = 1{,}5\,.$$

Алгоритм Брауна–Робинсона.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Пусть на первом шаге игроки выбрали x_1, y_1.

Учитывая, что игрок A выбрал x_1,

игрок B мог получить один из выигрышей $(2, 1, 3)$.

Учитывая, что игрок B выбрал y_1,

игрок A мог получить один из выигрышей $(2, 3, 1)$.

Следовательно, на втором этапе: x_2 и y_2.

Первые шаги алгоритма Брауна–Робинсона

№пп	Выбор A	Выбор B	Выигрыш A			Проигрыш B			$\frac{1}{k}\overline{v}[k]$	$\frac{1}{k}\underline{v}[k]$
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	x_1	y_1	2	3	1	2	1	3	3	1
2	x_2	y_2	3	3	3	5	1	4	3/2	1/2
3	x_2	y_2	4	3	5	8	1	5	5/3	1/3
4	x_3	y_2	5	3	7	9	3	6	7/4	3/4
5	x_3	y_2	6	3	9	10	5	7	9/5	5/5
6	x_3	y_2	7	3	11	11	7	8	11/6	7/6
7	x_3	y_2	8	3	13	12	9	9	13/7	9/7
8	x_3	y_3	11	4	14	13	11	10	14/8	10/8
9	x_3	y_3	14	5	15	14	13	11	15/9	11/9
10	x_3	y_3	17	6	16	15	15	12	17/10	12/10
11	x_1	y_3	20	7	17	17	16	15	20/11	15/11
12	x_1	y_2	21	7	19	19	17	18	21/12	17/12

Результаты расчетов для первых 12 шагов

$$\tilde{\mathbf{x}}[12] = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}\right), \quad \tilde{\mathbf{y}}[12] = \left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}\right)$$

Погрешность

$$\varepsilon[12] = \min_k \frac{1}{12}\bar{\upsilon}[12] - \max_k \frac{1}{12}\underline{\upsilon}[12] = \frac{1}{3}$$

Антагонистические игры с непрерывным ядром.

Пусть функция выигрыша (*ядро*) антагонистической игры,

заданной на единичном квадрате непрерывна:

$$H(x,y) \in C(\Pi),\ \Pi = [0,1]\times[0,1].$$

Тогда существуют нижняя и верхняя цены игры, и

$$h = \overline{h} \equiv \max_F \min_y E(F,y) = \min_G \max_x E(x,G) \equiv \underline{h},$$

а для среднего выигрыша игры имеют место равенства

$$E(x,G) = \int_0^1 H(x,y)\,\mathrm{d}G(y),\ E(F,y) = \int_0^1 H(x,y)\,\mathrm{d}F(x),$$

где $F(x)$, $G(y)$ – произвольные вероятностные меры выбора стратегий

для обоих игроков, заданные на единичном интервале.

<u>Выпукло-вогнутая игра всегда разрешима в чистых стратегиях.</u>

Выпукло-вогнутые игры

1 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Пусть функция ядра имеет вид

$$H(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey.$$

Если выполняются условия

$$H_{xx} = 2a < 0, \; H_{yy} = 2b > 0,$$

то игра является *выпукло-вогнутой*.

Для нахождения оптимальных стратегий найдем частные производные функции ядра по каждой переменной:

$$H_x = 2ax + cy + d\,,\; H_y = 2by + cx + e\,.$$

После приравнивания производных к 0, получим

$$x = -\frac{cy + d}{2a}\,,\; y = -\frac{cx + e}{2b}\,.$$

Т.к. x, y должны быть неотрицательными,

$$\psi(y) = \begin{cases} -\dfrac{cy+d}{2a}, & y \ge -\dfrac{d}{c}, \\ 0, & y < -\dfrac{d}{c}. \end{cases}, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{cx+e}{2b}, & x \le -\dfrac{e}{c}, \\ 0, & x > -\dfrac{e}{c}. \end{cases}$$

Совместное решение этой системы дает аналитическое решение

$$h = H(x^*, y^*).$$

2 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

(метод аппроксимации функции выигрышей на сетке)

Введем параметр разбиения N и

$$\forall N = 1, 2, \ldots ,$$

зададим аппроксимацию функции ядра на единичном квадрате

$$H^{(N)} = (H_{ij}^{(N)}), \; H_{ij}^{(N)} = H(i/N, j/N), \; i, j = 0, \ldots, N.$$

Рассматривая каждую $H^{(N)}$ как матрицу

конечной антагонистической игры двух лиц,

найдем оптимальные смешанные стратегии

(по теореме Неймана о минимаксе они всегда существуют):

$$X^{(N)} = (x_0^{(N)},\dots,x_N^{(N)}),\ Y^{(N)} = (y_0^{(N)},\dots,y_N^{(N)}).$$

Ожидаемый выигрыш:

$$h^{(N)} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} H_{ij}^{(N)} x_i^{(N)} y_j^{(N)},$$

а в пределе для исходной непрерывной задачи:

$$h = \lim_{N\to\infty} h^{(N)}.$$