Игры с природой
(без противодействия)

Выбор стратегии игроком *B* («природа») <u>случайным образом</u> (нецеленаправленно);

$A = (a_1, a_2, ..., a_m)$ - множество стратегий игрока *A* («лицо, принимающее решение» - ЛПР);

$B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ - множество состояний природы;

$C = (c_{ij}), \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n})$ – матрица стратегий.

Задача: свести матрицу выигрышей C к одному столбцу $\tilde{C} = (\tilde{c}_i)$ с помощью «оценочной функции» Ψ

$$\tilde{c}_i = \Psi_i(c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{mn})$$

или, чаще всего,

$$\tilde{c}_i = \Psi(c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}).$$

Пример:

$$\tilde{c}_i = \frac{1}{2}\left(\min_{j \in B} c_{ij} + \max_{j \in B} c_{ij}\right)$$

Оптимальная стратегия:

$$i^* = \arg\max_{i \in A} \tilde{c}_i$$

Критерии принятия решения в условиях неопределенности

- **Байеса–Лапласа** (матожидание)
- **Бернулли** (принцип недостаточного основания)
- **Вальда** (пессимистический, осторожный, max-min)
- **максимума** (оптимистический, авантюрный, max-max)
- **Гурвица** (смешанный)
- **Сэвиджа** (рисковый)

Критерий Байеса–Лапласа

Каждому состоянию природы b_j соответствует априорная вероятность наступления p_j;

$$\sum_{j \in B} p_j = 1.$$

Оценочная функция – матожидание выигрыша:

$$\tilde{c}_i = \sum_{j \in B} p_j c_{ij} \to \max_{i \in A}$$

Пример 1 (задача о контролере)

$$C: \begin{pmatrix} -50 & -50 \\ -1000 & 0 \end{pmatrix}$$

a_1 - купить билет; a_2 - не покупать билет;

b_1 - контролер заходит (вероятность $p_1 = p$);

b_2 - контролер не заходит (вероятность $p_2 = 1 - p$).

Оценочная функция:

$$\tilde{c}_1 = -50p + (-50)\cdot(1-p) = -50,$$

$$\tilde{c}_2 = -1000p + 0\cdot(1-p) = -1000p$$

Решение: покупать билет, если $p > 0.05$

Критерий Бернулли (недостаточного основания)

В отсутствие априорных данных о вероятности наступления состояния природы b_j считать их все равновероятными:

$$\forall j \in B: \quad p_j = \frac{1}{n} = \mathrm{const}$$

Оценочная функция:

$$\tilde{c}_i = \frac{1}{n}\sum_{j \in B} c_{ij} \to \max_{i \in A} \quad \textit{или} \quad \tilde{c}_i = \sum_{j \in B} c_{ij} \to \max_{i \in A}$$

Пример 1 (задача о контролере)

$$C: \begin{pmatrix} -50 & -50 \\ -1000 & 0 \end{pmatrix}$$

b_1 - контролер заходит (вероятность $p_1 = 0.5$);

b_2 - контролер не заходит (вероятность $p_2 = 0.5$).

Оценочная функция:

$$\tilde{c}_1 = -50 \cdot \frac{1}{2} + (-50) \cdot \frac{1}{2} = -50,$$

$$\tilde{c}_2 = -1000 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -500$$

Решение: всегда покупать билет.

Критерий Вальда
(гипотеза антагонизма)

минимизация вероятности (риска) проигрыша или гарантированная минимальная прибыль:

$$\max_{i \in A} \min_{j \in B} c_{ij}$$

т.е. нижняя цена игры.

Критерий максимума (оптимистический)

Максимизация возможного выигрыша:

$$\max_{i \in A} \max_{j \in B} c_{ij}$$

Критерий Гурвица (эвристический) (промежуточный между Вальда и максимума)

$$\max_{i \in A}\left(\alpha \min_{j \in B} c_{ij} + (1-\alpha)\max_{j \in B} c_{ij}\right)$$

$$\alpha \in [0,1] \quad - \textit{вес}$$

Критерий Сэвиджа (анализ рисков)

Матрица рисков (риски – недополученная прибыль при неоптимальной стратегии для каждого текущего состояния природы):

$$R = (r_{ij}), \quad r_{ij} = \max_{k \in A} c_{kj} - c_{ij}$$

Свойство: в каждом столбце R хотя бы один «0».

Оптимальная стратегия (*min-max отн. рисков*):

$$\min_{i \in A} \max_{j \in B} r_{ij} = \min_{i \in A} \max_{j \in B} \left(\max_{k \in A} c_{kj} - c_{ij} \right)$$

Пример 1 (задача о контролере)

$$C: \begin{pmatrix} -50 & -50 \\ -1000 & 0 \end{pmatrix}$$

a_1 - купить билет;

a_2 - не покупать билет;

b_1 - контролер заходит;

b_2 - контролер не заходит.

Матрица рисков:

$$R: \begin{pmatrix} 0 & 50 \\ 950 & 0 \end{pmatrix}$$

Оптимальная стратегия: a_1

Пример 2

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	12	3
max	5	10	7	12	6

Матрица рисков

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	7	2
a_2	4	0	2	7	0
a_3	3	6	4	6	4
a_4	2	5	3	0	3

Оптимальная стратегия a_4, т.к.

$$\min_{i \in A} \max_{j \in B} r_{ij} = \min\{7, 7, 6, 5\} = 5$$

Парадокс группового выбора

Сложность: выбор гипотезы принятия решения.

Возможное решение: привлечь *N* экспертов для оценки стратегий и составить итоговую оценку по их мнениям (например, по принципу голосования на основе критерия большинства).

Пример 3

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	2	12	-3	*-3*
a_2	5	5	-1	*-1*
a_3	0	10	-2	*-2*

Эксперты (*N*=3):

- E1 (max-min) $a_2 \succ a_3 \succ a_1$
- E2 (Гурвиц, α=3/4) $a_3 \succ a_1 \succ a_2$
- E3 (Бернулли) $a_1 \succ a_2 \succ a_3$

Итоговые мнения:

$$a_1 \succ a_2 \text{ (2 из 3)}$$

$$a_2 \succ a_3 \text{ (2 из 3)}$$

$$a_3 \succ a_1 \text{ (2 из 3)}$$

Нарушение транзитивности («замкнутый круг»):

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1 \quad - ?$$

Парадокс группового выбора на основе принципа голосования (теорема Эрроу и пр.).

Пример 4 (выбор СЗИ).

$A = (a_1, a_2, ..., a_m)$ - множество стратегий ЛПР *A* по выбору СЗИ или их комбинаций;

$B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ - множество угроз («природа»).

Задача: выбрать набор СЗИ из условия минимизации ущерба от возможных атак.

СЗИ

a_1 - firewall,

a_2 - СОВ,

a_3 - резервирование канала передачи информации,

$a_4 = a_1 \wedge a_2$,

$a_5 = a_1 \wedge a_3$,

$a_6 = a_2 \wedge a_3$

$a_7 = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3$

$a_8 = \varnothing$

Потенциальные угрозы

b_1 - smurf-ping,

b_2 - ICMP-flood,

b_3 - UDP-flood,

b_4 - TCP-flood,

b_5 - TCP SYN flood.

В качестве оценки выигрыша примем величину, обратную ожидаемому ущербу при применении каждого СЗИ в зависимости от возможной реализации каждой из потенциальных угроз:

$$W = (w_{ij}), \quad (i \in A,\ j \in B)$$

Исходные данные:

c_i - стоимость СЗИ ($i \in A$),

y_j - величина ущерба от успешной атаки ($j \in B$),

p_j - в-ть реализации атаки ($j \in B$),

p'_{ij} - в-ть успешного отражения атаки ($i \in A,\ j \in B$).

Вероятность нанесения ущерба:

$$P_{ij} = p_j(1 - p'_{ij})$$

Матрица затрат:

$$w_{ij} = c_i + P_{ij} y_j \rightarrow \min$$