Курс: "Комбинаторика для начинающих". Неделя 5. Контрольная работа. Полиномиальные коэффициенты.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

Задание 1 *Количество различных слов, получаемых перестановкой букв в слове* ***папарацци*** *равно*

Ответ: $P(3,2,2,1,1) = 15120$

Решение 1 *В слове папарацци 2 раза повторяются буквы* ***п, ц****, 3 раза* ***а****, по одному разу* ***р*** *и* ***и****. То есть из набора букв (а, п, ц, р, и) мы составляем слова в которых указанные буквы встречаются нужное количество раз. Это в точности полиномиальный коэффициент* $P(3,2,2,1,1) = \dfrac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 15120$.

Задание 2 *Имеется 18 различных шаров и 4 различных ящика. Сколькими способами можно в первые два ящика положить по 5 шаров, а в оставшиеся два – по 4 шара (Отметьте все подходящие варианты)?*

Ответ: $P(5,4,4,5)$

Решение 2 *Занумеруем ящики {1,2,3,4} . Тогда каждому способу разложить шары по ящикам можно поставить в соответствие последовательность из {1,2,3,4} длины 18, причём 1 и 2 встречается по 5 раз, а 3 и 4 – по 4. Отсюда искомое количество способов равно* $P(5,5,4,4) = \dfrac{18!}{5! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 4!} = P(5,4,4,5)$*).*

Задание 3 *У продавца антиквариата имеется 12 разных монет. Четверо нумизматов (Андрей, Борис, Виктор и Геннадий) купили эти монеты: Андрей и Борис по 4 монеты, а Виктор и Геннадий – по 2 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?*

Ответ: $P(4,4,2,2) = 207900$

Решение 3 *Данная задача аналогична предыдущим: можно занумеровать нумизматов или считать, что мы собираем "слово"из четырёх букв А, четырёх букв Б, двух В и двух Г. Ответ:* $P(4,4,2,2) = \dfrac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 2!} = 207900$.

Задание 4 *У продавца антиквариата имеется 12 разных монет. Четверо нумизматов купили эти монеты: какие-то двое по 4 монеты, а оставшиеся двое – по 2 монеты. Сколькими способами они могли осуществить свои покупки?*

Ответ:

Решение 4 *В чём отличие данной задачи от предыдущей? Теперь мы дополнительно выбираем, кому достанется 4 монеты, а кому 2. Аналогично задаче про цветки и девочек, выбираем двух нумизматов, котором достанется по 4 монеты (это можно сделать* C_4^2 *способами). А затем, как в предыдущей задаче раздаём им монеты* $P(4,4,2,2)$ *способами. Итого, получаем:* $C_4^2 \cdot P(4,4,2,2) = 6\cdot 207900 = 1247400$.

Задание 5 *Полиномиальный коэффициент* $P(5,4,3,2,1)$ *равен:*

Ответ: $\dfrac{15!}{5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}$

Решение 5 *По полиномиальной формуле,* $P(5,4,3,2,1) = \dfrac{15!}{5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}$.

$$C_{15}^{10}\cdot C_{10}^{6}\cdot C_6^3\cdot C_3^2 = \frac{15!}{10!\cdot 5!}\cdot\frac{10!}{6!\cdot 4!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{15!}{5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}.$$

$$C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{4}\cdot C_6^3\cdot C_3^2 = \frac{15!}{5!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{15!}{5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}.$$

Задание 6 *Чему равна сумма, приведённая ниже?*

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3),n_1+n_2+n_3=15,n_i\geq 0,n_i\in\mathbb{Z}} (-1)^{n_3} P(n_1,n_2,n_3)$$

Ответ: 1

Решение 6

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3),n_1+n_2+n_3=15,n_i\geq 0,n_i\in\mathbb{Z}} P(n_1,n_2,n_3)\cdot 1^{n_1}\cdot 1^{n_2}\cdot(-1)^{n_3} =$$

$$= (1+1-1)^{15} = 1.$$

Задание 7 *В чемпионате Европы по футболу участвуют 24 команды. Золотые медали получает команда победитель, серебряные – команда, проигравшая в финале, бронзовые – две команды, которые проиграли в полуфинале. Сколькими способами могут распределиться медали между командами? (Отметьте все правильные варианты)*

Ответ: $P(20, 1, 1, 2)$

Решение 7 *Из 24 команд надо выбрать 1 победителя, 1 финалиста, 2 полуфиналиста и 20 команд, не попавших в полуфинал. Количество способов – полиномиальный коэффициент* $P(20, 1, 1, 2) = \frac{24!}{20!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{2!}$.

Задание 8 *Коэффициент при* x^{10} *в разложении* $(1 + x^2 + x^3)^6$ *равен:*

Ответ: $P(1, 5, 0) + P(2, 2, 2) = 96$

Решение 8 *Чтобы получить* x^{10} *надо сколько-то раз взять* x^2*, а сколько-то* x^3 *(а из оставшихся скобок взять 1). Какие могут быть варианты? Надо взять* x^3 *чётное количество раз, то есть 0 или 2. Отсюда получаем два способа получить* x^{10}*. Первый: из 5 скобок взять* x^2*, а из оставшейся – 11. Таких способов всего* $P(1, 5, 0)$*. Второй способ: из двух скобок взять 11, из двух –* x^2*, и из оставшихся двух –* x^3*. Количеств таких способов равно* $P(2, 2, 2)$*. Итого получаем сумму* $P(1, 5, 0) + P(2, 2, 2)$.