

Курс: "Комбинаторика для начинающих".
Неделя 7. Контрольная работа.
Выравнивания.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

Задание 1 Рассмотрим выравнивания слов "росомаха" и "носорог". Сколько всего есть выравниваний длины 9, в которых не выполнено ни условие эквивалентности, ни условие расположения друг над другом символов \emptyset ?

Ответ: $C_9^2 \cdot C_9^1 = 324$

Решение 1 Выравнивание однозначно определяется тем, как расположены символы \emptyset в верхней и нижней строчках. В верхней строчке надо выбрать 1 место, в нижней – 2. Таким образом, общее количество выравниваний равно $C_9^2 \cdot C_9^1 = 36 \cdot 9 = 324$.

Задание 2 Рассмотрим выравнивания слов "росомаха" и "носорог". Сколько всего есть правильных выравниваний (то есть с выполнением двух условий) данных слов?

Ответ: $C_{15}^7 = C_{15}^8$

Решение 2 По доказанной теореме количество правильных выравниваний равно $C_{8+7}^7 = C_{8+7}^8$, то есть $C_{15}^7 = C_{15}^8$.

Задание 3 Рассмотрим выравнивания слов "росомаха" и "носорог". Какое максимальное количество столбцов может быть в выравнивании?

Ответ: 15

Решение 3 Так как символы \emptyset не могут стоять друг над другом, максимальное количество столбцов равно $7 + 8 = 15$.

Задание 4 Рассмотрим выравнивание:

$$\begin{pmatrix} \text{р} & \text{о} & \emptyset & \text{с} & \emptyset & \text{о} & \text{м} & \text{а} & \emptyset & \text{х} & \text{а} & \emptyset \\ \text{н} & \emptyset & \text{о} & \emptyset & \text{с} & \emptyset & \text{о} & \emptyset & \text{р} & \text{о} & \emptyset & \text{г} \end{pmatrix}$$

Сколько выравниваний с ним отождествляется (естественно, мы включаем само это выравнивание)?

Ответ: 40

Решение 4 Мы можем отождествлять выравнивания, меняя местами столбцы, в которых присутствует \emptyset в разных строчках. Отсюда ясно, что первый, седьмой и десятый столбцы остаются на месте. Восьмой и девятый, а также одиннадцатый и двенадцатый столбцы мы можем менять местами. Для столбцов со второго по шестой расположение однозначно задаётся верхней строчкой: три непустых и два пустых символа можно выбрать 10 способами. По правилу умножения общее количество выравниваний, эквивалентных данному, равно $10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$.

Задание 5 Укажите выравнивания, которые являются одинаковыми (с точки зрения правила отождествления) с выравниванием:

$$\begin{pmatrix} \text{к} & \text{о} & \emptyset & \text{р} & \text{о} & \text{в} & \emptyset & \text{а} \\ \text{о} & \emptyset & \text{в} & \emptyset & \emptyset & \text{ц} & \text{а} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Решение 5 Так как мы можем менять местами только столбцы, то при любом отождествлении первый и седьмой столбцы остаются на месте. Поэтому варианты:

$$\begin{pmatrix} \text{к} & \text{о} & \emptyset & \text{р} & \text{о} & \text{в} & \emptyset & \text{а} \\ \text{о} & \text{в} & \text{ц} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \text{а} & \emptyset \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \text{к} & \text{о} & \emptyset & \text{р} & \emptyset & \text{о} & \text{в} & \text{а} \\ \text{о} & \emptyset & \text{в} & \emptyset & \text{ц} & \emptyset & \emptyset & \text{а} \end{pmatrix}$$

не подходят.

Оставшиеся два варианта легко получить из имеющихся, используя условие эквивалентности.

Задание 6 Сколько одинаковых подслов содержат слова "росомаха" и "носорог" если каждое подслово считается только один раз? (Подсловом называется последовательность букв слова, расположенных подряд друг за другом. Повторы не учитываются, т.е. если подслово встречается несколько раз, то мы считаем, что одно подслово).

Ответ: 7

Решение 6 Всего их 7: это подслова "р" "с" "о" "ро" "ос" "осо" "со".

Задание 7 Сколько одинаковых подслов содержат слова "росомаха" и "носорог"? (Подсловом называется последовательность букв слова, которые расположены подряд друг за другом. Повторы учитываются, т.е. если подслово встречается несколько раз, то мы считаем, что разные подслова).

Примеры: слова "торс" и "трос" содержат следующие общие подслова: "т" "о" "р" "с" ответ 4; слова "торос" и "трос" содержат следующие общие подслова: "т" "о" (2 раза), "р" "с" "ро" "ос" "рос" ответ 8.

Ответ: 12

Решение 7 Всего их 12: "р" "о" (6 раз), "с" "ро" "ос" "со" "осо". Буква "о" является общим подсловом $6 = 2 \cdot 3$ раз, т.к. на каждую "верхнюю" букву "о" (которых две в верхнем слове) встречаются три буквы "о" в нижнем слове.