Курс: "Комбинаторика для начинающих". Неделя 1. Контрольная работа. Правила сложения и умножения. Принцип Дирихле.

Александров Алексей, ИУ8-g4

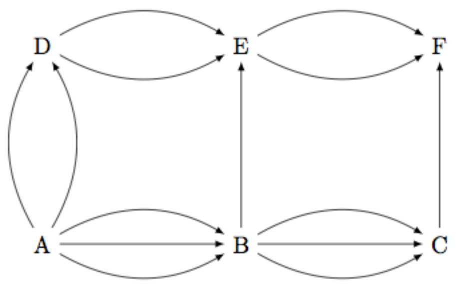
2020г.

Задание 1 *Автомобильные номера штата Калифорнии состоят из одной цифры, не равной 0, трёх больших букв латинского алфавита и ещё трёх цифр (например, 5PPP064). Сколько всего имеется номеров такого типа?*

Ответ: $9 \cdot 10^3 \cdot 26^3$

Решение 1 *В качестве первой цифры номера можно взять любую из 9 цифр* $(1, \ldots, 9)$*, в качестве каждой из трех букв можно взять любую из 26 букв латинского алфавита, и ещё три цифры, для каждой из которой есть 10 вариантов выбора (0,…,9). Итого, по правилу умножения получаем:* $9 \cdot 10^3 \cdot 26^3 = 158184000$

Задание 2 *Путешественнику нужно добраться из города* A *в город* F *двигаясь каждый раз вправо или вверх по стрелкам (см. карту). Сколькими способами это можно сделать?*



Ответ: 23

Решение 2 *Используя правила сложения и умножения, получаем, что количество способов попасть из* A *в* F *равно сумме количества способов пройти по маршрутам* $A \to D \to E \to F$, $A \to B \to E \to F$, $A \to B \to C \to F$. *В итоге получаем:* $2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 = 8 + 6 + 9 = 23$.

Задание 3 *В мешке 50 шаров, отличающихся только цветом: 8 красных, 9 синих, 9 желтых, остальные – поровну черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них гарантированно было не менее 7 шаров одного цвета?*

Ответ: 31

Решение 3 *Сначала заметим, что черных и белых шаров по* $\dfrac{50-8-9-9}{2} = 12 > 7$. *Если взять всего 30 шаров, то может получиться так, что мы взяли только по 6 шаров каждого цвета. Значит, нужно брать больше 30 шаров. Попробуем вытянуть 31 шар. Тогда по принципу Дирихле, если роль "клеток"играют цвета, а роль "кроликов"вытянутые шары, получаем, что какие бы мы ни вытащили шары, среди них обязательно найдется по крайней мере 7 шаров одного цвета(31=5·6+1).*

Задание 4 *15 футбольных команд (в каждой по 11 человек) летят из Москвы в Санкт-Петербург на соревнования. Какое минимальное количество мест может быть в самолете, чтобы гарантированно нашлась команда, долетевшая в полном составе?*

Ответ: 151

Решение 4 *Если в самолете будет всего 150 мест, то можно будет посадить в него по 10 человек от каждой из 15 команд, тогда самолет будет заполнен целиком, но в нем не будет ни одной команды в полном составе. Значит, нужен с самолет больше, чем со 150150 местами. Рассмотрим самолет, в котором 151 место. Тогда по принципу Дирихле, если роль "клеток"играют команды, а роль "кроликов"футболисты, получаем, что как бы ни произошла рассадка футболистов, среди пассажиров самолета обязательно найдется хотя бы одна команда, летевшая в полном составе (151 = 15 · 10 + 1).*

Задание 5 *Сколько чисел от 1 до 9999 (включая 1 и 9999) не имеют в своей десятичной записи одинаковых подряд идущих цифр? (к примеру, не подходят 1488, 2259, 3233)*

Ответ: 7380

Решение 5 *Первой цифрой числа, не имеющего в своей записи подряд идущих цифр, может быть любая цифра, кроме 0, то есть всего 9 вариантов.*

Второй цифрой этого числа может быть любая цифра, кроме той, которая стоит на первом месте, то есть 9 вариантов, третьей - любая, кроме стоящей на втором месте, то есть опять 9 вариантов, и т.д. Тогда таких четырехзначных чисел всего 9^4.

Аналогично, трехзначных – 9^3

двузначных – 9^2

и однозначных – 9.

Всего получаем: $9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 = 73809$ *чисел.*

Задание 6 *У вас есть 4 ящика и 15 кроликов. Отметьте верные утверждения.*

Решение 6 *При такой рассадке найдётся ящик, в котором сидит* $\geq [\frac{15}{4}]$ *кроликов, то есть 4 кролика. Для 5 и 6 кроликов есть контр-пример:* $4, 4, 4, 3$.

Задание 7 *Имеется 4 банки желтой краски, 5 банок синей краски и 7 банок красной краски, все банки разного размера. Отметьте верные утверждения.*

Решение 7 *Одну банку краски по правилу сложения можно выбрать* $4 + 5 + 7 = 16$ *способами. Если же выбирать по одной банке каждой краски, то по правилу умножения получаем* $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$ *способов.*