Курс: "Комбинаторика для начинающих".
Неделя 6. Контрольная работа.
Формула включений-исключений.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

Задание 1 *Переплётчик должен переплести 5 различных книг в красный, зелёный или коричневый переплёты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга? Все книги различны.*

Ответ: 150

Решение 1 *См. решение задачи 2.*

Задание 2 *Сколькими способами можно расселить 5 туристов по 3 домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым? Все туристы и домики различны. Способы расселения, отличающиеся только перестановкой туристов, заселённых в один домик, считаются одинаковыми.*

Ответ: 150

Решение 2 *В качестве множеств A_i (или свойства α_i) рассмотрим множества расселений туристов по домикам, при которых i-ый домик является пустым. Тогда по формуле включений и исключений мы можем найти количество расселений, при которых ни одно из свойства α_i не выполнено. То есть ни один домик не является пустым, что и требуется найти. Таким образом, искомое количество расселений n находится по формуле:*

$n = |X| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$|X|$ *– это общее количество расселений, то есть 3^5. $|A_i|$ – это количество способов расселить туристов по не более чем двум домикам, т.е. 2^5, $|A_i \cap A_j|$– это количество способов расселить туристов в оставшийся домик (не i и не j), то есть 1^5, а $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$, так как домиков для расселения не осталось.*

Итого получаем: $n = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 - 0 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150.$

Задание 3 *Дана таблица размером* 2×5. *В левом верхнем углу записано число 11. Сколькими способами таблицу можно дополнить числами {1,2,3,4,5} так, чтобы выполнялись оба следующих условия:*

1) в каждой строчке присутствовало каждое из чисел от 1 до 5

2) в каждом столбце все числа были различны?

(Пример такого заполнения: первая строчка: ***1,2,5,4,3*** *вторая строчка:* ***3,5,2,1,4****.)*

Ответ: $44 \cdot 4! = 1056$

Решение 3 *Первую строчку можно заполнить 4! способами. Вторую строчку надо заполнить так, чтобы ни один элемент в нижней строке не находился в том же столбце. Поэтому это число равно числу беспорядков из 5 элементов, то есть 44 (см. следующую задачу). Итого:* $44 \cdot 4! = 1056$.

Задание 4 *Число беспорядков в последовательности из 5 элементов равно:*

Ответ: $5! \cdot (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 44$

Решение 4 *По формуле из лекции получаем:* $5!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}) = 5!(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}) = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$.

Задание 5 *На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром — 38 человек, с сыром и колбасой — 28 человек. Сколько человек не взяли с собой бутерброды?*

Ответ: 34

Решение 5 *По формуле включений и исключений получаем:* $92 - 48 - 38 + 28 = 34$.

Задание 6 *Формула включений и исключений для трёх множеств A,B,CA,B,C выглядит следующим образом:*

Ответ: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Решение 6

См. лекцию.