

Курс: "Комбинаторика для начинающих".  
Неделя 1. Контрольная работа.  
Правила сложения и умножения. Принцип Дирихле.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

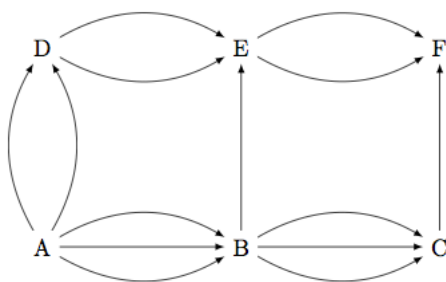
**Задание 1** Автомобильные номера штата Калифорнии состоят из одной цифры, не равной 0, трёх больших букв латинского алфавита и ещё трёх цифр (например, 5PPP064). Сколько всего имеется номеров такого типа?

**Ответ:**  $9 \cdot 10^3 \cdot 26^3$

**Решение 1** В качестве первой цифры номера можно взять любую из 9 цифр  $(1, \dots, 9)$ , в качестве каждой из трех букв можно взять любую из 26 букв латинского алфавита, и ещё три цифры, для каждой из которой есть 10 вариантов выбора  $(0, \dots, 9)$ . Итого, по правилу умножения получаем:  $9 \cdot 10^3 \cdot 26^3 = 158184000$

---

**Задание 2** Путешественнику нужно добраться из города A в город F двигаясь каждый раз вправо или вверх по стрелкам (см. карту). Сколькими способами это можно сделать?



**Ответ:** 23

**Решение 2** Используя правила сложения и умножения, получаем, что количество способов попасть из A в F равно сумме количества способов пройти по маршрутам  $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F$ ,  $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F$ ,  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$ . В итоге получаем:  $2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 = 8 + 6 + 9 = 23$ .

**Задание 3** В мешке 50 шаров, отличающихся только цветом: 8 красных, 9 синих, 9 желтых, остальные – поровну черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них гарантированно было не менее 7 шаров одного цвета?

**Ответ:** 31

**Решение 3** Сначала заметим, что черных и белых шаров по  $\frac{50 - 8 - 9 - 9}{2} = 12 > 7$ . Если взять всего 30 шаров, то может получиться так, что мы взяли только по 6 шаров каждого цвета. Значит, нужно брать больше 30 шаров. Попробуем вытянуть 31 шар. Тогда по принципу Дирихле, если роль "клеток" играют цвета, а роль "кроликов" вытянутые шары, получаем, что какие бы мы ни вытащили шары, среди них обязательно найдется по крайней мере 7 шаров одного цвета ( $31 = 5 \cdot 6 + 1$ ).

**Задание 4** 15 футбольных команд (в каждой по 11 человек) летят из Москвы в Санкт-Петербург на соревнования. Какое минимальное количество мест может быть в самолете, чтобы гарантированно нашлась команда, долетевшая в полном составе?

**Ответ:** 151

**Решение 4** Если в самолете будет всего 150 мест, то можно будет посадить в него по 10 человек от каждой из 15 команд, тогда самолет будет заполнен целиком, но в нем не будет ни одной команды в полном составе. Значит, нужен самолет больше, чем со 150 местами. Рассмотрим самолет, в котором 151 место. Тогда по принципу Дирихле, если роль "клеток" играют команды, а роль "кроликов" футболисты, получаем, что как бы ни произошла рассадка футболистов, среди пассажиров самолета обязательно найдется хотя бы одна команда, летевшая в полном составе ( $151 = 15 \cdot 10 + 1$ ).

**Задание 5** Сколько чисел от 1 до 9999 (включая 1 и 9999) не имеют в своей десятичной записи одинаковых подряд идущих цифр? (к примеру, не подходят 1488, 2259, 3233)

**Ответ:** 7380

**Решение 5** Первой цифрой числа, не имеющего в своей записи подряд идущих цифр, может быть любая цифра, кроме 0, то есть всего 9 вариантов.

Второй цифрой этого числа может быть любая цифра, кроме той, которая стоит на первом месте, то есть 9 вариантов, третьей – любая, кроме стоящей на втором месте, то есть опять 9 вариантов, и т.д. Тогда таких четырехзначных чисел всего  $9^4$ .

Аналогично, трехзначных –  $9^3$

двузначных –  $9^2$

и однозначных – 9.

Всего получаем:  $9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 = 7380$  чисел.

---

**Задание 6** У вас есть 4 ящика и 15 кроликов. Отметьте верные утверждения.

**Решение 6** При такой рассадке найдётся ящик, в котором сидит  $\geq \lceil \frac{15}{4} \rceil$  кроликов, то есть 4 кролика. Для 5 и 6 кроликов есть контр-пример: 4, 4, 4, 3.

---

**Задание 7** Имеется 4 банки желтой краски, 5 банок синей краски и 7 банок красной краски, все банки разного размера. Отметьте верные утверждения.

**Решение 7** Одну банку краски по правилу сложения можно выбрать  $4 + 5 + 7 = 16$  способами. Если же выбирать по одной банке каждой краски, то по правилу умножения получаем  $4 \cdot 5 \cdot 7 = 140$  способов.

---