

Курс: "Комбинаторика для начинающих".
Неделя 2. Контрольная работа.
Основные комбинаторные величины и их свойства.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

Задание 1 *Есть 10 различных марок шоколада. Количество способов подарить трём девочкам по шоколадке равно?*

Ответ: 10^3

Решение 1 *Каждая девочка может получить шоколадку любой марки. Поскольку все девочки и все марки различны, то количество способов подарить шоколадки девочкам в точности равно количеству размещений с повторениями $\overline{A}_{10}^3 = 10^3$*

Задание 2 *Сколькими способами можно составить расписание авиарейсов на завтра, если всего имеется 7 рейсов, а в день осуществляется от двух до четырех перелётов?*

Ответ: 1092

Решение 2 *Если в день осуществляется только два рейса, то первый можно выбрать 7 способами, а второй уже только 6 способами. То есть расписание из двух рейсов можно составить $A_7^2 = 7 \cdot 6 = 42$ способами. Аналогично, если в день состоится 3 рейса, то расписание можно составить $A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ способами, а для 4 рейсов в день – $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Всего получаем $42 + 210 + 840 = 1092$ способа составить расписание.*

Задание 3 *Сколькими способами можно вручить призы в 5 различных номинациях (в каждой номинации только один приз), если в соревновании участвуют 10 человек?*

Ответ: 10^5

Решение 3 Приз в любой из 5 номинаций может достаться любому из 10 участников соревнований, то есть количество способов выдать призы в точности равно количеству размещений с повторениями $\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000$.

Задание 4 Сколькими способами можно вручить призы в 5 различных номинациях (в каждой номинации только один приз), если в соревновании участвуют 10 человек, при условии, что каждый участник может получить не более одного приза?

Ответ: $A_{10}^5 = 30240$

Решение 4 Приз в первой номинации может достаться любому из 10 участников соревнований, во второй – любому из 9 участников (получивший первый приз другие призы получать не может), в третьей – любому из 8 участников, и т.д. То есть количество способов выдать призы в точности равно количеству размещений без повторений $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Задание 5 В семье семеро детей: старший – мальчик, дальше – девочка, девочка, мальчик, мальчик, мальчик и младшая – девочка. Сколькими способами родители могут выбрать имена, если они выбирают из 10 мужских и 13 женских имен и хотят, чтобы имена не повторялись?

Ответ: 8648640

Решение 5 Количество способов выбрать имена сыновьям равно количеству размещений без повторений $A_{10}^4 = \frac{10!}{6!}$, аналогично, количество способов выбрать имена дочерям равно $A_{13}^3 = \frac{13!}{10!}$. Общее количество способов выбрать имена детям равно $\frac{10!}{6!} \cdot \frac{13!}{10!} = \frac{13!}{6!} = 7 \cdot \dots \cdot 13 = 8648640$.

Задание 6 Жених и невеста выбирают трехъярусный свадебный торт. На выбор имеются 5 типов ярусов (бисквитный, йогуртовый, чизкейк и т.д.). Сколько различных тортов может предложить кондитер, если бисквитных ярусов может быть не больше двух, а ярусов любого другого типа не больше одного?

Ответ: 72

Решение 6 Нужно рассмотреть 3 случая: в торте нет бисквитных ярусов, ровно один бисквитный ярус и ровно два бисквитных яруса.

В первом случае (бисквитный ярус использовать нельзя) количество способов испечь торт равно количеству размещений без повторений $A_4^3 = 24$.

Во втором случае (ровно один бисквитный ярус) нужно сначала разместить для бисквитный ярус, для это всего 3 варианта, а затем выбрать оставшиеся два яруса из 4 типов и определить для них места, то есть $A_4^2 = 12$ способов. Всего получаем $3 \cdot 12 = 36$ тортов.

В третьем случае (ровно два бисквитных яруса) нужно выбрать место для "небисквитного" яруса на любом из 33 уровней, а затем выбрать тип для этого яруса из оставшихся 44 типов $A_4^1 = 4$ способами. Всего получаем $3 \cdot 4 = 12$ тортов.

Суммируя результаты для всех трех случаев, получаем $24 + 36 + 12 = 72$ различных тортов.

Задание 7 В университете десятибалльная система оценок: 1-2 – "неудовлетворительно" 3-4 – "удовлетворительно" 5-7 – "хорошо" и 8-10 – "отлично". Сколькими способами можно поставить оценки 5 студентам, если известно, что экзамен сдали все (т.е. нет неудовлетворительных оценок)?

Ответ: 32768

Решение 7 Каждый студент может получить любую из 8 оценок от 3 до 10. То есть общее число способов поставить удовлетворительные и более высокие оценки студентам равно количеству размещений с повторениями $\bar{A}_8^5 = 8^5 = 32768$.

Задание 8 Группа из 4 студентов пришла в столовую. Сколькими способами они могут занять очередь друг за другом, если Маша и Таня хотят стоять рядом, а Коля не хочет быть последним?

Ответ:

Решение 8 Приведём здесь решение перебором. Другое решение, которое годится и в общем случае написано в решении к следующей задаче.

Пара Маша-Таня занимает либо 1-2, либо 2-3, либо 3-4 места. Это 6 вариантов.

Если пара Маша-Таня занимает 1-2 или 2-3 места, то Коля занимает 3 и 1 место соответственно, а оставшийся студент - 4 место.

Если пара Маша-Таня занимает 3-4 место, то Коля занимает 1 или 2 место. То есть в этом случае вариантов будет 2.

Итого: $2 + 2 + 2 \cdot 2 = 8$ вариантов.

Задание 9 Группа из 8 студентов пришла в столовую. Сколькими способами они могут занять очередь друг за другом, если Маша и Таня хотят стоять рядом, а Коля не хочет быть последним?

Ответ: 8640

Решение 9 Так как Маша и Таня хотят стоять рядом, то можно считать, что они занимают одно место вдвоём. Соответственно, мест становится 7, но надо учесть, что девочки могут между собой поменяться местами (Маша-Таня и Таня-Маша). Поэтому количество всех очередей надо будет удвоить.

Коля не хочет быть последним, поэтому для него есть 6 возможных мест в очереди. Остальные могут занять места $6 \cdot 5 \dots 1 = 6!$ способами.

В итоге получаем, что количество способов занять очередь равно $2 \cdot 6 \cdot 6! = 8640$.