Курс: "Комбинаторика для начинающих". Неделя 4. Контрольная работа. Комбинаторные тождества.

Александров Алексей, ИУ8-g4

2020г.

Задание 1 *Шестая строчка треугольника Паскаля выглядит следующим образом:*

Ответ: 1 6 15 20 15 6 1

Решение 1 *По определению, шестая строчка треугольника Паскаля получается из пятой 1 5 10 10 5 1 суммированием чисел стоящих слева сверху и справа сверху. Получаем следующую строчку: 1 6 15 20 15 6 1.*

Задание 2 *На дереве висит 10 разных яблок. Сколькими способами можно сорвать нечётное количество яблок?*

Ответ:

Решение 2 *Из задачи «Наборы из чётного числа символов» мы знаем, что чётное количество яблок можно сорвать* $2^{10-1} = 2^9 = 512$ *способами. Так как общее количество способов сорвать яблоки равно* 2^{10}, *то нечётное количество яблок можно сорвать также* 512 *способами.*

Задание 3 *Сумма* $C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = \sum\limits_{i=1}^{10} C_{10}^i$ *равна*

Ответ: $10^{10} - 1 = 1023$

Решение 3 *Мы знаем, что* $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$. *Подставляя n=10, получаем, что* $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$. *Наша сумма получается из данной вычитанием* $C_{10}^0 = 1$. *Следовательно, ответ равен 1023.*

Задание 4 *Коэффициент при* x^7 *в разложении* $(1+x)^{11}$ *равен:*

Ответ: C_{11}^7

Решение 4 *По формуле бинома Ньютона коэффициент при* x^7 *равен* $C_{11}^7 = C_{11}^4$.

Задание 5 *В наборе из 12 сосудов имеется 5 неразличимых стаканов и 7 различных чашек. Сколькими способами можно выбрать 6 сосудов из 12?*

Ответ:

Решение 5 *Для каждого фиксированного k существует только один способ выбрать k неразличимых стаканов. Отсюда искомое количество способов равно количеству способов выбрать от 1 до 6 чашек. Искомая сумма равна* $C_7^1 + \ldots + C_7^6 = C_7^0 + C_7^1 + \ldots + C_7^6 + C_7^7 - (C_7^0 + C_7^7) = 2^7 - 2 = 128 - 2 = 126$.

Задание 6 *Сумма* $C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^m + \ldots + C_m^m \ \forall m \geq 1,\ n \geq 1$ *равна:*

Ответ: $C_{n+m}^{m+1} = C_{n+m}^{n-1}$

Решение 6 *Эта сумма в точности равна сумме чисел в треугольнике Паскаля, расположенных на одной диагонали, начиная с числа* C_{n+m-1}^m *и выше. Эта задача разобрана на видео, и ответ – число, стоящее под* C_{n+m-1}^m *справа, то есть* $C_{n+m}^{m+1} = C_{n+m}^{n-1}$.

Задание 7 *Отметьте тождества, выполненные* $\forall n \geq k \geq 0$.

Решение 7 $2^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i$ *– верно;*

$0 = C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n 0$ *– неверно для n=0;*

$C_{n-k}^k = C_{n-k}^{n-k}$ *– неверно для n=3, k=1;*

$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$ *– неверно для n=4, k=1* $(4 = C_4^1 \neq C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6$.