

第六次上机作业

21300180079 吕昂格

2023 年 12 月 14 日

复旦教材第一题

复现书上例题 4，见文件 *hm6_1.py*，得到结果如下：

x	$F(x)$	$F'(x)$	$[F'(x)]^{-1}F(x)$
1.15	$4.28750000 \times 10^{-2}$	-1.0325	$-4.15254237 \times 10^{-2}$
1.19152542	$6.02064963 \times 10^{-3}$	-0.74080149	$-8.12721043 \times 10^{-3}$
1.19965263	$2.36643116 \times 10^{-4}$	-0.68250067	$-3.46729499 \times 10^{-4}$
1.19999936	$4.32713245 \times 10^{-7}$	-0.68000458	$-6.36338720 \times 10^{-7}$

复旦教材第二题

复现书上例题 6，见文件 *hm6_2.py*，得到结果如下：

x	$F(x)$	$F'(x)$	$[F'(x)]^{-1}F(x)$
1.15	$4.28750000 \times 10^{-2}$	-1.0325	$-4.15254237 \times 10^{-2}$
1.19152542	$6.02064963 \times 10^{-3}$	-1.0325	$-5.83113765 \times 10^{-3}$
1.19735656	$1.82267575 \times 10^{-3}$	-1.0325	$-1.76530339 \times 10^{-3}$
1.19912186	$5.99907314 \times 10^{-4}$	-1.0325	$-5.81024032 \times 10^{-4}$

可见简化 Newton 迭代法比起 Newton 迭代法精度更差

清华教材习题

我们设迭代函数为:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cos(x_2 x_3) \\ \frac{1}{9} \sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06} - 0.1 \\ -\frac{1}{20} e^{-x_1 x_2} - \frac{1}{20} (\frac{10}{3} \pi - 1) \end{pmatrix}$$

则有:

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} x_3 \sin x_2 x_3 & -\frac{1}{3} x_2 \sin x_2 x_3 \\ \frac{1}{9} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} & 0 & \frac{1}{18} \frac{\cos x_3}{\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}} \\ \frac{x_2}{20} e^{-x_1 x_2} & \frac{x_1}{20} e^{-x_1 x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

在区域 $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_i| \leq 1\}$ 上 $\|\Phi'(x)\|_1 \leq 1$, 故 $\rho(\Phi'(x)) \leq 1$ 迭代法收敛, 用 $x_0 = (0, 0, 0)$ 计算方程的根 (见文件 `hm6_3_1.py`):

我们设置最大迭代次数 $N = 100$, 在迭代到 $\|x_{k+1} - x_k\| \leq 10^{-5}$ 时结束迭代, 计算得到最后的近似解为:

$$x = (5.00000000 \times 10^{-1}, 2.48385686 \times 10^{-8} - 5.23598776 \times 10^{-1})$$

接下来我们使用 Newton 法计算方程的近似解:

以 $(0.5, 0.5, 0.5)$ 为初值, 计算的解为:

$$(5.00000000 \times 10^{-1}, 2.84752053 \times 10^{-18}, -5.23598776 \times 10^{-1})$$

以 $(0.5, 0.2, 0.8)$ 为初值, 计算的解为:

$$(5.00000000 \times 10^{-1}, -1.35134910 \times 10^{-18}, -5.23598776 \times 10^{-1})$$

以 $(0.1, 0.3, 0.3)$ 为初值, 计算的解为:

$$(5.00000000 \times 10^{-1}, -6.92132294 \times 10^{-19}, -5.23598776 \times 10^{-1})$$