第五次上机作业

21300180079 吕昂格

2023 年 11 月 29 日

第一题

本题使用线性方程组迭代法近似拟合一个二阶边值问题的常微分方程，迭代矩阵 A 已由题目给定，下面确定常值向量 b:

针对 0 处的边值问题，由于 $y(0)=0$, 因此失去一项 $\epsilon * y_0$ 无影响，即可设置 $b[0]=a*h^2$。对于 1 处的边值为 $y(1)=1$，因此在向量 b 的最后一项设置为 $a*h^2-(\epsilon+h)$，即:

$$\epsilon * y_{99}-(2\epsilon+h)*y_{100}=ah^2-(\epsilon+h)$$

接下来再使用求解线性方程组的迭代求法求得原微分方程的近似数值解:
使用 Jacobi 迭代法求得的解: (迭代次数 1000 次)
$y=[0.0112, 0.0223, 0.0333, 0.0443, 0.0552, 0.0661, 0.077, 0.0878, 0.0985, 0.1092,$
$0.1199, 0.1305, 0.1411, 0.1516, 0.1622, 0.1726, 0.1831, 0.1935, 0.2039, 0.2143,$
$0.2246, 0.2349, 0.2452, 0.2555, 0.2658, 0.276, 0.2862, 0.2964, 0.3066, 0.3167,$
$0.3269, 0.337, 0.3471, 0.3572, 0.3672, 0.3773, 0.3873, 0.3974, 0.4074, 0.4174,$
$0.4274, 0.4374, 0.4473, 0.4573, 0.4672, 0.4771, 0.487, 0.4969, 0.5068, 0.5167,$
$0.5265, 0.5363, 0.5462, 0.556, 0.5657, 0.5755, 0.5853, 0.595, 0.6047, 0.6144,$
$0.6241, 0.6337, 0.6434, 0.653, 0.6626, 0.6722, 0.6817, 0.6912, 0.7007, 0.7102,$
$0.7197, 0.7291, 0.7385, 0.7479, 0.7573, 0.7666, 0.7759, 0.7852, 0.7944, 0.8037,$
$0.8129, 0.822, 0.8312, 0.8403, 0.8493, 0.8584, 0.8674, 0.8764, 0.8853, 0.8942,$
$0.9031, 0.912, 0.9208, 0.9296, 0.9383, 0.9471, 0.9557, 0.9644, 0.973, 0.9816]$

使用 G-S 迭代法求得的解：(迭代次数 100 次)
$y = [0.0212, 0.0422, 0.063, 0.0836, 0.104, 0.1242, 0.1442, 0.164, 0.1835, 0.2029, 0.2219, 0.2408, 0.2593, 0.2777, 0.2957, 0.3135, 0.331, 0.3483, 0.3653, 0.382, 0.3984, 0.4146, 0.4304, 0.446, 0.4613, 0.4763, 0.491, 0.5055, 0.5196, 0.5335, 0.547, 0.5603, 0.5733, 0.586, 0.5984, 0.6105, 0.6224, 0.6339, 0.6452, 0.6563, 0.667, 0.6775, 0.6877, 0.6977, 0.7073, 0.7168, 0.726, 0.7349, 0.7436, 0.7521, 0.7603, 0.7683, 0.7761, 0.7837, 0.791, 0.7982, 0.8051, 0.8118, 0.8184, 0.8247, 0.8309, 0.8369, 0.8427, 0.8484, 0.8539, 0.8592, 0.8644, 0.8695, 0.8744, 0.8791, 0.8838, 0.8883, 0.8927, 0.897, 0.9012, 0.9053, 0.9093, 0.9132, 0.9171, 0.9208, 0.9245, 0.9281, 0.9316, 0.9351, 0.9386, 0.9419, 0.9453, 0.9486, 0.9519, 0.9551, 0.9583, 0.9615, 0.9647, 0.9679, 0.9711, 0.9742, 0.9774, 0.9806, 0.9837, 0.9869]$ 使用 SOR 迭代法求得的解：(迭代次数 20 次)
$y = [0.0106, 0.0211, 0.0316, 0.0421, 0.0526, 0.0631, 0.0735, 0.084, 0.0944, 0.1048, 0.1152, 0.1256, 0.136, 0.1464, 0.1567, 0.1671, 0.1774, 0.1877, 0.198, 0.2083, 0.2186, 0.2289, 0.2392, 0.2494, 0.2597, 0.27, 0.2802, 0.2904, 0.3007, 0.3109, 0.3211, 0.3313, 0.3415, 0.3517, 0.3619, 0.3721, 0.3822, 0.3924, 0.4026, 0.4127, 0.4229, 0.433, 0.4432, 0.4533, 0.4635, 0.4736, 0.4837, 0.4938, 0.504, 0.5141, 0.5242, 0.5343, 0.5444, 0.5545, 0.5646, 0.5747, 0.5848, 0.5949, 0.605, 0.615, 0.6251, 0.6352, 0.6453, 0.6554, 0.6654, 0.6755, 0.6856, 0.6956, 0.7057, 0.7158, 0.7258, 0.7359, 0.7459, 0.756, 0.766, 0.7761, 0.7861, 0.7962, 0.8062, 0.8163, 0.8204, 0.8292, 0.8381, 0.8469, 0.8557, 0.8645, 0.8732, 0.8818, 0.8904, 0.899, 0.9075, 0.916, 0.9244, 0.9327, 0.9411, 0.9494, 0.9576, 0.9658, 0.974, 0.9821]$

我们用计算出的数值近似解与精确解之间的数列平方范数来估计拟合效果，计算得到:

$$\|y^* - y_{Jacobi}\| = 0.250068$$

$$\|y^* - y_{G-S}\| = 1.452607$$

$$\|y^* - y_{SOR}\| = 0.256305$$

其中 SOR 方法仅仅迭代 20 次，由此可见 SOR 迭代法的收敛速度显著优于 Jcobi 迭代法和 G-S 迭代法

第二题

我们对 x 轴和 y 轴分别做 10 等分，记 u_{ij} 为 u 在 (i,j) 分点的值，则有:

$$u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j-1}+u_{i,j+1}-4u_{ij}=(i^2+j^2)e^{\frac{ij}{100}}$$

为五点差分问题的一般形式，我们把它转化为一个 100 维的线性方程组 $Au=b$, 其中矩阵 A:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & & \ddots & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \ddots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & \end{bmatrix}$$

向量 u:

$$u=[u_{11},u_{12},\dots,u_{1n},u_{21},\dots,u_{nn}]$$

记 $s_{ij}=(i^2+j^2)e^{\frac{ij}{100}}$, 则向量 b:

$$b=[s_{11},s_{12},\dots,s_{1n},s_{21},\dots,s_{nn}]$$

对于问题 (2), 我们不妨设 $N=10$, 修改第一题中的迭代程序，计算近似解满足 $\|u^{(k)}-u^{(k-1)}\|<10^{-5}$ 条件的解，结果如下表：针对问题 (2) 中

方法	迭代次数
Jacobi 迭代法	371
SOR 迭代法 $\omega=1$	196
SOR 迭代法 $\omega=1.25$	118
SOR 迭代法 $\omega=1.50$	59
SOR 迭代法 $\omega=1.75$	69

要求的条件，我们使用 C-G 方法，求得迭代次数为 32 次, 由此得到 C-G 方法的收敛速度远远快于 Jacobi 方法和 SOR 方法。