

## 第四次上机作业

21300180079 吕昂格

2023 年 11 月 17 日

### 第一题

对于对原来线性方程组的系数矩阵进行扰动得到的扰动矩阵  $A + \delta A$ , 方程  $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ , 用 python 计算得出 (保留三位小数):

$$\delta x = [-10.586, 17.374, -4.226, 2.524]$$

误差的二范数:

$$\|\delta x\| = 20.932$$

解的相对误差为:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.0955$$

此时系数矩阵的相对误差为:

$$\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 0.0076$$

从理论角度分析, 我们有如下公式 (北大教材定理 2.2.1):

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{k(A)}{1 - k(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

其中  $k(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$  且当  $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$  很小时, 上面的估计式可化为:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

本题计算得出的  $k(A) = 2984.0927$ , 得出对解的误差估计为:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 25.962$$

## 第二题

构建算法 2.5.1 的程序见文件

得到对 Hilbert 矩阵的条件数估计：对于问题 2 我们采用 numpy.random 库

阶数	无穷范数条件数
5	943655
10	$3.54 \times 10^{13}$
15	$7.04 \times 10^{17}$
20	$1.35 \times 10^{18}$

生成随机向量  $x$ , 与 Gauss 消去法得到的解产生偏差  $\delta x$

对  $n$  从 5 到 30 估计相对误差  $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ ：对于问题 2 我们采用 numpy.ra

阶数	解相对误差
5	$1.78 \times 10^{-16}$
10	$1.39 \times 10^{-15}$
15	$1.28 \times 10^{-14}$
20	$1.90 \times 10^{-12}$
25	$4.09 \times 10^{-11}$
30	$7.01 \times 10^{-9}$