1.3. Ecuaciones de recurrencia.

- Es normal que un algoritmo se base en procedimientos auxiliares, haga llamadas recursivas para tamaños menores o reduzca el tamaño del problema progresivamente.
- En el análisis, el tiempo t(n) se expresa en función del tiempo para t(n-1), t(n-2)...$\rightarrow$ **Ecuaciones de recurrencia.**
- **Ejemplo**. ¿Cuántas operaciones **mover** se ejecutan?

```
Hanoi (n, i, j, k)
    if n>0 then
        Hanoi (n-1, i, k, j)
        mover (i, j)
        Hanoi (n-1, k, j, i)
    else
        mover (i, j)
```

1.3. Ecuaciones de recurrencia.

- En general, las ecuaciones de recurrencia tienen la forma:

$t(n) = b$	Para $0 \leq n \leq n_0$	**Casos base**
$t(n) = f(t(n), t(n-1), ..., t(n-k), n)$		En otro caso

- **Tipos de ecuaciones de recurrencia:**
  – Lineales y homegéneas:
  $a_0t(n) + a_1t(n-1) + ... + a_kt(n-k) = 0$
  – Lineales y no homegéneas:
  $a_0t(n) + a_1t(n-1) + ... + a_kt(n-k) = p(n) + ...$
  – No lineales:
  Ejemplo: $a_0t^2(n) + t(n-1)*t(n-k) + sqrt(t(n-2) + 1) = p(n)$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- La ecuación de recurrencia es de la forma:

  $a_0t(n) + a_1t(n\text{-}1) + ... + a_kt(n\text{-}k) = 0;$ $\quad$ a_i constante

- **Caso sencillo:**

$$t(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \\ x \cdot t(n\text{-}1) & \text{Si } n > 0 \end{cases}$$

- **Solución:** $t(n) = x^n$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- Suponiendo que las soluciones son de la forma **$t(n) = x^n$**, la ecuación de recurrencia homogénea:

$$a_0 t(n) + a_1 t(n-1) + ... + a_k t(n-k) = 0$$

- Se transforma en:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_k x^{n-k} = 0 \ \Rightarrow /x^{n-k} \Rightarrow$$

$$\mathbf{a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + ... + a_k = 0}$$

Ecuación característica de la ecuación recurrente lineal homogénea

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k = 0$$

Ecuación característica de la ecuación recurrente lineal homogénea

- **k**: conocida. $\mathbf{a_i}$: conocidas. **x**: desconocida.
- Resolver el sistema para la incógnita **x**. El resultado es:

  $t(n) = x^n$
- Pero... Un polinomio de grado **k** tendrá **k** soluciones...

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- Sean las soluciones x= (s_1, s_2, ..., s_k), todas distintas.
- La solución será:

$$\mathbf{t(n) = c_1 \cdot s_1^n + c_2 \cdot s_2^n + \ldots + c_k \cdot s_k^n = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot s_i^n}$$

- Siendo $\mathbf{c_i}$ constantes, cuyos valores dependen de los casos base (condiciones iniciales).

- Son constantes que añadimos nosotros. Debemos resolverlas, usando los casos base de la ecuación recurrente.

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Ejemplo**. El tiempo de ejecución de un algoritmo es:

$$t(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \\ 1 & \text{Si } n = 1 \\ 5 \cdot t(n-1) - 6 \cdot t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

- Encontrar una fórmula explícita para t(n), y calcular el orden de complejidad del algoritmo.
- Ecuación Característica:
  - $x^2 = 5x - 6 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
- Raíces $(x-2)(x-3)$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

$$\mathbf{t(n) = c_1 \cdot s_1^{\,n} + c_2 \cdot s_2^{\,n} + \ldots +}$$

$$\mathrm{t(n)} = c_1 2^n - c_2 3^n \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

Raíces $(x-2)(x-3)$

$t(0)=C_1 2^0+C_2 3^0 = 1$

$t(1)=C_1 2^1+C_2 3^1 = 1$

$C_1 + C_2 = 1$

$2C_1 + 3C_2 = 1$

$C_1 = 2$

$C_2 = -1$

Por lo tanto

$t(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$

$t(n)=2\times 2^n-3^n$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Ejemplo**. El tiempo de ejecución de un algoritmo es:

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 0 \\ 1 & \text{Si } n = 1 \\ 3 \cdot t(n-1) + 4 \cdot t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

- Encontrar una fórmula explícita para t(n), y calcular el orden de complejidad del algoritmo.

- ¿Qué pasa si no todas las soluciones son distintas?

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- Si no todas las soluciones $x = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ son distintas, entonces el polinomio característico será:

  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} = (x - s_1)^m \cdot (x - s_2) \cdot \ldots (x - s_p) \cdot x^{n-k}$

- ¿Cuál es la solución para **t(n)**?

- Las derivadas valen 0 en s_1, hasta la m-1-ésima.

  $a_0n \cdot x^{n-1} + a_1(n-1) \cdot x^{n-2} + \ldots + a_k(n-k) \cdot x^{n-k-1} = 0 \Rightarrow \cdot x \Rightarrow$
  $a_0n \cdot x^n + a_1(n-1) \cdot x^{n-1} + \ldots + a_K(n-k)x^{n-k} = 0$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- Las derivadas valen 0 en s_1, hasta la m-1-ésima.

- **Conclusión: $t(n) = n \cdot s_1^n$** también será solución de la ecuación característica.

- Para la segunda derivada: **$t(n) = n^2 s_1^n$** será solución...

- Si **s_i** tiene multiplicidad **m**, entonces tendremos:

  $s_i^n \qquad n \cdot s_i^n \qquad n^2 \cdot s_i^n \qquad \ldots \qquad n^{m-1} \cdot s_i^n$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Ejemplo**. El tiempo de ejecución de un algoritmo es:

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 0 \\ 1 & \text{Si } n = 1 \\ 2 \cdot t(n-1) - t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

- $t(n) - 2t(n-1) + t(n-2) = 0$

$$x^2 - 2x + 1$$
$$(x-1)(x-1)$$
$$C_1 n^0 1^n + C_2 n^1 1^n$$
$$C_1 (1) 1^n + C_2 n^1 1^n$$
$$C_1 1^n + C_2 n^1 1^n$$

$$C_1 1^0 + C_2 0^1 1^0 = 0$$
$$C_1 = 0$$
$$C_1 1^1 + C_2 1^1 1^1 = 1$$
$$C_1 + C_2 = 1$$
$$C_2 = 1$$

Respuesta =n

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Resolver**

$$t(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \\ 1 & \text{Si } n = 1 \\ 5 \cdot t(n-1) - 6t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Resolver**

$$t(n) = \begin{cases} 1 & \text{Si } n = 0 \\ 2 & \text{Si } n = 1 \\ 4t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

1.3.1. Ecuaciones lineales homogéneas.

- **Resolver**

$$t(n) = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 0 \\ 4 & \text{Si } n = 1 \\ 4 \cdot t(n-1) - 4t(n-2) & \text{Si } n > 1 \end{cases}$$

1.3.2. Recurrencias no homogéneas.

- Estructura general recurrencia no homogénea:
  - $a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$
  - "b" es una constante
  - p(n) un polinomio de grado "d"

- Estrategia general
  - Transformar la recurrencia a una expresión homogénea
  - Resolver la expresión, tomando en cuenta que la expresión homogénea no es idéntica a la expresión original

1.3.2. Recurrencias no homogéneas.

Ejemplo 1

- Considere la recurrencia:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

- $b = 3$, $p(n) = 1$
- Para transformar la recurrencia, se sigue el siguiente proceso:
  - $3(t_n - 2t_{n-1} = 3^n) \rightarrow 3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$
  - Sustituyendo $n \rightarrow n - 1$ se tiene
  - $3t_{n-1} - 6t_{n-2} = 3^n$

1.3.2. Recurrencias no homogéneas.

Ejemplo 1

- Se restan las recurrencias encontradas:

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n \qquad *$$

$$-$$

$$3t_{n-1} - 6t_{n-2} = 3^n \qquad **$$

- Resultado: $t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0$
- Ecuación característica: $x^2 - 5x + 6 = 0$
- Raíces: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$
- Por tanto, la solución es: $t_n = c_1 2^n + c_2 3^n$

1.3.2. Recurrencias no homogéneas.

Ejemplo 1

- Dado que (*) y (**) no son la misma recurrencia (no tienen los mismos caso base), para encontrar los valores de las constantes, se toma en cuenta que de la recurrencia original, $t_1 = 2t_0 + 3$

$$\begin{array}{ccccccc} c_1 & + & c_2 & = & t_0 & & n=0 \\ 2c_1 & + & 3c_2 & = & 2t_0+3 & & n=1 \end{array}$$

- Resolviendo el sistema, se concluye que:
  - $c_1 = t_0 - 3$, $c_2 = 3$
- Por tanto
  - $t_n = (t_0 - 3)2^n + 3^{n+1}$