Студент: Горский Кирилл
Группа: 3384
Вариант: 5
Дата: 19 февраля 2024 г.

Алгебра и геометрия
Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *Даны вектора* $a = (9, -4, -7)$, $b = (5, -10, 7)$, $c = (-9, 10, -9)$. *Найти вектор* x, *перпендикулярный* a *и* b *такой, что* $(x, c) = 38$.

Решение. $\vec{x} = t\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = t\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 9 & -4 & -7\\ 5 & -10 & 7\end{vmatrix} = t\cdot(\vec{i}(-28-70)-\vec{j}(63+35)+\vec{k}(-90+20)) = t\cdot(-98\vec{i}-98\vec{j}-70\vec{k})$

$\vec{x} = (-98t, -98t, -70t)$
$(x, c) = 98t\cdot 9 - 98t\cdot 10 + 70t\cdot 9 = 882t - 980t + 630t = 532t$
$532t = 38$
$t = \frac{1}{14}$
Ответ: $\vec{x} = (-7, -7 - 5)$

Задание 2. *Даны вектора* $a = (2, -4, -3)$, $b = (-2, 10, 10)$, $c = (-3, -1, 1)$. *Найти вектор* x *перпендикулярный* a *и* b *такой, что* $(x, c) = 28$.

Решение. $x = t\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = t\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & -3\\ -2 & 10 & 10\end{vmatrix} = t\cdot(\vec{i}\cdot(-40+30)+\vec{j}\cdot(6-20)+\vec{k}\cdot(20-8)) = t\cdot(-10\vec{i}-14\vec{j}+12\vec{k})$

$\vec{x} = (-10t, -14t, 12t)$
$(x, c) = 10t\cdot 3 + 14t\cdot 1 + 12t\cdot 1 = 30t + 14t + 12t = 56t$
$56t = 28$
$t = \frac{1}{2}$
Ответ: $\vec{x} = (-5, -7, 6)$

Задание 3. *Найти площадь треугольника с вершинами* $A(9, -3, -6)$, $B(9, -9, -7)$, $C(8, 7, -5)$.

Решение. $AB(0, -6, -1), AC(-1, 10, 1)$
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -6 & -1\\ -1 & 10 & 1\end{vmatrix} = (-6+10)\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k} = 4\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$$

$\vec{AB}\times\vec{AC} = (4, 1, -6)$
$|\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{16+1+36} = \sqrt{53}$
Ответ: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{53}$

Задание 4. *При каком значении* λ *прямые* $l_1 : \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-9}{3} = t_1$ *и* $l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-\lambda}{-1} = t_2$ *пересекуются? Найти точку пересечения.*

Решение. Уравнения в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 4 + t_1\\ y = 4\\ z = 9 + 3t_1\end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2 + t_2\\ y = 5 + t_2\\ z = \lambda - t_2\end{cases}$$

Найдем t_1 и t_2 из первый двух уравнений систем:

$$\begin{cases} 4+t_1 = 2+t_2 \\ 4 = 5+t_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4+t_1 = 2+t_2 \\ t_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Подставим t_1 и t_2 в третье уравнение:
$9 + 3t_1 = \lambda - t_2$
$9 - 9 = \lambda + 1$
Найдем точку пересечения:
$A(x, y, z)$
$x = 4 + t_1 = 1$
$y = 4$
$z = 9 - 3t_1 = 0$
Ответ: $A(1, 4, 0)$

Задание 5. *Написать уравнение плоскости, проходящей через точку* $(1, 2, -2)$ *параллельно прямым* $l_1 : \frac{x+1}{5} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-8}{2} = t_1$ *и* $l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{1} = t_2$.

Решение. Направляющие векторы:
$\vec{n}_1 : (5, -4, 2)$
$\vec{n}_2 : (1, -1, 1)$
Нормаль плоскости:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

$\vec{n} = (-2, -3, -1)$
Каноническое уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$
$-2x - 3y - 1z + D = 0$ при $(x, y, z) = (1, 2, -2)$
$-2 - 6 + 2 + D = 0$
$D = 6$
Таким образом, плоскость задается уравнением $-2x - 3y - z + 6 = 0$
Ответ: $-2x - 3y - z + 6 = 0$