Студент: Ибрагимов Эдгар
Группа: 2303
Вариант: 6
Дата: 8 апреля 2024 г.

Комбинаторика и теория графов
Индивидуальное домашнее задание №1

Задание (2)**.** *Найдите а) наименьшее; б) наибольшее возможное количество компонент связности в графе с 15 вершинами и 16 рёбрами.*

Решение. а) Рассмотрим простую цепь из 15 вершин, для построения которой нам нужно 14 рёбер. Полный же граф K_{15} требует $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$ вершин. Значит может существовать связный граф из 15 вершин и 16 рёбер, то есть минимальной число компонент связности равно 1.

б) Для того чтобы определить максимально возможное число компонент связности для графа, найдем такой наименьший полный граф, что количество его рёбер не менее 16: $\frac{n(n-1)}{2} \geqslant 16 \Rightarrow n = 7$. Рассмотрим $15 - 7 = 8$ компонент связностей, которые являются изолированными вершинами, а 9-я имеет 7 вершин и 16 рёбер. Действительно, число компонент связностей графа должно равняться $\upsilon - n + 1 = 15 - 7 + 1 = 9$

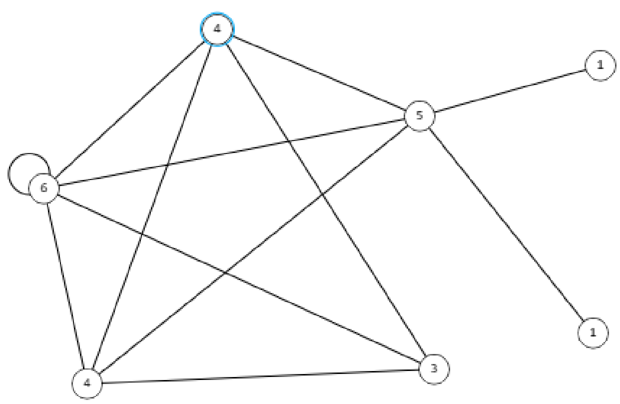
Ответ: а) 1, б) 9.

Задание (3)**.** *В задании могут быть использованы петли.*

а) Существует ли граф со степенями вершин 1, 4, 4, 1, 5, 6, 3? Если существует, постройте его, если нет - объясните почему.

б) Существует ли граф со степенями вершин 0, 3, 3, 0, 4, 5, 2? Если существует, постройте его, если нет - объясните почему.

Решение. а) По лемме о рукопожатиях $E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} deg(V_i) = 12$ - число целое , такой конечный граф существует. Пример:

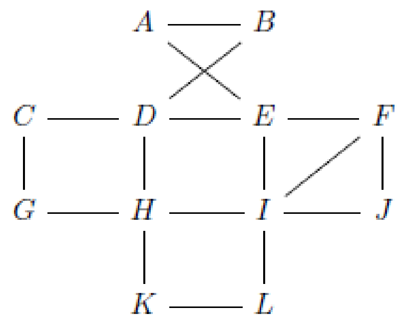


б) По лемме о рукопожатиях, для существования конечного графа число вершин с нечетной степенью должно быть четно. В рассматриваемом случае количество таких вершин 3, 3, 5 - нечётно. Следовательно такого графа не существует.

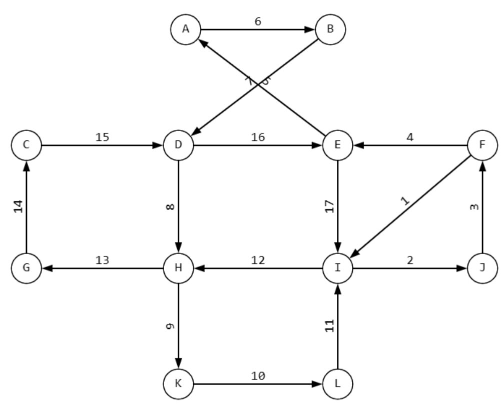
Задание (5)**.** *Является ли граф:*

а) эйлеровым, полуэйлеровым?

в) двудольным?

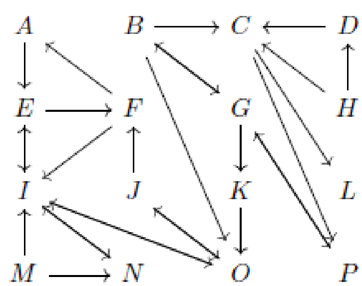


Решение. а) Граф является полуэйлеровым, поскольку он связный и имеет ровно 2 вершины F, I с нечетной степенью.



в) Граф не является двудольным, поскольку вершины F, I, J образуют циклл нечетной длины.

Задание (8)**.** *При помощи алгоритма Kosaraju найдите компоненты сильной связности данного графа:*



Постройте граф конденсации

Решение. Для удобства изменив представление графа - Рис. 1.

Проходимся по графу с помощью алгоритма DFS:

Очередь: JOINFEAMKGBPCLDH

Инвертируем направление рёбер - Рис. 2.

Применяем алгоритм DFS ещё раз соблюдая предыдущую очередь выбора вершин:

Очередь: HKGBPCLDMJOINFEA

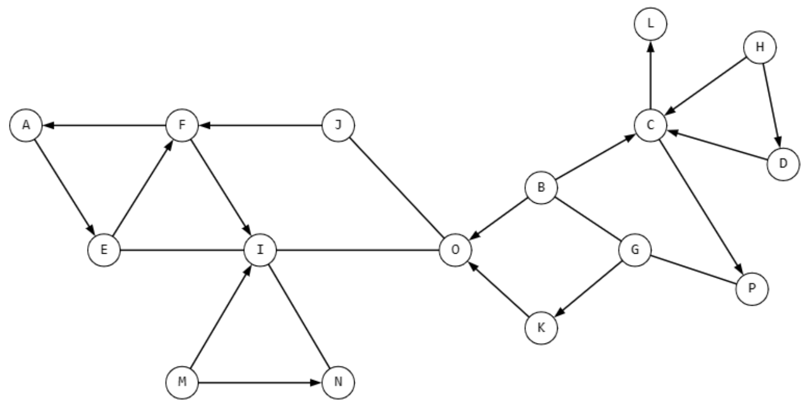


Рис. 1 – Изменённый граф

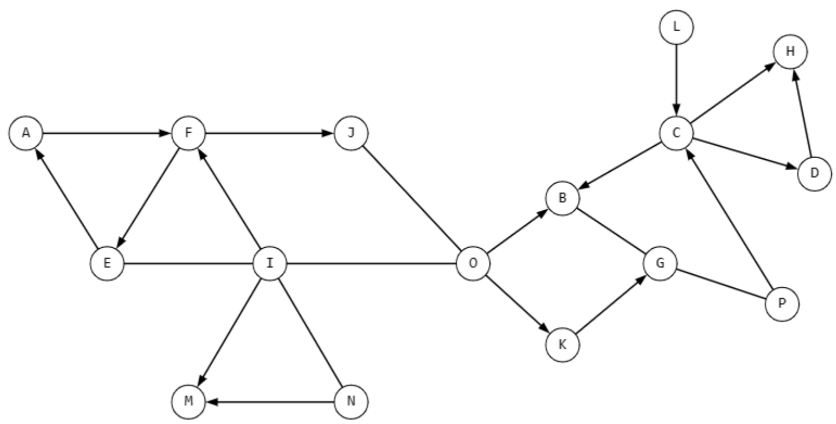


Рис. 2 – Граф с инвертированными направлениями дуг

Получаем лес: H, K, GBPC, L, D, M, JOINFEA - искомые компоненты сильной связности.
В результате строим по ним граф конденсации - Рис. 3.

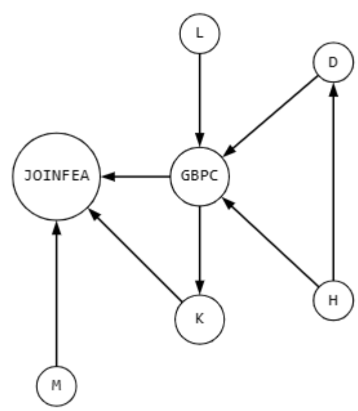
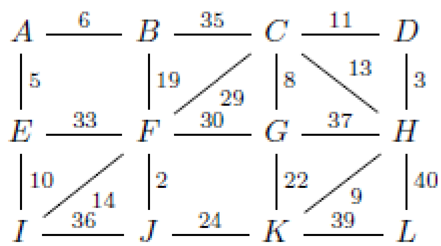


Рис. 3 – Граф конденсации

Ответ: 7 компонент сильной связности

Задание (16). *а)При помощи алгоритма Прима или Краскала найдите минимальное остовное дерево данного графа:*



Решение. Пользуемся алгоритмом Прима Выбираем случайную вершину графа например G, ищем минимальное ребро исходящее из неё и входим в следующую непосещенную вершину по этому ребру, повторяем алгоритм снова для неё:

G <−> C : w = 8

C <−> D : w = 11

D <−> H : w = 3

H <−> K : w = 9

Из K минимальный путь в G, но G уже посещена

K <−> J : w = 24

J <−> F : w = 2

F <−> I : w = 14

I <−> E : w = 10

E <−> A : w = 5

A <−> B : w = 6

Осталась вершина L - минималое ребро ведущее к ней равно K <−> L = 39. Возвращаемся к вершине K и проводим ребро KL.

Тогда итоговый вес дерева равен 131. В итоге получился минимальный остов: