Студент: Бескровный Дмитрий
Группа: 2361
Вариант: 52
Дата: 21.02.2024

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание № 1

Задание (вводные данные). *Дано множество $M = \{18, 24, 51, 56, 67, 86, 87, 98\}$ и следующие бинарные отношения на нём:*

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0 \tag{1}$$

$$F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y \textit{ поразрядно} \tag{2}$$

$$F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{3}\right] = \left[\frac{y}{3}\right] \tag{3}$$

$$F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3 \textit{ нечётно} \tag{4}$$

$$F_5(x, y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 5 \tag{5}$$

Задания подразумевают выполнение для каждого из отношений.

Нумерация соответствует нумерации отношений. Дополнительные пояснения приведены в приложении (код — в файле `table.typ`).

Задание 1. *Проверить, является ли бинарное отношение рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным (с обоснованием).*

Решение.

Составим матрицы бинарных отношений и воспользуемся таблицей. Здесь и далее строка соответствует y, стобец — x.

$$\begin{array}{cc} \text{x/y} & \begin{matrix} 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 18 \\ 24 \\ 51 \\ 56 \\ 67 \\ 86 \\ 87 \\ 98 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

Рефлексивность:	нет, 0 на главной диагонали.
Арефлексивность:	да, 0 на главной диагонали.
Транзитивность:	нет, $F_1(56, 18) = F_1(18, 67) = 1$, но $F_1(56, 67) = 0$.
Симметричность:	да, матрица равна своей транспонированной.
Асимметричность:	нет, все 1 симметричны 1.
Антисимметричность:	нет, $F_1(18, 51) = F_1(51, 18)$, но $18 \neq 51$.

$$
\begin{array}{c@{}c}
x/y & \begin{array}{cccccccc} 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \end{array} \\
\begin{array}{c} 18 \\ 24 \\ 51 \\ 56 \\ 67 \\ 86 \\ 87 \\ 98 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{2}
$$

Рефлексивность: да, 1 на главной диагонали.
Арефлексивность: нет, 1 на главной диагонали.
Транзитивность: да, по определению.
Симметричность: нет, матрица не равна своей транспонированной.
Асимметричность: нет, есть 1 на главной диагонали.
Антисимметричность: да, по определению.

$$
\begin{array}{c@{}c}
x/y & \begin{array}{cccccccc} 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \end{array} \\
\begin{array}{c} 18 \\ 24 \\ 51 \\ 56 \\ 67 \\ 86 \\ 87 \\ 98 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{3}
$$

Рефлексивность: да, 1 на главной диагонали.
Арефлексивность: нет, 1 на главной диагонали.
Транзитивность: да, 1 только на главной диагонали.
Симметричность: да, матрица равна своей транспонированной.
Асимметричность: нет, на главной диагонали есть 1.
Антисимметричность: да, по определению.

$$
\begin{array}{c@{}c}
x/y & \begin{array}{cccccccc} 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \end{array} \\
\begin{array}{c} 18 \\ 24 \\ 51 \\ 56 \\ 67 \\ 86 \\ 87 \\ 98 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{4}
$$

Рефлексивность: нет, 0 на главной диагонали.
Арефлексивность: да, 0 на главной диагонали.
Транзитивность: нет, $F_4(67,24) = F_4(24,51) = 1$, но $F_4(67,51) = 0$.
Симметричность: да, матрица равна своей транспонированной.
Асимметричность: нет, все 1 симметричны 1.
Антисимметричность: нет, $F_4(54,21) = F_4(21,54) = 1$, но $24 \neq 51$.

$$
\begin{array}{c@{}c}
x/y & \begin{array}{cccccccc} 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \end{array} \\
\begin{array}{c} 18 \\ 24 \\ 51 \\ 56 \\ 67 \\ 86 \\ 87 \\ 98 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{5}
$$

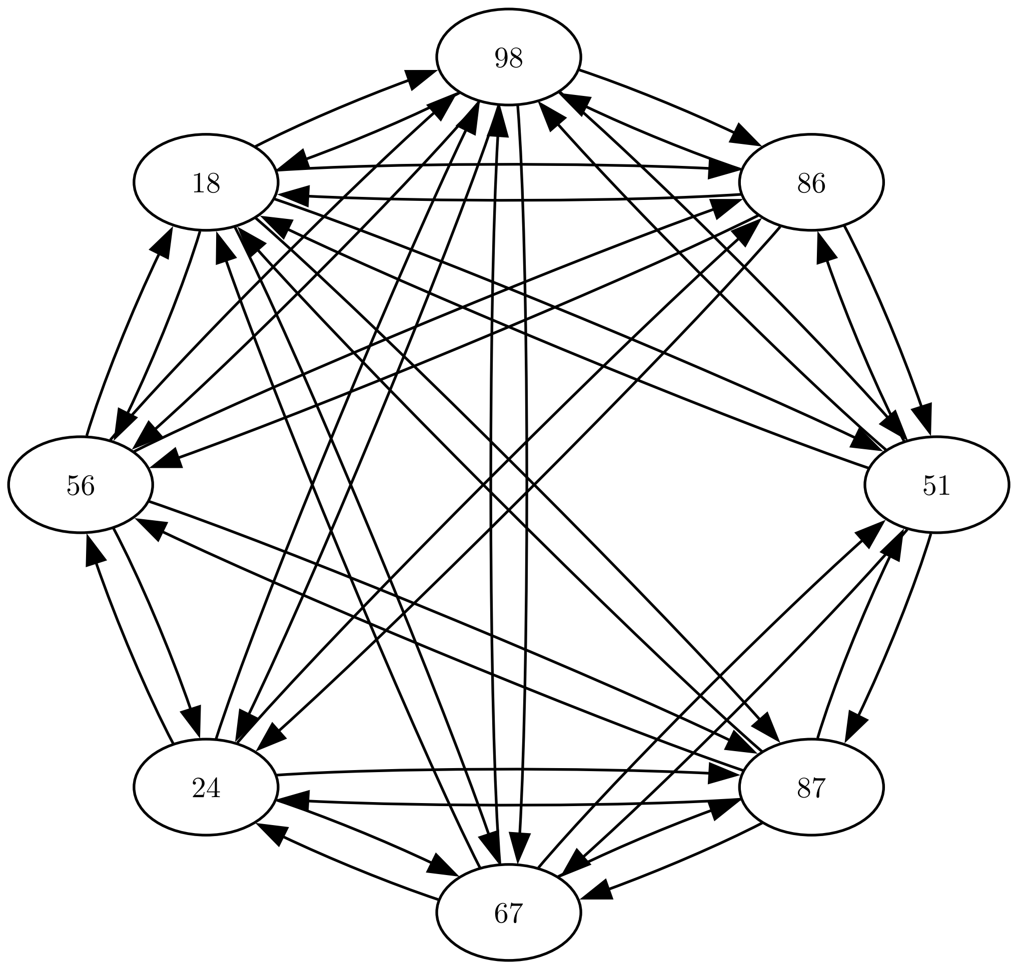
Рефлексивность: да, 1 на главной диагонали.
Арефлексивность: нет, 1 на главной диагонали.
Транзитивность: да, по определению.
Симметричность: да, матрица равна своей транспонированной.
Асимметричность: нет, на главной диагонали есть единицы.
Антисимметричность: нет, $F_5(86,87) = F_5(87,86) = 1$, но $86 \neq 87$.

Задание 2. *Построить матрицу и граф этого бинарного отношения.*

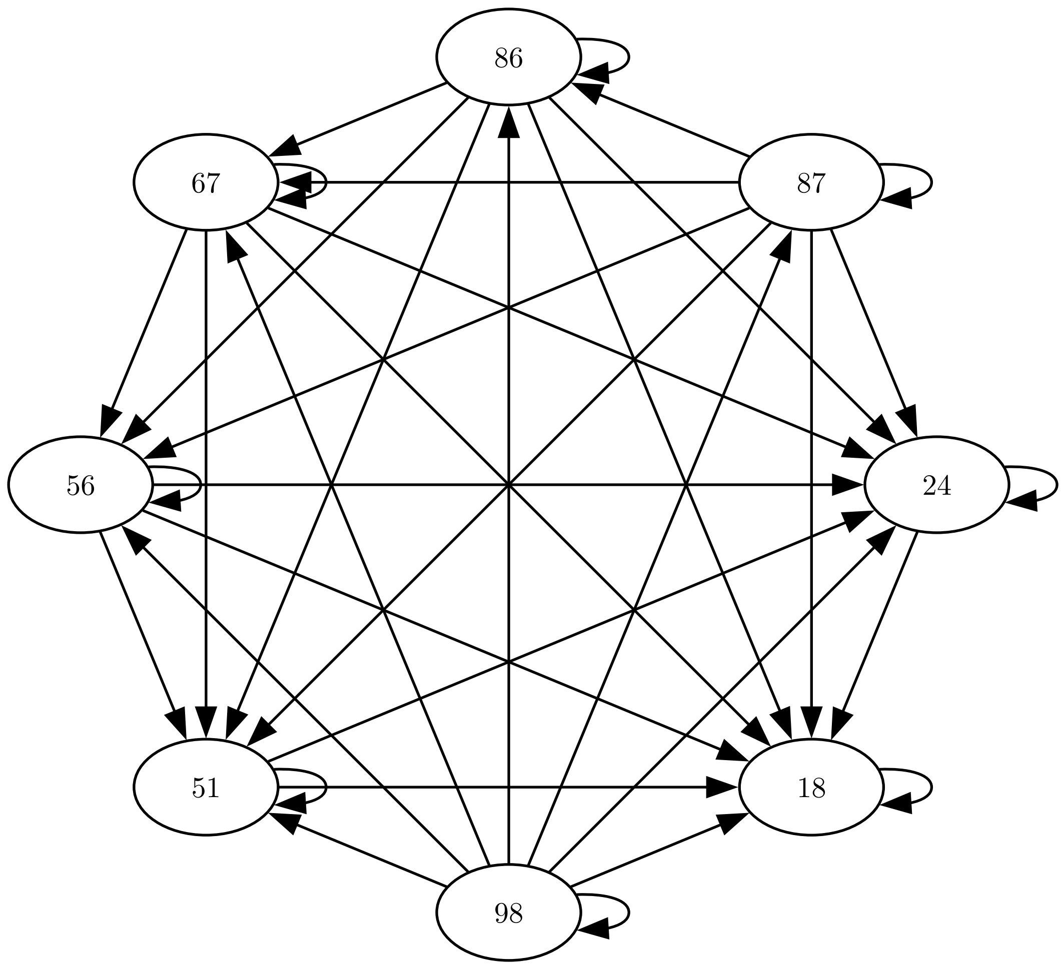
Решение.

Матрицы были построены в предыдущем задании.

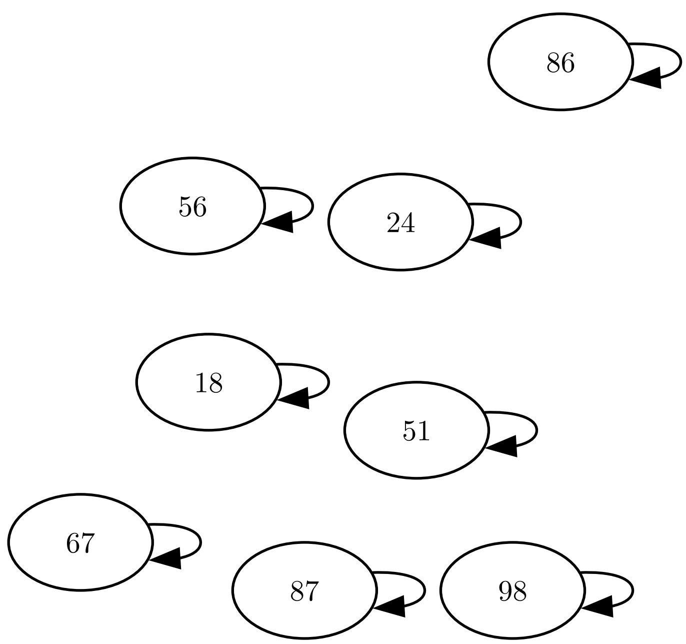
1.



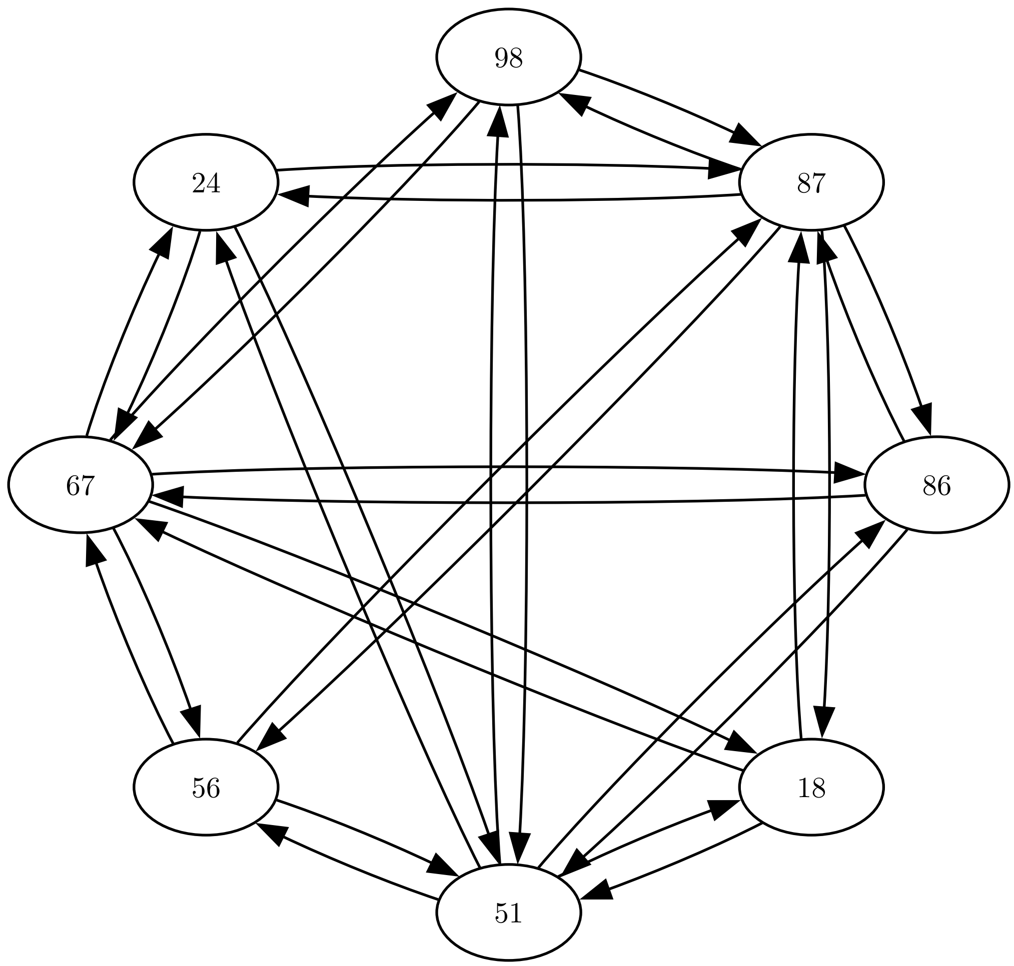
2.



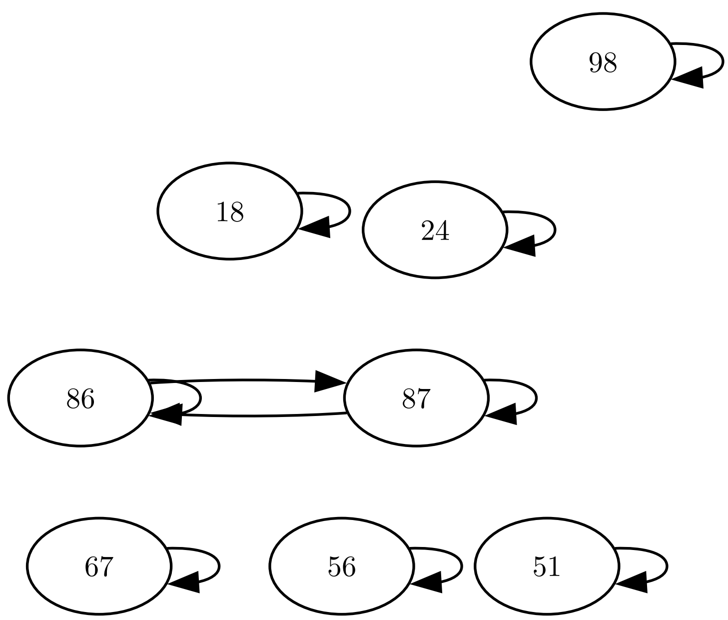
3.



4.



5.



Задание 3. *Определить, является ли это бинарное отношение отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка (с обоснованием).*

Решение.

Соответствие наборов свойств бинарных отношений и их типов см. в таблице.

1. Эквивалентность: нет, нет рефлексивности.
   Частичный порядок: нет, нет рефлексивности.
   Линейный порядок: нет, нет рефлексивности.
   Строгий порядок: нет, нет транзитивности.
2. Эквивалентность: нет, нет транзитивности.
   Частичный порядок: да.
   Линейный порядок: да,
   $\forall a, b \in M : F_1(a, b) \cup F_1(b, a) = 1.$
   Строгий порядок: нет, нет асимметричности.
3. Эквивалентность: да.
   Частичный порядок: да.
   Линейный порядок: нет,
   $F_3(18, 24) \cup F_3(24, 18) = 0.$
   Строгий порядок: нет, нет арефлексивности.
4. Эквивалентность: нет, нет рефлексивности.
   Частичный порядок: нет, нет рефлексивности.
   Линейный порядок: нет, нет рефлексивности.
   Строгий порядок: нет, нет транзитивности.
5. Эквивалентность: да.
   Частичный порядок: нет, нет антисимметричности.
   Линейный порядок: нет, нет антисимметричности.
   Строгий порядок: нет, нет арефлексивности.

Задание 4. *Если это отношение эквивалентности, построить классы эквивалентности*

Решение.

3. В силу того что целые части от деления на 3 всех элементов M различны, F_3 можно рассматривать как отношение равенства на этом множестве; для него существует единственный тривиальный вариант разбиения:
   $M/F_3 = \{ \ \{18\}, \{24\}, \{51\}, \{56\}, \{67\}, \{86\}, \{87\}, \{98\} \ \}.$
5. Модуль разности 86 и 87 меньше 5, в то время как модули разности остальных чисел больше. Таким образом получаем следующее фактор-множество:
   $M/F_5 = \{\{86, 87\}, \{18, 24, 51, 56, 67, 98\}\}.$

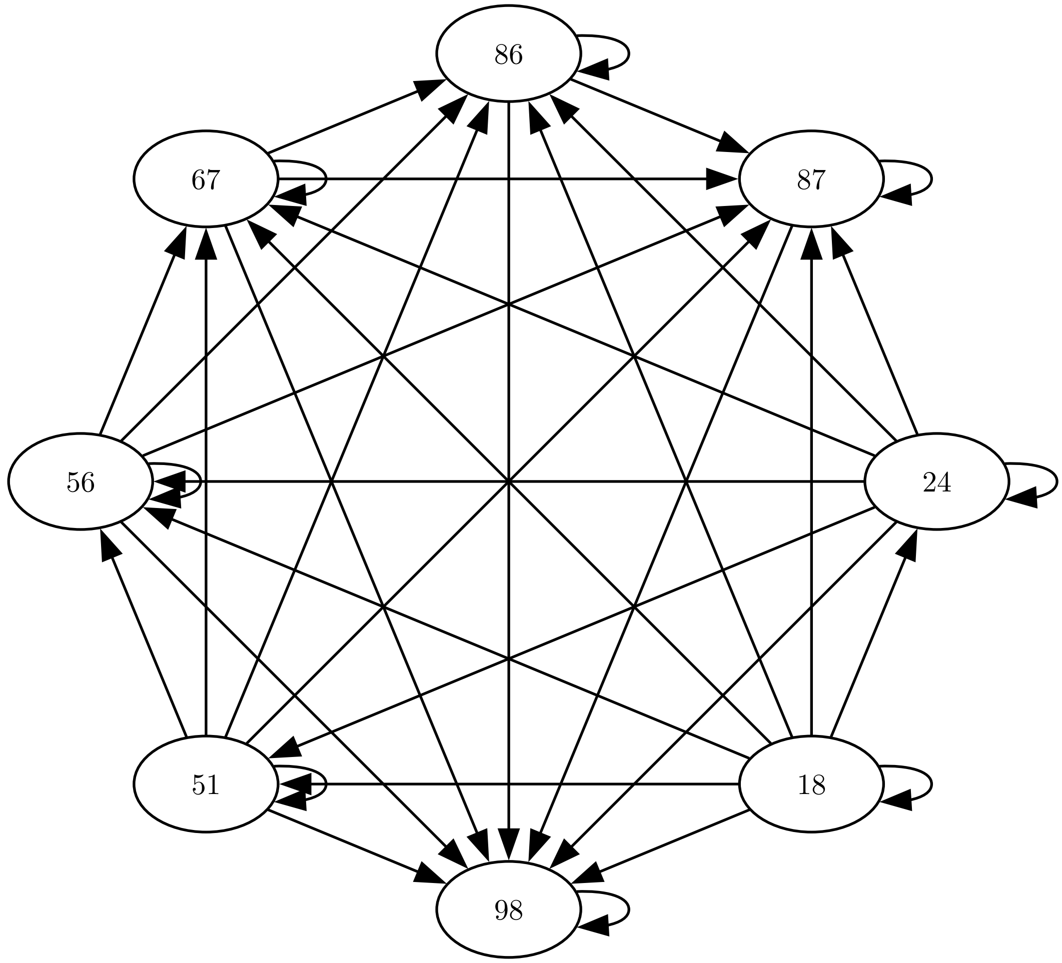
Задание 5. *Если это отношение частичного порядка, применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.*

Решение.

2. Начиная с вершины 86, проведём поиск в глубину, получим следующий порядок вершин: 18, 24, 51, 56, 67, 86, 87, 98. Пронумеруем их в обратном порядке, получим один из вариантов топологической сортировки для этого графа: 98, 87, 86, 67, 56, 51, 24, 18.

   Это уже отношение линейного порядка.
3. Имеем дело с вырожденным случаем, когда поиск в глубину равносилен перебору вершин. Построим его, начиная с вершины 98: 98, 87, 86, 67, 56, 51, 24, 18. Один из вариантов топологической сортировки: 18, 24, 51, 56, 67, 86, 87, 98.

   Чтобы отношение стало отношением линейного порядка, необходимо, чтобы все вершины были соединены рёбрами, но не двунаправленными, и сохранялось транзитивное свойство. Следующий граф будет удовлетворять заданным условиям:



Задание 6. *Если это нетранзитивное отношение, построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.*

Решение.

Используем классическую реализацию: выбираем i-ю строку и i-й столбец матрицы ($i \in (1, n)$, n — количество столбцов (строк) в матрице); остальные элементы становятся 1, если на обоих "перпедикулярах", опущенных на выбранные столбцы, стоят 1.

1. $$\begin{pmatrix} \text{x/y} & 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \\ 18 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 56 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 67 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 86 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 87 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 98 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{x/y} & 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \\ 18 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 24 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 56 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 67 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 86 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 87 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 98 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $$\begin{pmatrix} \text{x/y} & 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \\ 18 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 51 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 56 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 67 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 86 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 87 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 98 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \text{x/y} & 18 & 24 & 51 & 56 & 67 & 86 & 87 & 98 \\ 18 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 24 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 56 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 67 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 86 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 87 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 98 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	Рефлексивность	Транзитивность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Арефлексивность
Описание	$\forall a \in M:$ $f(a,a)=1$	$\forall a,b,c \in M:$ $\begin{cases} f(a,b)=1 \\ f(b,c)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow f(a,c)=1$	$\forall a,b \in M:$ $f(a,b)=1 \Leftrightarrow$ $f(b,a)=1$	$\forall a,b \in M:$ $f(a,b)=1 \Rightarrow$ $f(b,a)=0$	$\forall a,b \in M:$ $\begin{cases} f(a,b)=1 \\ f(b,a)=1 \end{cases}$ $\Rightarrow a=b$	$\forall a \in M:$ $f(a,a)=0$
Толерантность	✓		✓			
Эквивалентность	✓	✓	✓			
Предпорядок	✓	✓				
Частичный (нестрогий) порядок	✓	✓			✓	
Линейный порядок $\forall a,b \in M:$ $f(a,b) \cup f(b,a)=1$ +	✓	✓			✓	
Строгий порядок		✓		✓		✓
Матрица	'1' на главной диагонали	$\begin{cases} m_{i,j}=1 \\ m_{j,k}=1 \end{cases} \Rightarrow$ $m_{i,k}=1$	$A=A^T$	ни одной 1 на главной диагонали, при транспонировании все 1->0	'1' могут быть только на главной диагонали	'0' на главной диагонали
Граф	петли на всех вершинах	Если есть путь длины n, то есть путь длины 1	двунаправленные рёбра (все дуги — рёбра)	Нет петель и двунаправленных рёбер	Могут быть петли, но не двунаправленные рёбра	Без петель

Таблица 1. Свойства бинарных отношений.