Студент: Перминов Артем
Группа: 2362
Вариант: FF
Дата: 25 февраля 2024 г.

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание №1

Дано множество $M = \{69, 74, 14, 51, 86, 87, 28, 29\}$. M, отсортированное по возрастанию:

$$M = \{14, 28, 29, 51, 69, 74, 86, 87\}$$

Задание 1.

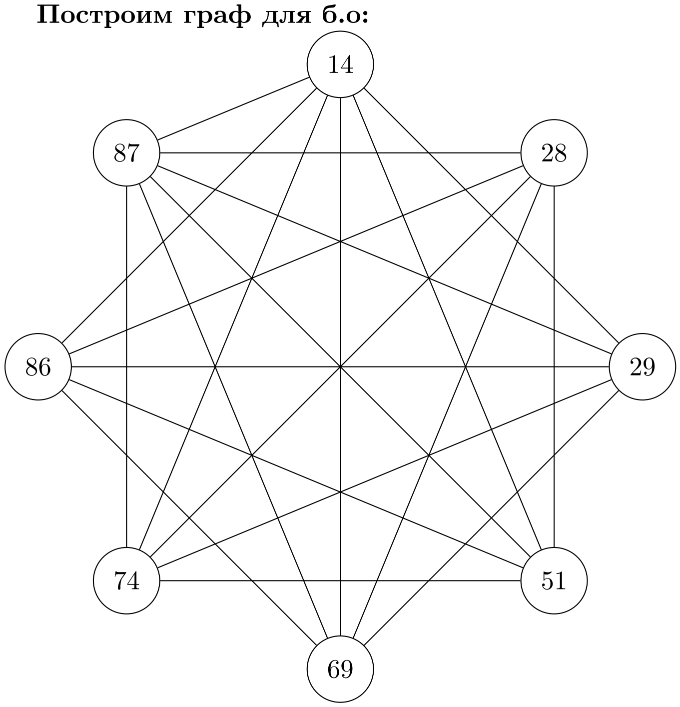
$$F(x,y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0;$$

Решение. **Построим матрицу смежности для б.о:**

$$\begin{array}{c} \\ 14 \\ 28 \\ 29 \\ 51 \\ 69 \\ 74 \\ 86 \\ 87 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Благодаря построению матрицы смежности можно понять, что данное б.о является **арефлексивным**, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали равны нулю, и **симметричным**, т.к. эл-ты матрицы зеркальны относительно главной диагонали.

Построим граф для б.о:

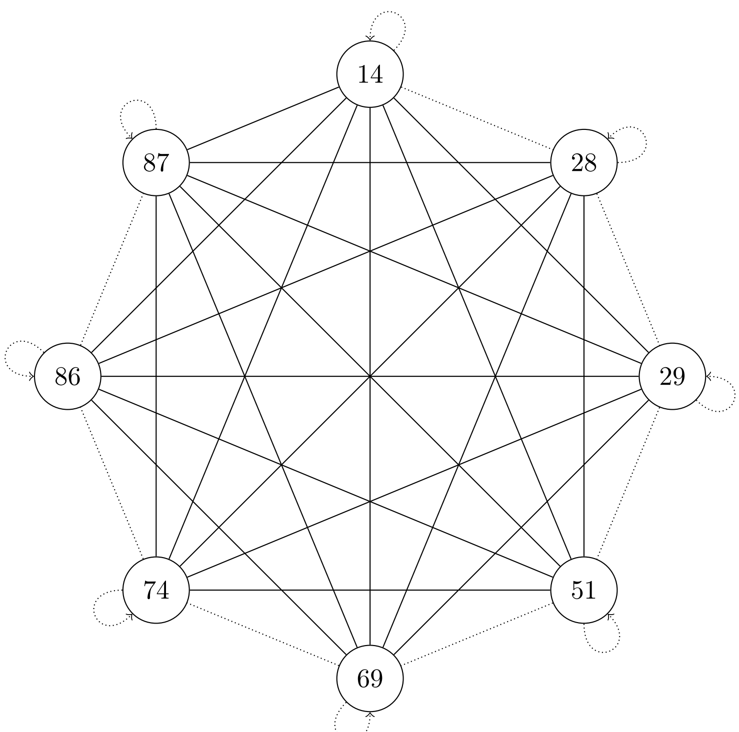


Б.о **не транзитивно**, т.к между вершинами (например, 14 и 28), есть путь $14 \to 51 \to 28$, но нет пути $14 \to 28$.

Полученные свойства (**арефлексивность**, **симметричность**, **нетранзитивность**) - не относятся ни к одному отношению (эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка). Используя алгоритм Уоршелла, построим транзитивное замыкание.

$$\begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&1&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&1&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&1&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&0&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1&1\\ 1&1&0&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1\\ 1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1\\ 1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1\\ 1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1\\ 1&1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \color{red}1&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&0&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1&1\\ 1&1&0&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1\\ 1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1\\ 1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1\\ 1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1\\ 1&1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \color{red}1&\color{red}1&1&1&1&1&1&1\\ \color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1&1&1\\ 1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1&1\\ 1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1&1\\ 1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1&1\\ 1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1&1\\ 1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1&\color{red}1\\ 1&1&1&1&1&1&\color{red}1&\color{red}1 \end{pmatrix}$$



Задание 2.

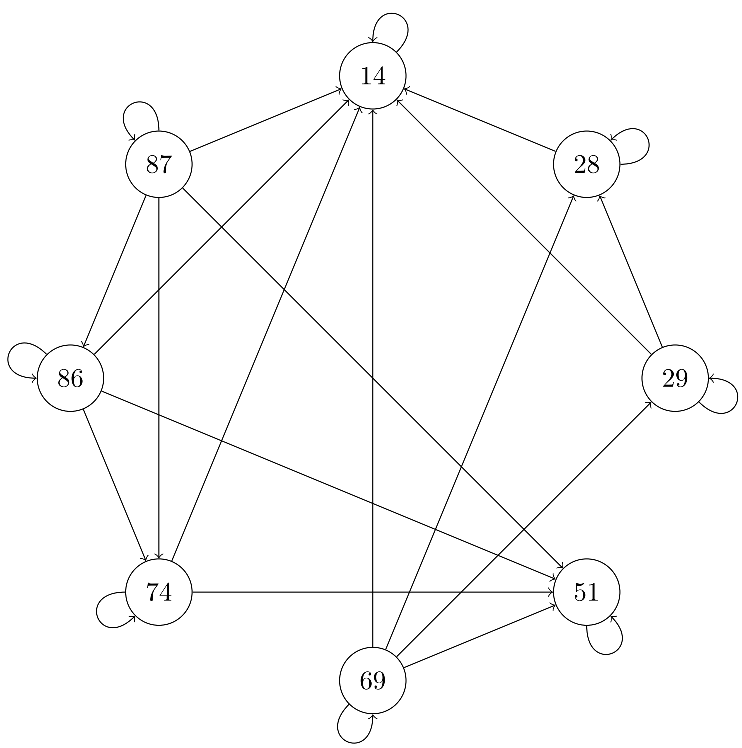
$$F(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \geqslant y \text{ поразрядно;}$$

Решение. **Построим матрицу смежности для б.о:**

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \end{array} \\ \begin{array}{c} 14 \\ 28 \\ 29 \\ 51 \\ 69 \\ 74 \\ 86 \\ 87 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Благодаря построению матрицы смежности можно понять, что данное б.о является **рефлексивным**, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и **антисимметричным**, т.к. выше главное диагонали в матрице находятся только нули.

Транзитивность: $\sqsupset \begin{cases} F(x,y) = 1 \Rightarrow x \geq y \\ F(y,z) = 1 \Rightarrow y \geq z \end{cases} \Rightarrow x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq z \Leftrightarrow F(x,z) = 1 -$ **транзитивность** выполняется. **Построим граф для б.о:**

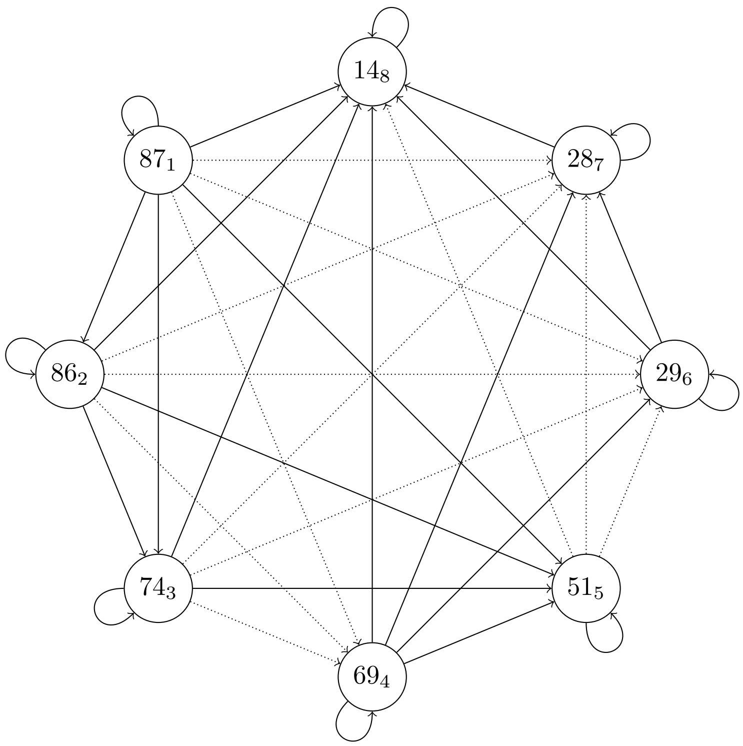


Полученные свойства (**рефлексивность**, **антисимметричность**, **транзитивность**) относятся к одному отношению частичного порядка.

Отношение **не является отношением линейного порядка**, т.к, к примеру, между вершинами 29 и 74 нет пути длины 1.

Алгоритм топологической сортировки для получения отношения линейного порядка:

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \\ \hline 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 69 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 74 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 86 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 87 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$



Задание 3.

$$F(x,y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{4}\right] = \left[\frac{y}{4}\right];$$

Решение. **Построим матрицу смежности для б.о:**

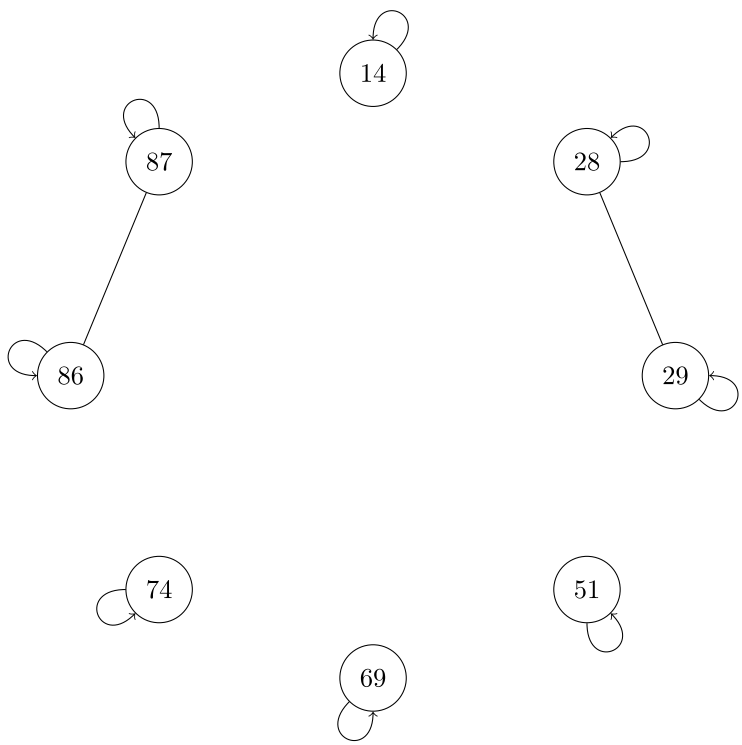
$$\begin{array}{c|cccccccc} & 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \\ \hline 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 86 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Благодаря построению матрицы смежности можно понять, что данное б.о является **рефлексивным**, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и **симметричным**, т.к. эл-ты матрицы зеркальны относительно главной диагонали.

Транзитивность

$\sqsupset \begin{cases} F(x,y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{4}\right] = \left[\frac{y}{4}\right] \\ F(y,z) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{y}{4}\right] = \left[\frac{z}{4}\right] \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right] = \left[\frac{z}{4}\right] \Leftrightarrow F(x,z) = 1$ - **транзитивность** выполняется.

Построим граф для б.о:



Комбинация полученных свойств (**рефлексивность**, **симметричность**, **транзитивность**) относится к отношению **эквивалентности**.

Построим классы эквивалентности:
Множество разбивается на классы эквивалентности в зависимости от целой части при делении на 4:

- {14} имеет целую часть 4
- {28, 29} имеет целую часть 7
- {51}имеет целую часть 13
- {69} имеет целую часть 17
- {74} имеет целую часть 19
- {86, 87} имеет целую часть 22

Задание 4.

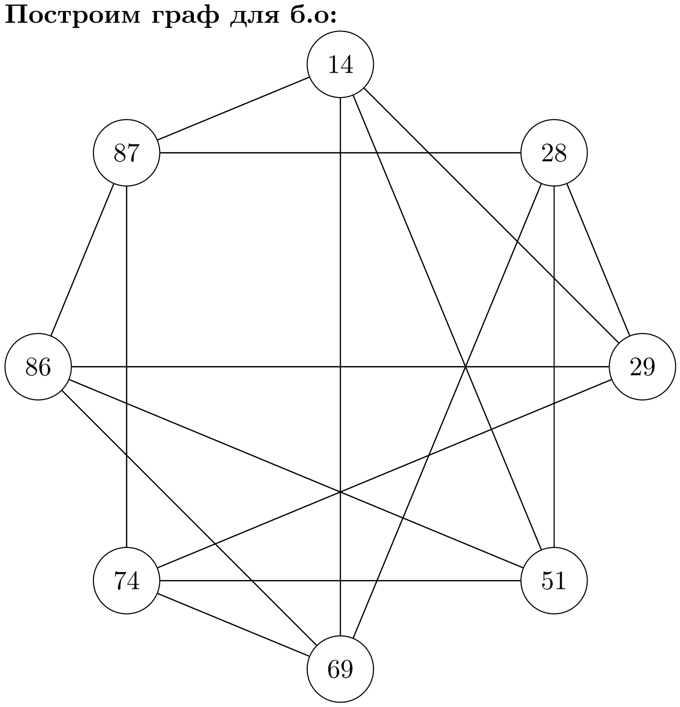
$$F(x,y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3 \text{ нечетно;}$$

Решение. **Построим матрицу смежности для б.о:**

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \end{array} \\
\begin{array}{c} 14 \\ 28 \\ 29 \\ 51 \\ 69 \\ 74 \\ 86 \\ 87 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Благодаря построению матрицы смежности можно понять, что данное б.о является **арефлексивным**, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали равны нулю, и **симметричным**, т.к. эл-ты матрицы зеркальны относительно главной диагонали.

Построим граф для б.о:



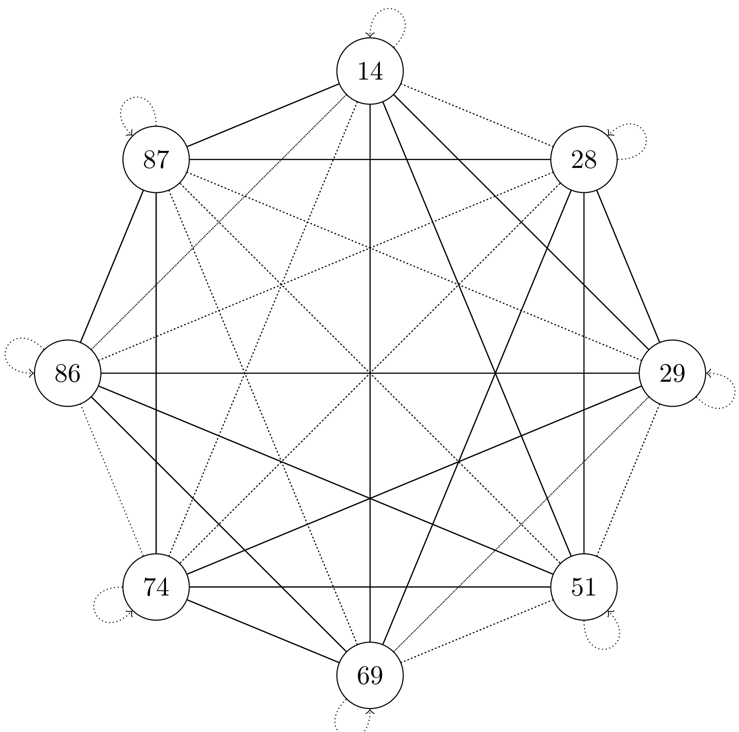
Б.о **не транзитивно**, т.к между вершинами (например, 14 и 28), есть путь $14 \to 69 \to 28$, но нет пути $14 \to 28$.

Полученные свойства (**арефлексивность**, **симметричность**, **нетранзитивность**) - не относятся ни к одному отношению (эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка).

Используя алгоритм Уоршелла, построим транзитивное замыкание.

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix} \Rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix} \Rightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Задание 5.

$$F(x,y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 5.$$

Решение. **Построим матрицу смежности для б.о:**

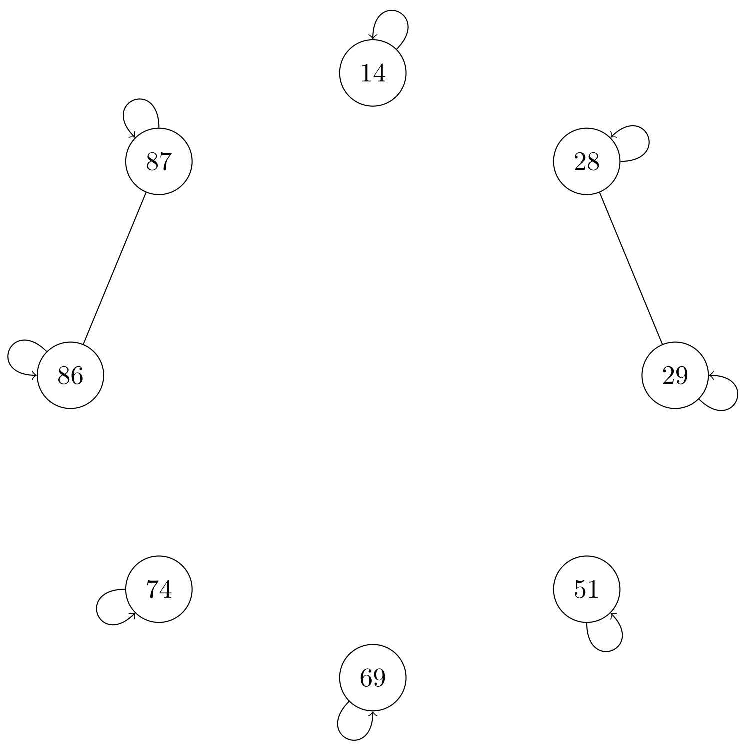
$$\begin{array}{c} \\ 14 \\ 28 \\ 29 \\ 51 \\ 69 \\ 74 \\ 86 \\ 87 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Благодаря построению матрицы смежности можно понять, что данное б.о является **рефлексивным**, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и **симметричным**, т.к.эл-ты матрицы зеркальны относительно главной диагонали.

Возведем матрицу смежности в квадрат: $\begin{array}{c} \\ 14 \\ 28 \\ 29 \\ 51 \\ 69 \\ 74 \\ 86 \\ 87 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 14 & 28 & 29 & 51 & 69 & 74 & 86 & 87 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$

Новых единиц не появилось $\Rightarrow$ отношение **транзитивно**.

Построим граф для б.о:



Полученные свойства (**рефлексивность**, **симметричность**, **транзитивность**) - относятся к отношению эквивалентности.

Построим классы эквивалентности:

Множество разбивается на классы эквивалентности в зависимости от разности чисел, меньшей 5:

- $\{14\}$ разность между эл-ми < 5
- $\{28, 29\}$ разность между любыми эл-ми < 5
- $\{51\}$ разность между эл-ми < 5
- $\{69\}$ разность между эл-ми < 5
- $\{74\}$ разность между эл-ми < 5
- $\{86, 87\}$ разность между любыми эл-ми < 5