Студент: Карабанов Егор
Группа: 2362
Вариант: OD
Дата: 27 марта 2024 г.

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. *Дано множество* $M = \{19, 33, 69, 72, 77, 91, 96, 97\}$ *и следующие бинарные отношения на нем:*

- $F_1(x,y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x-z)(y-z) < 0$;
- $F_2(x,y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y$ *поразрядно;*
- $F_3(x,y) = 1 \Leftrightarrow [\frac{x}{5}] = [\frac{y}{5}]$;
- $F_4(x,y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3$ *нечетно;*
- $F_5(x,y) = 1 \Leftrightarrow |x-y| < 10$.

Для каждого из отношений:

1. *Проверить, является ли бинарное отношение (далее - б.о.) - рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.*
2. *Построить матрицы и графы этих б.о.*
3. *Определить, являются ли эти б.о. отношениями эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка).*
4. *Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.*
5. *Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.*
6. *Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.*

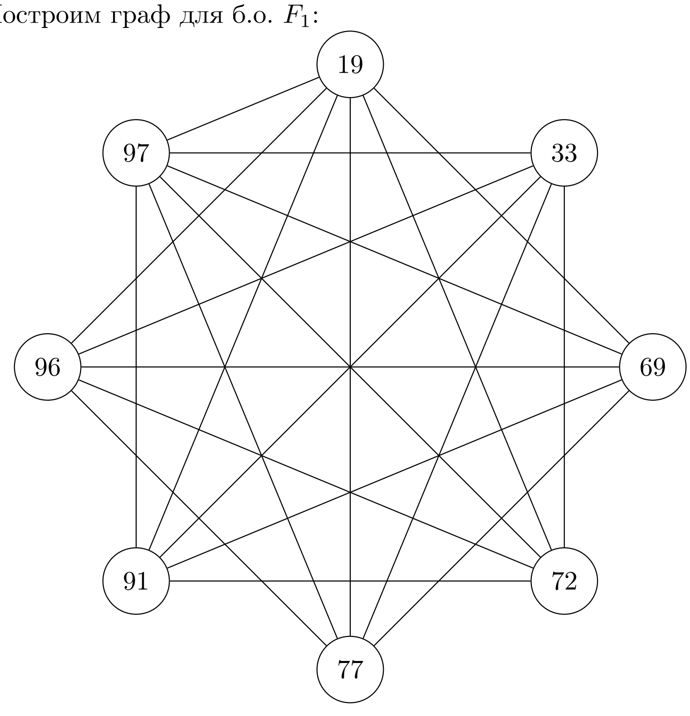
Решение. **Бинарное отношение F_1**
Отношение F_1 можно переформулирвоать, как $\exists z \in M : x < z < y$ или $y < z < x$

Построим матрицу смежности для б.о. F_1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Из матрицы смежности видно, что бинарное отношение F_1 является арефлексивным, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали не равны единице, и симметричным, т.к. относительно главной диагонали матрица зеркальна.

Построим граф для б.о. F_1:



Бинарное отношение не является транзитивным, т.к., например, между вершинами 96 и 97 есть путь длины 2, но нет пути длины 1. Отношение F_1:

- Арефлексивное
- Симметричное
- Не транзитивное

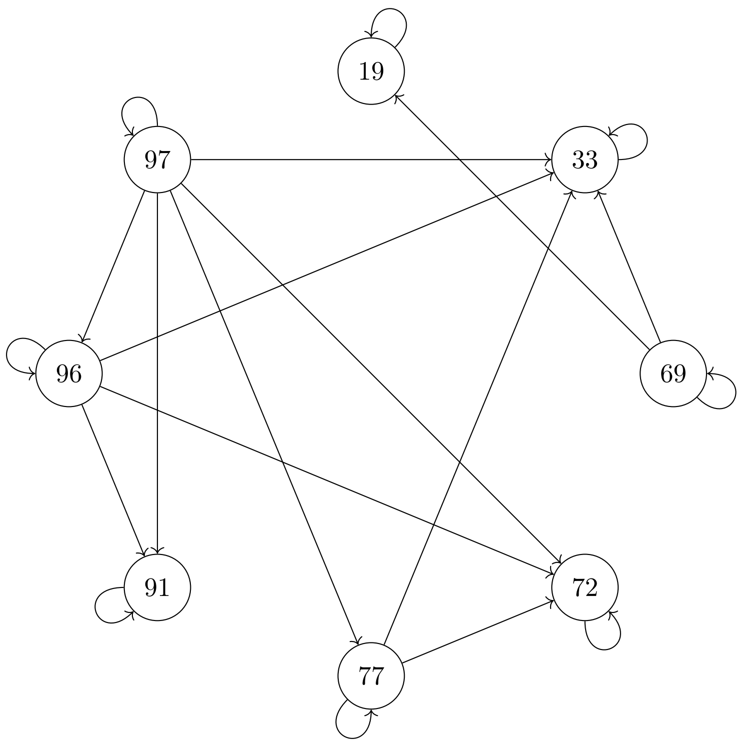
Для построения транзитивного замыкания применим алгоритм Уоршелла:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. **Бинарное отношение** F_2
Построим матрицу смежности для б.о. F_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Бинарное отношение F_2 рефлексивное, т.к все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и антисимметричное, т.к. выше главное диагонали в матрице находятся только 0.



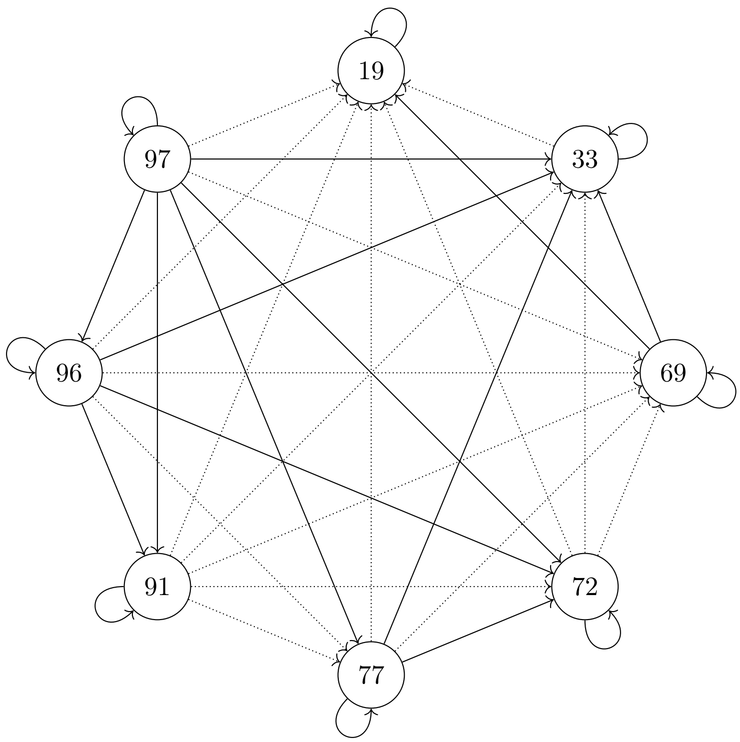
Бинарное отношение F_2 транзитивно, т.к. для любых вершин, между котрыми есть путь длины 2 найдется и путь длины 1.

Отношение F_2:

- Рефлексивное
- Антисимметричное
- Транзитивное

Соответственно, оно является отношением частичного порядка (не линейный порядок, т.к. на графе не между всеми вершинами есть ребро).

Граф после применения топологической сортировки для дополнения отношения F_2 до отношения линейного порядка будет выглядеть следующим образом (если в качестве начальной вершины каждый раз принимать вершину с наименьшим значением из множества ещё не пройденных вершин, то с возрастанием номера вершины, её номер будет наоборот убывать):



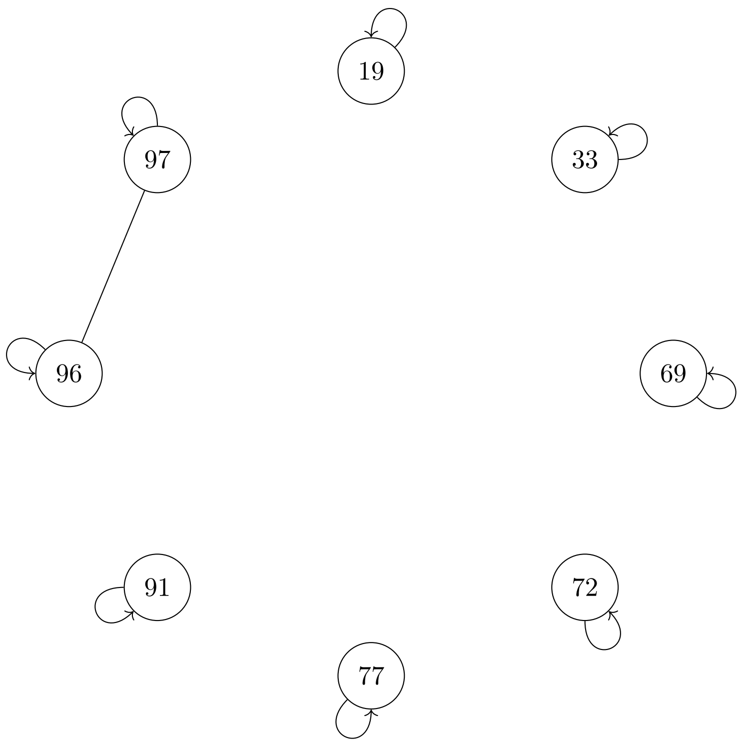
А матрица линейного отношения F_2, дополненного до отношения линецйного порядка, будет соответствовать данной (все нули под главной диагональю становятся единицами):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. **Бинарное отношение F_3**
Построим матрицу смежности для б.о. F_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Бинарное отношение F_3 рефлексивное, т.к все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_3 транзитивно, т.к. на графе отсутствуют пути длины 2.

Отношение F_3:

- Рефлексивное
- Симметричное
- Транзитивное

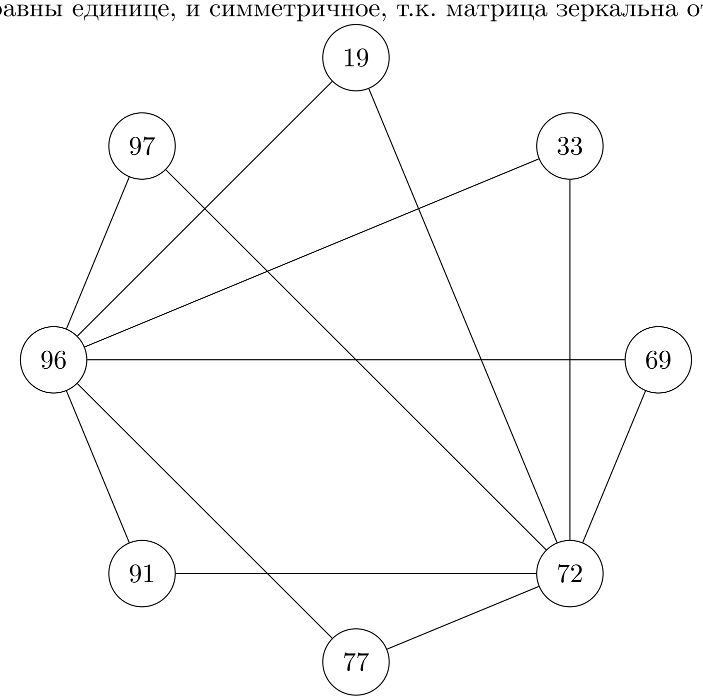
Соответственно, оно является отношением эквивалентности. Множество M разбивается на классы эквивалентности по целой части при делении на 5. А именно:

- $\{19\}$ - целая часть $= 2$
- $\{33\}$ - целая часть $= 6$
- $\{69\}$ - целая часть $= 13$
- $\{72\}$ - целая часть $= 14$
- $\{77\}$ - целая часть $= 15$
- $\{91\}$ - целая часть $= 18$
- $\{96, 97\}$ - целая часть $= 19$

Решение. **Бинарное отношение** F_4
Построим матрицу смежности для б.о. F_4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Бинарное отношение F_4 арефлексивное, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали не равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_4 не транзитивно. Например, между вершинами 96 и 72 есть несколько путей длины 2, но нет ни одного пути длиной 1.

Отношение F_4:

- Арефлексивное
- Симметричное
- Не транзитивное

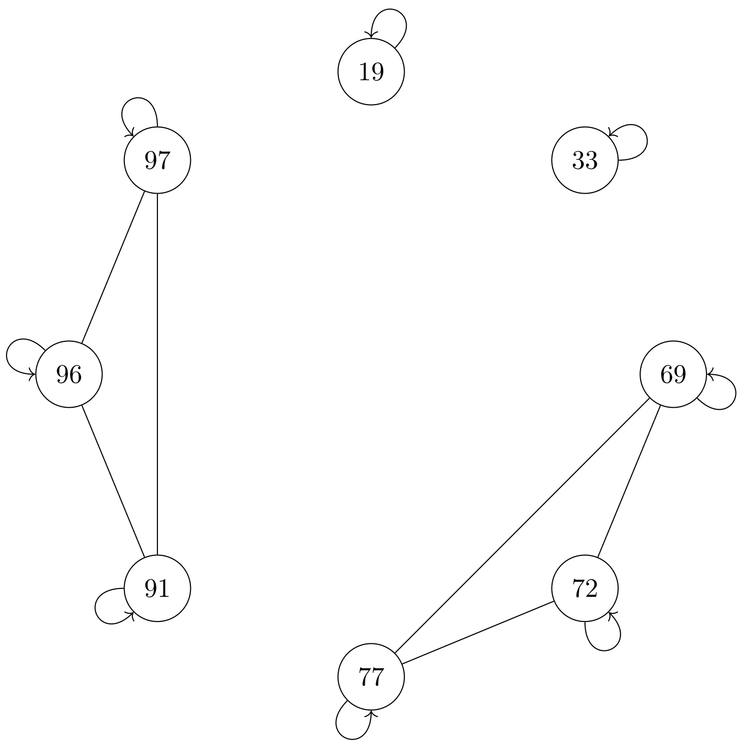
Для построения транзитивного замыкания применим алгоритм Уоршелла:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. **Бинарное отношение** F_5
Построим матрицу смежности для б.о. F_5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Бинарное отношение F_5 рефлексивное, т.к все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_5 транзитивно, т.к. для всех вершин, между которыми есть путь длины 2, есть и путь длины 1.

Отношение F_5:

- Рефлексивное
- Симметричное
- Транзитивное

Соответственно оно является отношением эквивалентности.

Множество M будет разбито на классы эквивалентности по разности между элементами < 10, а именно:

- $\{19\}$ - нет больше элементов, разность с которыми будет < 10
- $\{33\}$ - нет больше элементов, разность с которыми будет < 10
- $\{69, 72, 77\}$ - разность между любыми 2-мя элементами < 10
- $\{91, 96, 97\}$ - разность между любыми 2-мя элементами < 10