

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание №1

Дано множество $M = \{34, 71, 42, 45, 52, 89, 28, 29\}$, отсортируем его для удобства:

$$M_s = \{28, 29, 34, 42, 45, 52, 71, 89\}$$

Задание 1.

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0;$$

$$(x - z)(y - z) < 0 \Leftrightarrow \min(x, y) < z < \max(x, y)$$

Решение.

- **Рефлексивность/арефлексивность**

$\forall x \in M (x - z)(x - z) = (x - z)^2 \geq 0 \forall z \in M \Rightarrow F_1(x, x) = 0$ - отношение **арефлексивно**.

- **Симметричность|асимметричность|асимметричность**

$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow 0 > (x - z)(y - z) = (y - z)(x - z) \Leftrightarrow F_1(y, x) = 1$ - выполняется **симметричность**.

$\exists x, y \in M, x \neq y : F_1(x, y) \wedge F_1(y, x) = 1$ - **антисимметричность** не выполняется.

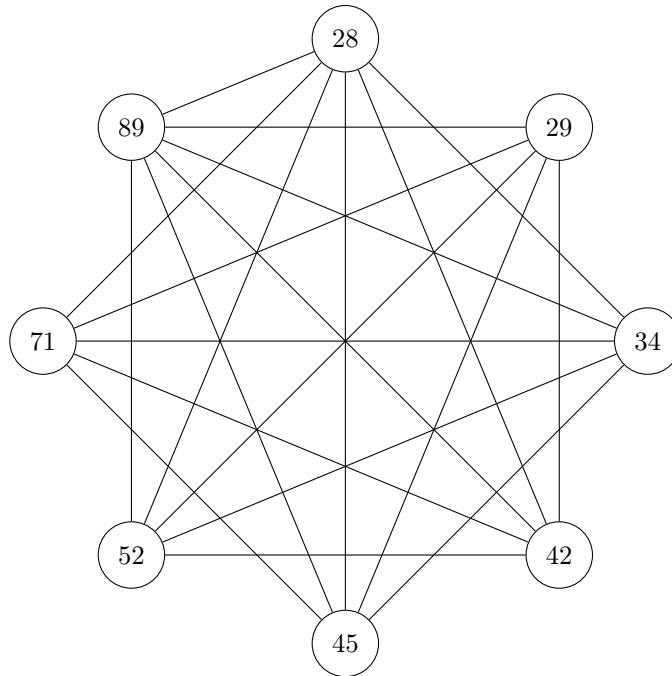
- **Транзитивность**

$$\square \begin{cases} \exists z_1 \in M : \min(x, y) < z_1 < \max(x, y) \Leftrightarrow F_1(x, y) = 1 \\ \exists z_2 \in M : \min(y, t) < z_2 < \max(y, t) \Leftrightarrow F_1(y, t) = 1 \end{cases}$$

Если x и t являются соседними элементами в M_s , то $\nexists z_3 \in M : \min(x, t) < z_3 < \max(x, t) \Leftrightarrow F(x, t) = 0$ - **транзитивность** не выполняется.

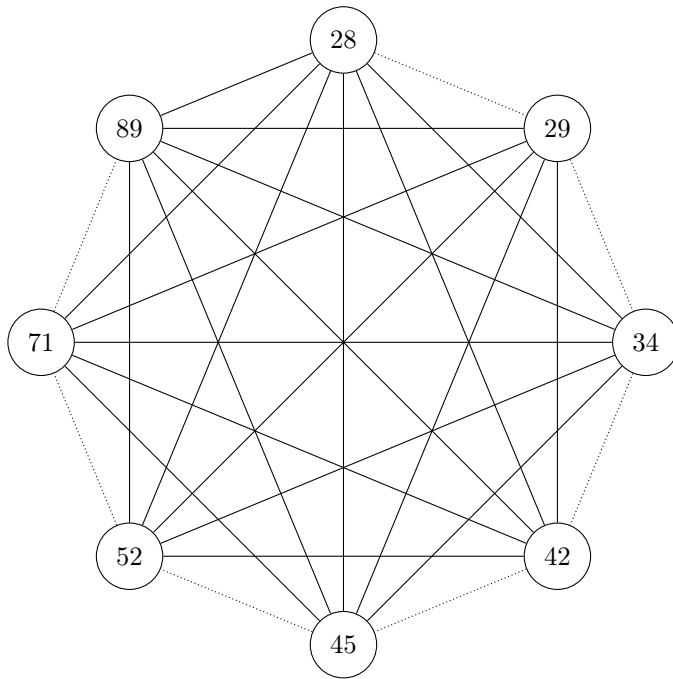
- **Матрица смежности, граф.**

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 28 & 29 & 34 & 42 & 45 & 52 & 71 & 89 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 28 \\ 29 \\ 34 \\ 42 \\ 45 \\ 52 \\ 71 \\ 89 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Комбинация полученных свойств (**арефлексивность, симметричность**) не относится ни к одному отношению (эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка).
- Используя алгоритм Уоршелла построим транзитивное замыкание.
 $28 \rightarrow 42 \wedge 42 \rightarrow 29 \Rightarrow 28 \rightarrow 29$
 $29 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 34 \Rightarrow 29 \rightarrow 34$
 $34 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 42 \Rightarrow 34 \rightarrow 42$
 $42 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 45 \Rightarrow 42 \rightarrow 45$
 $45 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 52 \Rightarrow 45 \rightarrow 52$
 $52 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 71 \Rightarrow 52 \rightarrow 71$
 $71 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 89 \Rightarrow 71 \rightarrow 89$

	28	29	34	42	45	52	71	89
28	0	1	1	1	1	1	1	1
29	1	0	1	1	1	1	1	1
34	1	1	0	1	1	1	1	1
42	1	1	1	0	1	1	1	1
45	1	1	1	1	0	1	1	1
52	1	1	1	1	1	0	1	1
71	1	1	1	1	1	1	0	1
89	1	1	1	1	1	1	1	0



Задание 2.

$$F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y \text{ поразрядно};$$

Решение.

- **Рефлексивность/арефлексивность**

$\forall x \in M \ x = x \text{ поразрядно} \Rightarrow x \geq x \text{ поразрядно} \Leftrightarrow F_2(x, x) = 1$ - отношение **рефлексивно**.

- **Симметричность|асимметричность|асимметричность**

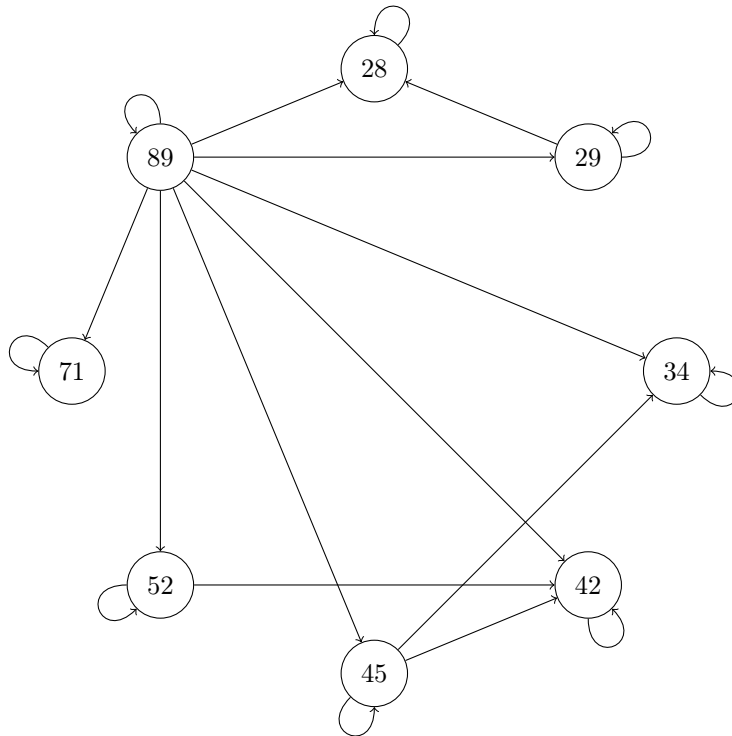
$$\square \begin{cases} F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y \\ F_2(y, x) = 1 \Leftrightarrow y \geq x \end{cases} \Rightarrow x \geq y \leq x \Rightarrow y = x \text{ - отношение } \mathbf{антисимметрично}.$$

- **Транзитивность**

$$\square \begin{cases} F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y \\ F_2(y, z) = 1 \Leftrightarrow y \geq z \end{cases} \Rightarrow x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq z \Leftrightarrow F_2(x, z) = 1 \text{ - } \mathbf{транзитивность} \text{ выполняется}.$$

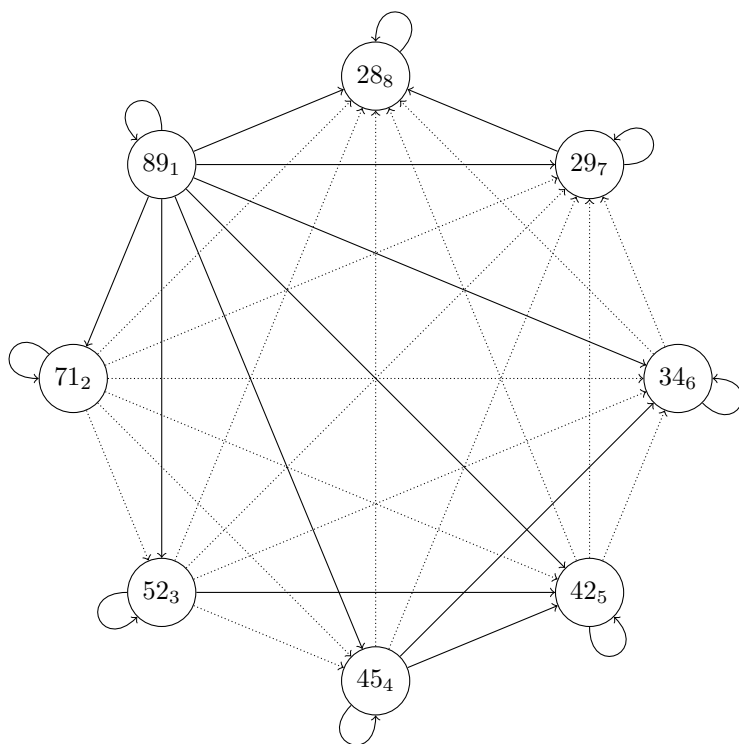
- **Матрица смежности, граф.**

$$\begin{matrix} & 28 & 29 & 34 & 42 & 45 & 52 & 71 & 89 \\ \begin{matrix} 28 \\ 29 \\ 34 \\ 42 \\ 45 \\ 52 \\ 71 \\ 89 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



- Комбинация полученных свойств (**рефлексивность, антисимметричность, транзитивность**) относится к отношению **частичного порядка**.
 $\exists x, y \in M : F_2(x, y) \vee F_2(y, x) = 0$ - отношение не является отношением **линейного порядка**.
- Применим алгоритм топологической сортировки и получим отношение линейного порядка.

	28	29	34	42	45	52	71	89
28	1	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	0	0	0	0	0	0
34	1	1	1	0	0	0	0	0
42	1	1	1	1	0	0	0	0
45	1	1	1	1	1	0	0	0
52	1	1	1	1	1	1	0	0
71	1	1	1	1	1	1	1	0
89	1	1	1	1	1	1	1	1



Задание 3.

$$F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{5} \right] = \left[\frac{y}{5} \right];$$

Решение.

- **Рефлексивность/арефлексивность**

$\forall x \in M \left[\frac{x}{5} \right] = \left[\frac{x}{5} \right] \Leftrightarrow F_3(x, x) = 1$ - отношение **рефлексивно**.

- **Симметричность|асимметричность|асимметричность**

$F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{5} \right] = \left[\frac{y}{5} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{y}{5} \right] = \left[\frac{x}{5} \right] \Leftrightarrow F_3(y, x) = 1$ - отношение **симметрично**.

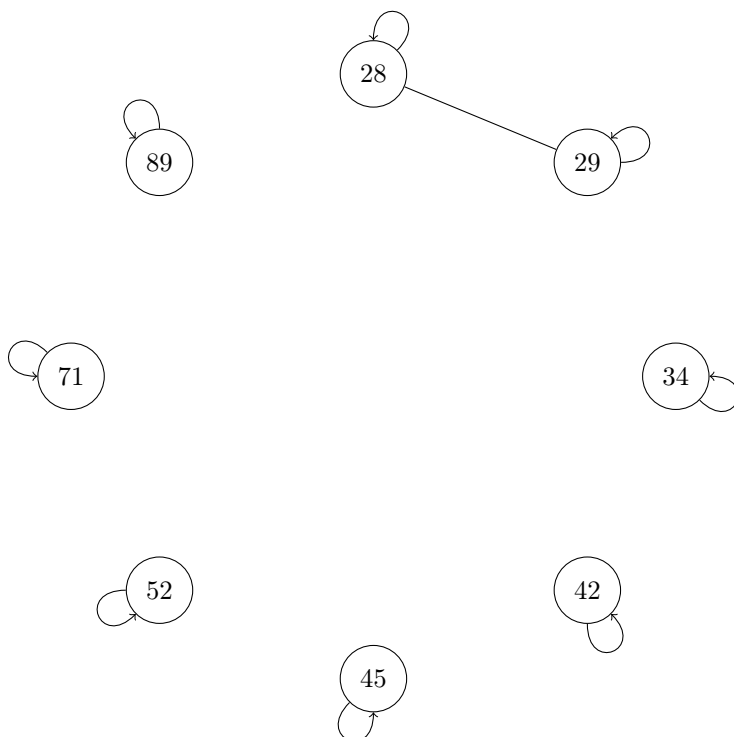
$\exists x, y \in M, x \neq y : F_3(x, y) \wedge F_3(y, x) = 1$ - **антисимметричность** не выполняется.

- **Транзитивность**

$\square \begin{cases} F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x}{5} \right] = \left[\frac{y}{5} \right] \\ F_3(y, z) = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{y}{5} \right] = \left[\frac{z}{5} \right] \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{x}{5} \right] = \left[\frac{z}{5} \right] \Leftrightarrow F_3(x, z) = 1$ - **транзитивность** выполняется.

- **Матрица смежности, граф.**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 28 & 29 & 34 & 42 & 45 & 52 & 71 & 89 \end{array} \\ \begin{array}{c} 28 \\ 29 \\ 34 \\ 42 \\ 45 \\ 52 \\ 71 \\ 89 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Комбинация полученных свойств (**рефлексивность, симметричность, транзитивность**) относится к отношению **эквивалентности**.
- Построим классы эквивалентности.
На графе каждому классу эквивалентности соответствует компонента связности.
 $\{28, 29\}, \{34\}, \{42\}, \{45\}, \{52\}, \{71\}, \{89\}$

Задание 4.

$$F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3 \text{ чётно};$$

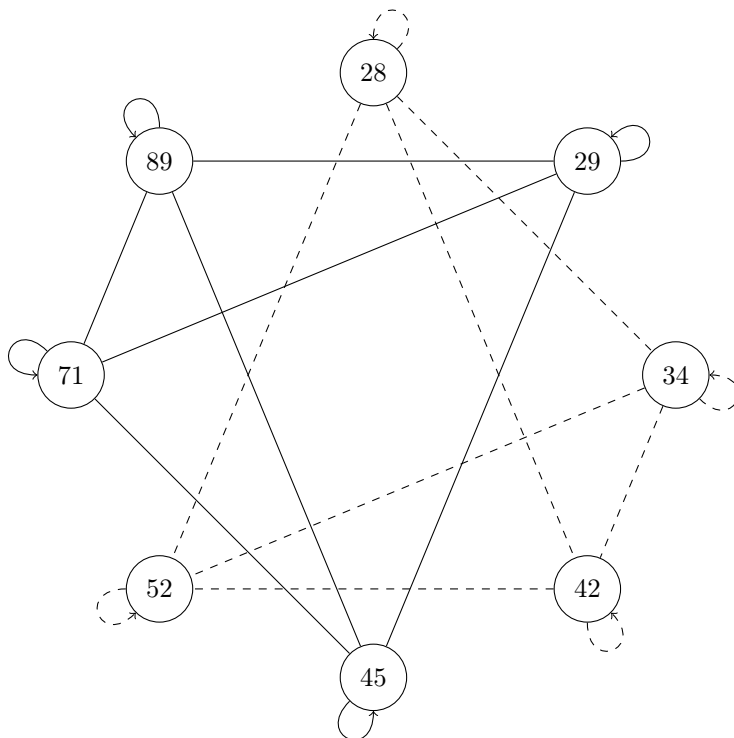
$$x^2 - y^3 \equiv 0 \pmod{2} \Leftrightarrow x^2 \equiv y^3 \pmod{2} \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2}$$

Решение.

- **Рефлексивность/арефлексивность**
 $\forall x \in M \ x \equiv x \pmod{2} \Leftrightarrow F_4(x, x) = 1$ - **рефлексивность** выполняется.
- **Симметричность|асимметричность|асимметричность**
 $F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2} \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{2} \Leftrightarrow F_4(y, x) = 1$ - отношение **симметрично**.
 $\exists x, y \in M, x \neq y : F_4(x, y) \wedge F_4(y, x) = 1$ - **антисимметричность** не выполняется.
- **Транзитивность**
 $\square \begin{cases} F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{2} \\ F_4(y, z) = 1 \Leftrightarrow y \equiv z \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow x \equiv z \pmod{2} \Leftrightarrow F_4(x, z) = 1$ - **транзитивность** выполняется.

• Матрица смежности, граф.

	28	29	34	42	45	52	71	89
28	1	0	1	1	0	1	0	0
29	0	1	0	0	1	0	1	1
34	1	0	1	1	0	1	0	0
42	1	0	1	1	0	1	0	0
45	0	1	0	0	1	0	1	1
52	1	0	1	1	0	1	0	0
71	0	1	0	0	1	0	1	1
89	0	1	0	0	1	0	1	1



- Комбинация полученных свойств (**рефлексивность, симметричность, транзитивность**) относится к отношению **эквивалентности**.
- Построим классы эквивалентности.
На графе каждому классу эквивалентности соответствует компонента связности.
 $\{28, 34, 42, 52\}$, $\{29, 45, 71, 89\}$

Задание 5.

$$F_5(x, y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 10.$$

Решение.

- **Рефлексивность/арефлексивность**
 $\forall x \in M \ |x - x| = 0 < 10 \Leftrightarrow F_5(x, x) = 1$ - отношение **рефлексивно**.
- **Симметричность|асимметричность|асимметричность**
 $F_5(x, y) = 1 \Leftrightarrow 10 > |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| \Leftrightarrow F_5(y, x) = 1$ - отношение **симметрично**.
 $\exists x, y \in M, x \neq y : F_5(x, y) \wedge F_5(y, x) = 1$ - **антисимметричность** не выполняется.

- **Транзитивность**

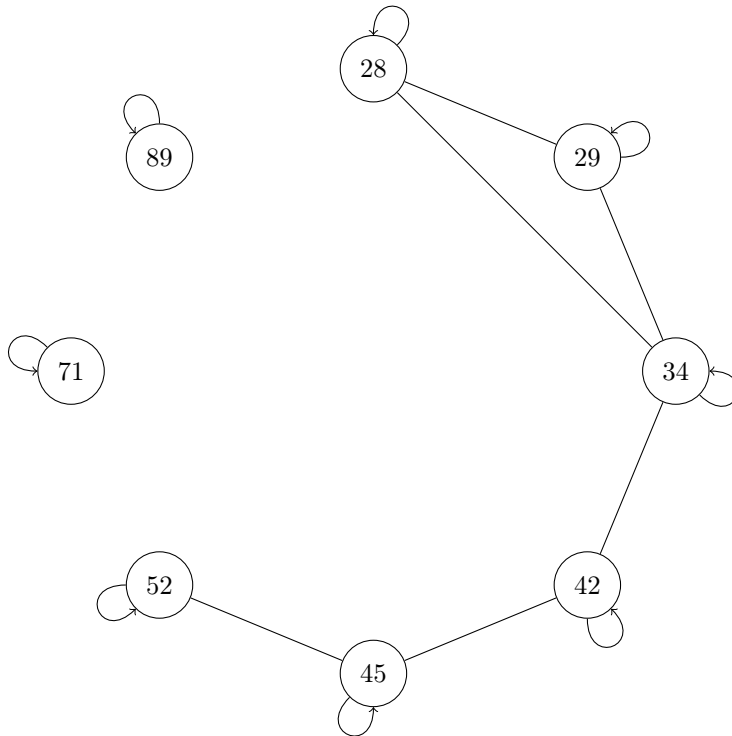
$$\begin{cases} F_5(x,y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 10 \\ F_5(y,z) = 1 \Leftrightarrow |y - z| < 10 \\ |x - z| \geq 10 \Leftrightarrow F_5(x,z) = 0 \end{cases} \quad - \text{ транзитивность не выполняется.}$$

Контрпример:

$$\begin{cases} F_5(34,42) = 1 \\ F_5(42,45) = 1 \\ F_5(34,45) = 0 \end{cases}$$

- **Матрица смежности, граф.**

	28	29	34	42	45	52	71	89
28	1	1	1	0	0	0	0	0
29	1	1	1	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	0	0	0	0
42	0	0	1	1	1	0	0	0
45	0	0	0	1	1	1	0	0
52	0	0	0	0	1	1	0	0
71	0	0	0	0	0	0	1	0
89	0	0	0	0	0	0	0	1



- Комбинация полученных свойств (**рефлексивность, симметричность**) не относится ни к одному отношению (эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка).
- Используя алгоритм Уоршелла построим транзитивное замыкание.
 - $28 \rightarrow 34 \wedge 34 \rightarrow 42 \Rightarrow 28 \rightarrow 42$
 - $28 \rightarrow 42 \wedge 42 \rightarrow 45 \Rightarrow 28 \rightarrow 45$
 - $28 \rightarrow 45 \wedge 45 \rightarrow 52 \Rightarrow 28 \rightarrow 52$
 - $29 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 42 \Rightarrow 29 \rightarrow 42$
 - $29 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 45 \Rightarrow 29 \rightarrow 45$

$29 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 52 \Rightarrow 29 \rightarrow 52$
 $34 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 45 \Rightarrow 34 \rightarrow 45$
 $34 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 52 \Rightarrow 34 \rightarrow 52$
 $42 \rightarrow 28 \wedge 28 \rightarrow 52 \Rightarrow 42 \rightarrow 52$

