

Комбинаторика и теория графов
Индивидуальное домашнее задание №LO

Задание 1. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$

Бинарное отношение задано выражением:

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. Для удобства расположим числа, входящие в мн-во M , в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Б.о. арефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 0.

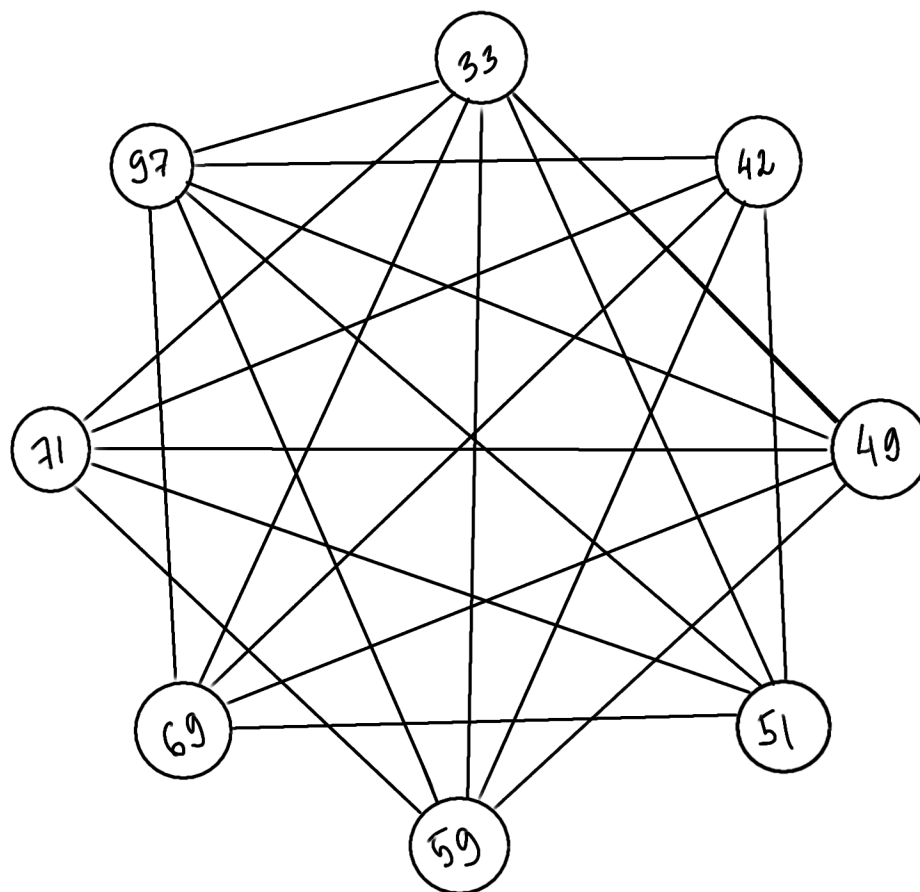
Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. нетранзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат появляются новые связи.

Задание 2. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Задание 3. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. Данное б.о. не является никаким из перечисленных, тк арефлексивно, симметрично и нетранзитивно.

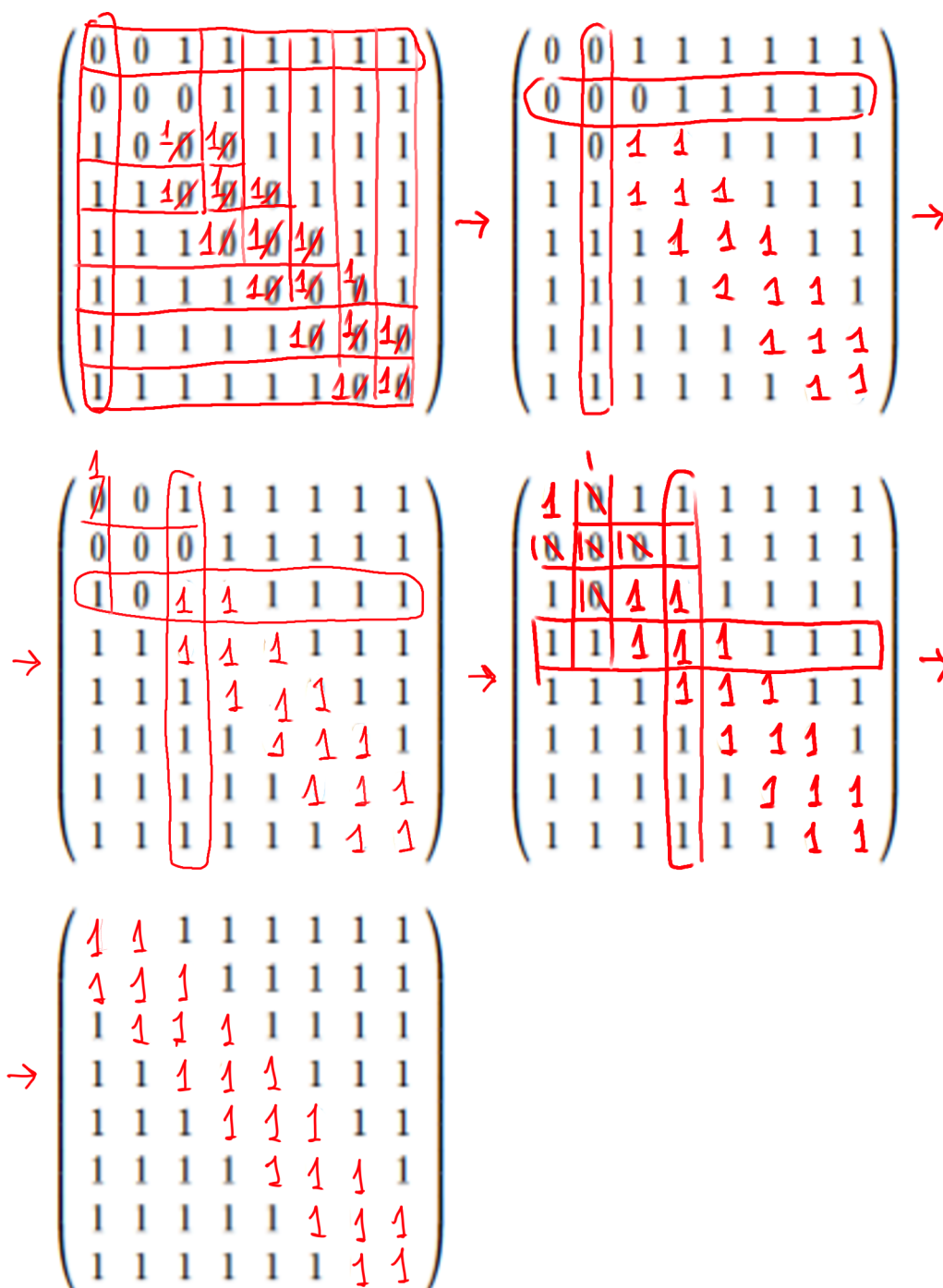
Задание 4. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.

Решение. данное б.о. не является отношением эквивалентности

Задание 5. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.

Решение. данное б.о. не является отношением частичного порядка

Задание 6. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.



Решение.

Задание 7. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$

Бинарное отношение задано выражением:

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, ареллексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

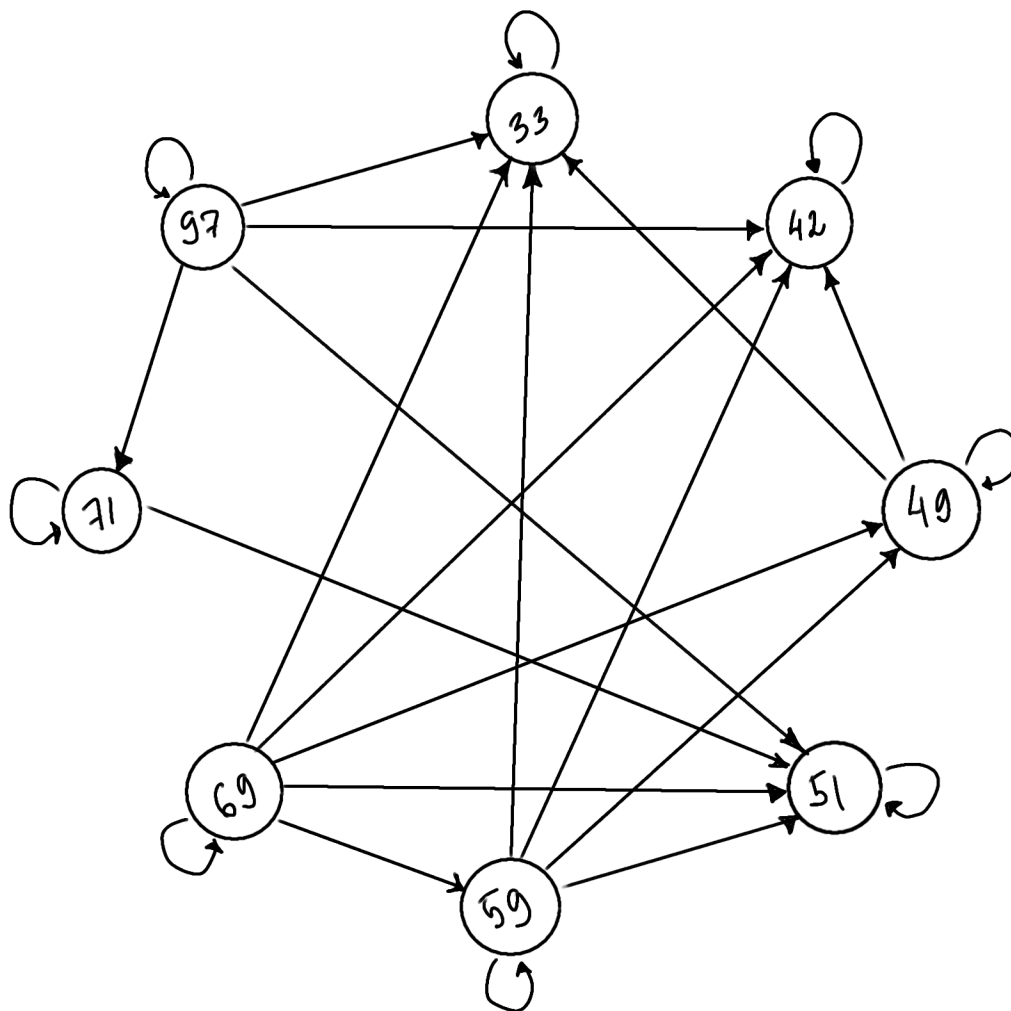
Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

Б.о. антисимметрично, тк выполняется условие $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$.

Задание 8. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строчке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строчке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



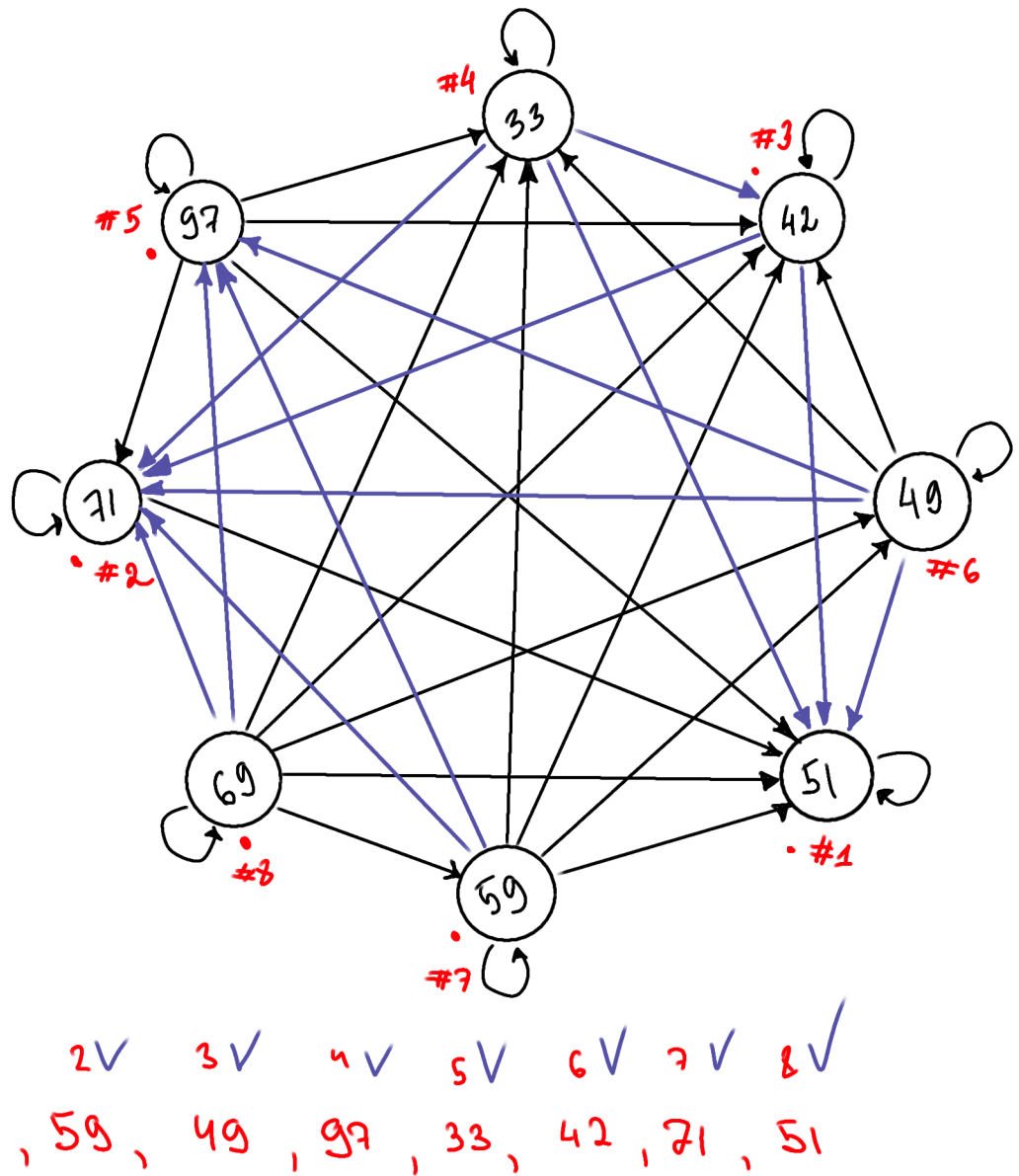
Задание 9. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. Б. о. является отношением частичного порядка, тк рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Задание 10. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.

Решение. данное б.о. не является отношением эквивалентности.

Задание 11. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.



Решение.

Задание 12. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

Решение. Б.о. транзитивно.

Задание 13. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$
Бинарное отношение задано выражением:

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

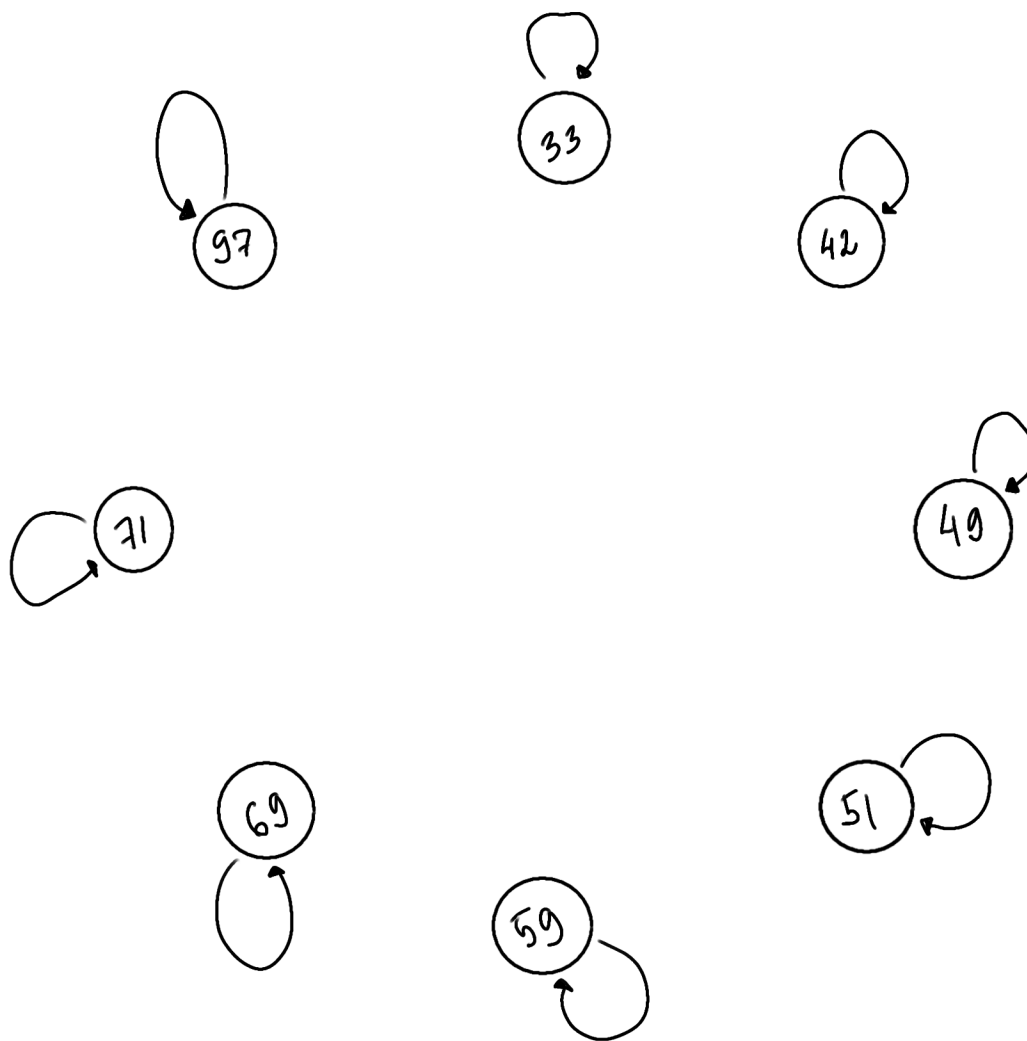
Б.о. антисимметрично, тк выполняется условие $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$.

..., .

Задание 14. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строчке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строчке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



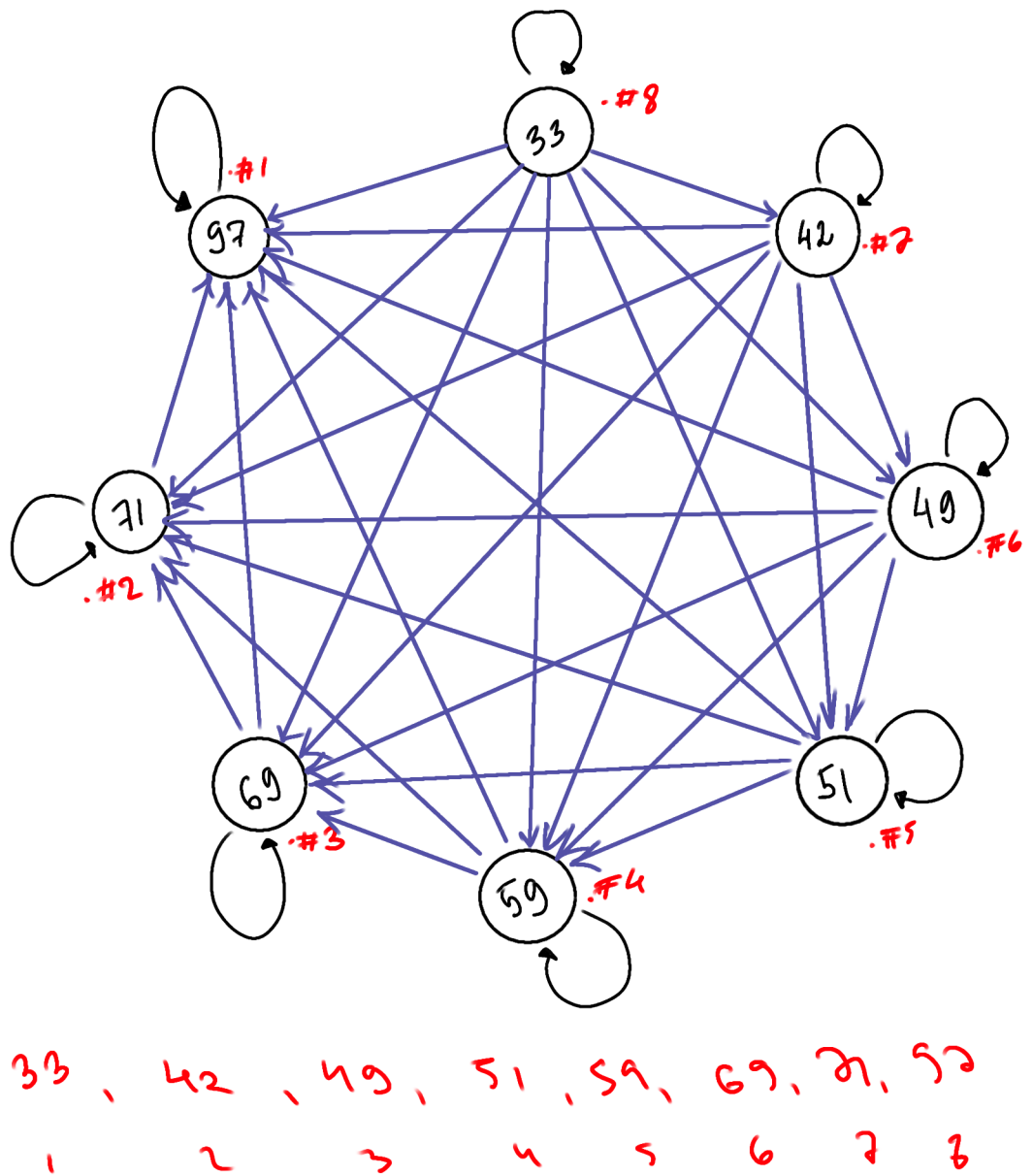
Задание 15. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. Б. о. является отношением эквивалентности и частичного порядка, тк рефлексивно, симметрично, антисимметрично и транзитивно.

Задание 16. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.

Решение. $\{ 33 \} \{ 42 \} \{ 49 \} \{ 51 \} \{ 59 \} \{ 69 \} \{ 71 \} \{ 97 \}$

Задание 17. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.



Решение.

Задание 18. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

Решение. Б.о. транзитивно.

Задание 19. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$
 Бинарное отношение задано выражением:

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

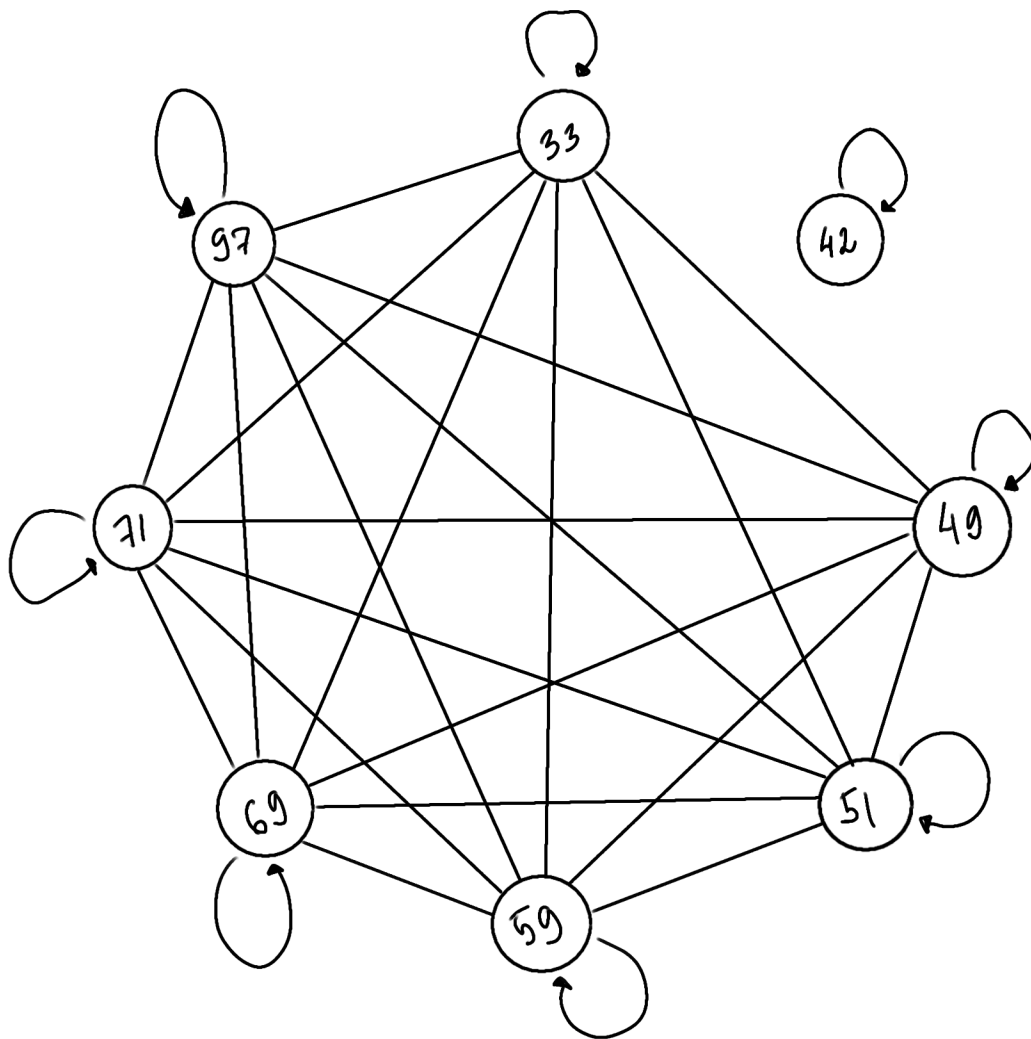
Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

Задание 20. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строчке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строчке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Задание 21. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. Б. о. является отношением эквивалентности, тк рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Задание 22. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.

Решение. $\{ 33, 49, 51, 59, 69, 71, 97 \} \{ 42 \}$

Задание 23. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.

Решение. Б. о. не является отношением частичного порядка.

Задание 24. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

Решение. Б.о. транзитивно.

Задание 25. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$

Бинарное отношение задано выражением:

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

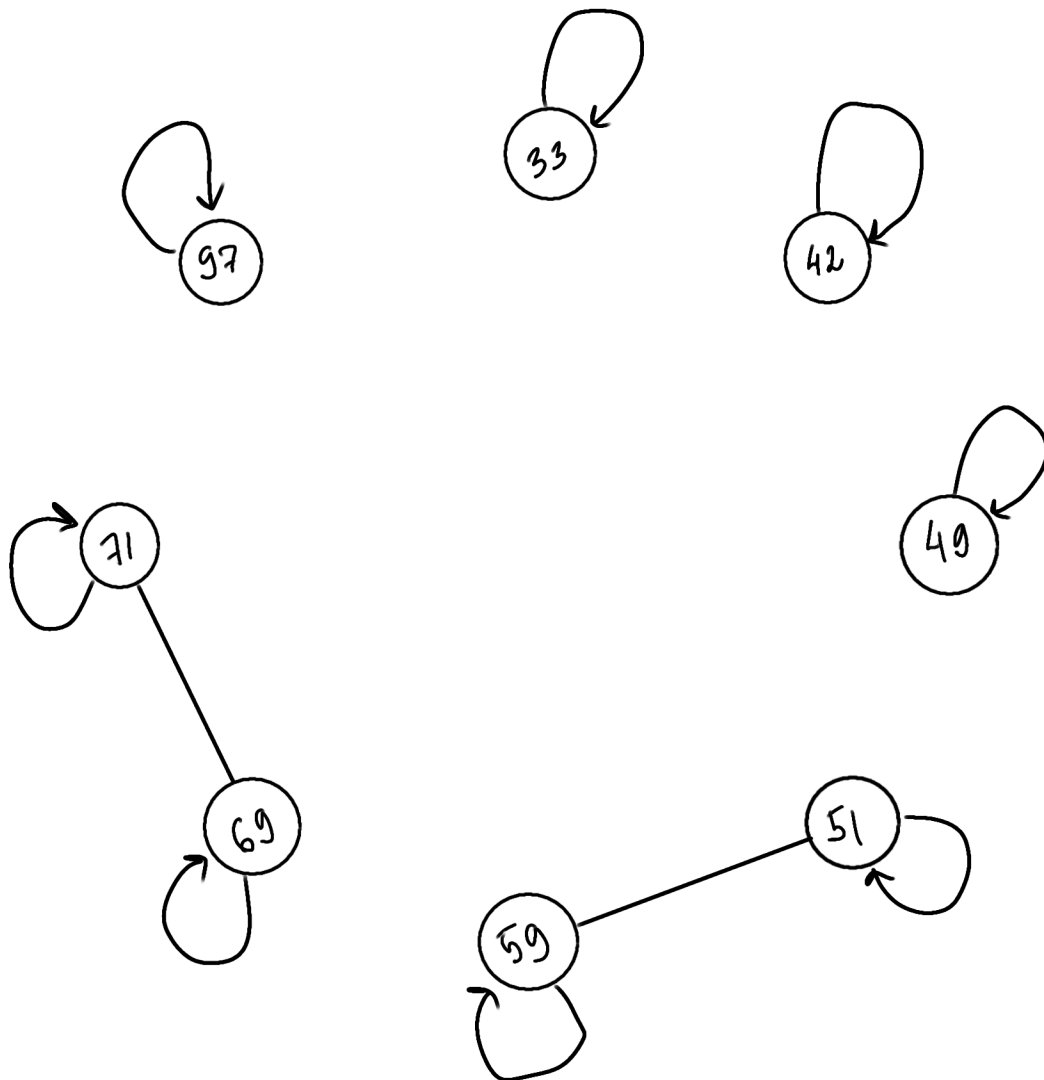
Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

Задание 26. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строчке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строчке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Задание 27. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. Б. о. является отношением эквивалентности, тк рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Задание 28. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.

Решение. $\{ 33 \} \{ 42 \} \{ 49 \} \{ 51, 59 \} \{ 69 \} \{ 71, 97 \}$

Задание 29. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.

Решение. Б. о. не является отношением частичного порядка.

Задание 30. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

Решение. Б.о. транзитивно.