

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание №1

Задание 1. Дано множество $M = \{19, 33, 69, 72, 77, 91, 96, 97\}$ и следующие бинарные отношения на нем:

- $F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0$;
- $F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y$ поразрядно;
- $F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \lfloor \frac{x}{5} \rfloor = \lfloor \frac{y}{5} \rfloor$;
- $F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3$ нечетно;
- $F_5(x, y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 10$.

Для каждого из отношений:

1. Проверить, является ли бинарное отношение (далее - б.о.) - рефлексивным, аретфлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.
2. Построить матрицы и графы этих б.о.
3. Определить, являются ли эти б.о. отношениями эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка).
4. Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.
5. Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.
6. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

Решение. **Бинарное отношение F_1**

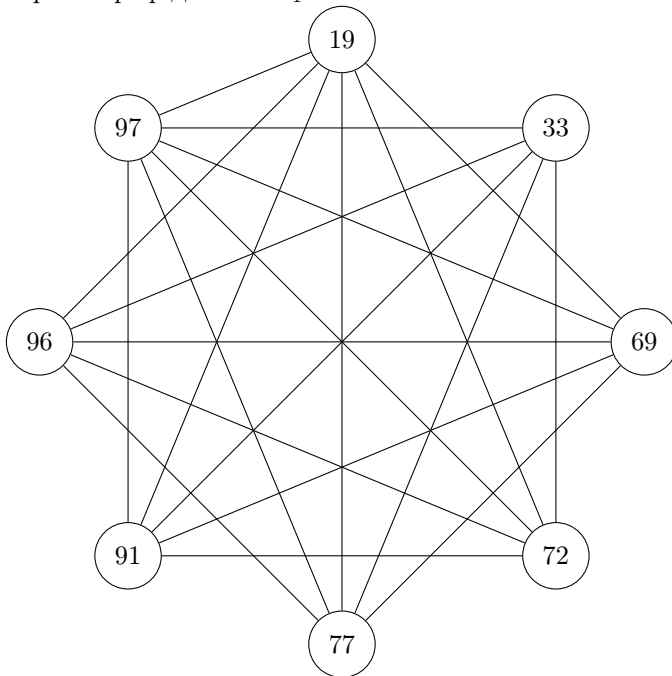
Отношение F_1 можно переформулировать, как $\exists z \in M : x < z < y$ или $y < z < x$

Построим матрицу смежности для б.о. F_1

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 \begin{array}{c} 19 \\ 33 \\ 69 \\ 72 \\ 77 \\ 91 \\ 96 \\ 97 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Из матрицы смежности видно, что бинарное отношение F_1 является арефлексивным, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали не равны единице, и симметричным, т.к. относительно главной диагонали матрица зеркальна.

Построим граф для б.о. F_1 :



Бинарное отношение не является транзитивным, т.к., например, между вершинами 96 и 97 есть путь длины 2, но нет пути длины 1. Отношение F_1 :

- Арефлексивное
- Симметричное
- Не транзитивное

Для построения транзитивного замыкания применим алгоритм Уоршелла:

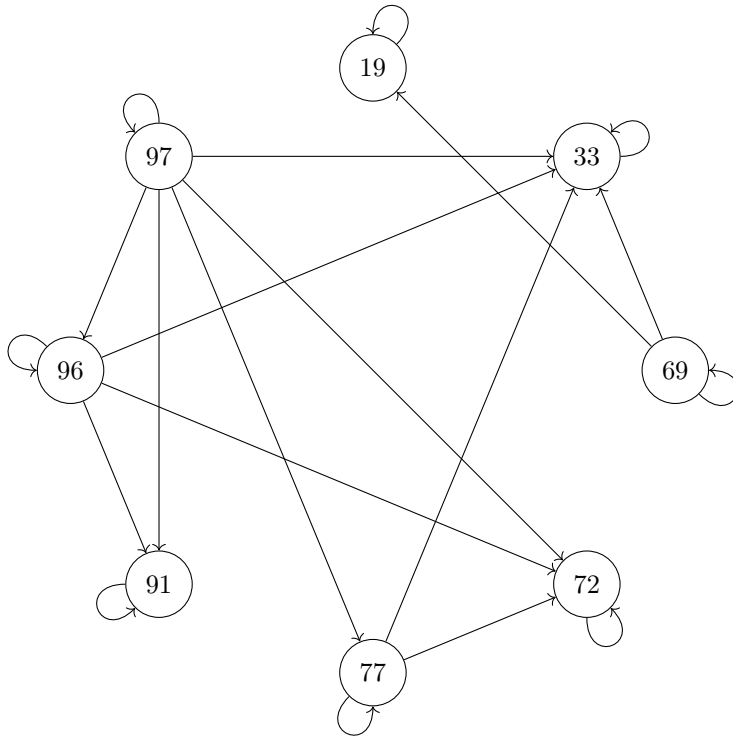
$$\begin{array}{c}
19 \quad 33 \quad 69 \quad 72 \quad 77 \quad 91 \quad 96 \quad 97 \\
19 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
33 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
69 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
72 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
77 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
91 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
96 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
97 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{c}
19 \quad 33 \quad 69 \quad 72 \quad 77 \quad 91 \quad 96 \quad 97 \\
19 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
33 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
69 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
72 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
77 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
91 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 \end{pmatrix} \\
96 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \\
97 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \color{red}{1} & \color{red}{1} \end{pmatrix}
\end{array}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow
\begin{array}{c}
19 \quad 33 \quad 69 \quad 72 \quad 77 \quad 91 \quad 96 \quad 97 \\
19 \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
33 \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
69 \begin{pmatrix} 1 & \color{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
72 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
77 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
91 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
96 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
97 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Решение. **Бинарное отношение F_2**
 Построим матрицу смежности для б.о. F_2

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 \begin{array}{l}
 19 \\
 33 \\
 69 \\
 72 \\
 77 \\
 91 \\
 96 \\
 97
 \end{array}
 & \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Бинарное отношение F_2 рефлексивное, т.к. все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и антисимметричное, т.к. выше главной диагонали в матрице находятся только 0.



Бинарное отношение F_2 транзитивно, т.к. для любых вершин, между которыми есть путь длины 2 найдется и путь длины 1.

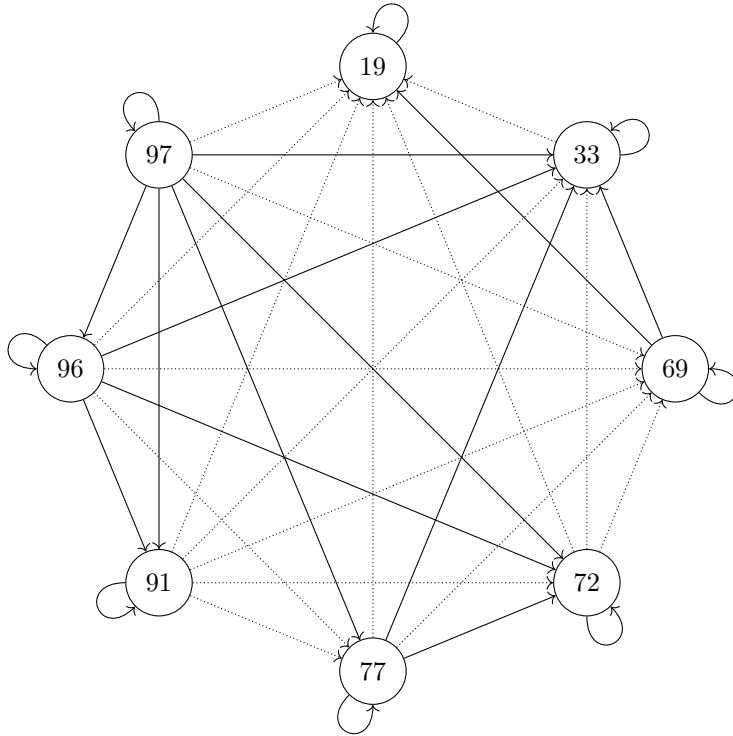
Отношение F_2 :

- Рефлексивное
- Антисимметричное
- Транзитивное

Соответственно, оно является отношением частичного порядка (не линейный порядок, т.к. на графе не между всеми вершинами есть ребро).

Граф после применения топологической сортировки для дополнения отношения F_2 до отношения линейного порядка будет выглядеть следующим образом (если в качестве начальной вершины каждый

раз принимать вершину с наименьшим значением из множества ещё не пройденных вершин, то с возрастанием номера вершины, её номер будет наоборот убывать):



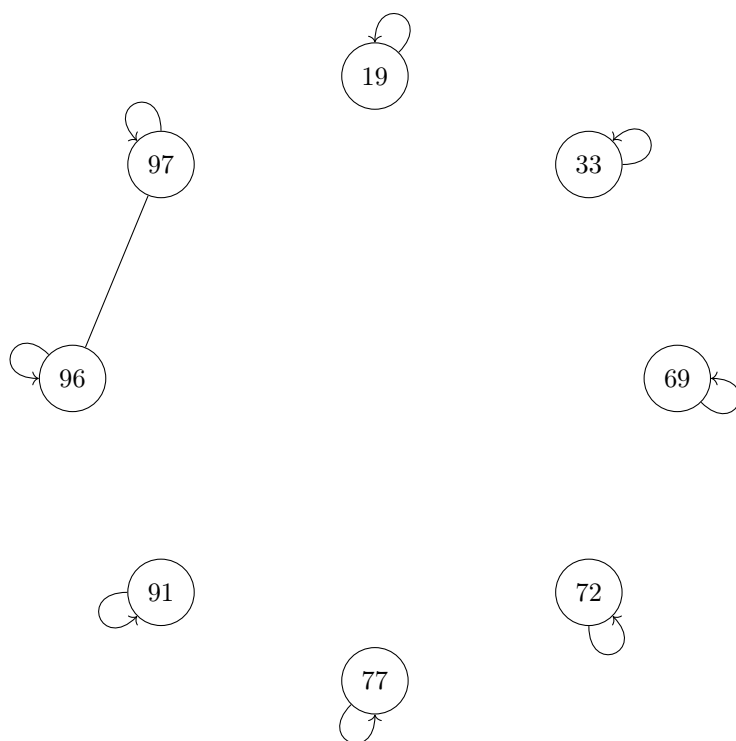
А матрица линейного отношения F_2 , дополненного до отношения линейного порядка, будет соответствовать данной (все нули под главной диагональю становятся единицами):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 19 & \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \end{array}$$

Решение. **Бинарное отношение F_3**
 Построим матрицу смежности для б.о. F_3

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 \begin{matrix} 19 \\ 33 \\ 69 \\ 72 \\ 77 \\ 91 \\ 96 \\ 97 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{matrix}
 \end{array}$$

Бинарное отношение F_3 рефлексивное, т.к. все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_3 транзитивно, т.к. на графе отсутствуют пути длины 2.

Отношение F_3 :

- Рефлексивное
- Симметричное
- Транзитивное

Соответственно, оно является отношением эквивалентности. Множество M разбивается на классы эквивалентности по целой части при делении на 5. А именно:

- $\{19\}$ - целая часть = 2
- $\{33\}$ - целая часть = 6
- $\{69\}$ - целая часть = 13
- $\{72\}$ - целая часть = 14
- $\{77\}$ - целая часть = 15

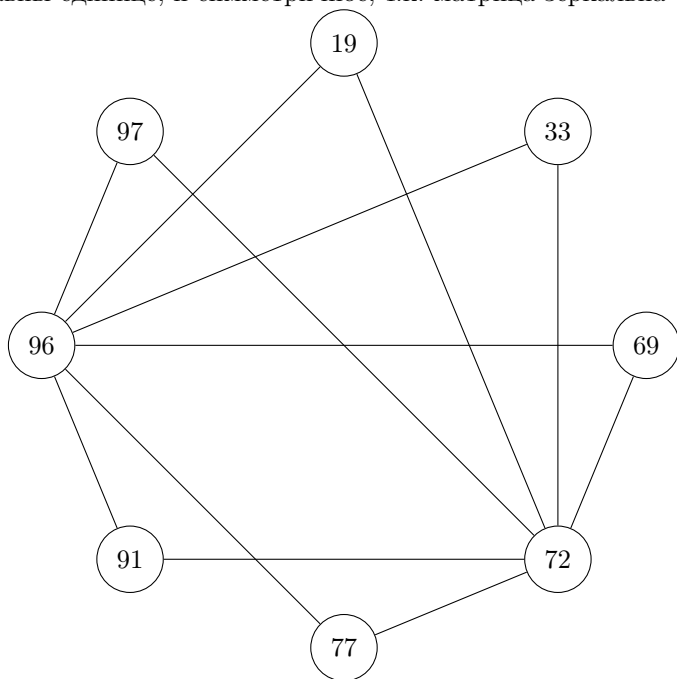
- $\{91\}$ - целая часть = 18
- $\{96, 97\}$ - целая часть = 19

Решение. **Бинарное отношение F_4**

Построим матрицу смежности для б.о. F_4

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 \begin{array}{c} 19 \\ 33 \\ 69 \\ 72 \\ 77 \\ 91 \\ 96 \\ 97 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Бинарное отношение F_4 арerefлексивное, т.к. элементы матрицы смежности на главной диагонали не равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_4 не транзитивно. Например, между вершинами 96 и 72 есть несколько путей длины 2, но нет ни одного пути длиной 1.

Отношение F_4 :

- Арerefлексивное
- Симметричное
- Не транзитивное

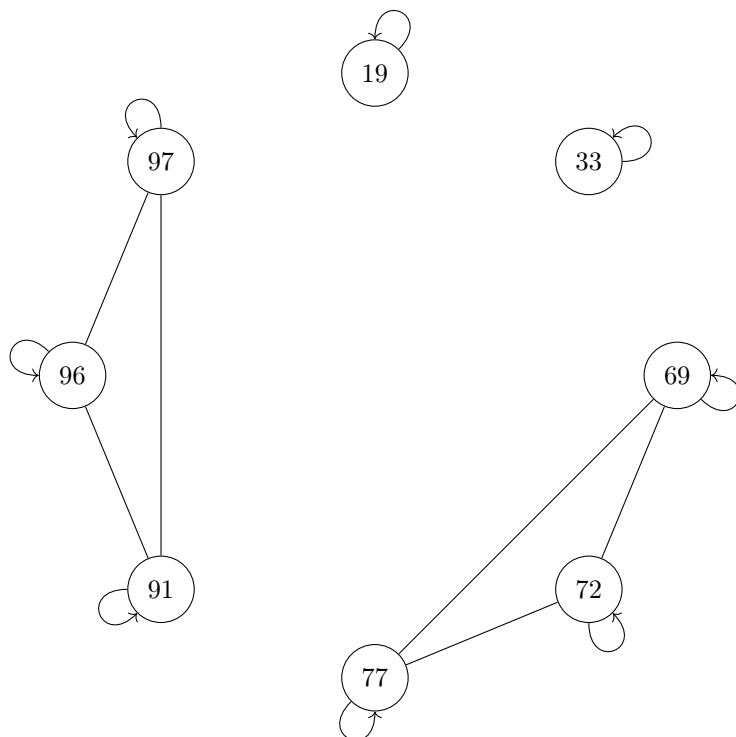
Для построения транзитивного замыкания применим алгоритм Уоршелла:

$$\Rightarrow \begin{matrix} & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\ \begin{matrix} 19 \\ 33 \\ 69 \\ 72 \\ 77 \\ 91 \\ 96 \\ 97 \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \\ 1 & 1 & 1 & \textcolor{red}{1} & 1 & 1 & \textcolor{red}{1} & 1 \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{1} & 1 & \textcolor{red}{1} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Решение. Бинарное отношение F_5

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 19 & 33 & 69 & 72 & 77 & 91 & 96 & 97 \\
 \begin{array}{c} 19 \\ 33 \\ 69 \\ 72 \\ 77 \\ 91 \\ 96 \\ 97 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Бинарное отношение F_5 рефлексивное, т.к. все элементы матрицы смежности на главной диагонали равны единице, и симметричное, т.к. матрица зеркальна относительно главной диагонали.



Бинарное отношение F_5 транзитивно, т.к. для всех вершин, между которыми есть путь длины 2, есть и путь длины 1.

Отношение F_5 :

- Рефлексивное
- Симметричное
- Транзитивное

Соответственно оно является отношением эквивалентности.

Множество M будет разбито на классы эквивалентности по разности между элементами < 10 , а именно:

- $\{19\}$ - нет больше элементов, разность с которыми будет < 10
- $\{33\}$ - нет больше элементов, разность с которыми будет < 10
- $\{69, 72, 77\}$ - разность между любыми 2-мя элементами < 10
- $\{91, 96, 97\}$ - разность между любыми 2-мя элементами < 10