Студентка:	Ковалева Кристина
Группа:	2362
Вариант:	СС
Дата:	19 февраля 2024 г.

Комбинаторика и теория графов

Индивидуальное домашнее задание №1

Дано множество $M = \{67, 46, 16, 80, 18, 54, 55, 61\}$ и следующие бинарные отношения на нем:

- $F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0$;
- $F_2(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y$ поразрядно;
- $F_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow [\frac{x}{4}] = [\frac{y}{4}]$;
- $F_4(x, y) = 1 \Leftrightarrow x^2 - y^3$ нечетно;
- $F_5(x, y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 5$.

Задание 1. *Проверить, является ли бинарное отношение – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, асимметричным, антисимметричным, транзитивным.*

- F_1 является арефлексивным, т.к. $(x - z)(x - z) > 0$; симметричным: $(x - z)(y - z) > 0 \Leftrightarrow (y-z)(x-z) > 0$; нетранзитивным, т.к. есть хотя бы один случай нетранзитивности: например, $F_1(55, 18) = 1, F_1(18, 54) = 1$, но $F_1(55, 54) = 0$;
- F_2 является рефлексивным, т.к. $x \geq x$; антисимметричным, т.к. если $x \geq y$ и $y \geq x$, то $x = y$; транзитивным, т.к. (обозначим матрицу бинарного отношения A) $A^2 = A$;
- F_3 является рефлексивным, т.к. $[\frac{x}{4}] = [\frac{x}{4}]$; симметричным, т.к. $[\frac{x}{4}] = [\frac{y}{4}] \Leftrightarrow [\frac{y}{4}] = [\frac{x}{4}]$; транзитивным, т.к. $A^2 = A$;
- F_4 является арефлексивным, т.к. $x^2 - x^3$ всегда четно; симметричным, т.к. получившаяся матрица симметрична (см. Задание 2); нетранзитивным, т.к. есть хотя бы один случай нетранзитивности: например, $F_4(18, 55) = 1, F_4(55, 54) = 1$, но $F_4(18, 54) = 0$;
- F_5 является рефлексивным, т.к. $0 = |x - x| < 5$; симметричным, т.к. $|x - y| < 5 \Leftrightarrow |y - x| < 5$; транзитивным, т.к. $A^2 = A$.

Задание 2. *Построить матрицы и графы этих б.о.*

m_i	16	18	46	54	55	61	67	80
16	0	0	1	1	1	1	1	1
18	0	0	0	1	1	1	1	1
46	1	0	0	0	1	1	1	1
54	1	1	0	0	0	1	1	1
55	1	1	1	0	0	0	1	1
61	1	1	1	1	0	0	0	1
67	1	1	1	1	1	0	0	0
80	1	1	1	1	1	1	0	0

Таблица 1: Матрица для F_1

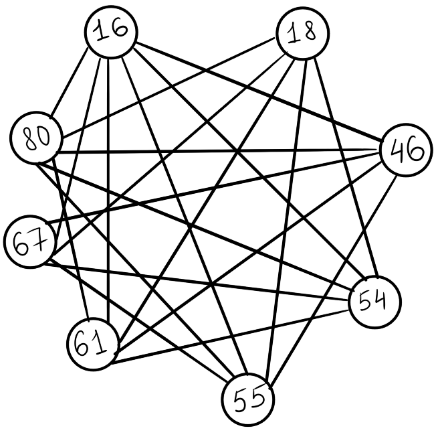

Рис. 1: Граф для F_1

m_i	16	18	46	54	55	61	67	80
16	1	0	0	0	0	0	0	0
18	1	1	0	0	0	0	0	0
46	1	0	1	0	0	0	0	0
54	0	0	0	1	0	0	0	0
55	0	0	0	1	1	0	0	0
61	0	0	0	0	0	1	0	0
67	1	0	1	1	1	1	1	0
80	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблица 2: Матрица для F_2

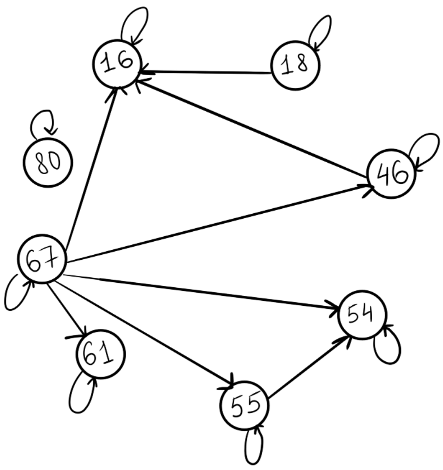

Рис. 2: Граф для F_2

m_i	16	18	46	54	55	61	67	80
16	1	1	0	0	0	0	0	0
18	1	1	0	0	0	0	0	0
46	0	0	1	0	0	0	0	0
54	0	0	0	1	1	0	0	0
55	0	0	0	1	1	0	0	0
61	0	0	0	0	0	1	0	0
67	0	0	0	0	0	0	1	0
80	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблица 3: Матрица для F_3

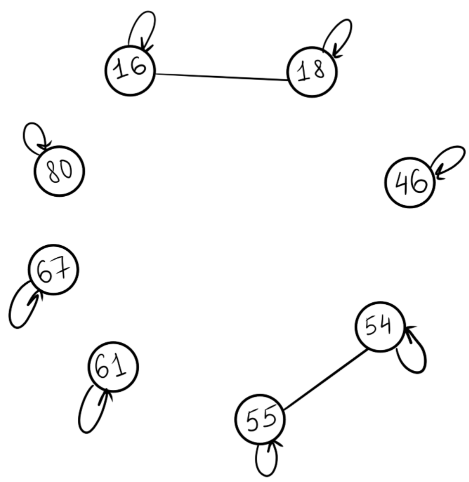

Рис. 3: Граф для F_3

m_i	16	18	46	54	55	61	67	80
16	0	0	0	0	1	1	1	0
18	0	0	0	0	1	1	1	0
46	0	0	0	0	1	1	1	0
54	0	0	0	0	1	1	1	0
55	1	1	1	1	0	0	0	1
61	1	1	1	1	0	0	0	1
67	1	1	1	1	0	0	0	1
80	0	0	0	0	1	1	1	0

Таблица 4: Матрица для F_4

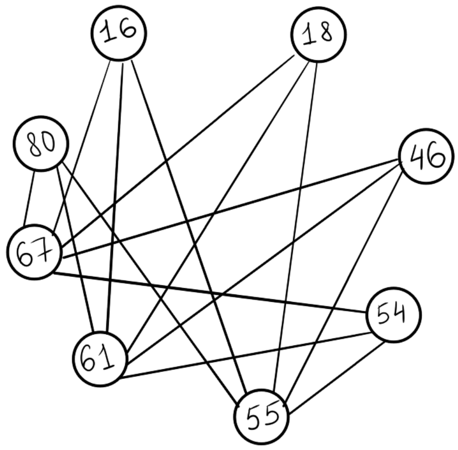

Рис. 4: Граф для F_4

m_i	16	18	46	54	55	61	67	80
16	1	1	0	0	0	0	0	0
18	1	1	0	0	0	0	0	0
46	0	0	1	0	0	0	0	0
54	0	0	0	1	1	0	0	0
55	0	0	0	1	1	0	0	0
61	0	0	0	0	0	1	0	0
67	0	0	0	0	0	0	1	0
80	0	0	0	0	0	0	0	1

Таблица 5: Матрица для F_5

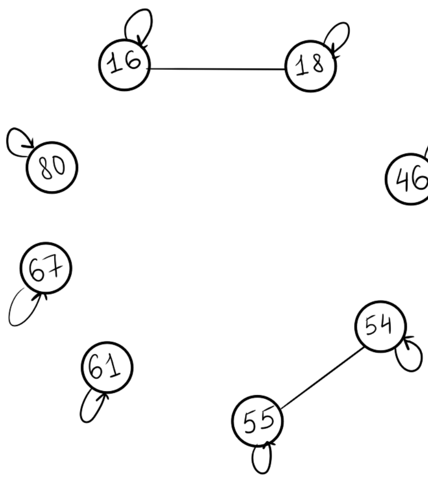

Рис. 5: Граф для F_5

Задание 3. *Определить, являются ли эти б.о. отношениями эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.*

- F_1 не является ни одним из типов отношений, т.к. оно арефлексивно, симметрично и нетранзитивно.

- F_2 является отношением частичного порядка, т.к. оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Оно не является отношением линейного порядка, т.к. существуют пары элементов из множества, не связанных этим отношением (например, 18 и 80, 46 и 54).

- F_3 является отношением эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- F_4 не является ни одним из типов отношений, т.к. оно арефлексивно, симметрично и нетранзитивно.
- F_5 является отношением эквивалентности, т.к. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Задание 4. *Для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности.*

- Классы эквивалентности для F_3: $\{16, 18\}, \{54, 55\}, \{46\}, \{61\}, \{67\}, \{80\}$;
- Классы эквивалентности для F_5: $\{16, 18\}, \{54, 55\}, \{46\}, \{61\}, \{67\}, \{80\}$.

Задание 5. *Для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношение линейного порядка.*

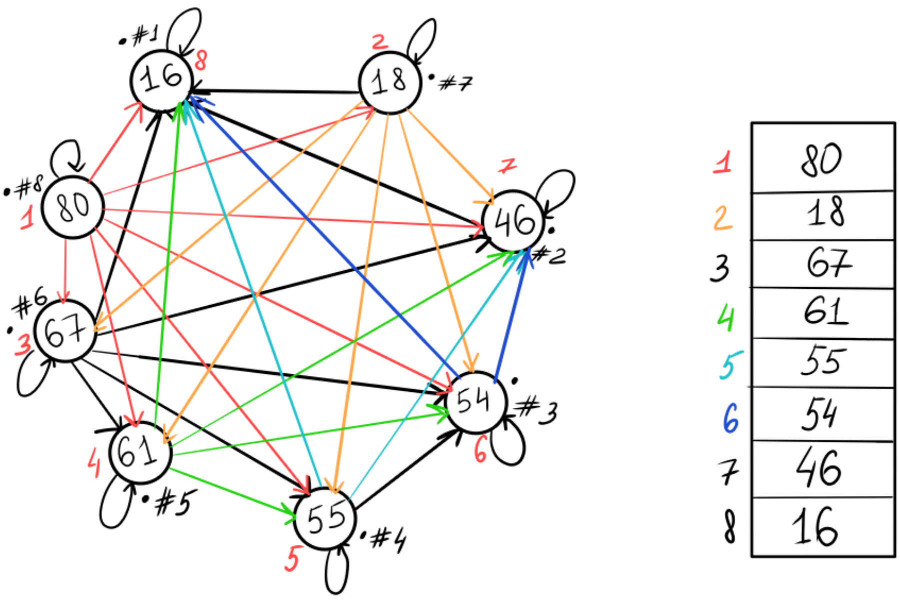

Рис. 6: Решение задания 5

Задание 6. *Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.*

Построим транзитивное замыкание для F_1:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1
\end{pmatrix}
$$

Рис. 7: Шаг 1

На шаге 2 матрица не изменится.

$$\begin{pmatrix} \cancel{0}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 8: Шаг 3

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 9: Шаг 4

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Построим транзитивное замыкание для F_4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 10: Шаг 1

На шаге 2, 3 и 4 матрица не изменится.

$$\begin{pmatrix}
\cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1\cancel{0} \\
\cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1\cancel{0} \\
\cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1\cancel{0} \\
\cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1\cancel{0} \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & \cancel{0}1 & 1 & 1 & 1 & 1\cancel{0}
\end{pmatrix}$$

Рис. 11: Шаг 5

Ответ: $\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$