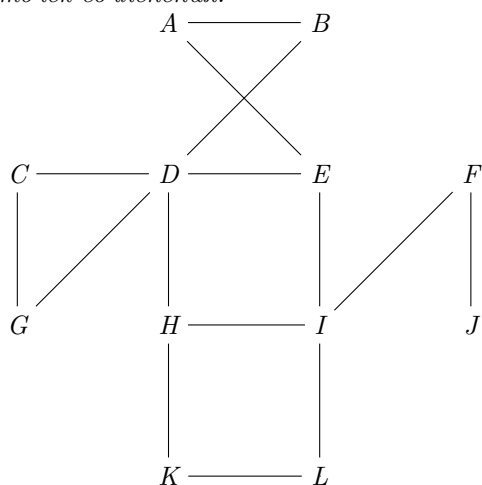


Комбинаторика и теория графов  
 Индивидуальное домашнее задание №2

**Задание 1.** Является ли граф а) эйлеровым, полуэйлеровым? б) гамильтоновым, полугамильтоновым? в) двудольным? г) вершинно-двусвязным; д) рёберно-двусвязным е) постройте дерево блоков и точек сочленения.



Решение.

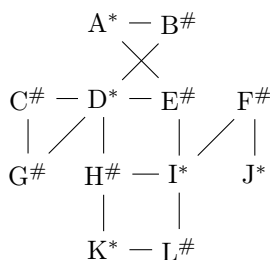
а) **эйлеровым, полуэйлеровым?**

Граф не является ни эйлеровым, ни полуэйлеровым, так как в графе есть вершины с нечётными степенями, и их больше двух (D, E, H, J).

б) **гамильтоновым, полугамильтоновым?**

В графе есть лист J, следовательно, граф не является гамильтоновым. Так как между шарнирами D и I нет простого пути, содержащего вершины A, B, E, H, K, L, то граф не является полугамильтоновым.

в) **двудольным?**



Так как при раскрашивании смежные вершины C и G оказались одного цвета, граф не является двудольным.

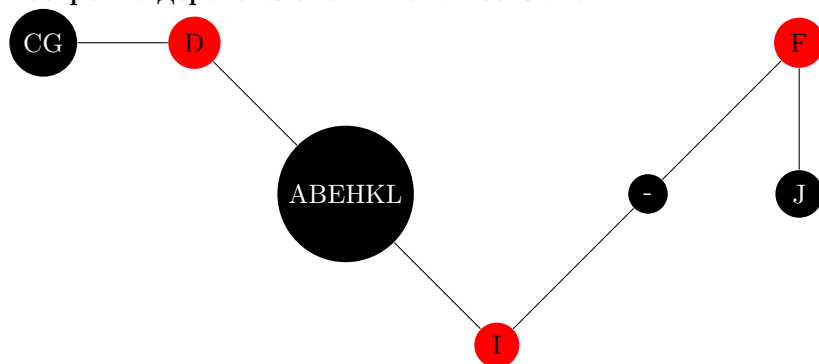
г) **вершинно-двусвязным?**

Так как в графе присутствуют шарниры (D, F, I), то граф не может быть вершинно-двусвязным.

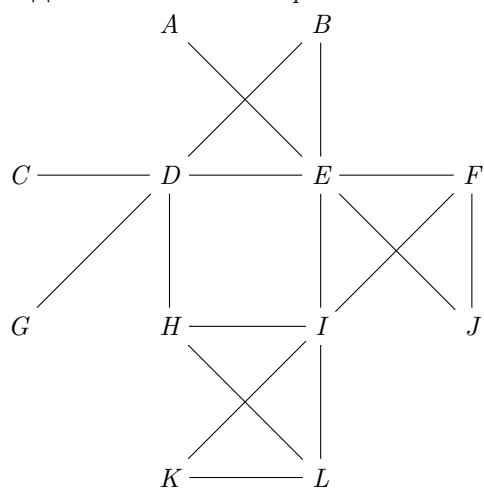
д) **рёберно-двусвязным?**

Так как в графе есть мосты (FI, FJ), то граф не является рёберно-двусвязным.

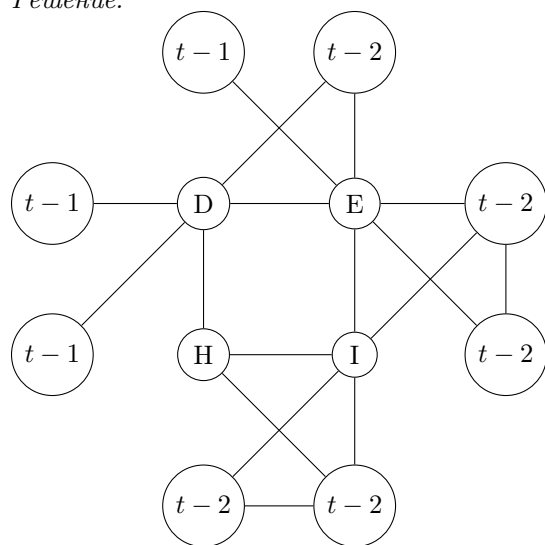
е) постройте дерево блоков и точек сочленения.



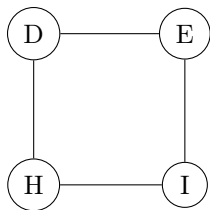
**Задание 2.** Найдите хроматический многочлен данного графа:



Решение.



$$P(t) = P_{DEHI}(t)(t-1)^3(t-2)^5$$



$$P_{DEHI}(t) = t(t-1)(t^2-3t+3)$$

Ответ:  $P(t) = t(t-1)^4(t-2)^5(t^2-3t+3)$

**Задание 3.** Из полного графа на 114 вершинах, удалили рёбра  $AB$ ,  $BE$ ,  $DE$  и  $GH$ . Постройте хроматический многочлен получившегося графа. Упростить ответ не обязательно.

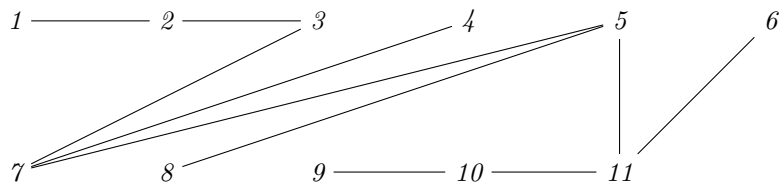
Решение.

$$\square K_n = P_{K_n}(t), K_n - e = P_{K_n - e}(t)$$

$$\begin{aligned} (K_{114} - AB) &= K_{114} + K_{113} \\ (K_{114} - AB - BE) &= (K_{114} - AB) + (K_{113} - AB) \\ (K_{114} - AB - BE - DE) &= (K_{114} - AB - BE) + (K_{113} - AB - BE) \\ (K_{114} - AB - BE - DE - GH) &= (K_{114} - AB - BE - DE) + (K_{113} - AB - BE - DE) = \\ &= (K_{114} - AB - BE) + 2(K_{113} - AB - BE) + (K_{112} - AB - BE) = \\ &= (K_{114} - AB) + 3(K_{113} - AB) + 3(K_{112} - AB) + (K_{111} - AB) = \\ &= K_{114} + 4K_{113} + 6K_{112} + 4K_{111} + K_{110} = A_t^{114} + 4A_t^{113} + 6A_t^{112} + 4A_t^{111} + A_t^{110} \end{aligned}$$

Ответ:  $A_t^{114} + 4A_t^{113} + 6A_t^{112} + 4A_t^{111} + A_t^{110}$

**Задание 4.** а) Постройте код Прюфера для данного дерева:



б) Постройте дерево по коду Прюфера: 3 9 4 9 10 1 1 9 10.

Решение.

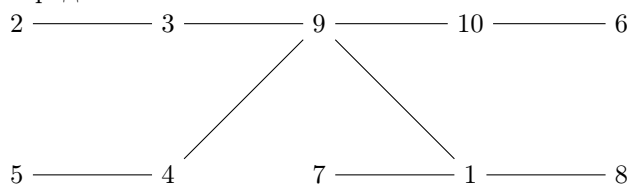
а) Построим код Прюфера

2 3 7 7 11 5 5 11 10 11

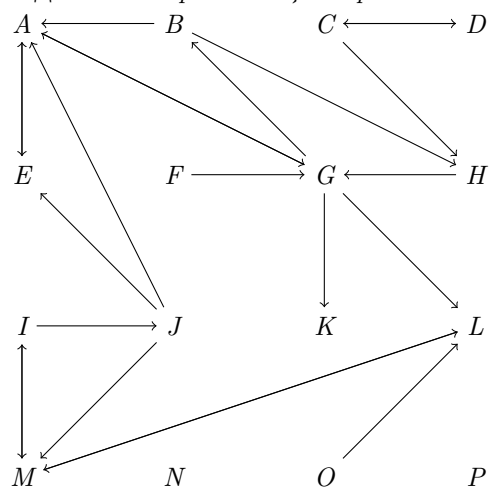
б) Построим дерево по коду

Код: 3 9 4 9 10 1 1 9 10

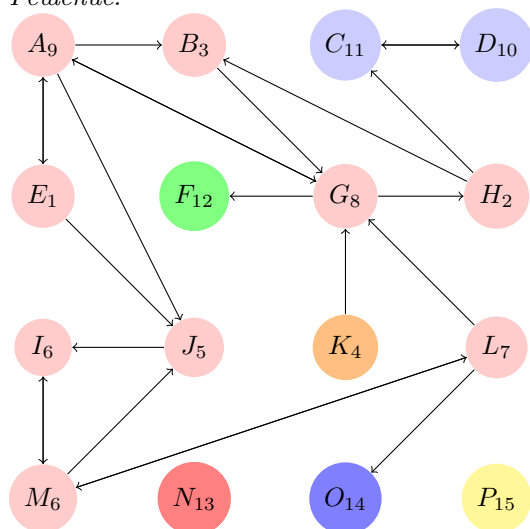
Порядок: 2 3 5 4 6 7 8 1 9



**Задание 5.** При помощи алгоритма Косарaju найдите компоненты сильной связности данного графа:

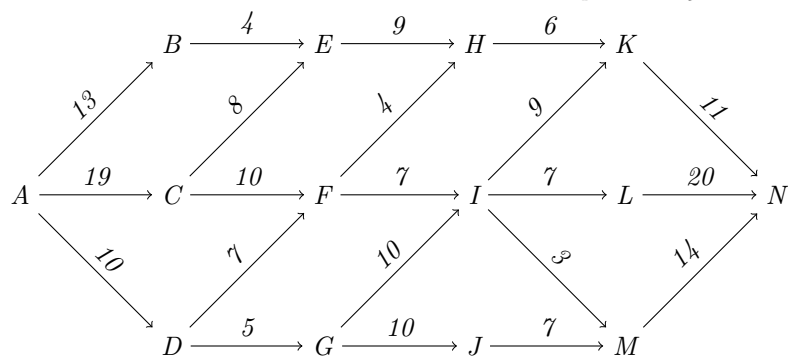


Решение.

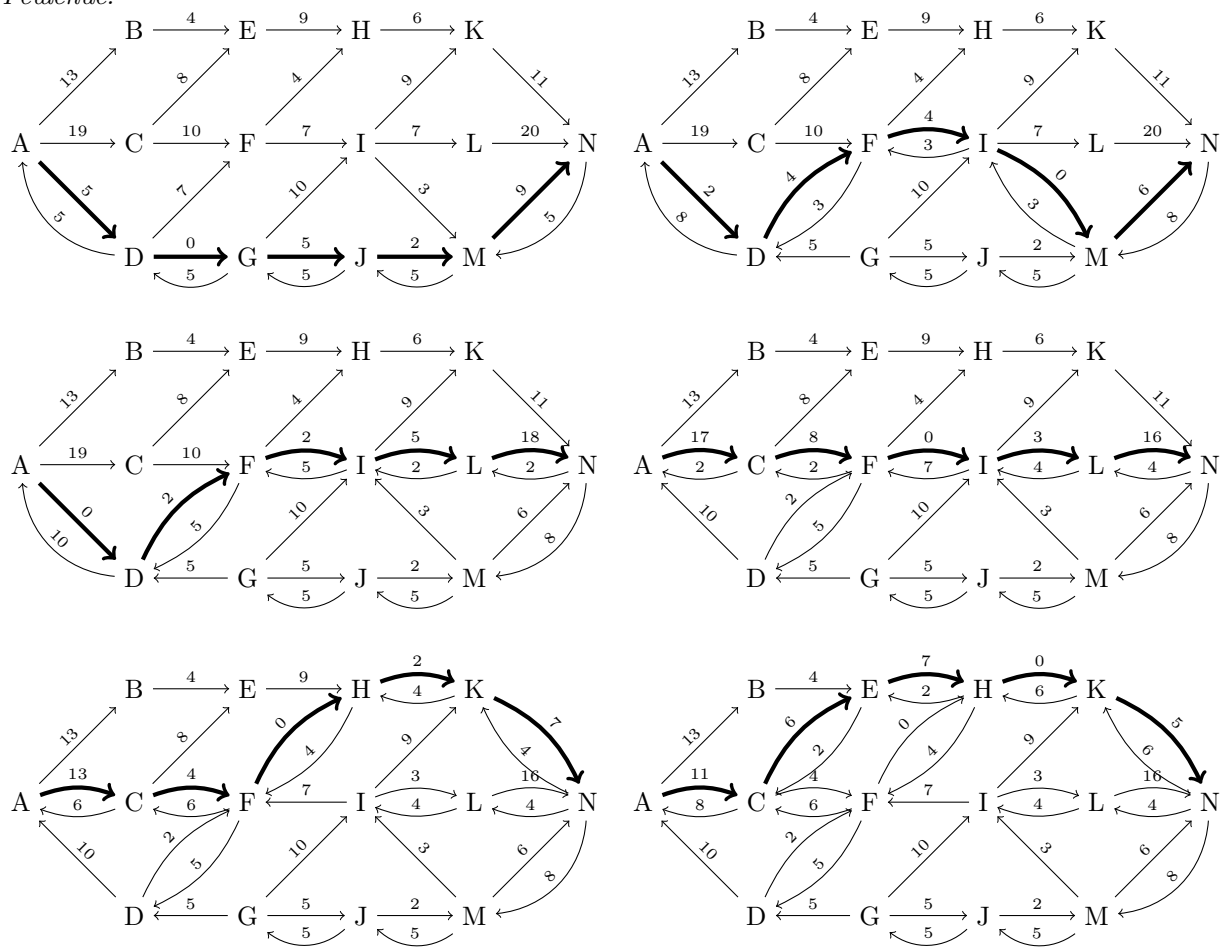


В графе 7 компонент сильной связности. Каждая из них выделена своим цветом в графе.

**Задание 6.** Найдите максимальный поток через данную плоскую сеть:

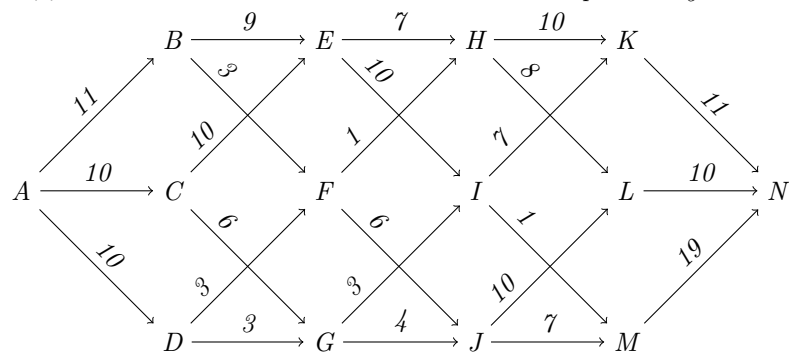


Решение.

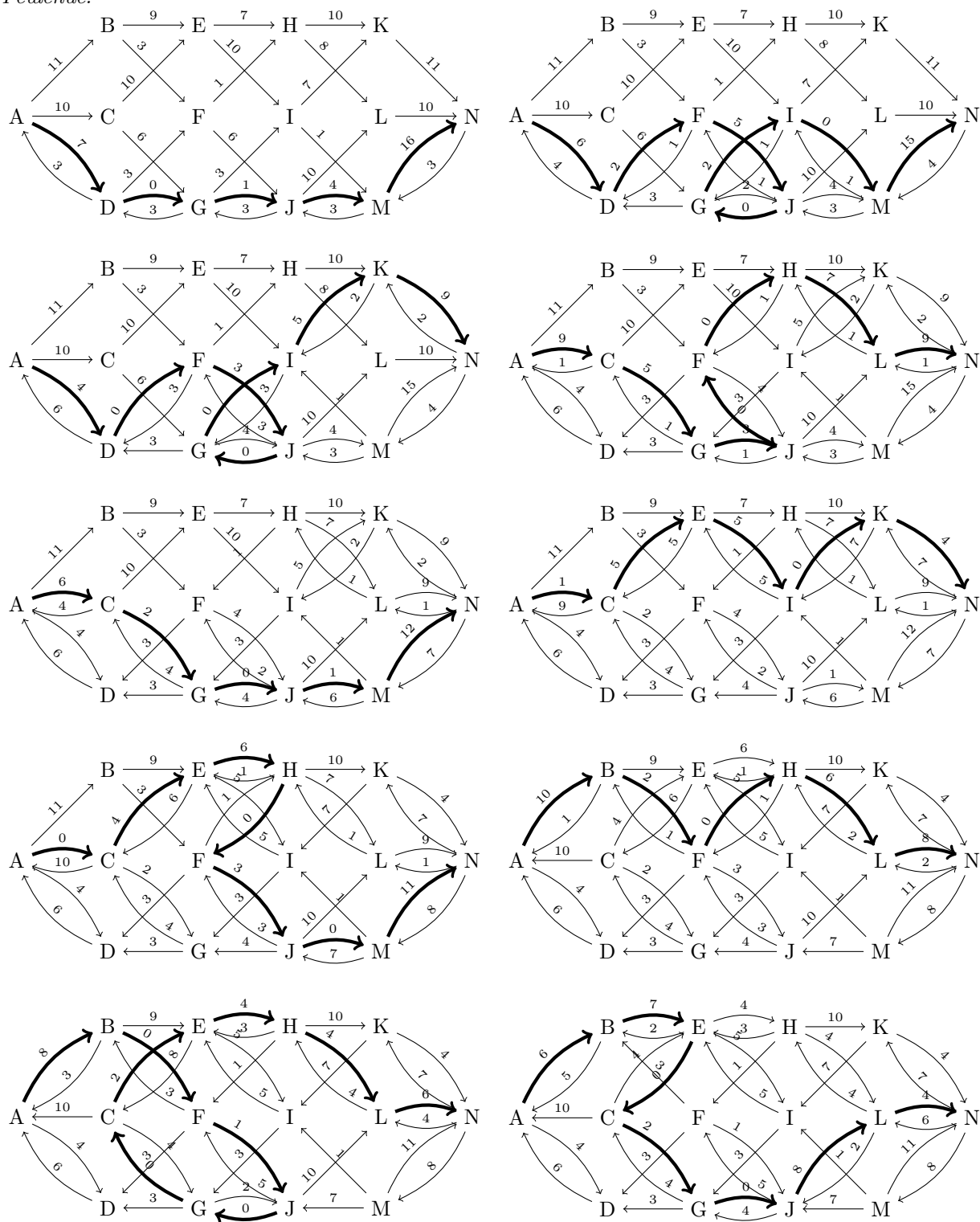


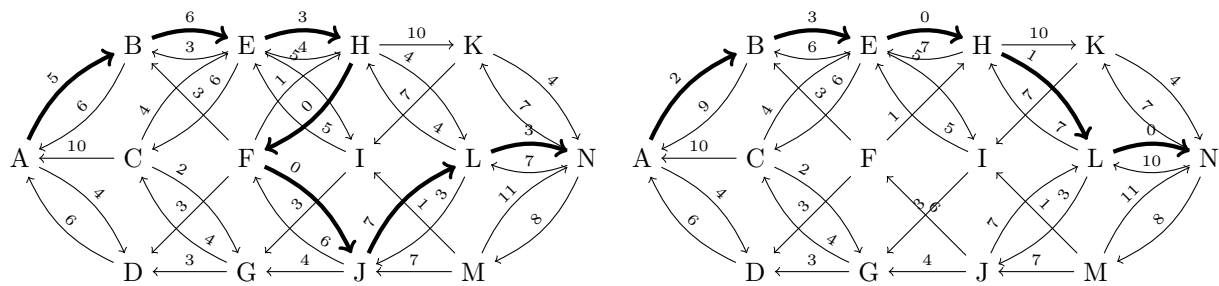
Ответ: 18

**Задание 7.** Найдите максимальный поток через данную сеть:



Решение.

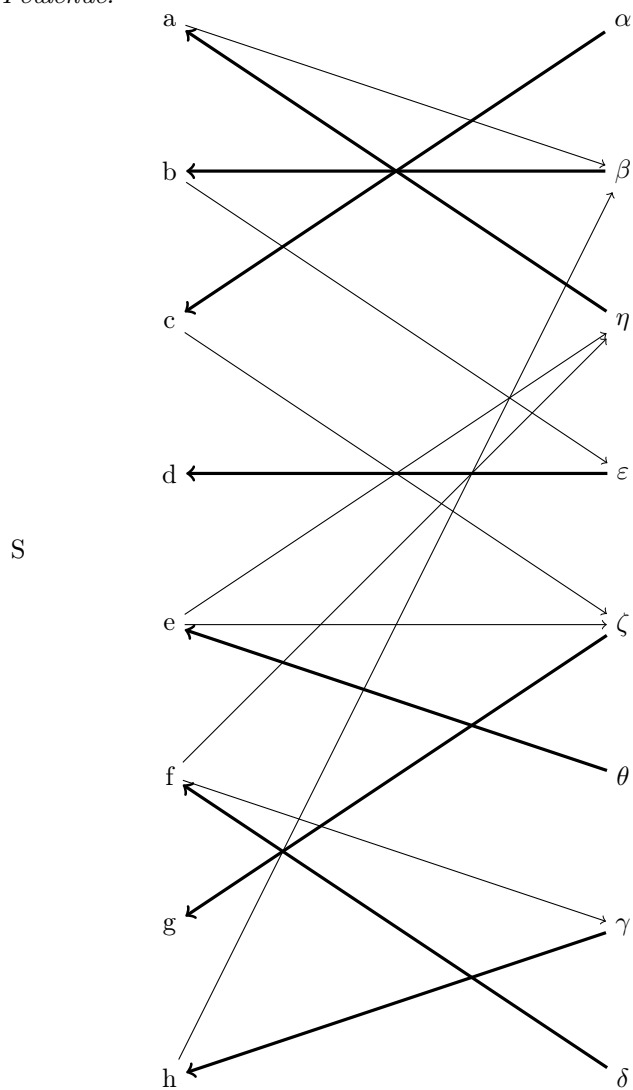




Ответ: 25

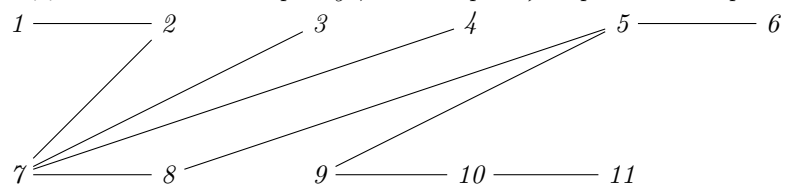
**Задание 8.** Найдите наибольшее паросочетание в двудольном графе, заданном набором рёбер:  $(a, \beta)$   $(a, \eta)$   $(b, \beta)$   $(b, \varepsilon)$   $(c, \alpha)$   $(c, \zeta)$   $(d, \varepsilon)$   $(e, \zeta)$   $(e, \eta)$   $(e, \theta)$   $(f, \gamma)$   $(f, \delta)$   $(f, \eta)$   $(g, \zeta)$   $(h, \beta)$   $(h, \gamma)$

Решение.



Ответ:  $(a, \eta)$   $(b, \beta)$   $(c, \alpha)$   $(d, \varepsilon)$   $(e, \theta)$   $(f, \delta)$   $(g, \zeta)$   $(h, \gamma)$

**Задание 9.** Найдите радиус, диаметр и центр данного дерева:



Решение.

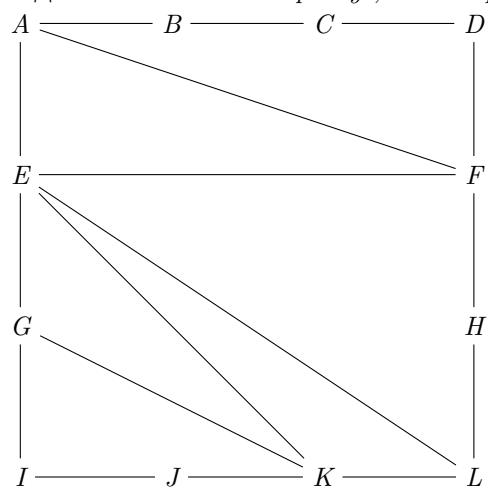
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	<i>max</i>
1	0	1	3	3	4	5	2	3	5	6	7	7
2	1	0	2	2	3	4	1	2	4	5	6	6
3	3	2	0	2	3	4	1	2	4	5	6	6
4	3	2	2	0	3	4	1	2	4	5	6	6
5	4	3	3	3	0	1	2	1	1	2	3	4
6	5	4	4	4	1	0	3	2	2	3	4	5
7	2	1	1	1	2	3	0	1	3	4	5	5
8	3	2	2	2	1	2	1	0	2	3	4	4
9	5	4	4	4	1	2	3	2	0	1	2	5
10	6	5	5	5	2	3	4	3	1	0	1	6
11	7	6	6	6	3	4	5	4	2	1	0	7

радиус: 4

диаметр: 7

центры: 5, 8

**Задание 10.** Найдите радиус, диаметр и центр данного графа:





Решение.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	max
A	0	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3
B	1	0	1	2	2	2	3	3	4	4	3	3	4
C	2	1	0	1	3	2	4	3	5	5	4	4	5
D	2	2	1	0	2	1	3	2	4	4	3	3	4
E	1	2	3	2	0	1	1	2	2	2	1	1	3
F	1	2	2	1	1	0	2	1	3	3	2	2	3
G	2	3	4	3	1	2	0	3	1	2	1	2	4
H	2	3	3	2	2	1	3	0	4	3	2	1	4
I	3	4	5	4	2	3	1	4	0	1	2	3	5
J	3	4	5	4	2	3	2	3	1	0	1	2	5
K	2	3	4	3	1	2	1	2	2	1	0	1	4
L	2	3	4	3	1	2	2	1	3	2	1	0	4

радиус: 3

диаметр: 5

центры: A, E, F

**Задание 11.** Постройте пример графа, для которого хроматическим многочленом является  $t^4(t-1)^6(t-2)^3(t-3)^3$

Решение.

