

Комбинаторика и теория графов
 Индивидуальное домашнее задание №LO

Задание 1. $M = \{33, 97, 69, 71, 42, 49, 51, 59\}$

Бинарное отношение задано выражением:

1)

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow \exists z \in M : (x - z)(y - z) < 0$$

2)

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \geq y$$

3)

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow [x/2] = [y/2]$$

4)

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow (x^2 - y^3) \div 2$$

5)

$$F_1(x, y) = 1 \Leftrightarrow |x - y| < 6$$

Проверить, является ли бинарное отношение (далее – б.о.) – рефлексивным, арефлексивным, симметричным, антисимметричным, асимметричным, транзитивным.

Решение. 1) Для удобства расположим числа, входящие в мн-во M , в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ \begin{matrix} 33 \\ 42 \\ 49 \\ 51 \\ 59 \\ 69 \\ 71 \\ 97 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Б.о. арефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 0.

Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. нетранзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат появляются новые связи.

2) Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 42 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

Б.о. антисимметрично, тк выполняется условие $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$.

3) Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. антисимметрично, тк выполняется условие $x \geq y \wedge y \geq x \Rightarrow x = y$.

Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

4) Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 59 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 69 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 71 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 97 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

5) Для удобства расположим числа, входящие в мн-во М в порядке возрастания и построим матрицу для данного бинарного отношения:

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 59 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Б.о. рефлексивно, тк на главной диагонали матрицы все 1.

Б.о. симметрично, тк матрица симметрична относительно главной диагонали.

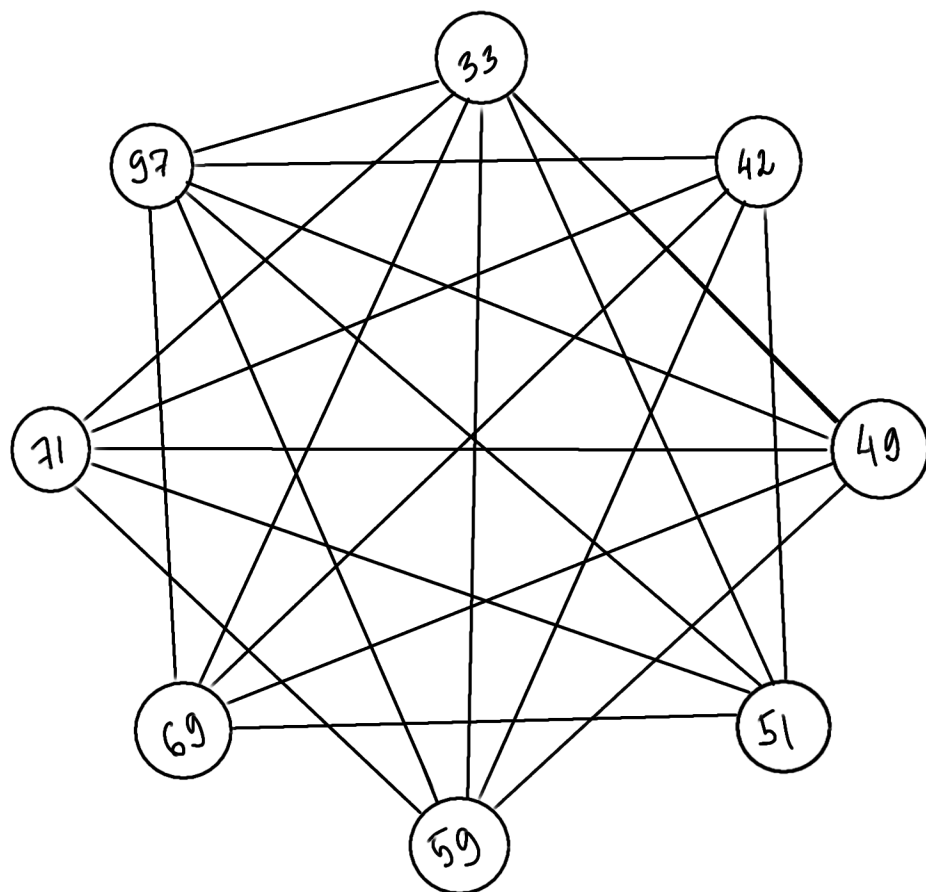
Б.о. транзитивно, тк при возведении матрицы в квадрат не появляются новые связи.

Задание 2. Постройте матрицу и граф этого б.о.

Решение. Перед построением матрицы отсортируем вершины по возрастанию. Таким образом строчке(столбцу) с меньшим порядковым номером соответствует вершина с меньшим значением, а строчке(столбцу) с большим порядковым номером – вершина с большим значением.

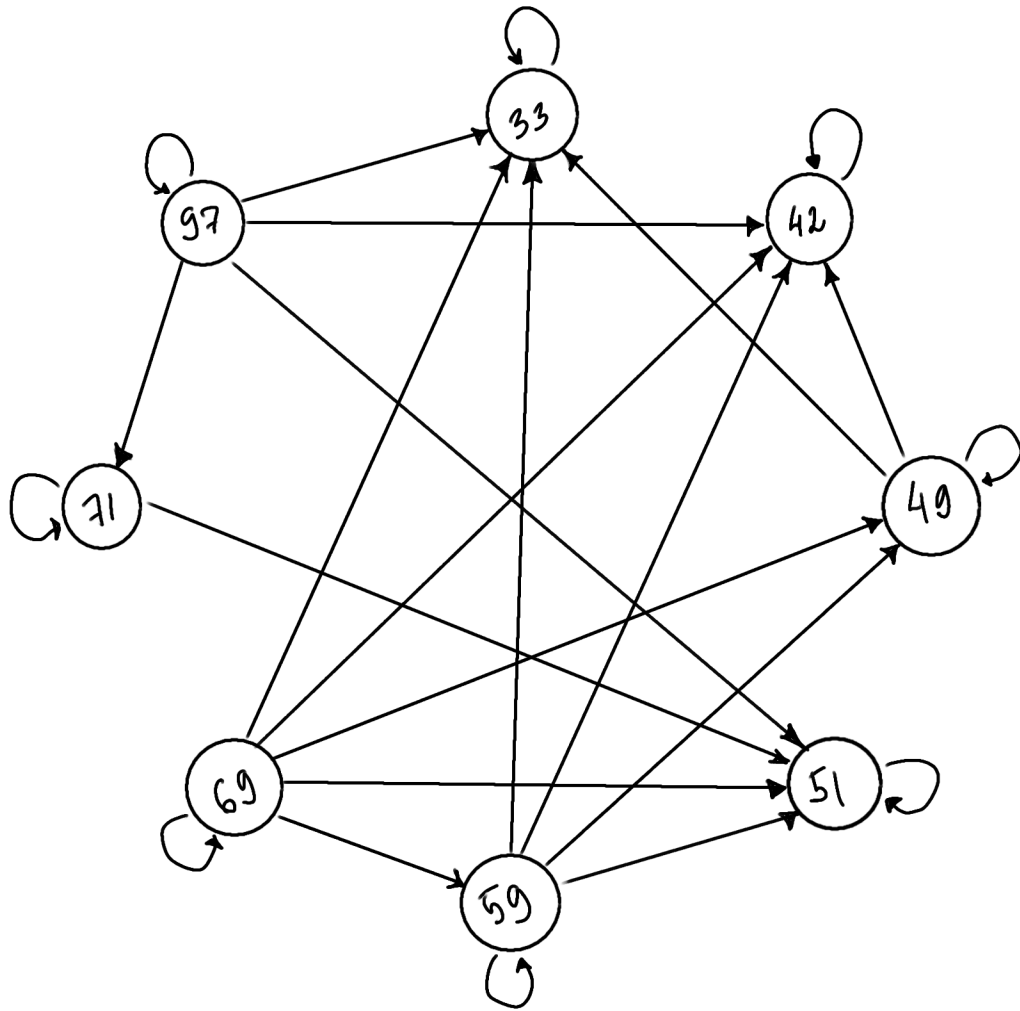
1)

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 42 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 49 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 59 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 69 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 71 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 97 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



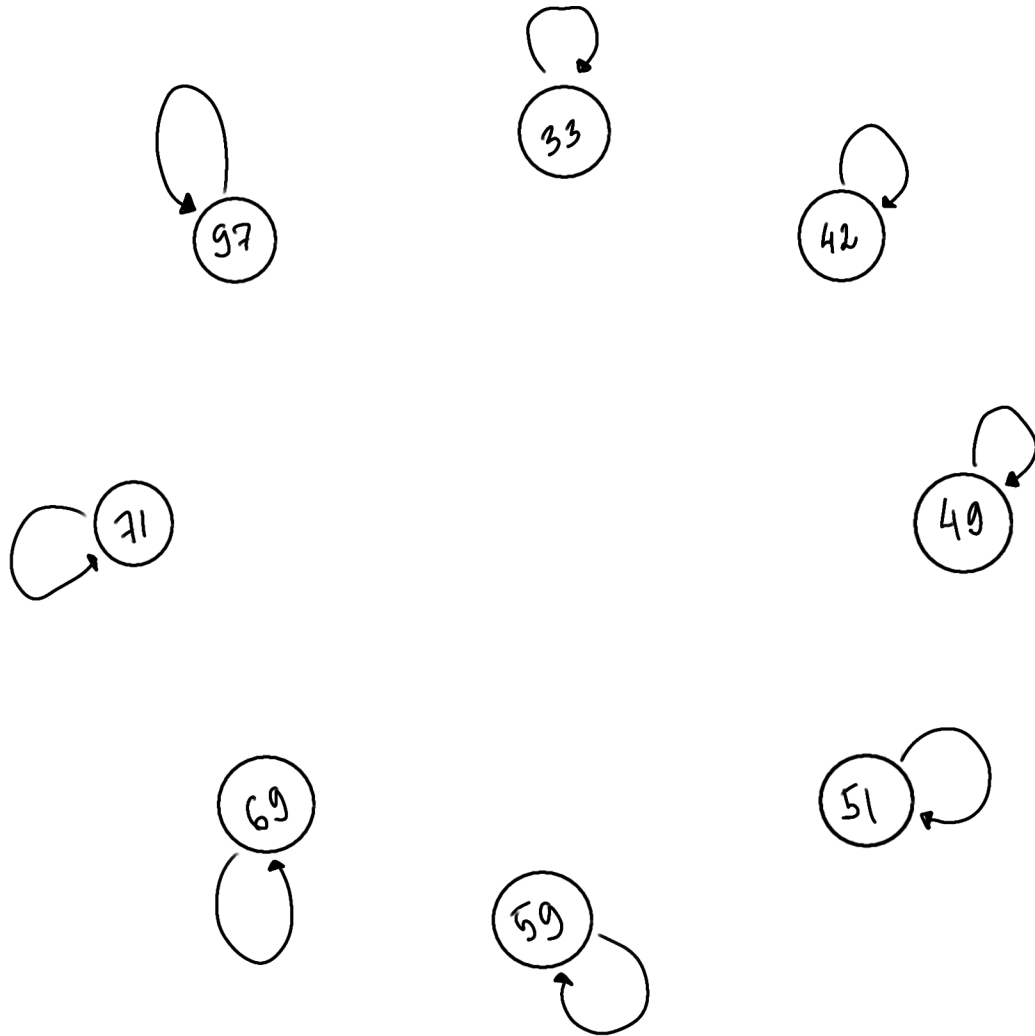
2)

$$\begin{pmatrix}
 & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\
 33 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 42 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$



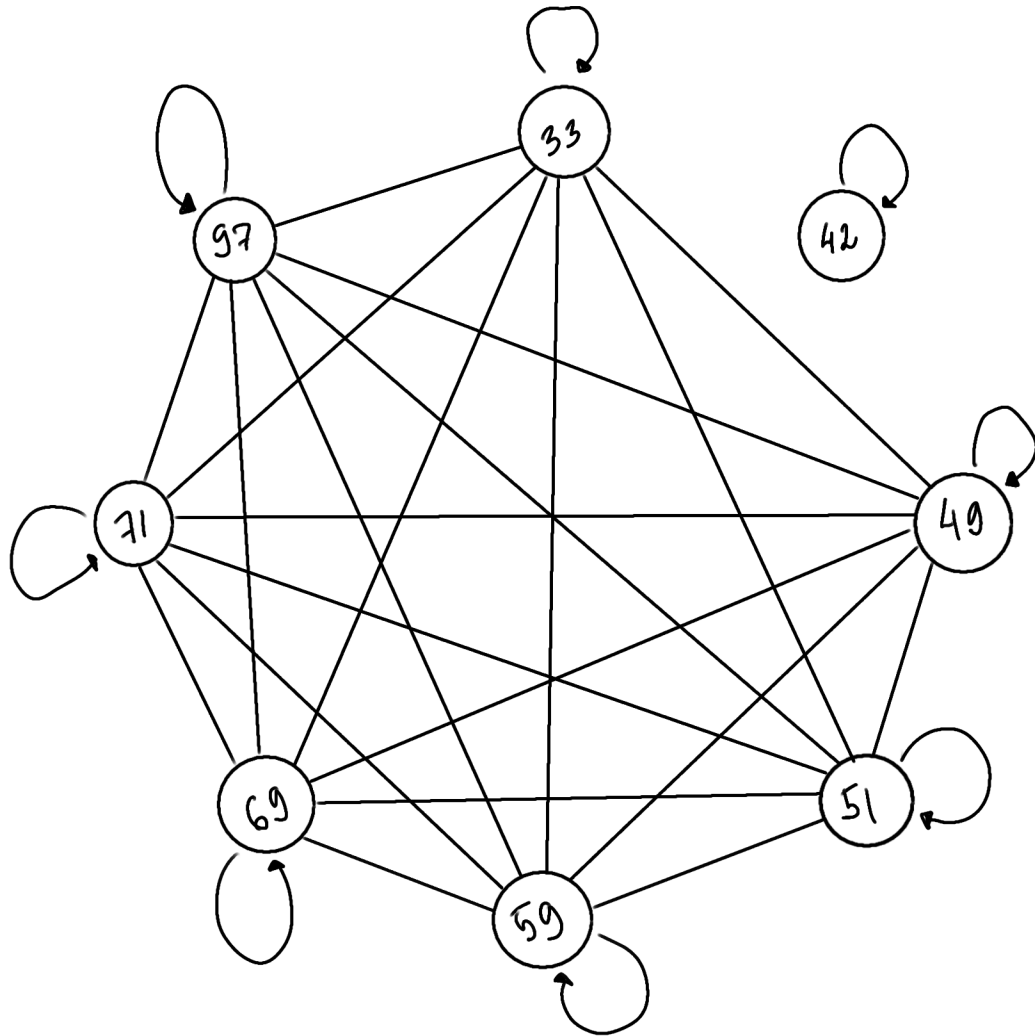
3)

$$\begin{pmatrix}
 & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\
 33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 59 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$



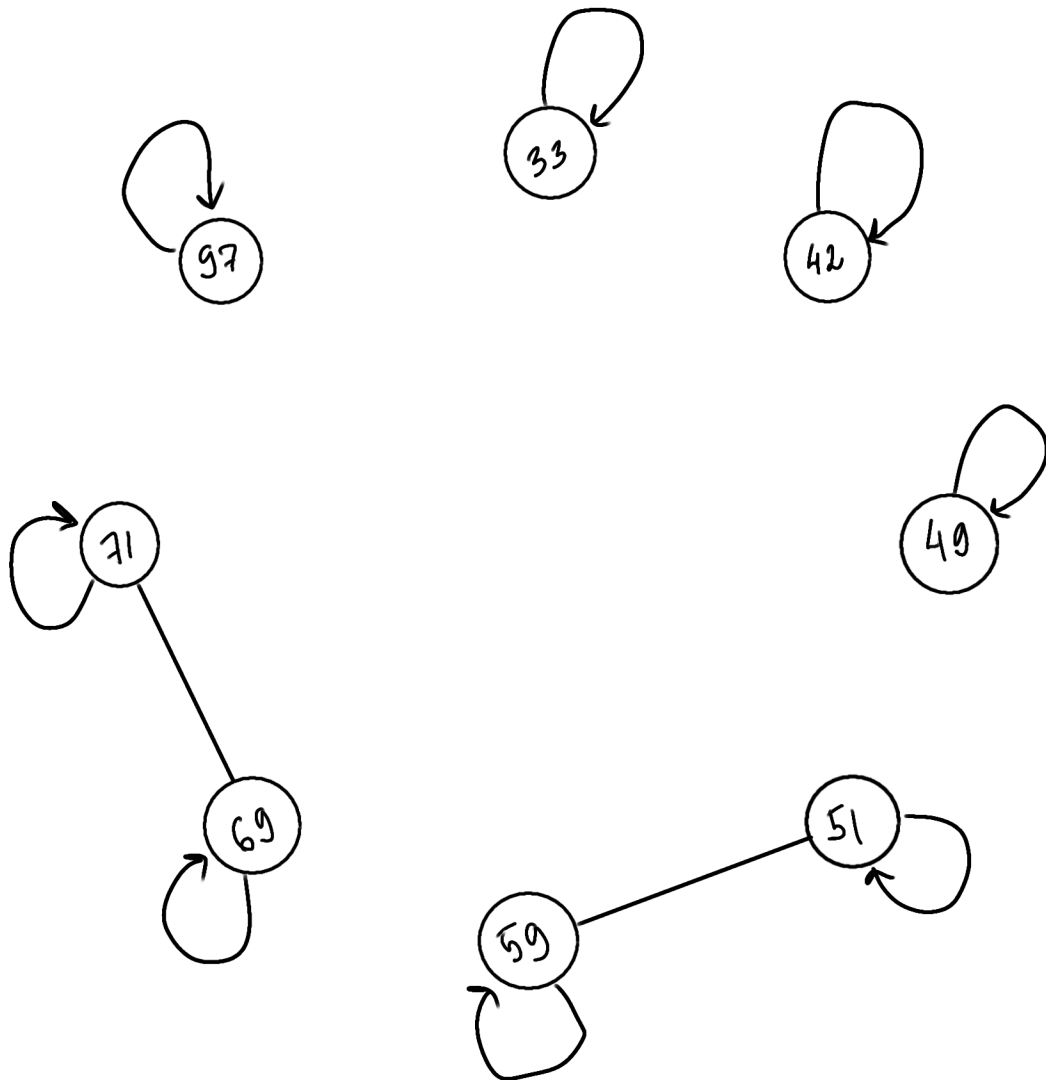
4)

$$\begin{pmatrix} & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\ 33 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 49 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 51 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 59 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 69 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 71 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 97 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



5)

$$\begin{pmatrix}
 & 33 & 42 & 49 & 51 & 59 & 69 & 71 & 97 \\
 33 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 42 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 49 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 51 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 59 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 69 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 71 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 97 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$



Задание 3. Определить, является ли это б.о. отношением эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка, строгого порядка.

Решение. 1) Данное б.о. не является никаким из перечисленных, тк арефлексивно, симметрично и нетранзитивно.

2) Б. о. является отношением частичного порядка, тк рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

3) Б. о. является отношением эквивалентности и частичного порядка, тк рефлексивно, симметрично, антисимметрично и транзитивно.

4) Б. о. является отношением эквивалентности, тк рефлексивно, симметрично и транзитивно.

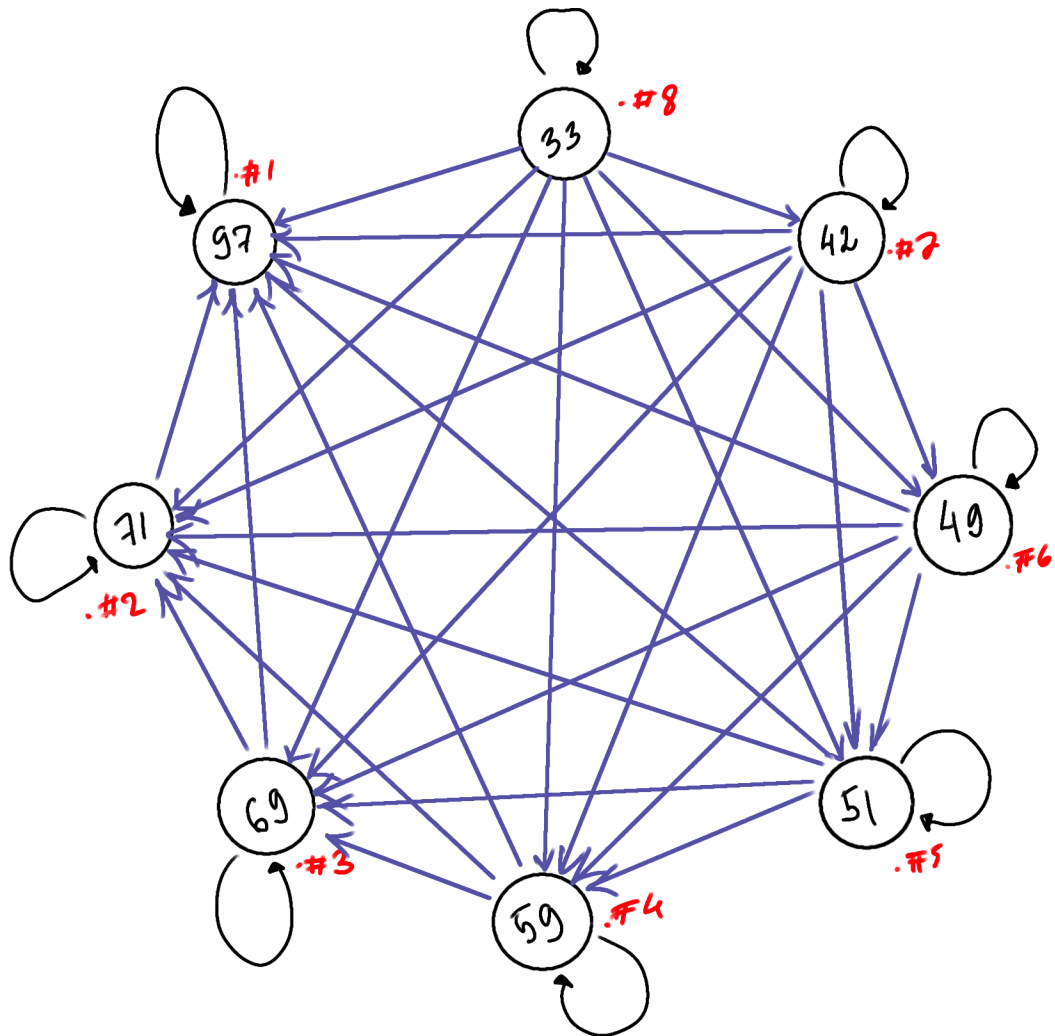
5) Б. о. является отношением эквивалентности, тк рефлексивно, симметрично и транзитивно.

5) $\{33\}\{42\}\{49\}\{51, 59\}\{69\}\{71, 97\}$

2)



3)



33, 42, 49, 51, 59, 69, 71, 97
1 2 3 4 5 6 7 8

- 4) Б. о. не является отношением частичного порядка.
- 5) Б. о. не является отношением частичного порядка.

Задание 6. Для нетранзитивных отношений построить транзитивное замыкание, используя алгоритм Уоршелла.

2)Б.о. транзитивно.
3)Б.о. транзитивно.
4)Б.о. транзитивно.
5)Б.о. транзитивно.

11