Студент: Коротков Фёдор
Группа: 2362
Вариант: 34
Дата: 16 октября 2024 г.

Математическая логика и теория алгоритмов
Индивидуальное домашнее задание №1

Дана функция $f(x,y,z) = (xyz) \vee ((y \vee x) \oplus (x \oplus z))$

Задание 1. *Постройте таблицу истинности (далее ТИ) для f(x,y,z)*

Решение.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Задание 2. *Постройте для композиции f(y, xy, $x \vee y$) ТИ и формулу, сделав подстановку в исходную и упростив её помощью алгебраических преобразований (далее АП) до ДНФ. Убедитесь, что ответы совпадают.*

Решение.

x	y	z	f(y, xy, $x \vee y$)	$y \vee x\bar{y}$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$f(y,xy,x \vee y) = (y(xy)(x \vee y) \vee ((xy \vee y) \oplus (y \oplus (x \vee y))) = xy \vee (y \oplus (y(x \vee y) \vee \bar{x}\bar{y})) = xy \vee (y \oplus (y \vee \bar{x}\bar{y})) = xy \vee (y \vee \bar{y}(x \vee y)) = xy \vee y \vee x\bar{y} = y \vee x\bar{y}$

Задание 3. *Постройте СДНФ для f(x, y, z) двумя способами: при помощи ТИ и при помощи АП исходной формулы.*

Решение.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ: $f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xyz$

$f = xyz \vee ((y \vee x) \oplus (x \oplus z)) = xyz \vee ((y \vee x) \oplus (x\bar{z} \vee \bar{x}z)) = xyz \vee ((x \vee y)(x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee z) \vee \bar{x}\bar{y}(x\bar{z} \vee \bar{x}z)) = xyz \vee (xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}\bar{y}z) = xz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

Задание 4. *Постройте минимальную ДНФ для f(x, y, z) двумя способами, один из которых — методом минимизирующих карт.*

Решение.

α_1	α_2	α_3	x^{α_1}	y^{α_2}	z^{α_3}	$x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}$	$x^{\alpha_1}z^{\alpha_3}$	$y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$	$x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}$
0	0	0	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
0	0	1	$\bar{x}$	$\bar{y}$	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$
0	1	0	$\bar{x}$	y	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
0	1	1	$\bar{x}$	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$
1	0	0	x	$\bar{y}$	$\bar{z}$	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
1	0	1	x	$\bar{y}$	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$
1	1	0	x	y	$\bar{z}$	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$
1	1	1	x	y	z	xy	xz	yz	xyz

x \ yz	00	01	11	10
0	0	**1**	0	1
1	0	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{1}$	0

$f = xz \vee \bar{y}z$

Задание 5. *Постройте СКНФ для f(x, y, z) двумя способами: при помощи ТИ и при помощи АП исходной формулы.*

Решение.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

СКНФ: $f = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

$= xyz \vee ((x \vee y) \oplus (x \oplus z)) = (x \vee y) \oplus (x \oplus z \vee xyz) \oplus xyz = (x \vee y) \oplus x \oplus z = xy \oplus x \oplus y \oplus x \oplus z = \bar{x}y \oplus z = (\bar{x}y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)$

Задание 6. *Постройте полином Жегалкина для f(x, y, z) двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и при помощи АП исходной формулы.*

Решение.

$$\begin{cases} f(0{,}0{,}0) = \alpha_0 = 0 \\ f(0{,}0{,}1) = \alpha_0 \oplus \alpha_3 = 1 \\ f(0{,}1{,}0) = \alpha_0 \oplus \alpha_2 = 1 \\ f(0{,}1{,}1) = \alpha_0 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{23} = 0 \\ f(1{,}0{,}0) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 = 0 \\ f(1{,}0{,}1) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{13} = 1 \\ f(1{,}1{,}0) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_{12} = 0 \\ f(1{,}1{,}1) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3 \oplus \alpha_{12} \oplus \alpha_{13} \oplus \alpha_{23} \oplus \alpha_{123} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_{12} = 1 \\ \alpha_{13} = 0 \\ \alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{123} = 0 \end{cases}$$

$f = xyz \vee ((x \vee y) \oplus (x \oplus z)) = (x \vee y) \oplus (x \oplus z \vee xyz) \oplus xyz = (x \vee y) \oplus x \oplus z = xy \oplus x \oplus y \oplus x \oplus z = y \oplus z \oplus xy$

Задание 7. *Постройте ТИ для* $f^*(x,y,z)$.

Решение.

x	y	z	f^*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Задание 8. *Постройте полином Жегалкина для* $f^*(x,y,z)$ *любым способом.*

Решение.

x	**y**	**z**	f^*	полином Жегалкина
0	0	0	0	-
0	0	1	1	$(x \oplus 1)(y \oplus 1)z$
0	1	0	0	-
0	1	1	1	$(x \oplus 1)yz$
1	0	0	1	$x(y \oplus 1)(z \oplus 1)$
1	0	1	0	-
1	1	0	0	-
1	1	1	1	xyz

$f = (x \oplus 1)(y \oplus 1)z \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)(z \oplus 1) \oplus xyz = x \oplus z \oplus xy$

Задание 9. *Проверьте полноту системы булевых функций f(x, y, z) и* $\bar{f}(x,y,z)$.

Решение.

	T_0	T_1	L	M	S
$f(x,y,z)$	✓	✓	×	×	×
$\overline{f}(x,y,z)$	×	×	×	×	×

$\Rightarrow$ f и $\bar{f}$ образуют полный набор функций согласно теореме Поста

Задание 10. *Выразите при помощи композиции функций из предыдущего пункта: 1,0,* $\bar{x}$, xy.

Решение.

- $f \notin S \Leftrightarrow \exists \alpha, \overline{\alpha} \in \mathbb{B}^3 : f(\alpha) = f(\overline{\alpha})$
  $f(0,0,1) = f(1,0,0) = 1 \Rightarrow f(x,x,\overline{x}) = 1$; $\overline{f}(x,x,\overline{x}) = 0$
- $\overline{x} = \overline{f}(x,x,x)$, т.к. $\overline{f}$(0,0,0) $= 1$ и $\overline{f}(1,1,1) = 0$
- $f(x,y,z) = y \oplus z \oplus xy \Rightarrow f(x,y,y) = y \oplus y \oplus xy = xy$