

Математическая логика и теория алгоритмов

Индивидуальное домашнее задание №1

Дана функция $f(x, y, z) = ((y \oplus z) \vee x)((x \oplus z) \vee xy)$.

Задание 1. Построить таблицу истинности для $f(x, y, z)$

Решение.

x	y	z	$y \oplus z$	$(y \oplus z) \vee x$	$x \oplus z$	xy	$(x \oplus z) \vee xy$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

Задание 2. Построить таблицу истинности для $f(x, xy, x \vee y)$ и формулу, упростив ее до ДНФ

Решение.

x	y	z	$xy \oplus (x \vee y)$	$(xy \oplus (x \vee y)) \vee x$	$x \oplus (x \vee y)$	xy	$(x \oplus (x \vee y)) \vee xy$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

$$f(x, xy, x \vee y) = ((xy \oplus (x \vee y)) \vee x)((x \oplus (x \vee y)) \vee xy) = *$$

$$(xy \oplus (x \vee y)) \vee x = (\overline{xy}(x \vee y) \vee xy\overline{(x \vee y)}) \vee x = ((\overline{x} \vee \overline{y})(x \vee y) \vee xy\overline{xy}) \vee x = (\overline{y}x \vee \overline{x}y) \vee x = x \vee \overline{x}y$$

$$(\overline{x}(x \vee y) \vee x\overline{(x \vee y)}) \vee xy = \overline{x}y \vee xy = y$$

$$* = (x \vee \overline{x}y)y = xy \vee \overline{x}y = y(x \vee \overline{x}) = y$$

Задание 3. Построить СДНФ для $f(x, y, z)$ с помощью ТИ и АП.

Решение.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Из ТИ выбираем строки, где $f = 1$, т.е. 2, 5, 7 и 8 строки.

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

С помощью АП:

$$f(x, y, z) = ((y \oplus z) \vee x)((x \oplus z) \vee xy) = (\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x)(\bar{x}z \vee x\bar{z} \vee xy) = \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{z} \vee xy = \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz$$

Задание 4. Построить минимальную ДНФ для $f(x, y, z)$ двумя способами, один из которых это метод минимизирующих карт.

Решение.

Метод минимизирующих карт:

\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$
\bar{x}	y	\bar{z}	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
\bar{x}	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$
x	\bar{y}	\bar{z}	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
x	\bar{y}	z	$x\bar{y}$	xz	$\bar{y}z$	$x\bar{y}z$
x	y	\bar{z}	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz

Вычеркнем строки, в которых $f = 0$

\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	z	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}z$	$\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}z$
\bar{x}	y	\bar{z}	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{z}$	$y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
\bar{x}	y	z	$\bar{x}y$	$\bar{x}z$	yz	$\bar{x}yz$
x	\bar{y}	\bar{z}	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
x	\bar{y}	\bar{z}	$x\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z}$
x	y	\bar{z}	xy	$x\bar{z}$	$y\bar{z}$	$xy\bar{z}$
x	y	z	xy	xz	yz	xyz

Вычеркнем значения, которые уже были вычеркнуты ранее и из оставшихся, в каждой строке, выберем минимальное.

\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	xy	$x\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$xy\bar{z}$
\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}	\mathbf{xy}	$\bar{x}\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	xyz

Мин. ДНФ: $f(x, y, z) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

Метод карт Карно:

$\begin{array}{c} \backslash \\ \text{x} \end{array} \begin{array}{c} \text{yz} \end{array}$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	1	1

Конъюнкция: xy

$\begin{array}{c} \backslash \\ \text{x} \end{array} \begin{array}{c} \text{yz} \end{array}$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	1	1

Конъюнкция: $x\bar{z}$

$\begin{array}{c} \backslash \\ \text{x} \end{array} \begin{array}{c} \text{yz} \end{array}$	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	0	1	1

Конъюнкция: $\bar{x}\bar{y}z$

Мин. ДНФ: $f(x, y, z) = xy \vee x\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z$

Задание 5. Построить СКНФ для $f(x, y, z)$ при помощи ТИ и АП исходной формулы.

Решение.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Из ТИ выбираем строки, где $f = 0$, т.е. 1, 3, 4 и 6 строки.

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})$$

С помощью АП:

$$f(x, y, z) = ((y \oplus z) \vee x)((x \oplus z) \vee xy) = (\bar{y}z \vee y\bar{z} \vee x)(\bar{x}z \vee x\bar{z} \vee xy) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)$$

Задание 6. Построить полином Жегалкина для $f(x, y, z)$ методом неопределённых коэффициентов и при помощи АП исходной формулы.

Решение.

Методом неопределённых коэффициентов: $P_f = a_0 \oplus a_1x \oplus a_2y \oplus a_3z \oplus a_{12}xy \oplus a_{13}xz \oplus a_{23}yz \oplus a_{123}xyz$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$a_2 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$a_3 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$a_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$a_{13} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$a_{23} = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$a_{123} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_f = x \oplus z \oplus yz$$

При помощи АП:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= ((y \oplus z) \vee x)((x \oplus z) \vee xy) = ((y \oplus z)x \oplus x \oplus (y \oplus z))((x \oplus z)xy \oplus (x \oplus z) \oplus xy) = \\ &= (yx \oplus zx \oplus x \oplus y \oplus z)(xy \oplus xyz \oplus x \oplus z \oplus xy) = \\ &= xy \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \oplus xyz \oplus x \oplus xz \oplus xy \oplus xy \oplus xyz \oplus xy \oplus yz \oplus \\ &xy \oplus xyz \oplus xyz \oplus xz \oplus z \oplus xyz = x \oplus z \oplus yz \end{aligned}$$

Задание 7. Построить таблицу истинности для $f^*(x, y, z)$.

Решение.

$$f(x, y, z) = ((y \oplus z) \vee x)((x \oplus z) \vee xy)$$

$$f^*(x, y, z) = (y \Leftrightarrow z)x \vee (x \Leftrightarrow z) \wedge (x \vee y)$$

x	y	z	f	f^*
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Задание 8. Построить полином Жегалкина для $f^*(x, y, z)$.

Решение.

$$f^*(x, y, z) = (y \Leftrightarrow z)x \vee (x \Leftrightarrow z) \wedge (x \vee y)$$

x	y	z	f^*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$a_2 = 0 \oplus 1 = 1$$

$$a_3 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$a_{12} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$a_{13} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$a_{23} = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$a_{123} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_{f^*} = x \oplus y \oplus yz$$

Задание 9. Проверить полноту системы булевых функций $f(x, y, z)\bar{f}(x, y, z)$.

Решение.

x	y	z	f	\bar{f}
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

	f	\bar{f}
T_0	+	-
T_1	+	-
L	-	-
S	-	-
M	-	-

- f и \bar{f} не линейны, т.к. $\deg(P_f) > 1$ и $\deg(P_{\bar{f}}) > 1$
- f и \bar{f} не самодвойственны, т.к. столбцы их значений не кососимметричны
- f не монотонна, т.к. $f(0, 1, 1) = 0 < f(0, 0, 1) = 1$
- \bar{f} не монотонна, т.к. $f(1, 1, 1) = 0 < f(0, 0, 0) = 1$

Система является полной

Задание 10. Выразить при помощи композиции функций из предыдущего пункта: 1 , 0 , \bar{x} , xy .

Решение.

- $f \notin S \Leftrightarrow \exists \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{B}^3 : f(\alpha) = f(\bar{\alpha})$
 $f(0, 0, 1) = f(1, 0, 0) = 1 \Rightarrow f(x, x, \bar{x}) = 1; \bar{f}(x, x, \bar{x}) = 0$
- $\bar{x} = \bar{f}(x, x, x)$, т.к. $\bar{f}(0, 0, 0) = 1$ и $\bar{f}(1, 1, 1) = 0$
- $f(x, y, z) = x \oplus z \oplus yz \Rightarrow f(0, y, x) = x \oplus yx = x\bar{y} \Rightarrow f(0, \bar{y}, x) = xy \Rightarrow f(\bar{f}(x, x, \bar{x}), \bar{y}, x) = xy$