Студент: Карабанов Егор
Группа: 2362
Вариант: 4
Дата: 17 декабря 2024 г.

Математическая логика и теория алгоритмов

Индивидуальное домашнее задание №2

Задание 1. *Найдите резольвенты первого порядка следующего набора дизъюнктов* $\overline{A} \vee \overline{B} \vee D \vee E, \overline{A} \vee B \vee C \vee D, B \vee C \vee \overline{E}, B \vee \overline{D}$

Решение.
$\alpha_1 := \overline{A} \vee \overline{B} \vee D \vee E$
$\alpha_2 := \overline{A} \vee B \vee C \vee D$
$\alpha_3 := B \vee C \vee \overline{E}$
$\alpha_4 := B \vee \overline{D}$
$Res(\alpha_1, \alpha_2) = \overline{A} \vee C \vee D \vee E$
$Res(\alpha_1, \alpha_3) = \overline{A} \vee D \vee C$
$Res(\alpha_1, \alpha_4) = \overline{A} \vee E$
$Res(\alpha_2, \alpha_3) = \overline{A} \vee B \vee C \vee D \vee \overline{E}$
$Res(\alpha_2, \alpha_4) = \overline{A} \vee B \vee C$
$Res(\alpha_3, \alpha_4) = B \vee C \vee \overline{D} \vee \overline{E}$

Задание 2. *Приведите данную формулу к ПНФ:* $\overline{\overline{\forall x Q(x,x,x)} \equiv \forall y Q(y,y,c)}$

Решение.
$\overline{\overline{\forall x Q(x,x,x)} \equiv \forall y Q(y,y,c)} = (\overline{\overline{\forall x Q(x,x,x)} \to \forall y Q(y,y,c)) \cdot (\forall y Q(y,y,c) \to \overline{\forall x Q(x,x,x)}}) =$
$= \overline{(\forall x Q(x,x,x) \vee \forall y Q(y,y,c)) \cdot (\overline{\forall y Q(y,y,c)} \vee \overline{\forall x Q(x,x,x)})} =$
$= (\exists x \overline{Q(x,x,x)} \cdot \exists y \overline{Q(y,y,c)}) \vee (\forall y Q(y,y,c) \cdot \forall x Q(x,x,x)) =$
$= \exists x \exists y (\overline{Q(x,x,x)} \cdot \overline{Q(y,y,c)}) \vee \forall y \forall x (Q(y,y,c) \cdot Q(x,x,x)) =$
$= \exists x \exists y \forall a \forall b [(\overline{Q(x,x,x)} \cdot \overline{Q(y,y,c)}) \vee (Q(a,a,c) \cdot Q(b,b,b))] =$

Задание 3. *Приведите данную формулу к СНФ:*
$\exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t,u,x) \wedge Q(z)) \vee P(y))$

Решение.
$\exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t,u,x) \wedge Q(z)) \vee P(y)) = \exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t,u,x) \vee P(y)) \wedge (Q(z) \vee P(y))) =$
$= \{x := c; z := f(y); u := g(y,t)\} = \forall y \forall t ((R(t, g(y,t), c) \vee P(y)) \wedge (Q(f(y)) \vee P(y)))$

Задание 4. *Унифицируйте данные формулы:*
$Q(f(h(y)), h(r(g(y))), h(h(r(u))), q(q(c,a,b), t, g(y)), h(p(c)))$
$Q(f(h(b)), h(r(z)), h(h(r(\psi(a)))), q(q(c,a,b), s(x), z), h(x))$

Решение.
$b = y$
$z = g(y)$
$u = \psi(a)$
$x = p(c) => s(x) = s(p(c))$
$t = s(p(c))$
Унификатор для данных предикатов:
$Q(f(h(y)), h(r(g(y))), h(h(r(\psi(a)))), q(q(c,a,b), s(p(c)), g(y)), h(p(c)))$

Задание 5. *Придумайте интерпретацию, для которой данная формула а) верна; б) неверна; или докажите, что это невозможно:*
$(Q(a,b,b) \oplus \exists y P(a,y,c)) \vee \forall x \overline{(R(x) \wedge S(c))}$

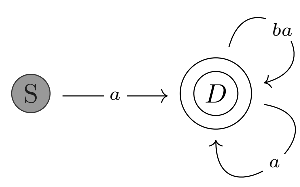
Решение.

Задание 6. *а) Опишите язык, заданный данной грамматикой. б) Удовлетворяет ли он условию однозначности ветвления?*
$A ::= s|sAA$

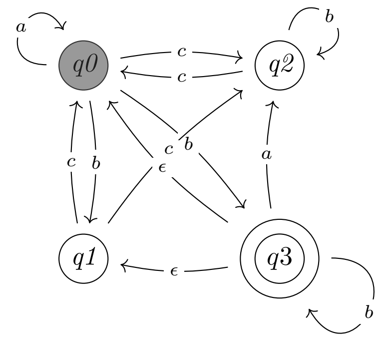
Решение.
Язык, который задает такая грамматика представляет из себя $s_i...s_k; 1 \leq i \leq k; k$ - нечетное число
Язык не удовлетворяет условию однозначности по первому символу. Пусть $\alpha := s; \beta := sAA$.
Множества терминальных символов: $l(\alpha) = \{s\}; l(\beta) = \{s\}$
$l(\alpha) \cap l(\beta) \neq \emptyset \Rightarrow$ условие однозначности не выполняется

Задание 7. *Дана грамматика некоторого языка:*
$S ::= C$
$B ::= aD$
$C ::= B$
$D ::= bC|bB|aD|aS|\wedge$
Постройте (любой) конечный автомат, распознающий этот язык.

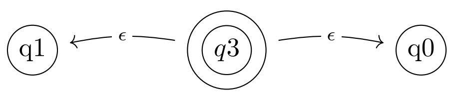
Решение.
Упростим грамматику:
$S ::= aD$
$D ::= baD|aD|\wedge$
Все слова этого языка можно описать регулярным выражением $(a^+(ba)^*a^*)^+$
Конечный автомат, распознающий этот язык:



Задание 8. *Постройте детерминированный конечный автомат, эквивалентный данному:*

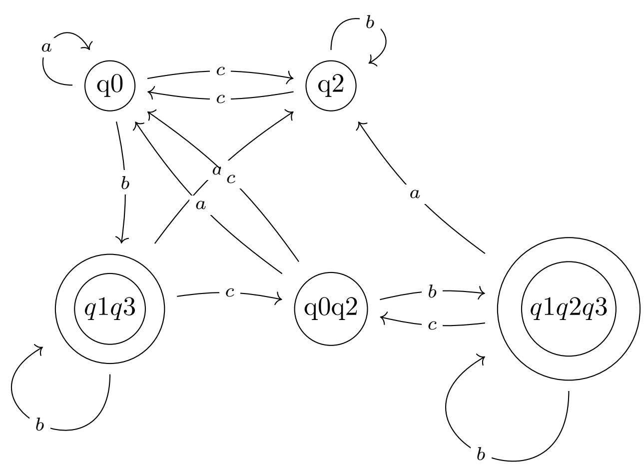


Решение.
Пустые переходы:

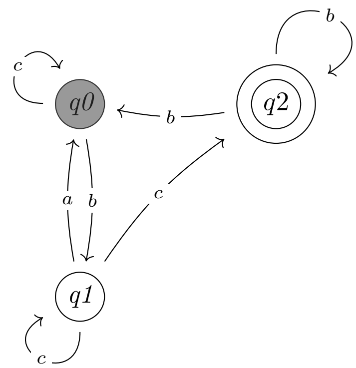


Итоговые состояния после исключения пустых переходов:

Итоговый детерминированный конечный автомат:



Задание 9. *Постройте регулярное выражение, задающее язык, распознаваемый этим автоматом.*



Решение.

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bq_1 \\ q1 = cq_1 + aq_0 + cq_2 \\ q2 = bq_2 + bq_0 + \epsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bq_1 \\ q1 = cq_1 + aq_0 + cb^*(bq_0 + \epsilon) = cq_1 + (a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bc^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q1 = c^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

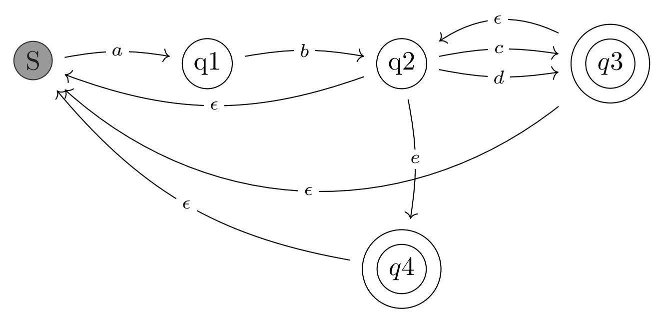
$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bc^*aq_0 + bc^*cb^*bq_0 + bc^*cb^* \\ q1 = c^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

Регулярное выражение, распознающее язык, задаваемый данным автоматом: $(c+bc^*a+bc^*cb^*b)^*bc^*cb^*$

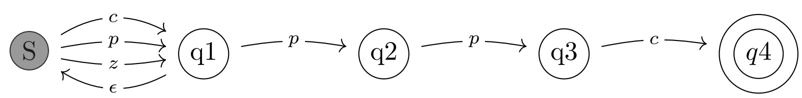
Задание 10. *Постройте автомат, распознающий язык, задаваемый этим регулярным выражением:* $((ab)^*((c + d)^* + e))^*$

Решение.



Задание 11. *Постройте детерминированный конечный автомат, распознающий слова в алфавите {c, p, z} , которые оканчиваются на ppc.*

Решение.



Задание 12. *Дана машина Тьюринга с начальным состоянием q0 и конечным состоянием q2 . Какой результат даст эта машина Тьюринга для ленты otttt? Считывающая головка находится на крайнем левом символе. Пустой символ — *.*

1)$q_1 * \to q_1 oR$
2)$q_1 o \to q_2 * L$
3)$q_0 * \to q_1 oL$
4)$q_0 o \to q_0 * L$

Решение.
$* * \hat{o}tttt* \xrightarrow{5} *\hat{*}tttt* \xrightarrow{3} \hat{*}otttt* \xrightarrow{1} o\hat{o}tttt* \xrightarrow{2} o\hat{*}tttt*$
Результатом работы машины Тьюринга будет o*tttt

Задание 13. *а) Что следующий алгоритм Маркова делает со словом xzyxy? б) Из некоторого слова после применения 1 шага данного алгоритма Маркова получилось yzyyzzy. Каким могло быть исходное слово?*

1)$yx \to zyy$
2)$zz \to zy$
3)$xxx \to zy$
4)$zyz \to xx$
5)$yyy \to zzy$

Решение.
а) $xzyxy \xrightarrow{1} xzzyyy \xrightarrow{2} xzyyyy \xrightarrow{5} xzzzyy \xrightarrow{2} xzyzyy \xrightarrow{4} xxxyy \xrightarrow{3} zyyy \xrightarrow{5} zzzy \xrightarrow{2} zyzy \xrightarrow{4} xxy$
б) $yyxzzy \xrightarrow{1} yzyyzzy$; $\quad yzzyzzy \xrightarrow{2} yzyyzzy$; $\quad yzyyzxxx \xrightarrow{3} yzyyzzy$

Задание 14. *Дан автомат с магазинной памятью. Входной алфавит {o, z}; алфавит стека {y}; q0 — начальное состояние, q1 — конечное. Правила*

1) $q_0 \epsilon o \to q_0 y$
2) $q_0 \epsilon z \to q_0 \epsilon$
3) $q_0 y o \to q_1 \epsilon$
4) $q_0 y z \to q_0 y$
5) $q_1 \epsilon o \to q_0 \epsilon$
6) $q_1 \epsilon z \to q_0 \epsilon$
7) $q_1 y o \to q_1 y$
8) $q_1 y z \to q_0 y$

Придумайте пример шестибуквенного слова в алфавите {o, z}, которое этот автомат а) распознаёт; б) не распознаёт. в) Есть ли у этого автомата бесполезные правила, которые не будут выполняться ни при каком поданном на вход автомата слове?

Решение.

а) $\hat{o}ozzoo\,[] \xrightarrow{1} o\hat{o}zzoo\,[y] \xrightarrow{3} oo\hat{z}zoo\,[] \xrightarrow{6} ooz\hat{z}oo\,[] \xrightarrow{2} oozz\hat{o}o\,[] \xrightarrow{1} oozzo\hat{o}\,[y] \xrightarrow{3}$ finish

б) $\hat{o}ozzzz\,[] \xrightarrow{1} o\hat{o}zzzz\,[y] \xrightarrow{3} oo\hat{z}zzz\,[] \xrightarrow{6} ooz\hat{z}zz\,[] \xrightarrow{2} oozz\hat{z}z\,[] \xrightarrow{2} oozzz\hat{z}\,[] \xrightarrow{2} q_0$ (q_0 не конечное состояние)

в) Никогда не будут выполнены правила 7 и 8, т.к. не существует правил, которые перевили бы автомат из состояния в состояние q1, чтобы при этом на верхушке стека оказался y.