

Математическая логика и теория алгоритмов

Индивидуальное домашнее задание №2

Задание 1. Найдите резольвенты первого порядка следующего набора дизъюнктов $\overline{A} \vee \overline{B} \vee D \vee E, \overline{A} \vee B \vee C \vee D, B \vee C \vee \overline{E}, B \vee \overline{D}$

Решение.

$$\alpha_1 := \overline{A} \vee \overline{B} \vee D \vee E$$

$$\alpha_2 := \overline{A} \vee B \vee C \vee D$$

$$\alpha_3 := B \vee C \vee \overline{E}$$

$$\alpha_4 := B \vee \overline{D}$$

$$Res(\alpha_1, \alpha_2) = \overline{A} \vee C \vee D \vee E$$

$$Res(\alpha_1, \alpha_3) = 1$$

$$Res(\alpha_1, \alpha_4) = 1$$

$$Res(\alpha_2, \alpha_3) = \overline{A} \vee B \vee C \vee D \vee \overline{E}$$

$$Res(\alpha_2, \alpha_4) = \overline{A} \vee B \vee C$$

$$Res(\alpha_3, \alpha_4) = B \vee C \vee \overline{D} \vee \overline{E}$$

Задание 2. Приведите данную формулу к ПНФ: $\overline{\forall x Q(x, x, x)} \equiv \forall y Q(y, y, c)$

Решение.

$$\begin{aligned} \overline{\forall x Q(x, x, x)} \equiv \forall y Q(y, y, c) &= \overline{(\forall x Q(x, x, x) \rightarrow \forall y Q(y, y, c)) \cdot (\forall y Q(y, y, c) \rightarrow \forall x Q(x, x, x))} = \\ &= (\overline{\forall x Q(x, x, x)} \vee \forall y Q(y, y, c)) \cdot (\overline{\forall y Q(y, y, c)} \vee \overline{\forall x Q(x, x, x)}) = \\ &= (\exists x \overline{Q(x, x, x)} \cdot \exists y Q(y, y, c)) \vee (\forall y \overline{Q(y, y, c)} \cdot \forall x \overline{Q(x, x, x)}) = \\ &= \exists x \exists y (\overline{Q(x, x, x)} \cdot Q(y, y, c)) \vee \forall y \forall x (\overline{Q(y, y, c)} \cdot \overline{Q(x, x, x)}) = \\ &= \exists x \exists y \forall a \forall b [(\overline{Q(x, x, x)} \cdot Q(y, y, c)) \vee (Q(a, a, c) \cdot Q(b, b, b))] = \end{aligned}$$

Задание 3. Приведите данную формулу к СНФ:

$$\exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t, u, x) \wedge Q(z)) \vee P(y))$$

Решение.

$$\begin{aligned} \exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t, u, x) \wedge Q(z)) \vee P(y)) &= \exists x \forall y \exists z \forall t \exists u ((R(t, u, x) \vee P(y)) \wedge (Q(z) \vee P(y))) = \\ &= \{x := c; z := f(y); u := g(y, t)\} = \forall y \forall t ((R(t, g(y, t), c) \vee P(y)) \wedge (Q(f(y)) \vee P(y))) \end{aligned}$$

Задание 4. Унифицируйте данные формулы:

$$Q(f(h(y)), h(r(g(y))), h(h(r(u))), q(q(c, a, b), t, g(y)), h(p(c)))$$

$$Q(f(h(b)), h(r(z)), h(h(r(\psi(a)))), q(q(c, a, b), s(x), z), h(x))$$

Решение.

$$b = y$$

$$z = g(y)$$

$$u = \psi(a)$$

$$x = p(c) \Rightarrow s(x) = s(p(c))$$

$$t = s(p(c))$$

Унификатор для данных предикатов:

$$Q(f(h(y)), h(r(g(y))), h(h(r(\psi(a)))), q(q(c, a, b), s(p(c)), g(y)), h(p(c)))$$

Задание 5. Придумайте интерпретацию, для которой данная формула а) верна; б) неверна; или докажите, что это невозможно:

$$(Q(a, b, b) \oplus \exists y P(a, y, c)) \vee \forall x (R(x) \wedge S(c))$$

Решение.

Задание 6. а) Опишите язык, заданный данной грамматикой. б) Удовлетворяет ли он условию однозначности ветвления?

$$A ::= s|sAA$$

Решение.

Язык, который задает такая грамматика представляет из себя $s_i \dots s_k; 1 \leq i \leq k; k$ - нечетное число

Язык не удовлетворяет условию однозначности по первому символу. Пусть $\alpha := s; \beta := sAA$.

Множества терминальных символов: $l(\alpha) = \{s\}; l(\beta) = \{s\}$

$l(\alpha) \cap l(\beta) \neq \emptyset \Rightarrow$ условие однозначности не выполняется

Задание 7. Дана грамматика некоторого языка:

$$S ::= C$$

$$B ::= aD$$

$$C ::= B$$

$$D ::= bC|bB|aD|aS| \wedge$$

Постройте (любой) конечный автомат, распознающий этот язык.

Решение.

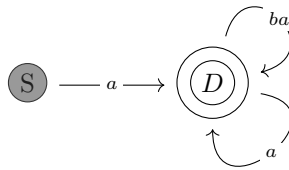
Упростим грамматику:

$$S ::= aD$$

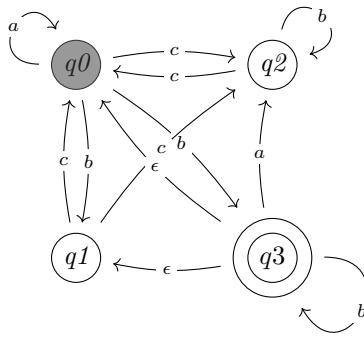
$$D ::= baD|aD| \wedge$$

Все слова этого языка можно описать регулярным выражением $(a^+(ba)^*a^+)^+$

Конечный автомат, распознающий этот язык:



Задание 8. Постройте детерминированный конечный автомат, эквивалентный данному:



Решение.

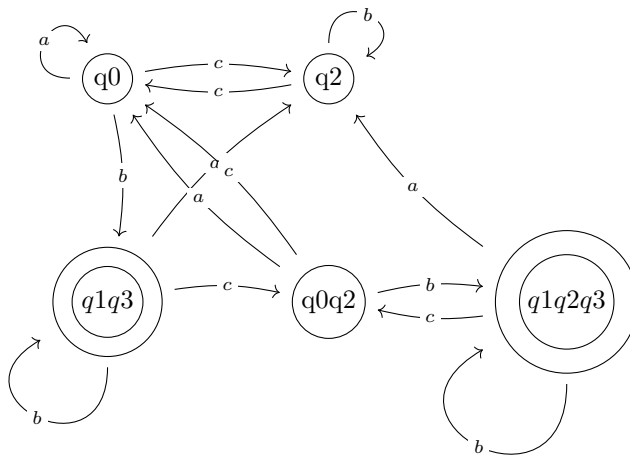
Пустые переходы:



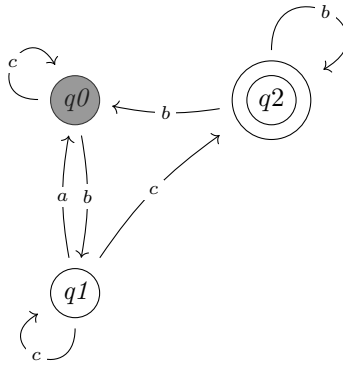
Итоговые состояния после исключения пустых переходов:



Итоговый детерминированный конечный автомат:



Задание 9. Постройте регулярное выражение, задающее язык, распознаваемый этим автоматом.



Решение.

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bq_1 \\ q_1 = cq_1 + aq_0 + cq_2 \\ q_2 = bq_2 + bq_0 + \epsilon \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bq_1 \\ q_1 = cq_1 + aq_0 + cb^*(bq_0 + \epsilon) = cq_1 + (a + cb^*b)q_0 + cb^* \\ q_2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

\Downarrow

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bc^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q_1 = c^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q_2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

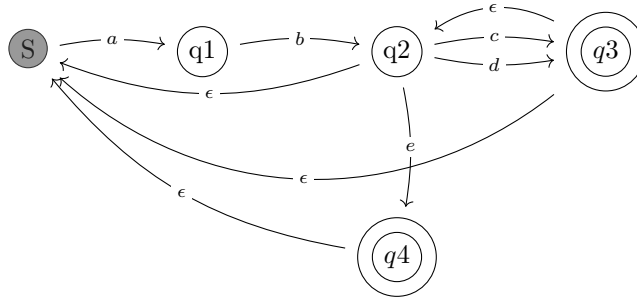
\Downarrow

$$\begin{cases} q_0 = cq_0 + bc^*aq_0 + bc^*cb^*bq_0 + bc^*cb^* \\ q_1 = c^*((a + cb^*b)q_0 + cb^*) \\ q_2 = b^*(bq_0 + \epsilon) \end{cases}$$

Регулярное выражение, распознающее язык, задаваемый данным автоматом: $(c+bc^*a+bc^*cb^*b)^*bc^*cb^*$

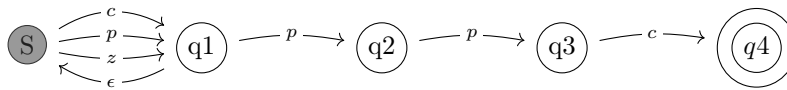
Задание 10. Постройте автомат, распознающий язык, задаваемый этим регулярным выражением: $((ab)^*((c+d)^*+e))^*$

Решение.



Задание 11. Постройте детерминированный конечный автомат, распознающий слова в алфавите $\{c, p, z\}$, которые оканчиваются на ppc .

Решение.



Задание 12. Дана машина Тьюринга с начальным состоянием q_0 и конечным состоянием q_2 . Какой результат даст эта машина Тьюринга для ленты $otttt$? Считывающая головка находится на крайнем левом символе. Пустой символ — $*$.

- 1) $q_1 * \rightarrow q_1 o R$
- 2) $q_1 o \rightarrow q_2 * L$
- 3) $q_0 * \rightarrow q_1 o L$
- 4) $q_0 o \rightarrow q_0 * L$

Решение.

$**\hat{o}tttt \xrightarrow{4} ** * tttt \xrightarrow{3} *\hat{o} * tttt \xrightarrow{1} o\hat{o} * tttt \xrightarrow{2} \hat{o} * tttt$

Результатом работы машины Тьюринга будет $o**tttt$

Задание 13. а) Что следующий алгоритм Маркова делает со словом $xzuxy$? б) Из некоторого слова после применения 1 шага данного алгоритма Маркова получилось $yzuyzzy$. Каким могло быть исходное слово?

- 1) $yx \rightarrow zu$
- 2) $zz \rightarrow zy$
- 3) $xx \rightarrow zu$
- 4) $yz \rightarrow xx$
- 5) $uyu \rightarrow zzy$

Решение.

а) $xzuxy \xrightarrow{1} xzzuyu \xrightarrow{2} xzyuyu \xrightarrow{5} xzzzyu \xrightarrow{2} xzyzyu \xrightarrow{4} xxxyu \xrightarrow{3} zuyu \xrightarrow{5} zzzzy \xrightarrow{2} zyzy \xrightarrow{4} xxy$

б) $yu xzzy \xrightarrow{1} yzuyzzy$; $yzzyzzy \xrightarrow{2} yzyuzzy$; $yzyuzxxx \xrightarrow{3} yzyuzzy$

Задание 14. Дан автомат с магазинной памятью. Входной алфавит $\{o, z\}$; алфавит стека $\{y\}$; q_0 — начальное состояние, q_1 — конечное. Правила

- 1) $q_0 o \rightarrow q_0 y$
- 2) $q_0 \epsilon z \rightarrow q_0 \epsilon$
- 3) $q_0 y o \rightarrow q_1 \epsilon$
- 4) $q_0 y z \rightarrow q_0 y$
- 5) $q_1 \epsilon o \rightarrow q_0 \epsilon$
- 6) $q_1 \epsilon z \rightarrow q_0 \epsilon$
- 7) $q_1 y o \rightarrow q_1 y$
- 8) $q_1 y z \rightarrow q_0 y$

Придумайте пример шестибуквенного слова в алфавите $\{o, z\}$, которое этот автомат а) распознаёт; б) не распознаёт. в) Есть ли у этого автомата бесполезные правила, которые не будут выполняться ни при каком поданном на вход автомата слове?

Решение.

а) $\hat{o}ozzo\hat{o} \xrightarrow{1} o\hat{o}zzzo[y] \xrightarrow{3} oo\hat{z}zoo \xrightarrow{6} ooz\hat{z}oo \xrightarrow{2} oozz\hat{o}o \xrightarrow{1} oozzo\hat{o}[y] \xrightarrow{3} \text{finish}$

б) $\hat{o}ozzzz \xrightarrow{1} o\hat{o}zzzz[y] \xrightarrow{3} oo\hat{z}zzz \xrightarrow{6} ooz\hat{z}zz \xrightarrow{2} oozz\hat{z}z \xrightarrow{2} oozzz\hat{z} \xrightarrow{2} q_0$ (q_0 не конечное состояние)

в) Никогда не будут выполнены правила 7 и 8, т.к. не существует правил, которые перевели бы автомат из состояния в состояние q_1 , чтобы при этом на верхушке стека оказался y .