

Отчеты студентки 491 группы Апетян Арины Артуровны по предмету "Методы вычислений"

Решение жестких систем дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Решить жесткую систему ДУ первого порядка простейшим неявным методом Эйлера.

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Функции y, f заданы на отрезке $[a, b]$, разбитом на N промежутков.

$x_k = a + kh$, $k = 0 \dots N$ – узлы сетки; $h = \frac{b-a}{N}$ – шаг сетки.

Приближенное значение искомой функции вычисляется по формуле: $y_k \approx y(x_k)$

Граничное условие: $y(0) = y_0$

Для вычисления очередного значения y_{n+1} неявным методом Эйлера используется формула:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (2)$$

Условие данной задачи:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}y + Az + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ z' &= \frac{5}{4}y + Az + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные данные: $y(0) = 1$, $z(0) = -1$

Вывод формул

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left(\frac{1}{2}y + Az + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \\ z_{n+1} &= \frac{5}{4}y_{n+1} + Az + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \end{aligned} \quad (4)$$

Разрешаем систему относительно z , итерациями находим искомое значение:

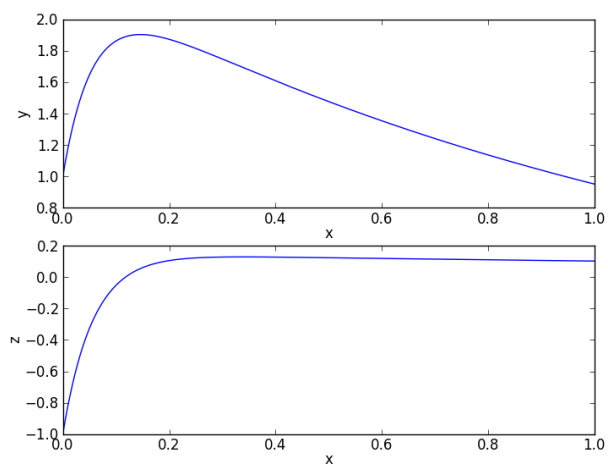
$$z_{n+1} = z_n + \frac{4(1 - \frac{h}{2})}{(4 - 2h - 4hA - 3Ah^2)hz_n\sqrt{z_n^2 + 1}} \quad (5)$$

Текст программы

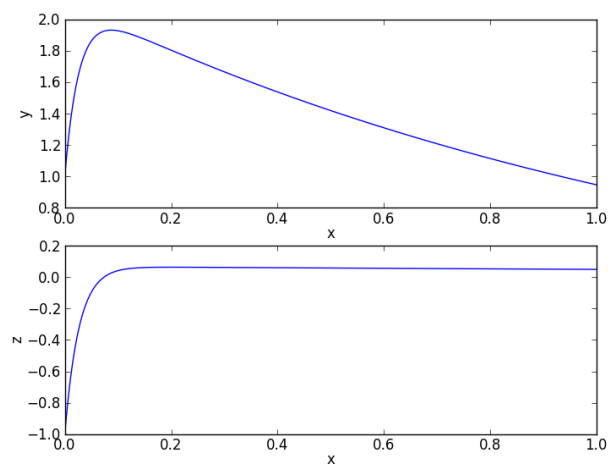
```
1 eps = 0.000001; a = 0.0; b = 1.0
AA = int(raw_input('A = '))
n1 = int(raw_input('n1 = '))
n = int(raw_input('n = '))
y = 1.0; z = -1.0; x = a
6 f = open('results', 'w+')
xx=[]; yy=[]; zz=[]
xx.append(x); yy.append(y); zz.append(z)
h = 10.0/(abs(AA)*n1)
def simple_iter(x,y,z,h):
11     tmp = 4.0*(1.0-h/2)/(4.0 - 2.0*h - 4.0*h*AA - 3.0*AA*h**2.0)*(z + 5.0*h*y
        /4.0/(1.0-h/2) + 2.0*h*x/(2.0-h)/np.sqrt(x**2.0+1.0))
        zn = 0.0; zz = tmp
        while abs(zz-zn) > eps:
            zn = zz
            zz = tmp + 4.0*(1.0-h/2)/(4.0 - 2.0*h - 4.0*h*AA - 3.0*AA*h**2.0) * h *
16         zz / np.sqrt(zz**2.0+1.0)
        return zz
if h > 0:
    for i in range(n1):
        x = x + h; z = simple_iter(x,y,z,h)
        y = 1 / (1 - h / 2.0) * ( y + h * AA * z + h * x / np.sqrt (x**2.0 +
21         1.0) )
        xx.append(x); yy.append(y); zz.append(z)
        print>>f, xx[i], ' ', yy[i], ' ', zz[i]
h = (1.0 - 10.0/abs(AA) ) / n
if h > 0:
    for i in range(n1-1,n1+n):
26         x = x + h; z = simple_iter(x,y,z,h)
        y = 1 / (1 - h / 2.0) * ( y + h * AA * z + h * x / np.sqrt (x**2.0 +
        1.0) )
        xx.append(x); yy.append(y); zz.append(z)
        print>>f, xx[i+1], ' ', yy[i+1], ' ', zz[i+1]
```

Результаты

$A = -20, N = 1000$



$A = -40, N = 1000$



$A = -60, N = 1000$

