Seminario de Investigación - Informe II

Modelos de Capa Límite Planetaria

Pablo Cárdenas Zamorano

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile

12 de julio de 2016

Resumen Según las fuerzas que actúan de manera diferencial en una parcela de aire es posible realizar distintas aproximaciones dependiendo de los mecanismos que se consideran relevantes, y así clasificar distintos tipos de capas límites. En este informe se presentan las características y ecuaciones que se usan para modelar estas capas, además de su correlación con los gradientes de temperatura y la manera en que induce circulación en estas.

1. Leyes de Conservación

Antes de iniciar el estudio de la capa límite atmosférica (o planetaria) como tal, es necesario describir las leyes naturales que rigen el comportamiento de un fluido y el significado físico de cada término en la ecuación. Las leyes con las que se trabaja son: conservación de masa, momentum y energía.

1.1. Masa

La cantidad de aire que se encuentra en la atmósfera se mantiene constante[1], luego la conservación de masa queda definida como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0 \tag{1}$$

Donde la derivada temporal corresponde al término transiente, y la divergencia corresponde a los flujos de aire por cada cara de un elemento diferencial. Si se considera constante la densidad (como es el caso de varias aproximaciones en la atmósfera), se tiene la siguiente ecuación en notación indicial:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

1.2. Momentum

El flujo de momentum que atraviesa las caras de una parcela de fluido debe ser igual a la sumatoria de las fuerzas que actuan sobre esta, se tiene (por unidad de masa):

$$\frac{D\boldsymbol{U}}{Dt} = \sum \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{3}$$

Es relevante entonces describir qué tipo de fuerzas son a las que está sometido el aire atmosférico.

1.2.1. Gradiente de Presión

La presión actúa como un potencial de movimiento, atrayendo las masas de aire a las zonas de menor presión. Además, en esta están incluidos los efectos por flotación (si se considera una atmosfera inestable, la flotación es la responsable de gran parte de la transferencia de momentum). Esta fuerza es de un orden considerable en todas las zonas de la atmósfera y por lo tanto no puede despreciarse. Se expresa como:

$$\frac{\boldsymbol{F_p}}{m} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p \tag{4}$$

1.2.2. Fuerza Gravitacional

La tierra atrae las masas de aire según la ley universal de gravitación de Newton:

$$\frac{\boldsymbol{F_g}}{m} = \boldsymbol{g}^* = -\frac{GM}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{5}$$

Se utiliza el superíndice *, para destacar que luego, debido a la rotación de la tierra se sumará un término para generar una aceleración de gravedad mas amplia.

Con respecto a la ecuación 5 se debe tener en consideración que esta gravedad puede variar considerablemente con la altura a la cual se evalúe un punto en la atmósfera y por ende suele utilizarse otra expresión en función de $\boldsymbol{g_0^*}$ que corresponde a la gravedad a nivel del mar:

$$\boldsymbol{g}^* = \frac{\boldsymbol{g_0^*}}{(1 + z/a)^2} \tag{6}$$

Donde a es el radio medio de la tierra, y z es la altura con respecto al nivel del mar.

1.2.3. Fuerzas Viscosas

Es la fuerza que hace el fluido como oposición al movimiento. Para un fluido newtoniano e incompresible se considera como:

$$\frac{F_i}{m} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{7}$$

[1]En este análisis no se consideran fuentes de masa de aire como podría ser el vapor de agua que entra a a la atmósfera debido a la evaporación de masas de agua

1.2.4. Fuerza Centrífuga

Debido a la rotación de la tierra, la superficie de esta es un marco de referencia no inercial y por lo tanto la aceleración centrípeta que se genera por el giro debe considerarse como una fuerza ficticia (centrífuga) desde un marco de referencia pegado a la tierra. Esta fuerza apunta de manera radial al centro de la tierra y por consiguiente puede agregarse un término a la gravedad, para obtener una gravedad modificada:

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}^{*} + \Omega^2 \boldsymbol{R} \tag{8}$$

Donde Ω es la frecuencia de giro de la tierra con respecto a su eje: $\Omega = 2\pi/86164$.

1.2.5. Fuerza de Coriolis

Para una partícula en movimiento con respecto a un marco de referencia en rotación, se genera otro tipo de fuerza ficticia que curva el movimiento de esta partícula, la fuerza de coriolis. Se omite el desarrollo matemático de la expresión que incluye una aproximación al considerar que la rapidez del aire es menor que la velocidad tangencial de la superficie de la tierra. La fuerza por unidad de masa se expresa para las dos componentes horizontales como:

$$\frac{dv}{dt} = -2\Omega u \sin\phi \quad ; \quad \frac{dw}{dt} = -2\Omega u \sin\phi \tag{9}$$

Donde es conveniente definir una nueva variable:

$$f = 2\Omega \sin\phi \tag{10}$$

Llamado parámetro de coriolis. ϕ es la latitud.

Ahora, según sea la situación, hay términos en la ecuación de conservación de momentum que pueden despreciarse con respecto a otros, y de esta forma nacen distintas aproximaciones a los fenómenos atmosféricos, como por ejemplo, el viento geostrófico, en donde se tiene un balance (aproximado) entre las fuerzas de coriolis y las fuerzas de presión (este es el caso del viento sobre la capa límite).

1.3. Energía

La conservación de energía queda definida por:

$$\frac{D}{Dt}\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right)\right] = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(p\boldsymbol{U}) + \rho\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{U} + \rho J \tag{11}$$

Donde se pueden separar las contribuciones hacía la energía térmica y la otra hacia la energía cinética. Se tiene:

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U}\right) = -\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}p - \rho g w \tag{12}$$

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{U} + \rho J \tag{13}$$

J es la razón de calor por unidad de masa.

2. Turbulencia Atmosférica

De manera natural, la atmósfera terrestre se comporta de manera turbulenta, generando vórtices a distintas escalas y disipando la energía en la microescala de estos, a través de la viscosidad. Las escalas características de estos vórtices puede llegar a ser tan grandes como todo el espesor de la capa límite y por lo tanto es necesario caracterizar ciertas propiedades y agregar este efecto a las ecuaciones.

2.1. Temperatura Potencial

Es conveniente definir una nueva variable para las ecuaciones de conservación, la temperatura potencial θ:

$$\theta = T\left(\frac{p_s}{p}\right)^{R/c_p} \tag{14}$$

Esta temperatura es la temperatura de un elemento diferencial de fluido si se comprime o expande adiabáticamente hacia una presión estándar p_s (generalmente 1 bar). Por lo tanto para procesos secos y adiabáticos, este valor permanece constante.

Se puede clasificar entonces de mejor forma la estabilidad atmosférica:

$$d\theta_0/dz > 0 \quad \text{Estable}$$

$$d\theta_0/dz = 0 \quad \text{Neutra}$$

$$d\theta_0/dz < 0 \quad \text{Inestable}$$

2.2. Tratamiento de la Turbulencia

Para lograr resolver la turbulencia dentro de las ecuaciones de conservación, es necesario hacer modificaciones ya que las variaciones turbulentas están muy por debajo de la escala en la cual podemos solucionar. Se trabaja con dos modificaciones:

Aproximación de Boussinesq: Si bien el aire es un flujo compresible y su densidad en la atmósfera puede llegar a variar un 10 %, en la mayoría de los casos de puede considerar despreciable ya que si expresamos esta densidad como la suma de un valor medio mas sus desviaciones, las desviaciones son solo un pequeño porcentaje del valor medio. Sin embargo los cambios de densidad influyen importantemente en las fuerzas de flotación y por lo tanto no debe despreciarse en ese aspecto. La aproximación de Boussinesq consta de considerar la densidad un valor fijo ρ_0, exepto para la ecuación de momentum vertical (donde influye la flotación).

Promedios de Reynolds: En vez de resolver las ecuaciones para los valores absolutos, se promedian las leyes de conservación y se resuelve para los valores medios. Este desarrollo introduce nuevos términos que son covarianzas de variables y físicamente representan flujos turbulentos.

Finalmente el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \left[\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right] + \bar{F}_{rx} \tag{16}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + f\bar{u} - \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right] + \bar{F}_{ry} \tag{17}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} - \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}\right] + \bar{F}_{rz} \tag{18}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{\theta}}{Dt} = -\bar{w}\frac{d\theta_0}{dz} - \left[\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z}\right] \tag{19}$$

2.3. Energía Cinética Turbulenta

La generación continua de vórtices en un régimen turbulento, es consecuencia de un ingreso permanente de energía cinética al sistema para que pueda desarrollarse de manera estacionaria. Ahora se revisará de manera preliminar las componentes de esta energía.
Trabajando con las ecuaciones (15) hasta la (19) se puede llegar a:

$$\frac{\bar{D}(\mathrm{TKE})}{Dt} = \mathrm{MP} + \mathrm{BPL} + \mathrm{TR} + \varepsilon \tag{20}$$

Donde: TKE es la energía cinética turbulenta, MP es la producción mecánica por el perfil de velocidad (y el esfuerzo de corte), BPL es la energía por los movimientos de flotación, TR corresponde a la energía por fenómenos de transporte como la presión y ε es la disipación en la microescala.
Con respecto a este punto es necesario hacer una gran observación, podemos distinguir a grandes rasgos dos tipos de turbulencia en la capa límite: una provocada por los movimientos de convección debido a la inestabilidad del aire (la superficie de la tierra calienta al aire e induce un movimiento vertical) y otra provocada por los esfuerzos de corte en la proximidad de la tierra. La turbulencia asociada a convección genera una capa mucho mas grande que la capa viscosa (debido a que el aire básicamente se desplaza hacia arriba) y los fenómenos de mezcla se ven en gran parte favorecidos por la generación de grandes vórtices. Se puede definir un número adimensional para caracterizar que efecto rige mas en la capa límite:

$$Rf = -\frac{BPL}{MP} \tag{21}$$

Corresponde al *número de flujo de Richardson*. Experimentalmente se ha observado que para valores menores a 0.25, las fuerzas viscosas pueden soportar la turbulencia asociada a la convección.

3. Aproximaciones de Capa Límite

Teniendo en consideración entonces, todo lo antes expuesto sobre las bases teóricas de las ecuaciones que modelan el movimiento del aire, se pueden encontrar distintos tipos de capas límites si consideramos o despreciamos términos en las ecuaciones.
Si se considera el flujo dentro de la capa como homogéneo y horizontal (por encima de la subcapa viscosa), la viscosidad se puede despreciar y también los flujos turbulentos horizontales. Se tiene entonces para las ecuaciones de momentum:

$$\frac{\bar{D}\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{22}$$

$$\frac{\bar{D}\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \tag{23}$$

Ahora es necesario modelar los esfuerzos viscosos. A continuación se tiene un listado de aproximaciones para diversos tipos de capas límites planetarias y sus principales características y aplicaciones.

3.1. Capa de Mezcla (Well-Mixed BL)

- Ocurre cuando una capa convectiva (inestable) se ubica bajo una capa estable
- La temperatura potencial se mantiene casi constante en esta capa y por lo tanto también el perfil de velocidad.
- Se asume que arriba de esta capa, hay viento geostrófico y por ende los flujos turbulentos varían linealmente hasta desaparecer en la altura.
- El flujo de momentum superficial se aproxima por la fórmula de arrastre aerodinámico:

$$(\overline{u'w'})_s = -C_d|\bar{\boldsymbol{U}}|\bar{u} \quad ; \quad (\overline{v'w'})_s = -C_d|\bar{\boldsymbol{U}}|\bar{v} \tag{24}$$

3.2. Teoría de Gradiente de Flujo (K Theory)

- Para capas estables o neutras el perfil de velocidad no es constante.

- Se modela el flujo de momentum turbulento como si fuera proporcional al gradiente vertical (análogo como si fuera un mecanismo de difusión).

$$\overline{u'w'} = -K_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) \quad \overline{v'w'} = -K_m \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) \tag{25}$$

$$\overline{\theta' w'} = -K_h \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}\right)$$

- Se estima el valor tanto para K_m y K_h. La aproximación mas simple consta en considerarlos constantes.
- Sirve para flujos a baja escala, ya que hay que considerar que algunos vórtices pueden ser del tamaño de la capa entera.

3.3. Hipótesis de Longitud de Mezcla

- Considera que una parcela de aire recorre una distancia característica ξ' antes de mezclarse con su entorno, de la misma manera que una partícula recorre una distancia media antes de transmitir momentum.
- Se responsabiliza a esta distancia de generar las oscilaciones en las variables de manera análoga a los mecanismos moleculares (proporcional al gradiente):

$$\theta' = -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}; \quad u' = -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad v' = -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \tag{26}$$

- Considerando una atmosfera estable, los efectos de flotación puedes despreciarse, y de la misma manera expresar:

$$w' = \xi' \left| \frac{\partial \bar{\boldsymbol{V}}}{\partial z} \right| \tag{27}$$

- Finalmente el flujo de momentum queda como:

$$-\overline{u'w'} = \overline{\xi^2} \left| \frac{\partial \bar{\boldsymbol{V}}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{28}$$

- Y se define la longitud de mezcla l como la media cuadrática de los desplazamientos de los elementos de aire y sirve como referencia de los tamaños promedios de los vórtices:

$$l \equiv (\overline{\xi^2})^{1/2} \tag{29}$$

3.4. Capa de Ekman

- Resuelve las ecuaciones del gradiente de flujo considerando K_m constantes. Se llega a:

$$u = u_g(1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z) \quad ; \quad v = u_g e^{-\gamma z} \sin \gamma z \tag{30}$$

- Con $\gamma = (f/2K_m)^{1/2}$ y u_g el viento geostrófico. Se puede determinar entonces la altura de la capa de Ekman como $D_e = \pi/\gamma$
- Si se considera que experimentalmente se tiene $D_e = 1$ [km], $f = 10^{-4}$ [s^{-1}], $K_m \approx 5$ [m^{2}s^{-1}]. Esto genera una longitud de mezcla de 30 [m], la cual es pequeña en comparación a la capa y por lo tanto podría considerarse válida la teoría de Prandtl.
- En la realidad este comportamiento no se da debido a que los flujos turbulentos de momentum no son simplemente proporcional a los gradientes, además que K_m no podría ser constante muy cerca de la superficie, donde el perfil de velocidad cambia abruptamente.

3.5. Capa Superficial

- Corresponde al 10 % mas bajo de la capa límite en donde la transferencia de momentum lineal depende solo de los vórtices turbulentos y no de las fuerzas de Coriolis o gradientes de presión.
- Se considera una velocidad de fricción u_*:

$$u_*^2 = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = (kz)^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{31}$$

- Como el análisis se realiza cerca de la superficie, es lógico expresar la longitud de mezcla como $l = kz$, donde k es la constante universal de *von Karman*
- Integrando en las ecuaciones se llega a la ley de potencia para el perfil de velocidad:

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln(z/z_0) \tag{32}$$

- z_0 corresponde a una constante de integración denominada como longitud de rugosidad y depende de las características de la superficie.

3.6. Ekman Modificado

- Es la unificación de la teoría de capa superficial con la capa de Ekman. Si bien presenta un comportamiento mas cercano a la realidad, aún se mantiene distante debido principalmente a los efectos transientes y al hecho de que hasta ahora se han despreciado las componentes verticales, las cuales son en escala comparable a las horizontales.

4. Circulación dentro de la Capa Límite

Las soluciones hasta ahora demuestran que los campos de velocidades se dirigen hacia las zonas de menor presión, generando patrones de circulación hacia un punto, lo que de manera simple implicaría que es necesario un flujo de masa vertical para que se siga cumpliendo la conservación de masa.
Este efecto es conocido como bombeo de la capa límite y genera que en la capa superficial exista un flujo vertical que

pueda compensar el momentum angular que existe sobre la capa por la circulación. Este efecto no es estacionario y debe tomarse en consideración para los modelos anteriores.

Referencias

[1] Holton, R., (1992), *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 3rd Edition.