Acople de la Ecuación de Energía para Modelo 2.5D

1. Introducción

En este documento se plantean las ecuaciones generales que gobiernan el movimiento de un fluido en el caso mas general, de esta forma, y por medio de aproximaciones se busca llegar a una forma útil en donde se pueda acoplar la ecuación de conservación de energía térmica al resto de las ecuaciones para que así se pueda resolver simultáneamente el campo de velocidad y la temperatura. Se hace el contraste también con lo actualmente utilizado en el modelo.

2. Ecuaciones Generales de Conservación

2.1. Conservación de la Masa

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\nabla \cdot (\rho \vec{u})}_{(2)} = 0 \tag{2.1}$$

- (1): Representa la acumulación de masa dentro del elemento diferencial de fluido.
- (2): Es la suma de los flujos de masa que cruzan la frontera del elemento.

2.2. Conservación del Momentum Lineal

Nace de la segunda ley de Newton:

$$\underbrace{\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)}_{(1)} = \underbrace{\rho\vec{g}}_{(2)} + \underbrace{\nabla\cdot\overline{\overline{\sigma}}}_{(3)} \tag{2.2}$$

- (1): Es la aceleración siguiendo a una partícula de fluido. El primer término es la aceleración local y el segundo corresponde a la aceleración advectiva.
- (2): Son las fuerzas de cuerpo, acá pueden estar incluidas la gravedad u otro tipo de fuerzas como las centrífugas o electromagnéticas.
- (3): Son las fuerzas de superficie que actúan sobre las caras de un elemento diferencial.

Acá $\overline{\overline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos que representa todas las fuerzas de superficie actuando sobre el elemento. Para un fluido se puede descomponer como:

$$\overline{\overline{\sigma}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$$

Donde p es la presión termodinámica y $\overline{\overline{\tau}}$ son los esfuerzos viscosos. Para un fluido newtoniano e isotrópico:

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\overline{\overline{S}} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot u)\overline{\overline{I}}$$

$\overline{\overline{S}}$ es la parte simétrica del tensor gradiente de velocidad (o tensor de deformación):

$$\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{u} + {}^{T}\nabla\vec{u}\right)$$

Luego, la ecuación general del movimiento para un fluido queda de la forma:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right) = \rho\vec{g} - \nabla p + \nabla\cdot\overline{\overline{\tau}} \tag{2.3}$$

De manera especial, esta ecuación se reduce a la ecuación de Navier-Stokes si además se considera el flujo incompresible y con viscosidad constante.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \nu\Delta\vec{u} \tag{2.4}$$

2.3. Conservación de la Energía Mecánica

Resulta de hacer una contracción simple de la ecuación 2.3 con $\vec{u}$.

$$\underbrace{\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}\right)}_{(1)} = \underbrace{\vec{u}\cdot\rho\vec{g}}_{(2)} + \underbrace{\nabla\cdot(\vec{u}\cdot\overline{\overline{\sigma}})}_{(3)} + \underbrace{p(\nabla\cdot\vec{u})}_{(4)} - \underbrace{\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{S}}}_{(5)} \tag{2.5}$$

- (1): Tasa de cambio de energía cinética siguiendo a una partícula.
- (2): Trabajo de las fuerzas de cuerpo.
- (3): Trabajo de las fuerzas de superficie.
- (4): Trabajo por expansión del elemento diferencial.
- (5): Disipación de energía por la viscosidad.

2.4. Conservación de la Energía Total

Nace de la primera ley de la termodinámica. El cambio de energía total del sistema de debe al trabajo que se le aplica o al calor que recibe. La energía total del sistema consiste en la suma de la energía cinética y la energía interna.

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + C_v T\right) = \vec{u}\cdot\rho\vec{g} + \nabla\cdot(\vec{u}\cdot\overline{\overline{\sigma}}) - \nabla\cdot\vec{q} \tag{2.6}$$

El calor se relaciona con la temperatura a través de la ley de Fourier:

$$\vec{q} = -k\nabla T$$

2.5. Conservación de la Energía Térmica

Se puede crear una ecuación solo para la temperatura si se restan las ecuaciones 2.6 y 2.5.

$$\rho\frac{d}{dt}(C_v T) = \overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{S}} - p(\nabla\cdot\vec{u}) - \nabla\cdot\vec{q} \tag{2.7}$$

2.6. Ecuación de Gas Ideal

El aire en condiciones atmosféricas se comporta como un gas ideal y por lo tanto es válido:

$$p = \rho R T \tag{2.8}$$

2.7. Resumen

Las ecuaciones que modelan completamente el movimiento de un fluido son (en notación indicial por simplicidad):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial C_v T}{\partial t} + u_j\frac{\partial C_v T}{\partial x_j}\right) = \tau_{ij}S_{ij} - p\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \tag{2.11}$$

3. Aproximaciones

Para las condiciones del problema en donde no se tienen flujos supersónicos ni son relevantes las ondas de presión, además de que si la altura del dominio es lo suficientemente pequeña, es válido hacer la aproximación de Boussinesq, en donde se considera el flujo incompresible salvo para los términos de flotación.
Consideremos la forma alternativa de la ecuación 2.9:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

Utilizando la hipótesis de Boussinesq queda:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{3.1}$$

Notar que esto no significa que el flujo sea incompresible, sino que el término $\rho^{-1}(d\rho/dt)$ es despreciable con respecto a la divergencia del campo.
Para la ecuación de momentum, utilizamos la ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho_o\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho g\vec{e}_3 - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.2}$$

Para hallar la forma de la ecuación de energía térmica, consideremos preliminarmente que el término de trabajo por expansión no se hace cero (el flujo no es incompresible), en efecto, usando la relación de gas ideal se tiene:

$$p(\nabla\cdot\vec{u}) = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \approx \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p\frac{dT}{dt} = \rho(C_p - C_v)\frac{dT}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación 2.11:

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} = \tau_{ij}S_{ij} + k\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}$$

Ahora, para un flujo como el aire, donde es básicamente no viscoso (su viscosidad es muy baja) los efectos por disipación pueden despreciarse fuera de la subcapa viscosa. Entonces:

$$\rho C_p\frac{dT}{dt} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \tag{3.3}$$

3.1. Resumen

La densidad la aproximamos como:

$$\rho \approx \rho_o + \frac{\partial\rho}{\partial T}(T - T_o) = \rho_o\left[1 - \alpha(T - T_o)\right] \tag{3.4}$$

Donde α es el coeficiente de expansión volumétrica, que para un gas ideal es T^{-1} [K]
Las ecuaciones que se deben resolver ahora quedan de la forma:

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} = \frac{T - T_o}{T}g\vec{e}_3 - \frac{\nabla p}{\rho_o} + \frac{\mu}{\rho_o}\Delta\vec{u} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla T = \frac{k}{\rho_o C_p}\Delta T \tag{3.7}$$

4. Contraste con el Modelo Actual

Las ecuaciones que modela el actual modelo 2.5D son:

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u} + \frac{\nabla p}{\rho_o} - \frac{\mu}{\rho_o}\Delta\vec{u} = \alpha(T - T_o)g\vec{e}_3 \tag{4.2}$$

Donde se modela T como:

$$T = T_s\frac{\delta - z}{\delta - h(x)} \tag{4.3}$$

Algunas observaciones con respecto a este modelo:

- Debido a la falta de la ecuación de la energía, el aire si se está considerando como incompresible, lo cual no es real, en especial para el caso de los incendios.
- La ecuación de conservación de momentum tiene exactamente la misma estructura que el nuevo modelo planteado, la única diferencia radica en que el coeficiente α no puede ser constante para un flujo dentro de un campo de temperatura variable, por lo cual es necesario agregar la ley de gas ideal.
- La modelación del perfil de temperatura es bastante gruesa, si se considera que la altura δ es pequeña no se puede tener temperatura nula sobre esta, en especial si se desconoce la estratificación de la atmósfera.

4.1. Conclusiones y Proyecciones

A través del desarrollo de este documento, se pudo acoplar al ya existente sistema de ecuaciones del modelo 2.5D de predicción rápida de viento, la ecuación de conservación de energía considerando solamente la aproximación de Boussinesq y acoplando la ley de gas ideal.
El sistema final a resolver queda de la forma:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{T - T_o}{T} g\vec{e}_3 - \frac{\nabla p}{\rho_o} + \frac{\mu}{\rho_o} \Delta \vec{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{k}{\rho_o C_p} \Delta T$$

Y se resuelve simultáneamente para T y para $\vec{u}$
Con respecto al trabajo futuro se pueden mencionar los siguientes aspectos:

- El escalamiento del nuevo sistema de ecuaciones para transformarlo en un problema mas sencillo (probablemente estacionario y con aproximación de capa límite).
- La incorporación de la temperatura potencial θ a la ecuación de conservación de energía:

  $$\theta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/C_p}$$

  En meteorología, esta relación es ampliamente usada debido a que tiene directa relación con la estratificación de la atmósfera. Sin embargo, debido al planteamiento del problema basta calcularlo como una variable secundaria.