Adimensionalización y Reescalamiento de Ecuaciones Para Modelo 2.5D

1. Resumen

Para poder definir un método de Elementos Finitos que resuelva de manera rápida las leyes de conservación para un flujo de aire en dominios delgados, se procede a realizar una adimensionalización, un análisis asintótico y un reescalamiento de las leyes de conservación. Se compara el resultado obtenido para el modelo anterior con el modelo propuesto. La diferencia radica principalmente en que el coeficiente α de expansión volumétrica ya no se considera constante, ya que el análisis asintótico a la ecuación de energía, justifica el perfil lineal en la temperatura.

2. Obtención de Ecuaciones para el Modelo Anterior

Recordando las ecuaciones para el modelo 2.5D:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \alpha (T - T_o) g \vec{e}_3 - \frac{\nabla p}{\rho_o} + \frac{\mu_o}{\rho_o} \Delta \vec{u} \tag{2.2}$$

Donde T es un perfil de temperaturas que se asume y se resuelve para $\vec{u}$.

2.1. Adimensionalización

Se realiza una adimensionalización estándar utilizando el largo del dominio L como longitud característica y U el viento meteorológico como velocidad característica. En específico:

$$\vec{u}^* = \frac{\vec{u}}{U} \quad ; \quad \nabla^* = \frac{1}{L}\nabla \quad ; \quad t^* = \frac{Ut}{L} \quad ; \quad p^* = \frac{p}{\rho_o U^2} \quad ; \quad T^* = \frac{T - T_o}{T_o} \tag{2.3}$$

Aplicando la adimensionalización al modelo, y eliminando los *, se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \vec{u} = \frac{L \alpha g T_o}{U^2} T \vec{e}_3 \tag{2.5}$$

Donde el número de Reynolds se define:

$$\mathrm{Re} = \frac{L U \rho_o}{\mu_o} \equiv \frac{LU}{\nu} \tag{2.6}$$

2.2. Análisis Asintótico

Definimos el dominio delgado como:

$$D = \{(x, z) : x \in L^2, h(x) < z < \delta\} \tag{2.7}$$

$h(x)$ representa la complejidad del terreno.
δ es la razón entre el alto y el largo del dominio (notar que es adimensional). Para este caso:

$$\delta \ll 1 \tag{2.8}$$

En el dominio entonces, se cumple para las coordenadas:

$$x \sim 1 \quad ; \quad z \sim \delta \tag{2.9}$$

Lo que implica:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial y} \sim 1 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{\delta} \tag{2.10}$$

Utilizamos ahora la ecuación de conservación de masa adimensionalizada.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.11}$$

La cual debe cumplir en todo el dominio y por lo tanto no es físico despreciar términos. Esto obliga:

$$u \sim v \sim 1 \quad ; \quad w \sim \delta \tag{2.12}$$

Para la ecuación de conservación del momentum, analizamos el operador que se aplica a la velocidad:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\right) \vec{u}$$

Realizamos un análisis de órdenes de magnitud para cada término:

- $\partial_t \sim 1$ para un tiempo adimensional adecuado $t \sim 1$.
- $\vec{u} = (u, v, w) \sim (1, 1, \delta)$ y $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \sim (1, 1, 1/\delta)$, por lo tanto el operador $\vec{u} \cdot \nabla \sim 1$
- $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy} + \partial^2_{zz}$. Considerando la ecuación 2.10 es fácil notar que $\Delta \sim \partial^2_{zz} \sim 1/\delta^2$

Notar que acá también debemos restringir que:

$$\delta^2 \mathrm{Re} \ll 1 \tag{2.13}$$

Debido a que, de otra manera, la aproximación no se cumpliría[1]. Hablamos de un viento moderado. Finalmente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\right) \vec{u} \sim -\frac{1}{\mathrm{Re}} \partial_{zz} \vec{u} \tag{2.14}$$

Entonces, las ecuaciones de las primeras dos componentes de la conservación de momentum son:

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \partial_{zz} u = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \partial_{zz} v = 0 \tag{2.15}$$

Reescalamos la presión por simplicidad como:

$$p^{**} = \mathrm{Re} \cdot p \tag{2.16}$$

Las ecuaciones finales para la componente x e y son (quitando los **):

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{2.18}$$

Ahora revisamos la componente vertical, considerando el análisis asintótico y el reescalamiento queda:

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \mathrm{Re} \frac{L \alpha g T_o}{U^2} T \tag{2.19}$$

Donde se conoce que $\partial^2_{zz} w \sim 1/\delta$. Además las ecuaciones 2.17 y 2.18 imponen que $p \sim 1/\delta^2$, por lo tanto $\partial_z p \sim 1/\delta^3$ y se puede despreciar el segundo término de la ecuación 2.19 quedando:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \lambda T \tag{2.20}$$

Donde λ es una constante definida como:

$$\lambda = \frac{\alpha \rho_o L^2 g T_o}{U \mu_o} \tag{2.21}$$

Nota: El dominio para z está definido entre $[h(x), \delta]$. Es posible transformalo entre $[h/\delta, 1]$ si se considera:

$$\lambda_2 = \frac{\delta^3 \alpha \rho_o L^2 g T_o}{U \mu_o} \tag{2.22}$$

Y siguiendo el desarrollo anterior.

[1] Es importante destacar que este supuesto es el que absorbe los términos advectivos de la ecuación, si se desea considerar la turbulencia en el modelo, las referencias poseen información al respecto.

2.3. Síntesis

Las ecuaciones reducidas de las leyes de conservación, con el proceso realizado anteriormente, quedan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \lambda T \tag{2.26}$$

3. Obtención de Ecuaciones para el Modelo Nuevo

A continuación se procede a hacer un desarrollo análogo, pero con el acople de la ecuación de energía. Las ecuaciones que modelan son:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{T - T_o}{T} g\vec{e}_3 - \frac{\nabla p}{\rho_o} + \frac{\mu_o}{\rho_o} \Delta \vec{u} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{k}{\rho_o C_p} \Delta T \tag{3.3}$$

3.1. Adimensionalización

Utilizando la misma adimensionalización anterior se tiene:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \vec{u} = \frac{Lg}{U^2} \cdot \frac{T}{T+1} \vec{e}_3 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{k}{U \rho_o C_p L} \Delta T \equiv \frac{1}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}} \Delta T \equiv \frac{1}{\mathrm{Pe}} \Delta T \tag{3.6}$$

Observaciones con respecto al proceso:

- Pr es el número de Prandtl, mide la razón entre las difusión térmica y la difusión viscosa, es decir:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\alpha_t}{\nu} = \frac{k}{\rho_o C_p \nu} \tag{3.7}$$

  α_t es el coeficiente térmico de difusión.
- Pe es el número de Peclet, mide la razón de advección de un fluido con respecto a la difusión térmica, es decir:

$$\mathrm{Pe} = \frac{UL}{\alpha_t} \tag{3.8}$$

3.2. Análisis Asintótico

La conservación de masa y la conservación de x,y-momentum se mantienen inalteradas, debido a que el cambio introducido es solo en el término de flotación. Para la componente vertical entonces:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma \frac{T}{T+1} \tag{3.9}$$

Con:

$$\gamma = \frac{\rho_o L^2 g}{U \mu_o} \tag{3.10}$$

3.2.1. Ecuación de Energía

El operador para la temperatura es:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla - \frac{1}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}} \Delta\right) T$$

Sabemos que los primeros dos términos son ~ 1 y que $\Delta \sim \partial_{zz}^2 \sim 1/\delta^2$. Por lo tanto es posible aproximar asintóticamente la ecuación de energía a la forma:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.11}$$

Esto siempre y cuando se asegure la condición:

$$\delta^2 \mathrm{RePr} \ll 1 \tag{3.12}$$

Que es la que permite despreciar los términos advectivos y transientes. Esta condición, en teoría, no es limitante ya que antes se impuso que $\delta^2 \mathrm{Re} \ll 1$, por lo tanto basta controlar que Pr no sea absurdamente grande, lo cual en la práctica se da, como se puede observar en la Figura 3.1 que presenta el número de Prandtl del aire a diversas temperaturas [1].

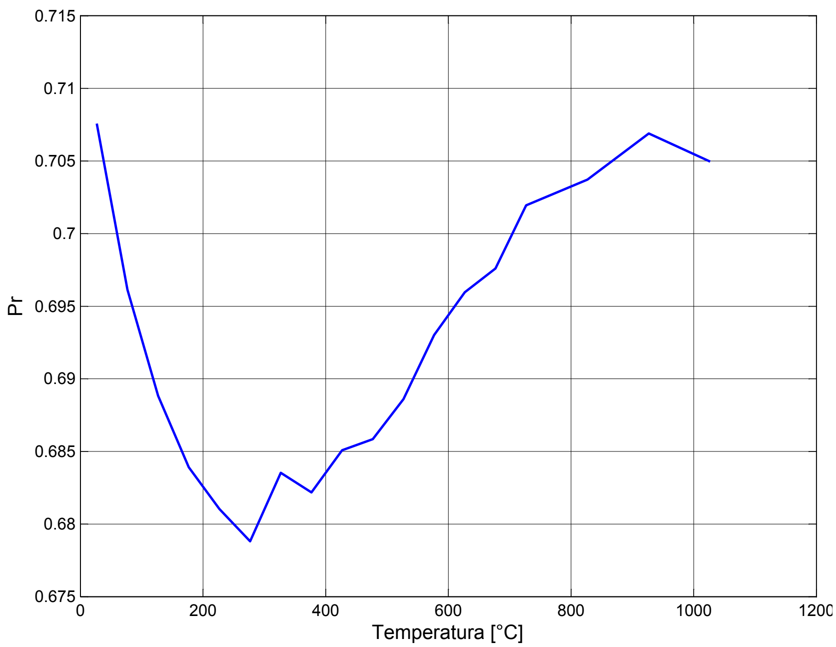

Figura 3.1: Pr para el aire a presión atmosférica a distintas temperaturas.

Notar que la ecuación para la temperatura permite recuperar el perfil lineal.

3.3. Síntesis

El sistema de ecuaciones propuesto es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma \frac{T}{T+1} \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \tag{3.17}$$

4. Condiciones de Borde

Obtenidas las ecuaciones, es hora de recordar el dominio y las condiciones de borde del problema.
Las condiciones de borde se evalúan en las tres fronteras del dominio: S, A, L.

$$S = \{(x, z) : x \in d, z = h(x)\}$$

$$A = \{(x, z) : x \in d, z = \delta\}$$

$$L = \{(x, z) : x \in \partial d, h(x) < z < \delta\}$$

- En S:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \zeta V \tag{4.1}$$

  ζ es el coeficiente de fricción con el terreno.
- En A:

$$w = 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{4.2}$$

- En S:

$$\overline{V} \cdot \vec{n} = (\delta - h) v_m \cdot \vec{n} \tag{4.3}$$

5. Conclusiones y Proyecciones

- El análisis asintótico a la ecuación de energía recupera el perfil lineal planteado como supuesto en el modelo anterior, por lo tanto ahora se pude justificar este. Se podrían replantear las condiciones de borde que se aplican en este caso.
- Sin embargo el nuevo modelo considera una tasa de expansión volumétrica variable, se podría revisar los resultados aplicando este cambio.

Referencias

[1] Dupuis, M., (1996), *Computation of Heat Transfer Coefficient Tables Establishing Boundary Conditions Between Hot Surfaces and Their Surroundings, Internal Report.*

[2] Asensio, M., Ferragut, L., Simon, J. (2002), *Modelling of Convective Phenomena in Forest Fire.*