Seminario de Investigación - Informe IV

Métodos Numéricos en Mesoescala

Pablo Cárdenas Zamorano
Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile

8 de junio de 2016

Resumen En este informe se presenta de una manera breve, la historia y las características mas importantes que poseen los métodos numéricos para el pronóstico meteorológico y la resolución de las ecuaciones que modelan la atmósfera en general. Los esquemas a utilizar para solucionar estas ecuaciones no es una selección trivial debido a que la interacción que tienen estos con los fenómenos disipativos, advectivos u otros mecanismos naturales, puede inducir inestabilidades numéricas. La presencia de ondas acústicas y ondas de gravedad como solución a las ecuaciones de movimiento generan un ruido en estas, si esque son no deseadas, y se pueden filtrar. Si los valores iniciales no están correctamente balanceados es esperable que la solución oscile en las primeras iteraciones y por ende genere datos erróneos.

1. Historia

El primer intento por generar una aproximación al comportamiento de la atmósfera se realizó en 1922. Aquí Richardson logró discretizar las ecuaciones de movimiento y creo un esquema de solución el cual le tomó cerca de seis semanas en resolver para un pronóstico de 6 horas en el futuro. Este intento fue un completo fracaso, los resultados obtenidos estaban en un orden de magnitud de diferencia con los valores observados y esto se debió a una suma de factores, entre los que se podría nombrar la incertidumbre e imbalance de los valores iniciales, y el hecho de que el esquema de Richardson no era un esquema aproximado, si no que incluía bastantes mecanismos físicos, como las ondas acústicas y las de gravedad, las cuales si no se manejan bien, ocasionan inestabilidades numéricas.

Luego, en 1948 Charney logró filtrar las soluciones de onda de este esquema, utilizando tanto la suposición geostrófica, como la hidrostática y así en 1950 se realizó el primer pronóstico en base al modelo barotrópico.

De aquí en adelante los esquemas han ido aumentando en precision y alcance, a la par de los avances computacionales, actualmente existen una gama de modelos que permiten modelar la atmósfera en escalas planetarias, sinópticas, meso o micro, anexando a estos modelos una infinidad de fenómenos físicos como lo son la humedad, la formación de nubes, la precipitación, radiación, vegetación, etc.

2. Parametrización de Fenómenos Físicos

Hasta ahora las ecuaciones que se han derivado (en los informes anteriores) corresponden a movimientos aproximados del viento atmosférico en diversas escalas. Se han desprendidos modelos para analizar la circulación de manera planetaria y otros varios para modelar los movimientos en escala sinóptica. Además, en la mesoescala, ya se analizaron los fenómenos y mecanismos que interactúan en esta, siendo los mas relevantes, la alteración del terreno y su implicancia en las ondas de gravedad, las ondas inerciales (si se consideran escalas horizontales lo suficientemente grandes), y algunos fenómenos atmosféricos.

Estos modelos desprendidos siguen siendo bastante robustos en su manera de ver la naturaleza del problema y por ende, es necesario incluir todavía el resto de procesos físicos que no son fáciles de describir matemáticamente. Diversos autores parametrizan distintos procesos de varias maneras, sin embargo como regla general, suelen modelarse como otros fenómenos físicos, como por ejemplo los fenómenos moleculares, la advección o la difusión, aunque tambien existen modelos empíricos. A continuación se revisarán algunas parametrizaciones.

2.1. Flujos Turbulentos

La turbulencia acelera los procesos de mezcla en general, y junto con esto se generan una serie de flujos (de momentum o de calor) que cómo ya se sabe de los fundamentos de turbulencia, se analizan estadísticamente en función de la covarianza de las variables involucradas. Estos flujos se ubican en una escala muy menor, de la escala utilizada para mallar las ecuaciones y de ahí que es relevante su parametrización. Se pueden representar estos flujos entonces como una constante (coeficientes de intercambio) por un gradiente de la variable relevante (en una analogía a los fenómenos moleculares). Algunos ejemplos:

$$\overline{w''\theta''} = -\boldsymbol{K_\theta}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} \qquad ; \qquad \overline{w''u''} = -\boldsymbol{K_m}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} \tag{1}$$

De manera similar también, se parametriza el esfuerzo de pared para capas límites turbulentas y las distintas sub capas de la capa límite atmosférica.

2.2. Radiación

La parametrización de la radiación en la atmósfera es un area bastante compleja y estudiada como para hacer una descripción detallada acá, sin embargo, y a modo de ilustrar la parametrización se considera la siguiente ecuación para describir el término fuente en la ecuación de la conservación de energía:

$$\overline{S}_\theta = \left.\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}\right|_{\text{rad}} = -\frac{1}{\overline{\rho} c_p}\frac{\partial \overline{R}}{\partial z} \tag{2}$$

Donde $\partial \overline{R}/\partial z$ corresponde al promedio del gradiente vertical de la irradiancia absorbida y para este término existen diversar parametrizaciones según sean las condiciones atmosféricas.

2.3. Cambio de Fase

Los procesos termodinámicos que sufre la humedad en el aire se pueden parametrizar en función de su cambio de fase y de la estratificación de la atmósfera. También existen modelos para la formación de nubes que utilizan estas mismas aproximaciones. La descripción detallada de las ecuaciones que modelan estos fenómenos se pueden encontrar extensamente en la referencia [1], en el capítulo 9.

3. Esquemas de Solución

Nos interesa mostrar ahora, de que manera se transforman las ecuaciones diferenciales parciales no lineales, en relaciones algebraicas fáciles de evaluar para un computador, para lograr esto se utilizan distintos métodos de discretización de derivadas que se explican a continuación.

3.1. Diferencias Finitas

Consideremos la serie de Taylor:

$$\phi(x+\Delta x) = \phi(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Delta x^2 + \mathcal{O}(2) \tag{3}$$

Despreciando elementos de orden superior, se puede discretizar una derivada de las siguientes formas:
Diferencia Avanzada (Atrasadas):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} \approx \frac{\phi(x) - \phi(x-\Delta x)}{\Delta x} \tag{4}$$

Diferencias Centradas:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{5}$$

Esta última representa una mejor aproximación para la derivada, pues se desprecian términos de orden menor con respecto a las diferencias avanzadas. Ahora de la misma forma, tambien se puede llegar a una expresión para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \approx \frac{\phi(x+\Delta x) - 2\phi(x) + \phi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} \tag{6}$$

Al reemplazar estas ecuaciones en, por ejemplo, la ecuación de advección de temperatura potencial:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{7}$$

Se puede evaluar el valor futuro de la temperatura como:

$$\theta(x, t+\Delta t) = \theta(x, t-\Delta t) - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(x,t)(\theta(x+\Delta x, t) - \theta(x-\Delta x, t)) \tag{8}$$

Para la aplicación exclusiva de poder resolver EDOs y EDPs, se tienen una gama de esquemas que se basan en las diferencias finitas. Según el instante en donde se evalúe y como se haga el reemplazo se tienen métodos explícitos, implícitos, multipasos, etc. La aplicación de cada uno de estos será según lo que se necesite resolver y su diferencia radica en las condiciones de estabilidad que posea para su convergencia si los espaciamientos tanto temporales como espaciales tienden a cero.

Con respecto a la estabilidad de los métodos se pueden nombrar 3 potenciales causas de error:

- Error de Redondeo: Debido a la aritmética de punto flotante.
- Error de Truncación: Según donde se aproxima la serie de Taylor
- Inestabilidad Numérica: Cuando el esquema diverge, esto puede ocurrir cuando por ejemplo, el espaciado de la malla no alcanza para satisfacer las condiciones físicas del problema, como sería el caso de una advección tan grande que en un paso de tiempo, una partícula ya se desplazo varios pasos espaciales (en específico esta condición se llama **Condición de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)** o de la misma forma si hay ondas propagandose con longitud de onda menor al espaciamiento, el computador no las reconocerá y se inducirá ruido en la solución.

3.2. Métodos Semi-Lagrangianos

La integración temporal que hace el método de diferencias finitas mas simple (Euler) evalúa la tendencia del fluido según un punto fijo en el espacio. Para algunos casos convendría tomar un sistema de referencia lagrangiano y utiliza los datos de la velocidad para calcular la trayectoria hacia atrás de la partícula y de esta forma hallar la fuente de la velocidad y utilizar esta información para resolver mas eficientemente la advección.

3.3. Métodos Espectrales

En el método de diferencias finitas, las variables dependientes son especificadas en un punto fijo de la malla espacial y temporal, y las derivadas se aproximan haciendo diferencias. Un acercamiento alternativo corresponde a representar las variaciones espaciales de las variables dependientes como una serie finita de funciones ortogonales.

Este método nos permite tener un control global de las variables en el dominio. Se obtienen soluciones igual de precisas que utilizando un esquema de diferencias finitas, pero su uso general está mas aplicado a modelaciones planetarias o sinópticas.

Para una geometría cartesiana en una escala no muy extensa, es preferible usar como funciones de base la serie de Fourier, pero si se trabaja en coordenadas esféricas es mejor usar los armónicos esféricos.

Como ejemplo, si se quiere resolver la ecuación de la vorticidad barotrópica en coordenadas esféricas, se expresa la función de corriente como:

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{\gamma} \Psi(t) \boldsymbol{P}_{\gamma}(\mu) e^{im\lambda} \tag{9}$$

Donde P_γ corresponde a la función de Legendre de la primera especie de grado n, y n representa los nodos de oscilación. La suma se realiza sobre todo m y n.

Con este método, no tenemos las limitaciones que nos entrega las diferencias finitas para el comportamiento oscilatorio y elimina el feedback ficticio en la energía que se crea en las escalas grandes llamado *aliasing*. Sin embargo una formulación en serie compleja es difícil de manejar y se requieren condiciones de borde periodicas para que trabaje de manera efectiva. Es por esto que este método no se usa mucho en mesoescala, si no que a veces se usa un método modificado (introducido por Fox y Orszag en 1973) el cual si presenta resultados viables.

3.4. Otros Esquemas

También suelen usarse, aunque en menor medida, esquemas de interpolación por Splines para aproximar valores de la malla. Luego hallar las derivadas espaciales se convierte en una tarea trivial ya que queda todo expresado en un solo polinomio, con esta información puede usarse un esquema explícito para avanzar en el tiempo.

Otro esquema, muy usado en mecánica de sólidos, es utilizar elementos finitos, en donde se separa el dominio de la ecuación en subdominios no intersectantes llamados elementos y dentro de cada elemento se reconocen nodos representativos que son los que ayudan a formar el mallado.

Tanto la interpolación con Splines, como el método de elementos finitos, culminan su cálculo invirtiendo un sistema de ecuaciones con una matriz característica que es tridiagonal y por lo tanto no es costoso computacionalmente resolver este sistema.

4. Estabilidad de Valores Iniciales

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales que se deben modelar para encontrar el comportamiento de la atmósfera, hay que recordar que corresponden a un **Problema de Valor Inicial (PVI)** y como tal, para resolverlo es necesario primero definir las condiciones de borde, como así el estado inicial del flujo.

Estas condiciones iniciales, como es de esperar, provienen de la observación instrumental de la atmósfera, y como tal pueden estar sujetas a cierta incertidumbre. Ahora es relevante destacar, que las ecuaciones que se resuelven para modelar, corresponden a **Ecuaciones de Balance**, tanto en la masa como en el momentum y la energía. Por lo cual, si se poseen condiciones iniciales no balanceadas, se estarán agregando perturbaciones que las ecuaciones reconocerán y así, estas mismas, a medida que avance la iteración, tenderá a balancear y se generarán oscilaciones en los primeros resultados que no corresponden necesariamente al comportamiento del flujo.

Consideremos, por ejemplo, una pequeña variación en el valor observado de la densidad en cierto punto. Esta variación tendrá dos efectos inmediatos: por un lado, tenderá a flotar y según sea la estratificación local, esta podrá acelerar progresivamente o empezar a oscilar en las cercanías hasta que vuelva al reposo. Por otro lado un cambio de densidad puede ser señal de una onda acústica, y por lo tanto, el algoritmo reconocerá la onda de alta frecuencia y la comenzara a transmitir.

Entonces, se tienen dos acercamientos para este problema, por un lado se pueden filtrar las soluciones de onda de los modelos a resolver, pero esto no va a ser conveniente ya que las ondas gravitacionales son clave para el comportamiento en la mesoescala, especialmente en el terreno complejo (las ondas acústicas se podrían filtrar según sea el caso). Y el otro acercamiento es adaptar los valores observados para que no lleven a errores.

La adaptación de los valores observados se llama **Asimilación** y consiste basicamente en dos etapas: análisis objetivo e inicialización.

4.1. Análisis Objetivo

Los valores observados en distintos puntos, ubicados irregularmente en el espacio, son llevados a una malla regular y a presión estándar. Acá se utilizan diversos esquemas de interpolación.

4.2. Inicialización de Información

Los valores analizados objetivamente son modificados de modo de minimizar el ruido de las ondas de gravedad y así reducir la magnitud de las velocidades iniciales y las tendencias en la presión.

Referencias

[1] Pielker, R., (1984), *Mesoescale Meteorological Modeling.*

[2] Stull, R., (2000), *Meteorology for Scientist and Engineers*, 2nd Edition.

[3] Holton, R., (1992), *An Introduction to Dynamic Meteorology*, 3rd Edition.