Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 11: Transformări geometrice în plan

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Problema 1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi $30°$ în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Matricea de rotaţie se scrie, în forma generală, ca

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret,

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matricea translaţiei, în schimb, este

$$\mathrm{Trans}(1,2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Începem cu prima transformare, în care se efectuează mai întâi rotaţia, urmată de translaţie. Aşadar, matricea primei transformări este

$$T_1=\mathrm{Trans}(1,2)\cdot\mathrm{Rot}\left((2,2),30°\right)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În consecinţă, imaginea triunghiului este dată de

$$\begin{bmatrix}A' & B' & C'\end{bmatrix}=T1\cdot\begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \sqrt{3}+\frac{7}{2} & \frac{5}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+5 & \frac{\sqrt{3}}{2}+4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

deci coordonatele carteziene ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ sunt $A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right)$, $B'\left(\sqrt{3}+\frac{7}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}+5\right)$, $C'\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}+4\right)$. (Vezi figura 1) Inversăm, acum, ordinea celor două trans-

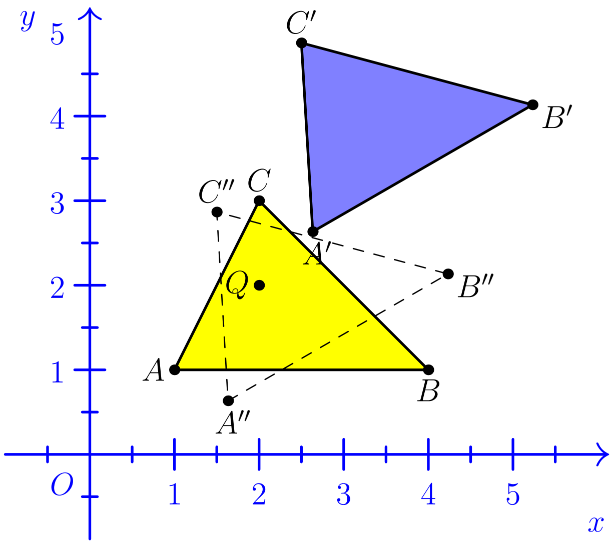

Figura 1: Rotaţie, urmată de translaţie

formări. Transformarea care se obţine este

$$T_2 = \mathrm{Rot}((2,2),30^\circ)\cdot \mathrm{Trans}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, imaginea triunghiului este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = T2\cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+2 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că punctele triunghiului imagine au coordonatele carteziene $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$, $B'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right)$. (Vezi figura 2) □

Problema 2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$.

Soluţie. Matricea scalării uniforme de factor de scală s, relativ la punctul Q se scrie

$$\mathrm{Scale}(Q,s) = \begin{bmatrix} s\cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

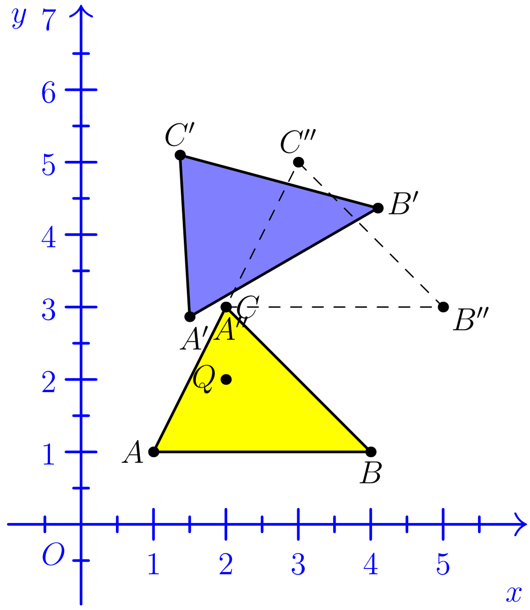

Figura 2: Translaţie urmată de rotaţie

sau, explicit,

$$\operatorname{Scale}(Q,s)=\begin{bmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret, obţinem

$$\operatorname{Scale}((2,2),2)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

prin urmare, imaginea triunghiului ABC va fi dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix}=\operatorname{Scale}((2,2),2)\cdot\begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

adică imaginile vârfurilor sunt punctele $A'(0,0)$, $B'(6,0)$, $C'(2,4)$. (Vezi figura 3.) □

Problema 3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2,1)$, relativ la punctul $Q(2,2)$.

Soluţie. Matricea unei scalări neuniforme de factori de scală s_x şi s_y, relativ la punctul Q este

$$\operatorname{Scale}(Q,s_x.s_y)=\begin{bmatrix} s_x(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i})+s_y(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j}) & (I_2-s_x(\mathbf{i}\otimes\mathbf{i})-s_y(\mathbf{j}\otimes\mathbf{j})\cdot Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sau, explicit

$$\operatorname{Scale}(Q,s_x,s_y)=\begin{pmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

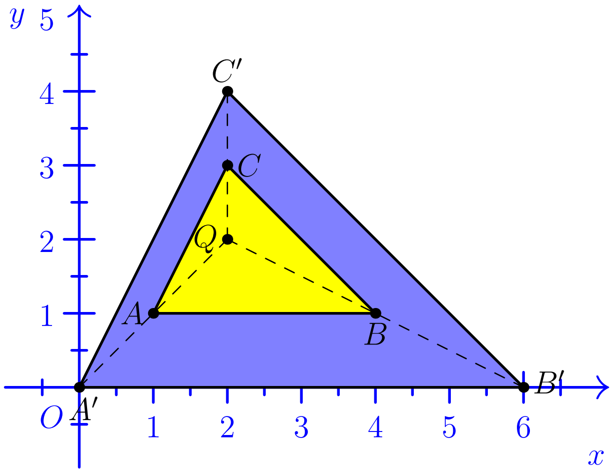

Figura 3: Scalare uniformă

În cazul nostru concret, avem

$$\mathrm{Scale}((2,2),2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deci imaginea triunghiului prin scalare este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \mathrm{Scale}((2,2),2,1) \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci coordonatele carteziene ale imaginilor vârfului triunghiului ABC vor fi $A'(0,1)$, $B'(6,1)$, $C'(2,3)$. (Vezi figura 4.) □

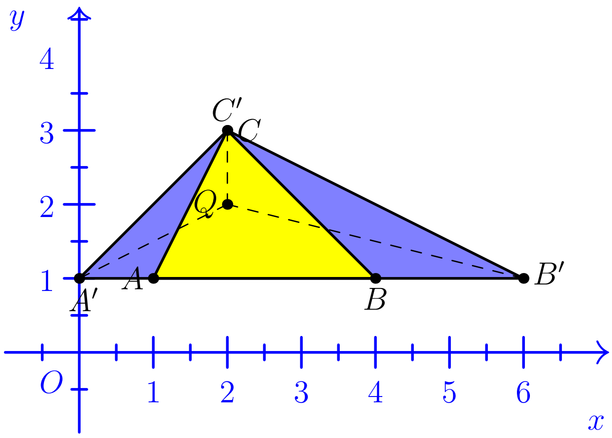

Figura 4: Scalare neuniformă

Problema 4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi $45°$, relativ la punctul $Q(2,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2,1)$.

Soluţie. Matricea omogenă a forfecării de versor $\mathbf{w}$ şi unghi θ, relativ la punctul Q este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta) = \begin{pmatrix} I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right)\cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Preferăm să utilizăm această formulă în locul formei extinse. Remarcăm, înainte de toate, că vectorul $\mathbf{w}$ din definiţia forfecării este un versor, adică un vector de lungime 1, prin urmare trebuie să înlocuim vectorul $\mathbf{v}$ din enunţ cu versorul său,

$$\mathbf{w} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Calculăm, acum, produsul tensorial:

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

prin urmare

$$I_2 + \operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix},$$

în timp ce

$$-\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}\right) \cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, matricea extinsă a transformării este, în cazul nostru concret,

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea triunghiului ABC prin forfecare este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{8}{5} & 1 & \frac{21}{5} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că imaginile vârfurilor triunghiului dat au coordonatele carteziene $A'\left(1, \frac{8}{5}\right)$, $B'\left(\frac{14}{5}, 1\right)$, $C'\left(\frac{12}{5}, \frac{21}{5}\right)$. (Vezi figura 5.) □

Problema 5. Aplicaţi forfecarea de la problema precedentă pătratului $ABCD$, cu $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,3)$ şi $D(0,3)$.

Soluţie. Am văzut deja care este matricea transformării, deci coordonatele omogene ale vârfurilor imaginii pătratului $ABCD$ sunt date de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{5} & 3 & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 4 & \frac{23}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

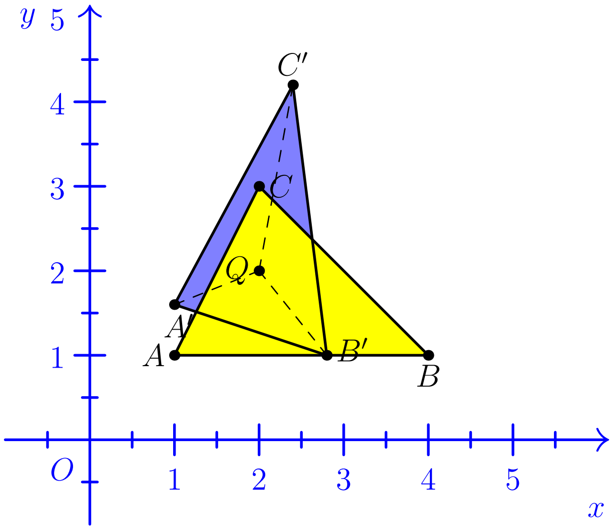

Figura 5: Forfecare

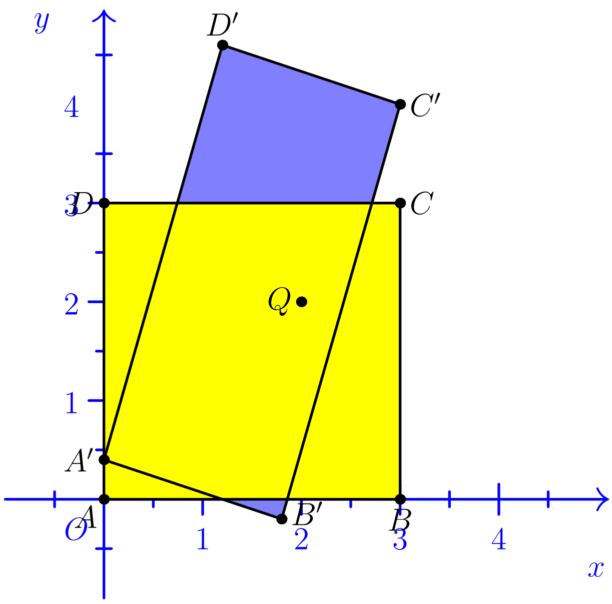

Figura 6: Forfecare

deci imaginea pătratului dat va avea vârfurile $A'\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$, $B'\left(\dfrac{9}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$, $C'(3,4)$ şi $D'\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{23}{5}\right)$. (Vezi figura 6.) $\square$

Problema 6. Determinaţi imaginea pătratului de la problema precedentă prin forfecarea de vector $\mathbf{v}(1,1)$, de unghi 60°, relativ la origine.

Soluţie. Versorul vectorului $\mathbf{v}$ este

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

deci, după cum am văzut mai sus,

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

deci, după cum se constată uşor, matricea transformării este

$$\text{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{bmatrix}1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Prin urmare, imaginea pătratului este dată de

$$\begin{bmatrix}A' & B' & C' & D'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & 3 & \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\\ 0 & -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & 3 & 3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

aşadar vârfurile imaginii pătratului sunt $A'\,(0,0)$, $B'\left(3-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $C'(3,3)$, $D'\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},3+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. (Vezi figura 7.) □

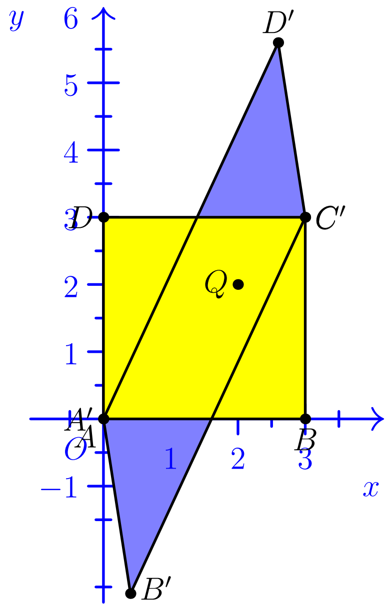

Figura 7: Forfecare

Problema 7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x+3y-5=0$.

Soluţie. Matricea omogenă a unei reflexii faţă de dreapta care trece prin Q şi are versorul director $\mathbf{w}$ este

$$\text{Mirror}(Q,\mathbf{w})=\begin{bmatrix}I_2-2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right) & 2\left(\mathbf{w}^{\perp}\otimes\mathbf{w}^{\perp}\right)\cdot Q\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

În cazul nostru, un vector director al dreptei este $\mathbf{v}(3,-2)$, deci un versor director este

$$\mathbf{w}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right),$$

prin urmare

$$\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp} = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2^2 & -w_1 w_2 \\ -w_1 w_2 & w_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}.$$

În consecinţă,

$$I_2 - 2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

Un punct de pe dreaptă este $Q(1,1)$, prin urmare avem

$$2\left(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}\right) \cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{8}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{18}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{30}{13} \end{bmatrix}.$$

În consecinţă, matricea reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea triunghiului ABC va fi dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{28}{13} & -\frac{6}{13} \\ 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{9}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Vezi figura 8.)

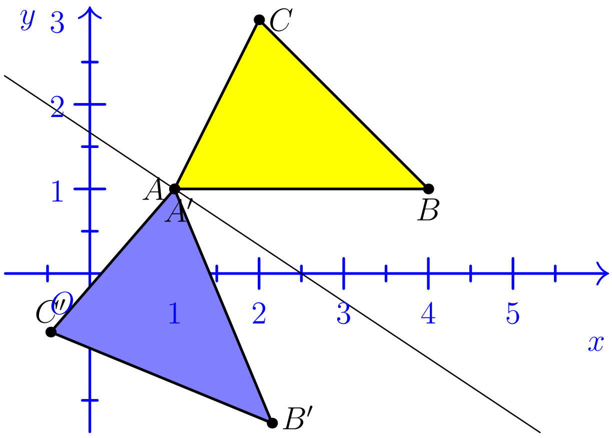

Figura 8: Reflexie

□

Problema 8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB.

Soluţie. Scriem, mai întâi, ecuaţia dreptei AB: $y = 1$. Vectorul director al dreptei este $\mathbf{w} = \mathbf{i}$. După cum am văzut la o problemă precedentă, matricea omogenă a reflexiei (în forma bloc) va fi

$$\mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} I_2 - 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) & 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) \cdot A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dar

$$\mathbf{i}^\perp = (0, 1),$$

deci

$$\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

aşadar

$$I_2 - 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

în timp ce

$$2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

În concluzie, matricea reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aceea, imaginea triunghiului prin reflexia faţă de dreapta AB este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Probleme propuse

În lista de probleme de mai jos, dacă nu se precizează explicit altfel, triunghiul ABC are vârfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Problema 9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC, urmată de o forfecare, de unghi $60°$, relativ la punctul A, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 10. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin rotaţia cu $90°$ în jurul punctului C, urmată de reflexia relativ la dreapta AB.

Problema 11. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de $30°$ în jurul punctului $Q(1, 1)$.

Problema 12. Aplicaţi o rotaţie de unghi $45°$ triunghiului ABC, cu $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$:

(a) în jurul originii;

(b) în jurul punctului $P(-1, -1)$.

Problema 13. Măriţi de două ori dimensiunile triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$, astfel încât punctul $C(5,2)$ să rămână fix.

Problema 14. Reflectaţi rombul de vârfuri $A(-1,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,0)$ şi $D(0,2)$ faşă de:

(a) dreapta orizontală $y = 2$;

(b) dreapta verticală $x = 2$;

(c) dreapta $y = x + 2$.

Problema 15. Demonstraţi că ordinea în care se fac transformările este importantă aplicând triunghiului de vârfuri $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$:

(a) o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii, urmată de o translaţie de vector $(1,0)$;

(b) o translaţie de vector $(1,0)$, urmată de o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii.