Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 3

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Determinaţi $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dacă $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 22\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

□

Problema 2. Se dau vectorii $\mathbf{a}(3, -1, -2)$ şi $\mathbf{b}(1, 2, -1)$. Să se calculeze:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte,

$$(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = 2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b}}_{=0} = 2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k}.$$

În sfârşit,

$$(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{a})}_{=0} - 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b}}_{=0} = -4(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 28\mathbf{k}.$$

□

Problema 3. Determinaţi distanţele dintre laturile paralele ale paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$ şi $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$.

Soluţie. Fie $ABDC$ paralelogramul, h distanţa dintre laturile AB şi CD şi g distanţa dintre laturile AC şi BD. Atunci

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \quad g = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k},$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \|-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|6\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\frac{3}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\right\| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Prin urmare,

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{13}{2\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{20},$$

$$g = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{13}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{26\sqrt{29}}{29}.$$

□

Problema 4. Determinaţi vectorul $\mathbf{p}$, ştiind că el este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}(2,3,-1)$ şi $\mathbf{b}(1,-1,3)$ şi verifică ecuaţia

$$\mathbf{p}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k})=51.$$

Soluţie. Vectorul $\mathbf{p}$ îndeplineşte condiţiile:

$$\begin{cases}\mathbf{p}\cdot(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})=0,\\ \mathbf{p}\cdot(\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k})=0,\\ \mathbf{p}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k})=51.\end{cases}$$

Dacă $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$, atunci sistemul de mai sus devine

$$\begin{cases}2p_1+3p_2-p_3=0,\\ p_1-p_2+3p_3=0,\\ 2p_1-3p_2+4p_3=51.\end{cases}$$

Se obţine atunci că

$$\mathbf{p}=(24,-21,-15).$$

$\square$

Altă soluţie. Faptul că vectorul $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ care, după cm se poate observa cu uşurinţă, nu sunt coliniari, înseamnă, de fapt, că vectorul este coliniar cu produsul vectorial al acestor vectori, cu alte cuvinte trebuie să avem

$$\mathbf{p}=\lambda\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}),$$

prin urmare trebuie doar să determinăm scalarul λ. Începem prin a calcula produsul vectorial. Avem:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=8\mathbf{i}-7\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$$

Aşadar, $\mathbf{p}=\lambda\cdot(8,-7,-5)$. λ se determină acum din ecuaţia

$$\mathbf{p}=\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k})\equiv 17\lambda=51,$$

de unde $\lambda=3$, deci, aşa cum am obţinut şi mai sus

$$\mathbf{p}=(24,-21,-15).$$

$\square$

Problema 5. Se dau punctele $A(1,2,0), B(3,0,-3)$ şi $C(5,2,6)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Soluţie. Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC. Atunci

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|.$$

Dar,

$$\overrightarrow{AB}=2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k},\quad \overrightarrow{AC}=4\mathbf{i}+6\mathbf{k},$$

deci

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k},$$

prin urmare

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

Aşadar,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

□

Problema 6. Se dau punctele $A(1,-1,2), B(5,-6,2)$ şi $C(1,3,-1)$. Determinaţi lungimea înălţimii triunghiului ABC, coborâte din vârful B pe latura AC a triunghiului.

Soluţie. Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC. Atunci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu h_B înălţimea corespunzătoare vârfului B, avem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot h_B,$$

prin urmare,

$$h_B = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|}.$$

Avem

$$\overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{AC} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

deci

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

aşadar

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25$$

şi

$$\left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

În final, obţinem

$$h_B = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = \frac{25}{5} = 5.$$

□

Problema 7. Se dau vectorii $\mathbf{a}(2,-3,1)$, $\mathbf{b}(-3,1,2)$ şi $\mathbf{c}(1,2,3)$. Să se calculeze $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-7\mathbf{i}-7\mathbf{j}-7\mathbf{k},$$

deci

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -7 & -7 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-7\mathbf{i}+14\mathbf{j}-7\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-\mathbf{i}+11\mathbf{j}-7\mathbf{k},$$

deci

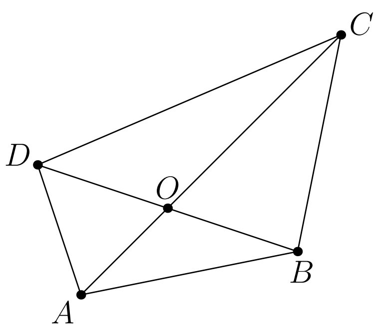
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -3 & 1\\ -1 & 11 & -7\end{vmatrix}=10\mathbf{i}+13\mathbf{j}+19\mathbf{k}.$$

Se observă imediat că

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),$$

adică, aşa cum ştiam, *produsul vectorial* nu *este asociativ*. □

Problema 8. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Demonstraţi că dacă diagonala AC înjumătăţeşte diagonala BD, atunci triunghiurile ACB şi ACD au arii egale.



Soluţie. Facem, mai întâi, următoarele notaţii:

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{AC}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{AD}=\mathbf{c}.$$

Conform ipotezei, mijlocul O al diagonalei BD se află pe diagonala AC, adică este chiar punctul de intersecţie al diagonalei. Aceasta înseamnă că $\overrightarrow{AO}\equiv\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$ este coliniar cu $\mathbf{b}$. Aceasta înseamnă, la rândul său, că există un număr real α astfel încât să avem

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}=\alpha\mathbf{b}$$

sau

$$\mathbf{a}+\mathbf{c}=2\alpha\mathbf{b}.$$

Dacă înmulţim vectorial ambii membri ai ecuaţiei de mai sus cu $\mathbf{b}$, obţinem

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b}=2\alpha\,(\mathbf{b}\times\mathbf{b})=0,$$

de unde

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

sau

$$\frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

Dacă trecem la norme, ecuaţia de mai sus ne conduce la

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$$

sau

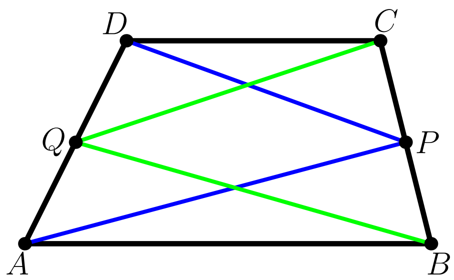
$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\right\|,$$

adică

$$\text{aria}\, ACB = \text{aria}\, ACD.$$

□

Problema 9. Fie P şi Q mijloacele laturilor neparalele BC şi AD ale unui trapez $ABCD$. Demonstraţi că triunghiurile APD şi CQB au aceeaşi arie.



Soluţie. Fie $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Cum dreapta DC este paralelă cu dreapta AB, rezultă că există un scalar (pozitiv) astfel încât să avem $\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{AB} = t\mathbf{b}$. Prin urmare,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{d} + t\mathbf{b}.$$

Pentru a calcula aria triunghiului APD, trebuie să calculăm şi vectorul $\overrightarrow{AP}$. Se observă imediat că

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left((1+t)\mathbf{b} + \mathbf{d}\right).$$

Atunci,

$$\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left((1+t)\mathbf{b} + \mathbf{d}\right) \times \mathbf{d} = \frac{1}{2}(1+t)(\mathbf{b} \times \mathbf{d}).$$

Prin urmare,

$$\text{Aria}\,\Delta APD = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{4}(1+t)\|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\|.$$

Trecem acum la calculul ariei triunghiului CQB. Observăm imediat că

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = -t\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{d},$$

în timp ce

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -\mathbf{d} - t\mathbf{b} + \mathbf{b} = (1-t)\mathbf{b} - \mathbf{d}.$$

Prin urmare,

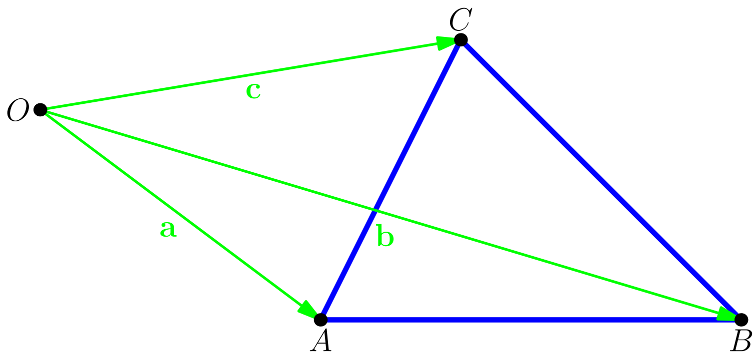
$$\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CB} = \left(-t\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) \times ((1-t)\mathbf{b} - \mathbf{d}) = t\,(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(1-t)\,(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(1+t)(\mathbf{b} \times \mathbf{d}).$$

Aşadar,

$$\text{Aria}\,\Delta CQB = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CB}\right\| = \frac{1}{4}(1+t)\|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\| = \text{Aria}\,\Delta APD.$$

□

Problema 10. Vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt vectorii de poziţie ai vârfurilor unui triunghi ABC relativ la un punct O. Determinaţi aria triunghiului ABC în funcţie de aceşti vectori.



Soluţie. Aria triunghiului ABC este

$$\text{Aria}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Dar $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, iar $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, prin urmare

$$\text{Aria}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}\|.$$

□

Problema 11. Stabiliţi dacă tripletul de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept sau stâng, dacă

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{c} = \mathbf{k}.$$

Soluţie. Tot ce avem de făcut este să stabilim semnul produsului mixt al celor trei vectori. Avem:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Cum $-2 < 0$, tripletul este stâng. □

Problema 12. Demonstraţi că punctele $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5),\ C(-1, 2, 1)$ şi $D(2, 1, 3)$ sunt situate într-un acelaşi plan.

Soluţie. Afirmaţia este echivalentă cu afirmaţia că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coplanari (adică *liniar dependenţi*) cu condiţia ca produl mixt al acestor trei vectori să fie egal cu zero.

Dar

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 6),\ \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2),\ \overrightarrow{AD} = (1, -1, 4),$$

deci

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce înseamnă că cele patru puncte sunt coplanare. □

Problema 13. Determinaţi volumul tetraedrului care are vârfurile în punctele $A(2,-1,1), B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ şi $D(4,1,3)$.

Soluţie. Fie $\mathcal{V}$ volumul tetraedrului. Atunci

$$\mathcal{V} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right),$$

unde semnul se alege astfel încât volumul să fie un număr pozitiv. Dar

$$\overrightarrow{AB} = (3,6,3),\ \overrightarrow{AC} = (1,3,-2),\ \overrightarrow{AD} = (2,2,2),$$

deci

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Aşadar

$$\mathcal{V} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\cdot 18 = 3.$$

□

Problema 14. Un tetraedru de volum 5 are ca trei dintre vârfuri punctele $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ şi $C(2,-1,3)$. Al patrulea vârf, D, este situat pe axa Oy. Determinaţi coordonatele punctului D.

Soluţie. Vârful D va avea coordonatele $(0,a,0)$, unde a este un parametru care urmează a fi determinat. Volumul tetraedrului este

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Avem

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,2),\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,4),\ \overrightarrow{AD} = (-2,a-1,1),$$

prin urmare

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = -4a+2.$$

Aşadar,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\cdot|4a-2| = \frac{1}{3}\cdot|2a-1|.$$

Cum volumul tetraedrului este 5, pentru a determina parametrul a trebuie să rezolvăm ecuaţia

$$\frac{1}{3}\cdot|2a-1| = 5$$

sau

$$|2a-1| = 15.$$

Dacă modulul este pozitiv, suntem conduşi la ecuaţia

$$2a-1 = 15,$$

de unde obţinem prima soluţie, $a_1 = 8$. Dacă modulul este negativ, găsim ecuaţia

$$2a-1 = -15,$$

care ne conduce la cea de-a doua soluţie, $a_2 = -7$. □

Problema 15. Se dau trei vectori $\mathbf{a}(8,4,1)$, $\mathbf{b}(2,2,1)$ şi $\mathbf{c}(1,1,1)$. Să se determine vectorul $\mathbf{d}$, de lungime 1, care formează cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ unghiuri egale, este perpendicular pe vectorul $\mathbf{c}$ şi este orientat în aşa fel încât tripletele de vectori $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ şi $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ au aceeaşi orientare (sunt ambele drepte sau ambele stângi).

Soluţie. Presupunem că vectorul $\mathbf{d}$ are componentele (d_1,d_2,d_3). Pentru a determina vectorul $\mathbf{d}$ (prin componentele sale), inventariem, mai întâi, condiţiile pe care trebuie să le verifice aceste componente. Mai întâi, faptul că vectorul $\mathbf{d}$ este unitar înseamnă că

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=1.$$

Mai departe, condiţia ca acest vector să formeze unghiuri egale cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este (ţinând cont şi de condiţia precedentă):

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\cdot\mathbf{d}=\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\cdot\mathbf{d}.$$

Dar $\|\mathbf{a}\|=9$, iar $\|\mathbf{b}\|=3$, deci relaţia precedentă ne conduce la

$$\frac{1}{9}\cdot(8d_1+4d_2+d_3)=\frac{1}{3}\cdot(2d_1+2d_2+d_3)$$

sau

$$8d_1+4d_2+d_3=6d_1+6d_2+3d_3$$

sau, în fine,

$$d_1-d_2-d_3=0.$$

În sfârşit, condiţia ca vectorii $\mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ să fie perpendiculari se traduce prin ecuaţia

$$d_1+d_2+d_3=0.$$

Aşadar, componentele vectorului $\mathbf{d}$ trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} d_1^2+d_2^2+d_3^2=1,\\ d_1-d_2-d_3=0,\\ d_1+d_2+d_3=0.\end{cases}$$

Se obţin imediat soluţiile

$$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Doar una dintre aceste două condiţii este acceptabilă. Pentru a stabili care, trebuie să stabilim, mai întâi cum este orientat tripletul $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$. Avem

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=4>0,$$

deci reperul este direct şi la fel trebuie să fie şi reperul $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$. Avem

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}_1)=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&2&1\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=-7\sqrt{2},$$

care este negativă, deci nu convine. Pe de altă parte, în mod evident,

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}_2)=7\sqrt{2}>0,$$

aşadar vectorul $\mathbf{d}$ pe care îl căutăm este

$$\mathbf{d} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

□

Problema 16. Se dau doi vectori $\mathbf{a}(11, 10, 2)$ şi $\mathbf{b}(4, 0, 3)$. Să se găsească un vector unitar $\mathbf{c}$, ortogonal la vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, astfel încât tripletul de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ să fie drept.

Soluţie. În mod evident, există doar doi candidaţi, anume

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

şi

$$\mathbf{c}_2 = -\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

şi numai unul dintre aceşti doi vectori este soluţia problemei. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 11 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 60\mathbf{i} - 25\mathbf{j} - 80\mathbf{k},$$

prin urmare

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 25\sqrt{17}.$$

Aşadar,

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{12\sqrt{17}}{65}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\mathbf{j} - \frac{16\sqrt{17}}{65}\mathbf{k}.$$

De aici rezultă că

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) = \begin{vmatrix} 11 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ \frac{12\sqrt{17}}{65} & -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{65} \end{vmatrix} = \frac{7125\sqrt{17}}{221} > 0,$$

deci vectorul căutat este $\mathbf{c} = \mathbf{c_1}$. □

Probleme propuse

Problema 17. Fie ABC un triunghi şi fie E şi F mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Prin C se duce o paralelă la AB care întâlneşte BE în P. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,\triangle FEP = \text{Aria}\,\triangle FCE = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Problema 18. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right\|.$$

Problema 19. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{AD} = \mathbf{d},\ \overrightarrow{AC} = m\mathbf{b} + p\mathbf{d},$$

unde m şi p sunt două numere reale. Demonstraţi că aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}|m + p| \cdot \|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\|.$$

Problema 20. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, atunci aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\, ABCD = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{a}\|.$$

Problema 21. Determinaţi ariile triunghiurilor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0), (1,2,3)$ şi $(2,-1,4)$;

(b) $(1,0,0), (0,1,0)$ şi $(1,1,1)$;

(c) $(-1,2,3), (2,-1,-1)$ şi $(1,1,-1)$;

(d) $(a,0,0), (0,b,0)$ şi $(0,0,c)$.

Problema 22. Determinaţi volumele tetraedrelor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0), (1,1,-1), (1,-1,1)$ şi $(-1,1,1)$;

(b) $(-1,0,1), (2,-1,0), (3,2,5)$ şi $(1,2,1)$.

Problema 23. Demonstraţi că volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele de coordonate (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_2) şi (x_4,y_4,z_4) este egal cu valoarea absolută a numărului

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Problema 24. Demonstraţi că volumul tetraedrului ale căror vârfuri au vectorii de poziţie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ este dat de formula

$$\text{Vol} = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}) + (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{d}) + (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}) - (\mathbf{a}.\mathbf{b},\mathbf{c})\right|.$$

Deduceţi, de aici, un criteriu pentru coplanaritatea punctelor cu vectorii de poziţie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$.