FORMULE

1. Produsul scalar a 2 vectori: " · "

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \cdot \vec{b}(x_2, y_2, z_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = \cos\varphi \cdot \|a\| \cdot \|b\|$

$\vec{a}(x_1, y_1) \cdot \vec{b}(x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \cos\varphi \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

2. Produsul vectorial a 2 vectori: " × "

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \times \vec{b}(x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

→ e anticomutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

→ nu e asociativ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

→ are direcția unui vector $\perp$ pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari ($\vec{a} \times \vec{b}$ există doar dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt în spațiu!)

3. Produsul mixt a 3 vectori

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ drept

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0 \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ stâng

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - coplanari

$V_{OABC} = \pm\frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ~ volumul tetraedrului, se alege semnul a.î. să fie pozitiv

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{c}(c_1, c_2, c_3) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

PLAN

$\vec{n}(a, b)$ perpendicular pe dreaptă

Ec. generală: $ax + by + c = 0 \Rightarrow \vec{a}(-b, a)$ vector director al dreptei

$y - b = k(x - a)$ coeficient unghiular, trece prin $A(a, b)$

Ec. vectorială: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$ $\quad \vec{OM_0} = \vec{r}_0 \quad$ $\vec{a}$ - vect. director al dreptei

Ec. parametrice: $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$ $\Rightarrow \vec{a}(l, m)$ vect. director al dreptei

Ec. canonică: $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow \vec{a}(l, m)$ vect. director al dreptei

alte ecuații: ⊛ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ unde a, b - lungimile cu semn ale segmentelor tăiate de Δ pe Ox și Oy

⊛

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ \Delta_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta_1 \text{ concurent cu } \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ și } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

⊛ distanța de la $M_0(x_0, y_0)$ la $\Delta : ax + by + c = 0$

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

⊛ unghiul a două drepte (dintre cele 2 perpendiculare ale dreptelor)

$\Delta_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ $\quad \vec{a}(a_1, b_1)$

$\Delta_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ $\quad \vec{b}(a_2, b_2)$

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

SPAȚIU

Planul se not. cu π

Ec. vectorială: $\vec{r} = \vec{r_0} + s\vec{v} + t\vec{w}$ unde $\vec{v}, \vec{w}$ - $\parallel$ cu planul

$\vec{r_0}$ - vect. de poziție al unui pct. din plan

Ec. parametrice: $\begin{cases} x = x_0 + s v_x + t w_x \\ y = y_0 + s v_y + t w_y \\ z = z_0 + s v_z + t w_z \end{cases}$ $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ $\vec{w}(w_x, w_y, w_z)$ $\vec{r_0}(x_0, y_0, z_0)$

Ec. generală: $ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n}(a, b, c) \perp$ pe plan (vectorul normal)

$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ec. planului det. de 3 puncte necoliniare: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ condiția de coplanaritate a 4 pct.: în loc de x, y, z scriem coordonatele noului pct.

Ec. prin tăieturi: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Distanța de la $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la π: $ax + by + cz + d = 0$

$$d = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Unghiul a 2 plane (unghiul dintre cei 2 vectori normali)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|} = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

DREAPTA (se notează cu Δ)

Ec. vectorială: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\cdot\vec{a}$ unde $\vec{a}$ vect director al dreptei

$\vec{r_0}$ vect. de poziție al unui pct. de pe dreaptă

Ec. parametrice $\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + m t \\ z = z_0 + n t \end{cases}$ $\Rightarrow \vec{a}(\ell, m, n)$ vect. director al dreptei

$\Rightarrow M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Delta$

Ec. canonică: $\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow$ aceleași concluzii

Dreapta ca intersecție a 2 planuri: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$

Ec. dreptei care trece prin 2 pct.: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$

* parametrică: $\begin{cases} x = x_1 + (x_2-x_1)t \\ y = y_1 + (y_2-y_1)t \\ z = z_1 + (z_2-z_1)t \end{cases}$

* canonică: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

* vectorială: $\vec{r} = \vec{r}_{M_1} + t\,\overrightarrow{M_1M_2}$

↳ vector de poz. al lui M_1 (putea fi și M_2)

Unghiul a 2 drepte (dintre cei 2 vectori directori)

$$\Delta_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \qquad \Delta_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a_1}(l_1, m_1, n_1) \cdot \vec{a_2}(l_2, m_2, n_2)}{\|\vec{a_1}\| \cdot \|\vec{a_2}\|}$$

$$\|\vec{a_1}\| = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}, \quad \|\vec{a_2}\| = \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}, \quad \vec{a_1} \cdot \vec{a_2} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

Distanța de la pct. M_0 ($\vec{OM_0} = \vec{r_1}$) la dreapta $\Delta: \vec{r} = \vec{r_0} + t \cdot \vec{a}$

$$d = \frac{\|(\vec{r_1} - \vec{r_0}) \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}$$

Poziția relativă a 2 drepte în spațiu $\Delta_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$

$$\Delta_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

fie: $\lambda: l_1 = \lambda l_2 \quad m_1 = \lambda m_2 \quad n_1 = \lambda n_2$

$\mu: x_2 - x_1 = \mu l_1 \quad y_2 - y_1 = \mu m_1 \quad z_2 - z_1 = \mu n_1$

1. dreptele coincid: $\exists \lambda, \exists \mu$
2. dreptele sunt paralele: $\exists \lambda, \nexists \mu$
3. dreptele sunt concurente: $\nexists \lambda$ și $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$

4. altfel dreptele sunt necoplanare

ALTELE

Poz. relativă a $\Delta: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ față de $\pi: ax+by+cz+d=0$ cu $\vec{n}(a,b,c)$

1. Se intersectează într-un punct: $\vec{a}(l,m,n)\cdot\vec{n}(a,b,c) \neq 0$
2. $\pi \parallel \Delta \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}$ și $ax_0+by_0+cz_0+d \neq 0$
3. $\Delta \in \pi \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n}$ și $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

Ec. unui plan det. de 2 drepte concurente: $\Delta_1: \frac{x-x_0}{l_1} = \frac{y-y_0}{m_1} = \frac{z-z_0}{n_1}$ $\Delta_2: \frac{x-x_0}{l_2} = \frac{y-y_0}{m_2} = \frac{z-z_0}{n_2}$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ec. unui plan det. de o dreaptă și un pct: $\Delta: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$

Ec. planului det. de 2 drepte paralele $\Delta_1: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ $\Delta_2: \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m} = \frac{z-z_2}{n}$

(aceeași ecuație)

Proiecția unei drepte pe un plan $\Delta: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ $\pi: ax+by+cz+d=0$

$$\Delta_{pr}: \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ intersecția a 2 plane

Ec. vectorială dată printr-un pct. și vectorul normal $\vec{n}$: $\pi: \vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r_0})=0$

Unghiul dintre o dreaptă $\Delta: \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow \vec{a}(l,m,n)$ și planul $\pi: ax+by+cz+d=0$

$\vec{n}(a,b,c)$

$$\sin\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{n}\|}$$

unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{n}$