Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 4: Dreapta în plan

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale unei drepte care:

(i) trece prin $M_0(1, 2)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3, -1)$;

(ii) trece prin originea coordonatelor şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{b}(3, 4)$;

(iii) trece prin $A(1, 7)$ şi este paralelă cu axa Oy;

(iv) trece prin punctele $M_1(2, 4)$ şi $M_2(2, -5)$.

Soluţie. (i) Se obţin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Se obţin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Vectorul director este, de data aceasta, $\mathbf{j}(0, 1)$, deci ecuaţiile sunt

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Vectorul director este, $\overrightarrow{M_1M_2}(0, -9)$, deci ecuaţiile sunt

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

Problema 2. O dreaptă este dată prin ecuaţiile parametrice $x = 1 - 4t, y = 2 + t$. Determinaţi vectorul director al dreptei.

Soluţie. Se observă imediat că un vector director este $\mathbf{v}(-4, 1)$. □

Problema 3. Scrieţi ecuaţia unei drepte care

(i) are coeficientul unghiular $k = -5$ şi trece prin punctul $A(1, -2)$;

(ii) are coeficientul unghiular $k = 8$ şi taie pe axa Oy un segment de lungime 2;

(iii) trece prin punctul $A(-2, 3)$ şi formează cu axa Ox un unghi de $60°$;

(iv) trece prin punctul $B(1, 7)$ şi este ortogonală pe vectorul $\mathbf{n}(4, 3)$.

Soluţie. (i) Ecuaţia care se obţine este

$$y + 2 = -5(x - 1)$$

sau

$$5x + y - 3 = 0.$$

(ii) Condiţia din enunţ înseamnă că dreapta trece fie prin punctul $A(0,2)$, fie prin punctul $B(0,-2)$. În primul caz, obţinem

$$y - 2 = 8x$$

sau

$$8x - y + 2 = 0.$$

În al doilea caz, avem

$$y + 2 = 8x$$

sau

$$8x - y - 2 = 0.$$

Dreptele sunt, în mod evident, paralele.

(iii) Se obţine ecuaţia

$$y - 3 = \operatorname{tg} 60^\circ (x + 2)$$

sau

$$y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$$

sau, încă,

$$\sqrt{3}x - y + 3 + 2\sqrt{3} = 0.$$

□

Problema 4. Se dă triunghiul ABC: $A(1,1), B(-2,3), C(4,7)$. Scrieţi ecuaţiile laturilor acestui triunghi, precum şi ecuaţia medianei care trece prin vârful A.

Soluţie.

$$AB: \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \iff \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{-2-1} \iff \frac{y-1}{2} = \frac{x-1}{-3}$$

sau

$$AB:\ -3y + 3 = 2x - 2$$

sau, încă

$$AB: 2x + 3y - 5 = 0.$$

$$BC: \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \iff \frac{y-3}{7-3} = \frac{x+2}{4+2} \iff \frac{y-3}{4} = \frac{x+2}{6}$$

sau

$$BC:\ 6y - 18 = 4x + 8$$

sau, încă

$$BC: 2x - 3y + 13 = 0.$$

$$CA: \frac{y - y_C}{y_A - y_C} = \frac{x - x_C}{x_A - x_C} \iff \frac{y-7}{1-7} = \frac{x-4}{1-4} \iff \frac{y-7}{-6} = \frac{x-4}{-3}$$

sau

$$CA:\ y - 7 = 2x - 8$$

sau, încă

$$CA: 2x - y - 1 = 0.$$

Fie, acum, A' mijlocul laturii BC. Atunci $A'(1,5)$, deci

$$AA': \frac{y - y_A}{y_{A'} - y_A} = \frac{x - x_A}{x_{A'} - x_A} \iff \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{-2-1} \iff \frac{y-1}{2} = \frac{x-1}{-3}$$

sau

$$AB:\ -3y+3=2x-2$$

sau, încă

$$AB: 2x+3y-5=0.$$

□

Problema 5. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-2,5)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente de lungimi egale.

Soluţie. Ecuaţia dreptei prin tăieturi este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0. \tag{1}$$

Condiţia problemei este ca $|a|=|b|$. Fie $c=|a|=|b|>0$. Avem patru cazuri posibile:

(i) a şi b sunt ambele strict pozitive. Atunci ecuaţia (1) se poate scrie

$$x+y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=3$, deci ecuaţia dreptei este

$$x+y-3=0.$$

(ii) $a>0$ şi $b<0$. Atunci ecuaţia (1) se poate scrie

$$x-y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=-7$, deci problema nu are soluţie în acest caz, deoarece noi am presupus că $c>0$.

(iii) $a<0$ şi $b>0$. Atunci ecuaţia (1) se poate scrie

$$-x+y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=7$, deci ecuaţia dreptei este

$$-x+y-7=0.$$

(iv) a şi b sunt ambele strict negative. Atunci ecuaţia (1) se poate scrie

$$-x-y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=-3$, deci nici în acest caz problema nu are soluţie.

□

Problema 6. Se dau mijloacele $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$, $M_3(5,-1)$ ale laturilor unui triunghi. Determinaţi ecuaţiile laturilor.

Soluţia 1. Notăm cu ABC triunghiul căutat, astfel încât M_1 este mijlocul lui BC, M_2 este mijlocul lui CA, iar M_3 este mijlocul lui AB. Din teorema liniei mijlocii într-un triunghi deducem imediat că:

- vectorul director al dreptei AB este $\overrightarrow{M_1M_2}(2,2)$;

- vectorul director al dreptei BC este $\overrightarrow{M_2M_3}(2,-5)$;
- vectorul director al dreptei CA este $\overrightarrow{M_3M_1}(4,-3)$.

Prin urmare,

- dreapta AB este dreapta care trece prin M_3 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_1M_2}(2,2)$, deci ecuaţia sa este
$$AB:\ \frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{2}$$
sau
$$AB:\ x-y-6=0.$$
- Dreapta BC este dreapta care trece prin M_1 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_2M_3}(2,-5)$, deci ecuaţia sa este
$$BC:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-5}$$
sau
$$BC:\ 5x+2y-9=0.$$
- Dreapta CA este dreapta care trece prin M_2 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_3M_1}(4,-3)$, deci ecuaţia sa este
$$CA:\ \frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{-3}$$
sau
$$CA:\ 3x+4y+25=0.$$

□

Soluţia 2. Folosim coordonatele mijloacelor pentru a determina coordonatele vârfurilor, apoi scriem ecuaţiile laturilor ca ecuaţii ale dreptelor care trec prin câte două vârfuri. □

Problema 7. Se dă un triunghi cu vârfurile $A(1,5)$, $B(-4,3)$ şi $C(2,9)$. Determinaţi ecuaţia înălţimii dusă din vârful A pe latura BC.

Soluţie. Trebuie, în fapt, să scriem ecuaţia dreptei care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC. Începem prin a scrie ecuaţia dreptei BC:
$$BC:\frac{y-y_B}{y_C-y_B}=\frac{x-x_B}{x_C-x_B}\iff\frac{y-3}{6}=\frac{x+4}{6}$$
sau
$$BC: x-y+7=0.$$
Fie d înălţimea care trece prin A. Atunci, pentru ca ea să fie perpendiculară pe BC, trebuie să aibă panta egală cu -1 (deoarece BC are panta egală cu 1), Avem, aşadar,
$$(d): y-y_A=-(x-x_A)\iff y-5=-(x-1)$$
sau
$$(d): x+y-6=0.$$

□

Problema 8. Determinaţi simetricul punctului $A(10,10)$ relativ la dreapta $3x+4y-20=0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este următoarea. Fie d dreapta dată. Ducem prin A o dreaptă perpendiculară pe dreapta d, fie ea d_1 şi notăm cu P piciorul perpendicularei. Atunci, dacă A' este simetricul lui A relativ la dreapta d, rezultă că P trebuie să fie mijlocul segmentului AA', aşadar coordonatele lui A' vor fi date de

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A. \end{cases}$$

SE observă imediat că panta dreptei d este egală cu $-3/4$, ceea ce înseamnă că panta perpendicularei d_1 este $4/3$. Prin urmare, ecuaţia dreptei d_1 este

$$(d_1) : y - 10 = \frac{4}{3}(x - 10)$$

sau

$$(d_1) : 4x - 3y - 10 = 0.$$

Prin urmare, pentru a determina coordonatele punctului P, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 3x + 4y - 20 = 0, \\ 4x - 3y - 10 = 0. \end{cases}$$

Se obţine, imediat, $P(4, 2)$. Prin urmare, obţinem

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A = -2, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A = -6. \end{cases}$$

□

Problema 9. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, -2)$ şi $C(5, 6)$.

Soluţie. Scriem ecuaţiile a două mediatoare şi determinăm punctul lor de intersecţie. Vom stabili ecuaţiile mediatoareloer laturilor BC şi CA. Mijlocul laturii BC este punctul $A'(4, 2)$, în timp ce mijlocul laturii CA este punctul $B'(3, 4)$. Panta laturii BC este

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{8}{2} = 4,$$

prin urmare, panta mediatoarei OA' este

$$k_{OA'} = -\frac{1}{4}.$$

Aşadar, ecuaţia dreptei OA' este

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 4)$$

sau

$$(OA') : x + 4y - 12 = 0.$$

Analog, se obţine uşor că pabta laturii CA este $k_{CA} = 1$, de unde rezultă ecuaţia dreptei OB':

$$(OC') : x + y - 7 = 0.$$

Astfel, coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + 4y - 12 = 0, \\ x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Se obţine uşor $O\left(\frac{16}{3}, \frac{5}{3}\right)$. □

Problema 10. Determinaţi unghiurile dreptelor:

1) $y = 2x + 1$ şi $y = -x + 2$;

2) $y = 3x - 4$ şi $x = 3 + t, y = -1 - 2t$;

3) $y = \frac{2}{5}x + 1$ şi $4x + 3y - 12 = 0$;

4) $2x + 3y = 0$ şi $x - y + 5 = 0$;

5) $x - 3y + 2 = 0$ şi $x = 2 - t, y = 3 + 2t$.

Soluţie. Menţionăm, de la bun început că, de fapt, calculul unghiului dintre două drepte este, de regulă ambiguu, pentru că el nu ia în considerare un sens de parcurgere pe fiecare dintre cele drepte, de aceea, calculul ne poate da fie un unghi ascuţit, fie unul obtuz (ceea ce este natural, întrucât două drepte în plan fac, în realitate, două unghiuri, unul ascuţit şi unul obtuz). Utilizând modulul, se poate determina cu uşurinţă unghiul ascuţit.

1) Folosim formula pentru determinarea unghiului folosind pantele. Panta primei drepte este $k_1 = 2$, în timp ce panta celei de-a doua drepte este $k_2 = -1$, deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 3,$$

deci unghiul (ascuţit) este $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

2) Folosim vectorii directori pentru a determina unghiul. Observăm, imediat, că ecuaţia primei drepte se poate scrie sub forma

$$3x - y - 4 = 0,$$

de unde vectorul director $v_1(1, 3)$. Vectorul director al celei de-a doua drepte se citeşte imediat din ecuaţiile parametrice. El este $v_2(1, -2)$. Aşadar, unghiul dintre drepte este dat de:

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{-5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

prin urmare, unghiul (obtuz) ditre cele două drepte este de $135°$ (deci unghiul ascuţit este de $45°$).

3) De data aceasta folosim ecuaţiile generale ale dreptelor. Prima dreaptă se aduce imediat la forma generală şi obţinem

$$2x - 5y + 5 = 0.$$

Astfel,

$$\cos \alpha = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{8 - 15}{\sqrt{4 + 25}\sqrt{16 + 9}} = -\frac{7}{5\sqrt{29}}.$$

Deci unghiul (obtuz) format de cele două drepte este $\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{29}}\right)$.

4) De data asta, ambele drepte sunt date direct prin forma generală, deci, aplicând formula de la punctul precedent, obţinem

$$\cos \alpha = \frac{2 - 3}{\sqrt{4 + 9}\sqrt{1 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{26}},$$

aşadar unghiul (obtuz) dintre cele două drepte este $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

5) Utilizăm, acum, vectorii directori ai celor două drepte. Se constată uşor că vectorul director al primei drepte este $\mathbf{v}_1(3, 1)$, în timp ce vectorul director al celei de-a doua drepte este $\mathbf{v}_2(-1, 2)$, deci unghiul lor este dat de

$$\cos \alpha = \frac{-3 + 2}{\sqrt{9 + 1}\sqrt{1 + 4}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

de unde rezultă că unghiul (obtuz) al dreptelor este $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$. □

Problema 11. Stabiliţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,1)$ şi formează cu dreapta $2x+3y-1=0$ un unghi de $45°$.

Soluţie. O dreaptă oarecare care trece prin $A(3,1)$ şi care formează un unghi de $45°$ cu dreapta dată nu poate fi verticală, pentru că atunci dreapta dată ar trebui să fie paralelă cu una dintre primele două bisectoare ale axelor, ceea ce, în mod evident, nu este cazul. Prin urmare, putem căuta dreapta sub forma

$$y-1=k_2(x-3).$$

Notăm cu k_1 panta dreptei date. În mod evident, $k_1=-\dfrac{2}{3}$. Atunci condiţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$1=\operatorname{tg}45°=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{k_2+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}k_2}\right|=\left|\frac{3k_2+2}{3-2k_2}\right|.$$

Dacă alegem semnul " $+$ ", suntem conduşi la ecuaţia

$$3k_2+2=3-2k_2$$

de unde $k_2=\dfrac{1}{5}$. Dacă alegem semnul " $-$ ", suntem conduşi la ecuaţia

$$3k_2+2=-3+2k_2,$$

adică avem $k_2=5$.

Remarcăm două lucruri. În primul rând, avem voie să înmulţim cu $3-k_2$, întrucât cele două drepte nu sunt perpendiculare. În al doilea rând, este de notat faptul că cele două pante obţinute corespund la două drepte perpendiculare, ceea ce este normal, deoarece dreptele asociate fac unghiuri de $45°$ cu dreapta dată, de o parte şi de alta a acesteia, deci unghiul dintre ele trebuie să fie de $90°$. Aceasta înseamnă, în fapt, că este suficient să determinăm o valoare a pantei, cealaltă rezultând automat. Desigur, totul este legat de valoarea particulară a unghiului dat, raţionamentul nu funcţionează pentru un unghi oarecare, pentru care trebuie neapărat să rezolvăm ambele ecuaţii.

Revenind la problema noastră, pentru prima pantă obţinem dreapta

$$y-1=-\frac{1}{5}(x-3)$$

sau

$$x+5y-8=0,$$

în timp pentru cea de-a doua pantă, obţinem dreapta

$$y-1=5(x-3)$$

sau

$$5x-y-14=0.$$

□

Problema 12. Determinaţi vârfurile şi unghiurile triunghiului care are laturile date de ecuaţiile $x+3y=0$,$x=3$, $x-2y+3=0$.

Soluţie. Notăm cu Δ_1,Δ_2, respectiv Δ_3 cele trei drepte, respectând ordinea din enunţ. Notăm $\{A\}=\Delta_2\cap\Delta_3$, $\{B\}=\Delta_1\cap\Delta_3$, respectiv $\{C\}=\Delta_1\cap\Delta_2$. Se obţine, imediat, rezolvând sistemele corespunzătoare de ecuaţii, $A(3,-1)$, $B\left(-\dfrac{9}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ şi $C(3,3)$.

Unghiul A este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Dar $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{8}{5}(-3,1)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (0,4) = 4(0,1)$. Prin urmare,

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Unghiul B este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{BA}- \equiv -\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$. Dar $\overrightarrow{BA} = \frac{8}{5}(3,-1)$, în timp ce

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}(2,1).$$

Astfel,

$$\cos B = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

prin urmare unghiul B este de $45°$.

În sfârşit, unghiul C este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, deci

$$\cos C = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

□

Problema 13. Se consideră triunghiul cu vârfurile $A(1,-2)$, $B(5,4)$ şi $C(-2,0)$. Stabiliţi ecuaţia bisectoarei interioare şi cea a bisectoarei exterioare corespunzătoare unghiului A.

Prima metodă. Bisectoarea interioară a unghiului A este bisectoarea u ghiului format de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Avem, înainte de toate $\overrightarrow{AB} = (4,6) = 2(2,3)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (-3,2)$. Vrem să determinăm vectorul director al bisectoatei. În acest scom considerăm doi vectori de aceeaşi direcţie şi sens cu cei doi vectori şi de aceeaşi lungime. Atunci suma acestor doi vectori va fi un vector director al bisectoarei interioare a unghiului A (paralelogramul construit pe cei doi vectori de aceeaşi lungime va fi un romb, ceea ce înseamnă că diagonalele sale vor fi şi bisectoare). Se observă imediat că vectorul $\mathbf{u} = (2,3)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\overrightarrow{AB}$. Modulul său este egal cu $\sqrt{13}$. Se observă imediat că modulul lui $\overrightarrow{AC}$ este, de asemenea, egal cu $\sqrt{13}$. Alegem, deci $\mathbf{v} = (-3,2)$. Asta înseamnă că un vector director al bisectoarei interioare este

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2,3) + (-3,2) = (-1,5),$$

prin urmare ecuaţia bisectoarei interioare este

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5}$$

sau

$$5x + y - 3 = 0.$$

Este clar că panta acestei drepte este egală cu -5. Bisectoarea exterioară este perpendiculară pe cea interioară, deci este dreapta care trece prin A şi are panta $1/5$, adică are ecuaţia

$$y + 2 = \frac{1}{5}(x-1)$$

sau

$$x - 5y - 11 = 0.$$

□

A doua metodă. De data aceasta plecăm de la definiţia bisectoarei unui unghi, ca fiind locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unui unghi. Menţionăm, însă, că acest loc geometric este format din două drepte, nu doar una singură (cele două bisctoare ale unghiului). În general, dacă avem două drepte, de ecuaţii generale $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, respectiv $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, atunci ecuaţia bisectoarelor este

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2 + B_2^2}}$$

sau

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2 + B_2^2}}.$$

Referindu-ne la cazul nostru concret, trebuie, mai întâi, să determinăm ecuaţiile laturilor AB şi AC ale triunghiului. Avem

$$AB : \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+2}{4+2} \iff \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{6}$$

sau

$$AB : 3x - 2y - 7 = 0.$$

Ecuaţia dreptei AC se obţine analog:

$$AC : \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{0+2} \iff \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2}$$

sau

$$AC : 2x + 3y + 4 = 0.$$

Ecuaţiile bisectoarelor vor fi, prin urmare,

$$\frac{3x - 2y - 7}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2x + 3y + 4}{\sqrt{13}}$$

sau

$$3x - 2y - 7 = \pm(2x + 3y + 4).$$

Dacă alegem semnul " $+$ ", obţinem dreapta de ecuaţie

$$x - 5y - 11 = 0,$$

în timp ce pentru semnul " $-$ " obţinem dreapta de ecuaţie

$$5x + y - 3 = 0.$$

Mai rămâne de stabilit care dintre dreptele obţinute este bisectoarea interioară şi care este bisectoarea exterioară. Bisectoarea interioară este, fireşte, cea pentru care punctele B şi C se află de părţi diferite faţă de această dreaptă (cu alte cuvinte, bisectoarea interioară care pleacă dintr-un vârf *separă* celelalte două vârfuri ale triunghiului).

Începem cu prima bisectoare obţinută şi notăm cu $P(x, y) \equiv x - 5y - 11$ mebrul stâng al ecuaţiei acestei drepte. Atunci faptul că B şi C se află de-o parte şi de alta a sa, înseamnă că P, evaluat pe coordonatele lui B şi cele ale lui C, are semne opuse.

Avem $P(5, 4) = 5 - 20 - 11 = -26 < 0$, în timp ce $P(-2, 0) = -2 - 11 = -13$, deci obţinem acelaşi semn, prin urmare această bisectoare este cea exterioară şi, în mod implicit, cealaltă este cea interioară. □

Problema 14. Determinaţi simetricul punctului $A(10, 10)$ relativ la dreapta $3x + 4y - 20 = 0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este următoarea. Fie d dreapta dată. Ducem prin A o dreaptă perpendiculară pe dreapta d, fie ea d_1 şi notăm cu P piciorul perpendicularei. Atunci, dacă A' este simetricul lui A relativ la dreapta d, rezultă că P trebuie să fie mijlocul segmentului AA', aşadar coordonatele lui A' vor fi date de

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A. \end{cases}$$

Se observă imediat că panta dreptei d este egală cu $-3/4$, ceea ce înseamnă că panta perpendicularei d_1 este $4/3$. Prin urmare, ecuaţia dreptei d_1 este

$$(d_1) : y - 10 = \frac{4}{3}(x - 10)$$

sau

$$(d_1) : 4x - 3y - 10 = 0.$$

Prin urmare, pentru a determina coordonatele punctului P, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 3x + 4y - 20 = 0, \\ 4x - 3y - 10 = 0. \end{cases}$$

Se obţine, imediat, $P(4, 2)$. Prin urmare, obţinem

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A = -2, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A = -6. \end{cases}$$

$\square$

Probleme propuse

Problema 15. Să se stabilească ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(8, 9)$, pentru care lungimea segmentului de pe dreaptă cuprins între dreptele $x - 2y + 5 = 0$ şi $x - 2y = 0$ este egală cu 5.

Problema 16. Determinaţi distanţele de la punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ şi $B(-5, 7)$ la dreapta $6x + 8y - 15 = 0$.

Problema 17. Abaterile unui punct M faţă de dreptele $5x - 12y - 13 = 0$ şi $3x - 4y - 19 = 0$ sunt egale, respectiv, cu -3 şi -5. Determinaţi coordonatele punctului M.

Problema 18. Determinaţi distanţele dintre dreptele paralele

1) $x - 2y + 3 = 0$ şi $2x - 4y + 7 = 0$;

2) $3x - 4y + 1 = 0$ şi $x = 1 + 4t, y = 3t$;

3) $x = 2 - t, y = -3 + 2t$ şi $x = 2s, y = 5 - 4s$.

Problema 19. Stabiliţi ecuaţia bisectoarei unghiului format de dreptele $x+2y-11 = 0$ şi $3x-6y-5 = 0$, care trece prin punctul $A(1, -3)$.

Problema 20. Demonstraţi că figura mărginită de dreptele $x-3y+1 = 0$, $x-3y+12 = 0$, $3x+y-1 = 0$ şi $3x + y + 10 = 0$ este un pătrat. Calculaţi-i aria.

Problema 21. Stabiliţi ecuaţiile laturilor unui triunghi cunoscând unul dintre vârfuri, $B(2, -1)$,precum şi ecuaţia unei înălţimi: $3x - 4y + 27 = 0$ şi a unei bisectoare: $x + 2y - 5 = 0$, provenind din vârfuri diferite.

Problema 22. Se dau ecuaţiile

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 5x + 4y - 17 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0.$$

Determinaţi ecuaţiile înălţimilor triunghiului, fără a determina coordonatele vârfurilor.

Indicaţie. Scrieţi ecuaţiile fasciculelor de drepte determinate de câte două laturi şi determinaţi parametrii în aşa fel încât dreapta din fascicul să fie perpendiculară pe cea de-a treia latură. □