Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 6: Dreapta şi planul în spaţiu (II)

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Pentru ce valori ale parametrilor reali a şi d dreapta

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$$

este situată în planul $ax+y-2z+d=0$?

Soluţie. Dreapta trebuie să fie paralelă cu planul şi un punct oaracare al său să aparţină planului. Dreapta este paralelă cu planul dacă vectorul său director $\mathbf{v}(3,2,-2)$ este perpendicular pe vectorul normal la plan $\mathbf{n}(a,1,-2)$. Aceasta se întâmplă dacă $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$, adică dacă

$$3a+2+4=0,$$

de unde obţinem că $a=-2$. Prin urmare, ecuaţia planului este

$$-2x+y-2z+d=0.$$

Remarcăm că punctul $A(2,-1,3)$ aparţine dreptei. Pentru ca el să aparţină şi planului, coordonatele sale trebuie să verifice ecuaţia planului, adică trebuie să avem

$$-4-1-6+d=0,$$

deci $d=11$, iar ecuaţia finală a planului este

$$-2x+y-2z+11=0.$$

□

Problema 2. Pentru ce valori ale parametrilor reali a şi c dreapta

$$\begin{cases}3x-2y+z+3=0\\4x-3y+4z+1=0\end{cases}$$

este perpendiculară pe planul $ax+8y+cz+2=0$?

Soluţie. Dreapta este perpendiculară pe plan dacă şi numai dacă vectorul său director este coliniar cu vectorul normal la plan. Aşa cum am făcut şi în cazul altor probleme, determinăm un vector director al dreptei calculând produsul vectorial al vectorilor normali la cele două plane care determină dreapta. Găsim imediat $\mathbf{n}_1(3,-2,1)$ şi $\mathbf{n}_2(4,-3,4)$,

$$\mathbf{v}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\3&-2&1\\4&-3&4\end{vmatrix}=(-5,-8,-1).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(a,8,c)$. Cei doi vectori sunt coliniari atunci când componentele lor sunt proporţionale, adică

$$\frac{a}{-5}=\frac{8}{-8}=\frac{c}{-1}$$

de unde rezultă că $a=5$ şi $c=1$. □

Problema 3. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin originea coordonatelor şi prin dreapta $x=1+3t, y=-2+4t, z=5-2t$.

Soluţie. Se observă imediat că punctul $A(1,-2,5)$ aparţine dreptei, iar vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(3,4,-2)$. Astfel, planul trece prin origine şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}$ şi $\overrightarrow{OA}(1,-2,5)$, deci ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$16x - 17y - 10z = 0.$$

□

Problema 4. Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului $A(2,11,-5)$ pe planul $x+4y-2z+7=0$.

Soluţie. Proiecţia este piciorul perpendicularei coborâte din A pe plan sau, altfel spus, punctul de intersecţie dintre această perpendiculară şi plan.

Ecuaţiile dreptei se obţin foarte simplu, pentru că ea este dreapta care trece prin A şi are ca vector director vectorul normal la plan $\mathbf{n}(1,4,-2)$. Astfel, ecuaţiile parametrice ale perpendicularei sunt

$$\begin{cases} x = 2+t, \\ y = 11+4t, \\ z = -5-2t. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia planului, obţinem

$$2+t+4(11+4t)-2(-5-2t)+7=0$$

sau

$$21t+63=0,$$

adică $t=-3$. Înlocuind în ecuaţiile dreptei, rezultă $x=-1$, $y=-1$, $z=1$, adică proiecţia punctului A este punctul $A_1(-1,-1,1)$. □

Problema 5. Determinaţi simetricul punctului $P(6,-5,5)$ relativ la planul $2x-3y+z-4=0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este să determinăm, mai întâi, ca în problema precedentă, proiecţia P_1 a punctului P pe plan. Atunci simetricul P' al lui P faţă de plan are proprietatea că P_1 este mijlocul segmentului PP', deci coordonatele lui P_1 sunt mediile aritmetice ale coordonatelor analoage ale lui P şi P'.

Vectorul director al dreptei PP_1, care este perpendiculară pe plan şi trece prin punctul P, este vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(2,-3,1)$, deci ecuaţiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} x = 6+2t, \\ y = -5-3t, \\ z = 5+t. \end{cases}$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia planului, obţinem

$$2(6+2t)-3(-5-3t)+5+t-4=0$$

sau

$$14t+28=0,$$

deci $t=-2$. Întorcându-ne la ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinem coordonatele lui P_1: $x_1=2$, $y_1=1$, $z_1=3$.

După cum am spus mai sus, P_1 este mijlocul segmentului PP', deci, pentru prima coordonată obţinem

$$x_1 = \frac{x_P + x_{P'}}{2},$$

de unde

$$x_{P'} = 2x_1 - x_P = -2.$$

Analog obţinem

$$y_{P'} = 2y_1 - y_P = 7$$

şi

$$z_{P'} = 2z_1 - z_P = 1.$$

Astfel, simetricul punctului P este punctul $P'(-2, 7, 1)$. □

Problema 6. Determinaţi simetricul punctului $P(-3, 1, -2)$ relativ la dreapta

$$\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0, \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Soluţie. Algoritmul este similar cu cel aplicat în cazul simetriei faţă de un plan. Paşii sunt următorii:

- ducem o perpendiculară pe dreapta dată care trece prin punctul dat;
- punctul de intersecţie a dreptelor de la punctul precedent este *proiecţia* punctului pe dreapta dată;
- ca şi în cazul simetriei faţă de un plan, simetriocul se obţine punând condiţia ca proiecţia să fie mijlocul segmentului determinat de punct şi simetricul său.

Pentru a construi o dreaptă care trece prin P şi este perpendiculară pe dreapta dată, intersectăm două plane: unul care trece prin dreapta dată şi prin punct şi unul care trece prin punct şi este perpendicular pe dreapta dată.

Pentru determinarea primului plan, folosim teoria fascicolelor de plane. Un plan oarecare care trece prin dreaptă este de forma

$$\lambda(4x - 3y - 13) + \mu(y - 2z + 5) = 0.$$

Dacă punem condiţia ca punctul P să aparţină planului, obţinem

$$(-12 - 3 - 13)\lambda + (1 + 4 + 5)\mu = 0$$

sau

$$-14\lambda + 5\mu = 0,$$

de unde

$$\mu = \frac{14}{5}\lambda.$$

Unul dintre cei doi parametrii este arbitrar, deci putem pune $\lambda = 5$ şi obţinem $\mu = 14$. Astfel, ecuaţia primului plan este

$$5(4x - 3y - 13) + 14(y - 2z + 5) = 0$$

sau

$$\pi_1 : 20x - y - 28z + 5 = 0.$$

Aşa cum am spus, al doilea plan trece prin punctul P şi este perpendicular pe dreapta dată, prin urmare vectorul său normal este vectorul director al dreptei. Pentru a determina un astfel de vector director, calculăm produsul vectorial al celor doi vectori normali la planele care definesc dreapta, $\mathbf{n}_1(4,-3,0)$ şi $\mathbf{n}_2(0,1,-2)$. Avem:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (6,8,4),$$

deci putem lua ca vector director vectorul $\mathbf{v}(3,4,2)$. Acest vector este, în acelaşi timp, vector normal la planul π_2 pe care îl căutăm, deci avem

$$\pi_2 : 3(x+3) + 4(y-1) + 2(z+3) = 0$$

sau

$$\pi_2 : 3x + 4y + 2z + 11 = 0.$$

Astfel, ecuaţiile dreptei care trece prin P şi este perpendiculară pe dreapta dată sunt

$$\Delta : \begin{cases} 20x - y - 28z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 11 = 0. \end{cases}$$

Pentru a determina proiecţia P_1 a punctului P pe dreapta dată, trebuie să intersectăm această dreaptă cu dreapta Δ, ceea ce înseamnă că coordonatele lui P_1 sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0, \\ y - 2z + 5 = 0, \\ 20x - y - 28z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 11 = 0. \end{cases}$$

Se obţine $P_1\left(\frac{17}{29}, -\frac{103}{29}, \frac{21}{29}\right)$.

Cum

$$x_{P_1} = \frac{x_P + x_{P'}}{2},$$

obţinem

$$x_{P'} = 2x_{P_1} - x_P = \frac{34}{29} + 3 = \frac{121}{29}.$$

Analog,

$$y_{P'} = 2y_{P_1} - y_P = -\frac{206}{29} - 1 = -\frac{235}{29}$$

şi

$$z_{P'} = 2z_{P_1} - z_P = \frac{42}{29} + 2 = \frac{100}{29}.$$

Astfel, simetricul lui P faţă de dreapta dată este punctul $P'\left(\frac{121}{29}, -\frac{235}{29}, \frac{100}{29}\right)$. $\square$

Problema 7. Stabiliţi dacă dreptele (d_1) şi (d_2) sunt strâmbe şi, în caz afirmativ, scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune şi calculaţi lungimea sa.

a) $(d_1) \begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ şi $(d_2) \begin{cases} 3x + y + z = 0, \\ x + y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$

b) $(d_1) \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$ şi $(d_2) \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ x + z - 4 = 0. \end{cases}$

Soluţie. a) Vom aduce mai întîi ecuaţiile celor două drepte la forma canonică. Începem cu prima dreaptă. Vectorii normali la cele două plane care o definesc sunt $\mathbf{n}_{11}(1,-1,1)$, respectiv $\mathbf{n}_{12}(2,-1,-1)$, deci un vector director al dreptei este

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2,3,1).$$

Se observă imediat că $M_1(-1,0,0)$ este un punct de pe această dreaptă. Prin urmare, ecuaţiile canonice ale primei drepte sunt

$$(\Delta_1): \ \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$$

Pentru a doua dreaptă, un vector director se calculează înmulţind vectorial vectorii normali $\mathbf{n}_{21}(3,1,1)$ şi $\mathbf{n}_{22}(1,1,-2)$ la planele care formează dreapta:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3,7,2).$$

Se observă (rezolvând sistemul de ecuaţii) că punctul $M_2(-2,5,1)$ este un punct de pe a doua dreaptă, deci ecuaţiile sale canonice se pot scrie

$$(\Delta_2): \ \frac{x+2}{-3} = \frac{y-5}{7} = \frac{z-1}{2}.$$

După cum ştim, dreptele sunt coplanare dacă şi numai dacă determinantul

$$\delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

se anulează.

În cazul nostru concret,

$$\delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -11 \neq 0,$$

deci cele două drepte sunt necoplanare (strâmbe).

Mai departe procedăm ca şi în cazul unei probleme rezolvate mai devreme. Calculăm, mai întâi vectorul director al perpendicularei comune

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = (-1,-7,23).$$

Scriem acum ecuaţia planului care trece prin prima dreaptă şi este perpendicular pe a doua dreaptă

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$76(x+1) - 47y - 11z = 0$$

sau, în fine,

$$\pi_1 : \ 76x - 47y - 11z + 76 = 0.$$

Analog, ecuaţia celui de-al doilea plan, care trece prin a doua dreaptă şi este perpendicular pe prima dreaptă va avea ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-5 & z-1 \\ -3 & 7 & 2 \\ -1 & -7 & 23 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$175(x+2) + 67(y-5) + 28(z-1) = 0$$

sau, în fine,

$$\pi_2 : \ 175x + 67y + 28z - 13 = 0.$$

Astfel, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\begin{cases} 76x - 47y - 11z + 76 = 0, \\ 175x + 67y + 28z - 13 = 0. \end{cases}$$

În fine, lungimea perpendicularei comune (distanţa dintre cele două drepte necoplanare) este

$$d = \frac{|\delta|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|} = \frac{11}{\sqrt{1+49+529}} = \frac{11}{\sqrt{579}}.$$

b) Se rezolvă analog cu punctul a). □

Problema 8. Determinaţi distanţa de la punctul $P(2,3,-1)$ la dreapta de ecuaţie

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+25}{-2}.$$

Soluţie. Punctul $A(5,0,-25)$ aparţine dreptei, iar vectorul $\mathbf{v}(3,2,-2)$. Distanţa de la punct la dreaptă este

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Avem $\overrightarrow{AP} = (-3,3,24)$, deci

$$\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 3 & 24 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3(-18, 22, 5),$$

deci

$$\|\overrightarrow{AP} \times \mathbf{v}\| = 3\sqrt{324+484+25} = 21\sqrt{17},$$

în timp ce $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{17}$, deci

$$d = \frac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 21.$$

□

Problema 9. Determinaţi ecuaţiile planelor care trec prin punctele $P(0,2,0)$ şi $Q(-1,0,0)$ şi care formează un unghi de 60° cu axa Oz.

Soluţie. Scriem, mai întâi, ecuaţiile canonice ale dreptei QP. Ea va avea vectorul director $\overrightarrow{QP}(2,1)$, deci ecuaţiile sale vor fi

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0},$$

deci ecuaţiile dreptei ca intersecţie de două plane se poate scrie

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Vom folosi teoria fascicolelor de plane. Un plan poarecare ce trece prin dreapta QP se poate scrie sub forma

$$\lambda(x - 2y + 1) + \mu z = 0$$

sau

$$\lambda x - 2\lambda y + \mu z + \lambda = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(\lambda, -2\lambda, \mu)$. Planul formează un unghi de $60°$ cu axa Oz dacă acest vector formează un unghi de $60°$ cu vectorul $\mathbf{k}$. Avem, prin urmare, relaţia

$$\frac{1}{2} = \frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|\cdot\|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mu|}{\sqrt{5\lambda^2+\mu^2}},$$

de unde

$$5\lambda^2 = 3\mu^2,$$

deci

$$\mu = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\lambda.$$

Dacă alegem semnul "+" şi alegem $\lambda = \sqrt{3}$, atunci $\mu = \sqrt{5}$ şi obţinem planul

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{5}z + \sqrt{3} = 0.$$

Dacă alegem semnul "-" şi alegem $\lambda = \sqrt{3}$, atunci $\mu = -\sqrt{5}$ şi obţinem planul

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y - \sqrt{5}z + \sqrt{3} = 0.$$

□

Probleme propuse

Problema 10. Verificaţi că dreapta $x = 8 + 5t, y = 1 + 2t, z = 6 + 4t$ se intersectează cu dreapta $x = 11 + 3s, y = 2 + s, z = 4 - 2s$ şi stabiliţi ecuaţia planului determinat de ele.

Problema 11. Determinaţi ecuaţia planului care trece prin punctul $A(1, 2, -2)$ şi este perpendicular pe dreapta

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-6} = \frac{z-3}{2}.$$

Problema 12. Determinaţi simetricul punctului $Q(4, -5, 4)$ relativ la planul care trece prin dreptele

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y = 0 \end{cases} .$$

Problema 13. Determinaţi ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

şi $x = -1 + 3t, y = 2 + 2t, z = 1$.

Problema 14. Stabiliţi poziţia relativă a planelor:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 7 = 0, \\ x + 4y - 2z - 7 = 0, \\ x - 22y + 12z - 9 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 7 = 0, \\ x + 3y + 2z - 5 = 0, \\ -3x + 6y - 6z - 5 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + z - 3 = 0, \\ 2x + y - 3z + 12 = 0, \\ x + 3y + z - 9 = 0. \end{cases}$

Problema 15. Determinaţi distanţa dintre dreptele paralele

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$$

Problema 16. Se dă teraedrul $ABCD$ cu $A(3, -1, 4)$, $B(4, -4, -4)$, $C(1, -2, 4)$, $D(-2, -4, -2)$.

a) Determinaţi piciorul înălţimii E, coborâte din vârful D pe baza ABC.

b) Determinaţi unghiurile dintre planul triunghiului ABC şi planele de coordonate.

Problema 17. Determinaţi ecuaţia planului care trece prin dreptele paralele

$$\frac{x-10}{8} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{4}$$

şi

$$\frac{x+10}{8} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+2}{4}.$$