Geometrie pentru informaticieni

Seminarul 7: Elipsa

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Stabiliţi ecuaţia unei elipse ale cărei focare se află pe axa Oy şi sunt simetrice faţă de origine în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) semiaxele sunt egale, respectiv, cu 5 şi 3;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar axa mare este egală cu 10;

3) axa mare este egală cu 26, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Soluţie. 1) ecuaţia este
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Avem $c = 3$. Dar $3 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - b^2}$, de unde rezultâ că $b^2 = 16$, adică $b = 4$. Ecuaţia elipsei va fi, deci,
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) Avem $a = 13$,
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{13}\sqrt{169 - b^2} = \frac{12}{13}.$$
De aici deducem imediat că $b = 5$, deci ecuaţia elipsei este
$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

□

Problema 2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa
$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$
care sunt paralele cu dreapta
$$3x + 2y + 7 = 0.$$

Prima soluţie. Scriem ecuaţia tangentei prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct de pe elipsă. Ecuaţia tangentei în M_0 este
$$\frac{xx_0}{10} + \frac{yy_0}{5} = 1.$$
Tangenta este paralelă cu dreapta dată dacă şi numai dacă vectorii normali la cele două drepte sunt paraleli, adică avem
$$\frac{\frac{x_0}{10}}{3} = \frac{\frac{y_0}{5}}{2}$$
sau
$$x_0 = 3y_0.$$
Pe de altă parte, punctul M_0 este pe elipsă, deci avem
$$\frac{x_0^2}{10} + \frac{y_0^2}{5} = 1.$$

Suntem, astfel, conduşi la sistemul
$$\begin{cases} x_0 = 3y_0, \\ \dfrac{x_0^2}{10} + \dfrac{y_0^2}{5} = 1. \end{cases}$$
Dacă înlocuim prima ecuaţie în a doua, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$11y_0^2 = 10,$$

ceea ce înseamnă că cele două soluţii ale sistemului sunt coordonatele punctelor (de pe elipsă!) $M_{01}\left(3\sqrt{\frac{10}{11}}, \sqrt{\frac{10}{11}}\right)$ şi $M_{02}\left(-3\sqrt{\frac{10}{11}}, -\sqrt{\frac{10}{11}}\right)$. Dacă înlocuim coordonatele celor două puncte de contact în ecuaţia tangentei prin dedublare, obţinem, după un calcul simplu, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată:
$$3x + 2y \pm \sqrt{110} = 0.$$

□

Soluţia a doua. Se ştie (vezi cursul) că tangentele la elipsa de semiaxe a şi b, paralele cu o dreaptă de pantă k au ecuaţiile
$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$
În cazul nostru, în mod evident, panta este $k = -3/2$, semiaxa mare este $a = \sqrt{10}$, iar semiaxa mică este $b = \sqrt{5}$. Prin urmare, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată vor fi

$$y = -\frac{3}{2}x \pm \sqrt{10 \cdot \frac{9}{4} + 5}$$

sau
$$3x + 2y \pm \sqrt{110} = 0,$$

adică tocmai ecuaţiile pe care le-am obţinut mai sus, prin medoda dedublării. □

Observaţie. Deşi ambele metode utilizate sunt corecte, dacă nu ni se cere să determinăm şi punctele de contact, cea de-a doua medodă este, fireşte, mult mai economică şi o vom folosi întotdeauna pentru rezolvarea unor probleme de acest tip.

Problema 3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$x^2 + 4y^2 = 20$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$(d) : 2x - 2y - 13 = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia canonică a elipsei este, în mod evident,

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

deci $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Panta dreptei d este egală cu 1. Cum tangentele trebuie să fie perpendiculare pe dreaptă, înseamnă că panta lor trebuie să fie egală cu -1, aşadar ele două tangente vor avea ecuaţiile

$$y = -x \pm \sqrt{20 \cdot 1 + 5}$$

sau
$$x + y \pm 5 = 0.$$

□

Problema 4. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$4x-2y+23=0$$

şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Avem $a^2=30$, $b^2=24$. Panta dreptei (care coincide cu panta tangentelor) este egalâ cu 2. Prin urmare, ecuaţiile celor două drepte paralele cu dreapta dată vor fi

$$y=2x\pm\sqrt{30\cdot 4+24}$$

sau

$$2x-y\pm 12=0.$$

Fie, acum, t_1 şi t_2 cele două tangente:

$$t_1: 2x-y+12=0,$$

$$t_2: 2x-y-12=0.$$

Avem două posibilităţi de a determina distanţa dintre cele două drepte (paralele!):

- Determinăm un punct M_1 de pe dreapta t_1 şi apoi calculăm distanţa de la acest punct până la dreapta t_2. Dacă, de exemplu, punem, în ecuaţia dreptei t_1, $x=0$, obţinem $y=12$, deci găsim punctul $M_1(0,12)$. Atunci

$$d(M_1,t_2)=\frac{|2\cdot 0-12-12|}{\sqrt{4+1}}=\frac{24}{\sqrt{5}}.$$

- Scriem ecuaţiile celor două tangente sun forma normală (Hesse). Atunci termenii liberi (cu semn schimbat) vor reprezenta distanţele de la origine până la tangente, prin urmare, distanţa dintre cele două tangente este suma distanţelor de la origine până la ele, dacă ele nu sunt de aceeaşi parte a originii (adică originea se află între ele) sau modulul diferenţei distanţelor de la origine la tangente, dacă ele se află de aceeaşi parte a originii.

  Avem

$$t_1: -\frac{2}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{12}{\sqrt{5}}=0,$$
$$t_2: \frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{12}{\sqrt{5}}=0.$$

  În mod clar, tangentele nu se află de aceeaşi parte a originii, deci avem

$$d(t_1,t_2)=\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{12}{\sqrt{5}}=\frac{24}{\sqrt{5}}.$$

□

Problema 5. Din punctul $A\left(\frac{10}{3},\frac{5}{3}\right)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1.$$

Scrieţi ecuaţiile lor.

Soluţie. Un calcul simplu ne arată că A este exterior elipsei, deci punem, într-adevăr, duce *două* tangente din A la elipsă. Constăm, de asemenea, că A nu se află pe o dreaptă verticală care să treacă prinrt-unul dintre capetele axei mari (orizontale) a elipsei, deci nici una dintre tangente nu va fi verticalâ.

Considerăm acum o tangentă la elipsă de pantă k (care urmează a fi determinată). După cum se ştie, o astfel de tangentă va avea ecuaţia

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$

sau, în cazul nostru concret,

$$y - kx = \pm\sqrt{10k^2 + 5}. \tag{1}$$

Dacă ridicăm la pătrat ecuaţia (1), obţinem

$$y^2 - 2kxy + k^2x^2 = 10k^2 + 5.$$

Dacă punem condiţia ca tangenta să treacă prin A, ecuaţia de mai sus devine:

$$\frac{25}{9} - 2 \cdot \frac{50}{9}k + \frac{100}{9}k^2 = 10k^2 + 5,$$

ceea ce ne conduce la ecuaţia în k

$$k^2 - 10k - 2 = 0, \tag{2}$$

ale cărei soluţii sunt

$$k_1 = 5 + 3\sqrt{3} \quad \text{şi} \quad k_2 = 5 - 3\sqrt{3}.$$

Aşadar, ecuaţia primei tangente este

$$y - \frac{5}{3} = (5 + 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$

iar ecuaţia celei de-a doua tangente este

$$y - \frac{5}{3} = (5 - 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$

□

Problema 6. Din punctul $C\,(10, -8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Soluţie. Întrucât, de data aceasta, nu ni se cer ecuaţiile tangentelor ci punctele de contact, procedăm altfel decât în cazul problemei precedente. Remarcăm, şi de data aceasta, că punctul C este situat în afara elipsei şi nu este situat pe una dintre tangentele verticale la aceasta.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia elipsei sub forma

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0, y_0)$ al elipsei se scrie sub forma

$$16xx_0 + 25yy_0 - 400 = 0.$$

Cum tangenta trebuie să treacă prin punctul C, coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia tangentei, prin urmare avem

$$160x_0 - 200y_0 - 400 = 0$$

sau

$$4x_0 - 5y_0 - 10 = 0. \tag{3}$$

Noi vrem să determinâm coordonatele punctului M_0, prin urmare avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta rezultă din faptul că punctul se află pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia elipsei. Suntem conduşi, aşadar, la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 16x_0^2 + 25y_0^2 - 400 = 0, \\ 4x_0 - 5y_0 - 10 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Sistemul (4) este uşor de rzolvat şi ne conduce la soluţiile

$$x_{01,2} = \frac{5}{4}\left(1 \pm \sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad y_{01,2} = -1 \pm \sqrt{7}.$$

Aşadar punctele de intersecţie cu elipsa a celor două tangente din C sunt

$$M_1\left(\frac{5}{4}\left(1 - \sqrt{7}\right), -1 + \sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{4}\left(1 - \sqrt{7}\right), -1 - \sqrt{7}\right).$$

Dreapta determinată de punctele de contact este dreapta M_1M_2:

$$\frac{x - \frac{5}{4}(1 + \sqrt{7})}{\frac{5}{4}(1 - \sqrt{7}) - \frac{5}{4}(1 + \sqrt{7})} = \frac{y - (-1 + \sqrt{7})}{-1 - \sqrt{7} - (-1 + \sqrt{7})}$$

sau

$$\frac{x - \frac{5}{4}(1 + \sqrt{7})}{\frac{5}{2}} = \frac{y - (-1 + \sqrt{7})}{2},$$

de unde

$$2x - \frac{5}{2}\left(1 + \sqrt{7}\right) = \frac{5}{2}y - \frac{5}{2}\left(-1 + \sqrt{7}\right)$$

sau

$$2x - \frac{5}{2}y - 5 = 0$$

sau, în fine,

$$M_1M_2 : 4x - 5y - 10 = 0.$$

□

Problema 7. O elipsă trece prin punctul $A(4, -1)$ şi este tangentă dreptei $x + 4y - 10 = 0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sau

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{5}$$

Ceea ce trebuie să facem este să determinăm semiaxele (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Avem nevoie, deci, de două ecuaţii. Prima o obţinem din condiţia ca punctul A să aparţină elipsei, adică

$$a^2 + 16b^2 = a^2b^2. \tag{6}$$

Întrucât dreapta dată este tangentă la elipsă, sistemul de ecuaţii care ne dă punctul de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă trebuie să aibă soluţie dublă, deoarece contactul de tangenţă înseamnă că dreapta şi elipsa au două puncte comune confundate. Acest sistem de ecuaţii este

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \\ x + 4y - 10 = 0. \end{cases}$$

Dacă înlocuim pe x din a doua ecuaţie în prima (adică punem în prima ecuaţie $x = -2(2y-5)$), obţinem ecuaţia de gradul doi în y

$$\left(a^2 + 16vb^2\right) y^2 - 80b^2y + b^2(100 - a^2) = 0.$$

Pentru ca sistemul de mai sus să aibă soluţie dublă (mai precis, să furnizeze puncte de contact confundate), discriminantul ecuaţie de gradul doi în y trebuie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$\Delta \equiv 4a^2b^2 \left(a^2 + 16b^2 - 100\right) = 0.$$

Dar a şi b sunt semiaxele unei elipse, deci trebuie să fie numere reale strict pozitive, aşadar din condiţia de mai sus obţinem ecuaţia în a şi b

$$a^2 + 16b^2 = 100 \tag{7}$$

Aşadar, pentru a determina semiaxele elipsei care îndeplineşte cerinţele problemei, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii următor (pe care îl privim ca fiind un sistem în a^2 şi b^2):

$$\begin{cases} a^2 + 16b^2 = a^2b^2, \\ a^2 + 16b^2 = 100. \end{cases} \tag{8}$$

Sistemul (8) este foarte uşor de rezolvat şi ne conduce la soluţiile

$$a^2 = 80,\ b^2 = \frac{5}{4},$$

respectiv

$$a^2 = 20,\ b^2 = 5.$$

Ambele soluţii sunt acceptabile (în sensul că, în ambele situaţii, a^2 şi b^2 sunt numere strict pozitive) şi ne conduc la cele două soluţii ale problemei:

$$\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1,$$

respectiv

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

$\square$

Problema 8. Determinaţi ecuaţia unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate şi care este tangentă dreptelor $3x - 2y - 20 = 0$ şi $x + 6y - 20 = 0$.

Soluţie. Considerăm elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Pentru a determina elipsa, trebuie să determminăm semieaxele lor, a şi b (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Vom stabili mai întâi o condiţie necesară şi suficientă ca o dreaptă dată prin ecuaţia generală

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangentă elipsei. După cum am mai văzut, această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul de ecuaţii care determină punctele de contact dintre elipsă şi dreaptă să aibă soluţie dublă. Este vorba despre sistemul

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ Ax + By + C = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Să presupunem că, în a doua ecuaţie din sistemul (9), coeficientul B este nenul. Atunci putem scrie

$$y = -\frac{Ax + C}{B}$$

şin după înlocuirea în prima ecuaţie a sistemului, obţinem ecuaţia de gradul al doilea în x

$$\left(a^2A^2 + b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(C^2 - b^2B^2\right) = 0. \tag{10}$$

Condiţia pe care trebuie să o punem este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să se anuleze. Un calcul simplu ne conduce la

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2\right). \tag{11}$$

Din relaţia (11) rezultă că Δ se anulează dacă şi numai dacă

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2. \tag{12}$$

Exact aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.ăţia (12) celor două drepte din enunţ şi obţinem, pentru a^2 şi b^2 sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 400, \\ a^2 + 36b^2 = 400. \end{cases} \tag{13}$$

Sistemul (13) este liniar în a^2 şi b^2 şi rezolvarea lui ne conduce la $a^2 = 40, b^2 = 10$, adică elipsa căutată are ecuaţia

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

□

Probleme propuse

Problema 9. Determinaţi ecuaţiile canonice ale elipsei pentru care coarda care uneşte două vârfuri succesive este de lungime 5, iar unghiul pe care îl face această coardă cu axa mare a elipsei est este de $\arcsin\frac{3}{5}$. Axele elipsei sunt axele de coordonate.

Problema 10. Scrieţi ecuaţia canonică a elipsei care are un vârf în punctul $A(6,0)$ şi trece prin punctul $P\left(2, \frac{4}{3}\sqrt{10}\right)$. Calculaţi aria pătratului ale cărui vârfuri sunt intersecţiile elipsei cu dreptele de ecuaţii $y = \pm x$.

Problema 11. Determinaţi ecuaţia canonică a elipsei pentru care axa mare este de două ori mai mare decât axa mică, iar dreptunghiul înscris în ea şi care are o latură pe dreapta $y = 2$ are perimetrul egal cu 20.

Problema 12. Se ştie că dreapta $4x - 5y - 40 = 0$ este tangentă elipsei $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{32} = 1$. Determinaţi punctul de tangenţă.

Problema 13. O elipsă este tangentă la dreptele $x + y - 5 = 0$ şi $x - 4y - 10 = 0$. Determinaţi ecuaţia canonică a elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Problema 14. Determinaţi tangentele la elipsa $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ care trec prin punctul $(-3, 1)$.

Problema 15. Se dă elipsa $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. Să se ducă prin punctul $A(1, 1)$ o coardă care să aibă punctul A ca mijloc.