MODEL CURS

1. Determinați tangentele la elipsa $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, care face un unghi de $45°$ cu dreapta $d: x+3y+3=0$.

$y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$ unde $k \to$ panta tangentei $a^2=30,\ b^2=24$

k_0 - panta lui d $\quad k_0=-\frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$

$tg\,45°=\left|\frac{k-k_0}{1+kk_0}\right| \Leftrightarrow 1=\left|\frac{k+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}k}\right| \Leftrightarrow |3k+1|=|3-k|$

I. $3k+1=3-k \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

II. $3k+1=k-3 \Rightarrow k=-2$

I. $y_1=\frac{1}{2}x_1\pm\sqrt{30\cdot\frac{1}{4}+24}=\frac{1}{2}x_1\pm\sqrt{\frac{15+48}{2}}=\frac{1}{2}x_2\pm\sqrt{\frac{63}{2}}=\frac{1}{2}x_2\pm3\sqrt{\frac{7}{2}}$

II. $y_2=-2x_2\pm\sqrt{30\cdot4+24}=-2x_1\pm\sqrt{144}=-2x_1\pm12$

2. Stabiliți ecuația hiperbolei care are ca asimptote dreptele $\pm y+\sqrt{3x}=0$ și este tangentă dreptei $d: 2x-y-3=0$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, iar asimptotele $y=\pm\frac{b}{a}x$

$y=\pm\sqrt{3}x \Rightarrow \frac{b}{a}=\sqrt{3} \Rightarrow b=\sqrt{3}a \Rightarrow b^2=3a^2$

$y=2x-3$ (din a 2-a) $\Rightarrow$ înlocuim în formula generală

$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$

$b^2x^2-a^2(2x-3)^2-a^2b^2=0$

$b^2x^2-a^2(4x^2-12x+9)-a^2b^2=0 \Leftrightarrow x^2(b^2-4a^2)+12a^2x-a^2(9+b^2)=0$

? $\Delta=0$; $\Delta=12a^2+4a^2(9+b^2)(b^2-4a^2)=144a^4+4a^2(9b^2-36a^2+b^4-4a^2b^2)$

cond. compatibilitate

$\Rightarrow 4a^2b^2(9+b^2-4a^2)=0 \Leftrightarrow 72a^2-9b^2+b^4-4b^2=0$

înlocuim $b^2=3a^2$

$\Rightarrow 72a^2-27a^2+9a^4-12a^2=0$

$45a^2-3a^4=0 \Rightarrow a$ apoi b

3. Stabiliți ecuația planului care intersectează hiperboloidul $x^2+4y^2-9z^2=36$ după 2 drepte care se intersectează în $M(6,-3,2)$.

$$x^2-9z^2=36-4y^2 \Leftrightarrow (x-3z)(x+3z)=(6-2y)(6+2y)$$

$$\text{I} \begin{cases} \lambda(x+3z)=\mu(6+2y) \\ \mu(x-3z)=\lambda(6-2y) \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} \beta(x+3z)=\alpha(6-2y) \\ \alpha(x-3z)=\beta(6+2y) \end{cases}$$

$$\text{I}.\ \Delta_1: \begin{cases} \lambda x+3z\lambda-6\mu-2y\mu=0 \\ x\mu-3z\mu-6\lambda+2\lambda y=0 \end{cases}$$

$$\text{II}.\ \Delta_2: \begin{cases} \alpha x-3z\alpha-6\beta-2y\beta=0 \\ \beta x+3z\beta-6\alpha+2y\alpha=0 \end{cases}$$

..... înlocuim x, y, z cu $6, -3, 2$ .....

$$\Delta_1: \begin{cases} 6\lambda+6\lambda-\cancel{6\mu}+\cancel{6\mu}=0 \Rightarrow \lambda=0 \\ 6\mu-6\lambda-6\mu-6\lambda=0 \end{cases}$$ alegem $\mu=1$

$$\Delta_2: \begin{cases} \cancel{6\alpha}-\cancel{6\alpha}-\cancel{6\beta}+\cancel{6\beta}=0 \\ 6\beta+6\beta-6\alpha-6\alpha=0 \ /:12 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha=\beta$ alegem $\alpha=\beta=1$

! înlocuim înapoi $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ în Δ_1 și Δ_2

$$\Delta_1: \begin{cases} -6-2y=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3=0 \\ x-3z=0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i}-\vec{k} \Rightarrow (-3,0,-1)=\vec{v_1}$$

alegem $\vec{v_1}=(3,0,1)$ vect. director

$$\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\Delta_2: \begin{cases} x-3z-2y-6=0 \\ x+3z-6+2y=0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow (0,6,-4)=\vec{v_2} \Rightarrow \text{alegem } (0,3,-2)=\vec{v_2} \text{ vect. director}$$

scriem determinantul pt. a afla ecuația planului:

$$\begin{vmatrix} x-6 & y-(-3) & z-2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x-2y-3z-6=0$$

4. Se dă paraboloidul $x^2-y^2=2z$ și planul $\pi: x+y+z-1=0$. Det. ecuația unui plan paralel cu π care taie hiperboloidul după 2 drepte. Det. ecuațiile acestor drepte și unghiul dintre ele.

$(x-y)(x+y)=2z \Rightarrow \text{I}\begin{cases}\lambda(x+y)=\mu z\\ \mu(x-y)=2\lambda\end{cases}$ $\quad \text{II}\begin{cases}\alpha(x-y)=\beta z\\ \beta(x+y)=2\alpha\end{cases}$

$\Delta_1: \begin{cases}\lambda x+\lambda y-\mu z=0\\ \mu x-\mu y-2\lambda=0\end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \lambda & \lambda & -\mu\\ \mu & -\mu & 0\end{vmatrix} = (-\mu^2, -\mu^2, -2\lambda\mu) \,/ : -\mu$

alegem vectorul normal $\vec{n}(1,1,1) \in \pi$ $\quad \Rightarrow \vec{v_1}(\mu, \mu, 2\lambda)$

$\vec{v_1} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v_1}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \mu+\mu+2\lambda=0 \Rightarrow \mu=-\lambda$ alegem $\lambda=1$ și $\mu=-1$

$\Rightarrow \vec{v_1}(-1,-1,2)$

$\Delta_2: \begin{cases}\alpha x-\alpha y-\beta z=0\\ \beta x+\beta y-2\alpha=0\end{cases}$ $\quad \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \alpha & -\alpha & -\beta\\ \beta & \beta & 0\end{vmatrix} = (\beta^2, -\beta^2, 2\alpha\beta) \,/ : \beta$

$\Rightarrow \vec{v_2}(\beta, -\beta, 2\alpha)$

alegem iar vect. normal $\vec{n}(1,1,1) \in \pi$

$\vec{v_2} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{v_2}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \beta-\beta+2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow$ alegem $\beta=1 \Rightarrow \vec{v_2}(1,-1,0)$

scriem determinantul pt. a afla ecuația planului: $\begin{vmatrix}x & y & z\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y+z=0$

$(0,0,0) \in$ planului $(\in \Delta_2, \in \Delta_1)$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|\,\|\vec{v_2}\|}$ $\quad \vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = -1\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 0=0 \Rightarrow$ drepte $\perp$