Geometrie pentru informaticieni

Seminarul 9: Cuadrice pe ecuaţia redusă

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Să se determine punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu dreapta

$$x = 4 + 2t,\ y = -6 - 3t,\ z = -2 - 2t.$$

Soluţie. Dacă înlocuim ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia elipsoidului, obţinem

$$\frac{4(2+t)^2}{16} + \frac{9(2+t)^2}{12} + \frac{4(1+t)^2}{4} = 1$$

sau

$$(2+t)^2 + (1+t)^2 - 1 = 0,$$

de unde

$$t^2 + 3t + 2 = 0.$$

Ecuaţia are ca soluţii $t = -2$ şi $t = -1$. Dacă înlocuim în ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinem punctele de intersecţie $M_1(0, 0, 2)$ şi $M_2(2, -3, 0)$. □

Problema 2. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$$

în punctul $M(2, 3, 1)$. Să se arate că acest plan tangent taie suprafaţa după două drepte reale şi să se calculeze unghiul format de cele două drepte.

Soluţie. Remarcăm, înainte de toate, că punctul M aparţine, într-adevăr, hiperboloidului (coordonatele sale verificând ecuaţia acestuia). Ecuaţia planului tangent se scrie prin dedublare:

$$\frac{2x}{4} + \frac{3y}{9} - \frac{1 \cdot z}{1} - 1 = 0$$

sau

$$3x + 4y - 6z - 6 = 0.$$

□

Problema 3. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente în punctele de intersecţie ale dreptei $x = y = z$ cu:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 9z$;

b) paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 9z$.

Soluţie. a) Determinăm, mai întîi, punctele de intersecţie. Suntem conduşi la ecuaţia

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 9x$$

sau

$$x^2 - 12x = 0,$$

ceea ce ne conduce la punctele $M_1(0,0,0)$ şi $M_2(12,12,12)$. Ecuaţiile planbelor tangente se scriu prin dedublare. Pentru M_1 se obţine, evident:

$$\pi_1:\ z=0,$$

în timp ce pentru M_2 se obţine

$$\pi_2:\ \frac{12x}{2}+\frac{12y}{4}=\frac{9}{2}(z+12)$$

sau

$$\pi_2:\ 4x+2y-3z-36=0.$$

b) Exact ca mai sus, se obţin punctele de intersecţie $M_1(0,0,0)$ şi $M_2(36,36,36)$, deci planele tangente vor fi

$$\pi_1:\ z=0,$$

$$\pi_2:\ \frac{36x}{2}-\frac{36y}{4}=\frac{9}{2}(z+36)$$

sau

$$4x-2y-z-36=0.$$

□

Problema 4. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=z$;

b) paraboloidul hiperbolic $x^2-\dfrac{y^2}{4}=z$,

paralele cu planul

$$x-3y+2z-1=0.$$

Soluţie. a) Rescriem, mai întâi, ecuaţia paraboloidului, pentru a scăpa de numitori. Se obţine

$$3x^2+5y^2-15z=0.$$

Fie $M(x_0,y_0,z_0)$ un punct oarecare al suprafeţei. Ecuaţia planului tangent la această suprafaţă în M se scrie, prin dedublare,

$$3x_0x+5y_0y-\frac{15}{2}(z+z_0)=0$$

sau

$$6x_0x+10y_0y-15z-15z_0=0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}_1(6x_0,10y_0,-15)$, în timp ce vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}_0(1,-3,2)$. Planul tangent la suprafaţă este paralel cu planul dat dacă vectorii normali la celke două plane sunt coliniari, ceea ce înseamnă că există un număr real λ astfel încât $\mathbf{n}_1=\lambda\mathbf{n}_0$, de unde obţinem

$$\begin{cases}6x_0=\lambda,\\ 10y_0=-3\lambda,\\ -15=2\lambda.\end{cases}$$

De aici obţinem imediat că $\lambda=-\dfrac{15}{2}$, $x_0=-\dfrac{5}{4}$, $y_0=\dfrac{9}{4}$. Cea de-a treia coordonată, z_0, o determinăm prin condiţia ca punctul M să aparţină suprafeţei (i.e. coordonatele sale trebuie să verifice ecuaţia suprafeţei). Prin urmare,

$$z=\frac{x_0^2}{5}+\frac{y_0^2}{3}=\frac{25}{80}+\frac{81}{48}=2.$$

Dacă înlocuim x_0, y_0 şi z_0 astfel determinaţi în ecuaţia planului tangent, obţinem

$$x - 3y + 2z + 4 = 0.$$

b) Se procedează analog. Din nou, rescriem ecuaţia suprafeţei sub forma

$$4x^2 - y^2 - 4z = 0.$$

Ecuaţia planului tangent într-un punct oarecare $M(x_0, y_0, z_0)$ al suprafeţei se scrie, prin dedublare, sub forma

$$4x_0x - y_0y - 2(z + z0) = 0$$

sau

$$4x_0x - y_0y - 2z - 2z_0 = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}_2(4x_0, -y_0, -2)$. Acest vector trebuie să fie coliniar cu vectorul normal la planul dat, aşadar trebuie să existe un număr real μ astfel încât să avem $\mathbf{n}_2 = \mu\mathbf{n}_0$, prin urmare se obţine sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 4x_0 = \mu, \\ -y_0 = -3\mu, \\ -2 = 2\mu. \end{cases}$$

De aici, obţinem imediat $\mu = -1$, $x_0 = -\dfrac{1}{4}$, $y_0 = -3$. Coordonata z_0 se obţine din ecuaţia suprafeţei, punând condiţia ca punctul M să se afle pe suprafaţă:

$$z_0 = x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} = \frac{1}{16} - \frac{9}{4} = -\frac{35}{16}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia planului tangent, obţinem

$$8x - 24y + 16z - 35 = 0.$$

□

Problema 5. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Soluţie. Remarcăm, înainte de toate, că punctul P aparţine hiperboloidului (coordonatele sale verifică ecuaţia suprafeţei). Descompunem ecuaţia suprafeţei:

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = 36 \cdot z.$$

După cum ştim, avem două familii de generatoare rectilinii:

$$\begin{cases} \lambda(2x + 3y) = 36\mu, \\ \mu(2x - 3y) = \lambda z \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \alpha(2x - 3y) = 36\beta, \\ \beta(2x + 3y) = \alpha z. \end{cases}$$

Începem cu prima familie. Dacă punem condiţia ca punctul P să aparţină suprafeţei, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2} + 1)\lambda = 36\mu \\ 6(\sqrt{2} - 1)\mu = \lambda. \end{cases}$$

Din cea de-a doua relaţie, obţinem legătura dintre cei doi parametri. Dacă punem $\mu = 1$ şi înlocuim în ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2}-1)(2x+3y) = 36, \\ 2x - 3y = 6(\sqrt{2}-1)z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2}-1)x + 3(\sqrt{2}-1)y - 6 = 0, \\ 2x - 3y - 6(\sqrt{2}-1)z = 0. \end{cases}$$

Ne vom ocupa acum de cea de-a doua familie de generatoare. Din nou, punem condiţia ca generatoarea să treacă prin punctul P, obţinem relaţiile

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2}-1)\alpha = 36\beta \\ 6(\sqrt{2}+1)\beta = \alpha. \end{cases}$$

Din nou, din a doua relaţie obţinem relaţia dintre cei doi parametri şi, dacă punem $\beta = 1$, obţinem că $\alpha = 6(\sqrt{2}+1)$. Înlocuind în ecuaţiile familiei de generatoare, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2}+1)(2x-3y) = 36, \\ 2x + 3y = 6(\sqrt{2}+1)z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2}+1)x - 3(\sqrt{2}+1)y - 6 = 0, \\ 2x + 3y - 6(\sqrt{2}+1)z = 0. \end{cases}$$

□

Problema 6. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Soluţie. Scăpăm, întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2 - 4y^2 = 16z.$$

Descompunem ecuaţia:

$$(x+2y)(x-2y) = 16 \cdot z.$$

Atunci ecuaţiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeţei vor fi

$$\begin{cases} \lambda(x+2y) = 16\mu, \\ \mu(x-2y) = \lambda z, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \alpha(x-2y) = 16\beta, \\ \beta(x+2y) = \alpha z. \end{cases}$$

Începem prin a determina generatoarea din prima familie. Faptul că această generatoare este paralelă cu planul dat înseamnă că vectorul său director este perpendicular pe vectorul normal la planul dat. Ca să obţinem un vector director al dreptei, înmulţim vectorial vectorii normali la cele două plane care determină dreapta, $\mathbf{n}_{11}(1,2,0)$ (am împărţit cu λ) şi $\mathbf{n}_{12}(\mu,-2\mu,-\lambda)$. Avem

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{n}_{11}\times\mathbf{n}_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 0\\ \mu & -2\mu & -\lambda\end{vmatrix}=(-2\lambda,\lambda,-4\mu).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(3,2,-4)$. Condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan este, prin urmare,

$$0=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}=-6\lambda+2\lambda+16\mu=-4\lambda+16\mu,$$

de unde $\lambda=4\mu$. Dacă punem $\mu=1$, obţinem $\lambda=4$, deci ecuaţiile generatoarei căutate devin

$$\begin{cases}x+2y-4=0,\\ x-2y-4z=0.\end{cases}$$

Trecem acum la generatoarea din cea de-a doua familie. De data asta, vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}(1,-2,0)$ (am împărţit cu α) şi $\mathbf{n}_{22}(\beta,2\beta,-\alpha)$. Astfel, un vector director al generatoarei va fi

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{n}_{21}\times\mathbf{n}_{22}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & -2 & 0\\ \beta & 2\beta & -\alpha\end{vmatrix}=(2\alpha,\alpha,4\beta).$$

Prin urmare, condiţia de paralelism între generatoare şi planul dat se poate scrie

$$0=\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{n}=6\alpha+2\alpha-16\beta=8\alpha-16\beta,$$

de unde rezultă că $\alpha=2\beta$. Dacă punem $\beta=1$, atunci $\alpha=2$, iar ecuaţiile generatoarei din cea de-a doua familie se vor scrie:

$$\begin{cases}x-2y-8=0,\\ x+2y-2z=0.\end{cases}$$

□

Problema 7. Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

care sunt paralele cu planul

$$x+y+z=0.$$

Soluţie. Suprafaţa este, în mod evident, un hiperboloid cu o pânză. Pentru a uşura calculele, scăpăm, mai întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2+4y^2-9z^2=36.$$

Rescriem această ecuaţie sub forma

$$x^2-9z^2=36-4y^2.$$

Descompunem cei doi membrii în factori de gradul întâi şi obţinem

$$(x+3z)(x-3z)=(6+2y)(6-2y).$$

Astfel, ecuaţiile primei familii de generatoare vor fi

$$\begin{cases}\lambda(x+3z)=\mu(6+2y),\\ \mu(x-3z)=\lambda(6-2y),\end{cases}$$

în timp ce pentru a doua familie de generatoare obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases}\alpha(x+3z)=\beta(6-2y),\\ \beta(x-3z)=\alpha(6+2y).\end{cases}$$

Vom determina, mai întâi, generatoarea din prima familie care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Începem prin a rescrie sistemul de ecuaţii sub forma

$$\begin{cases}\lambda x-2\mu y+3\lambda z-6\mu=0,\\ \mu x+2\lambda y-3\mu z-6\lambda=0.\end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea corespunzătoare parametrilor sunt $\mathbf{n}_{11}(\lambda,-2\mu,3\lambda)$, respectiv $\mathbf{n}_{12}(\mu,2\lambda,-3\mu)$. Un vector director al generatoarei va fi, prin urmare, vectorul

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{n}_{11}\times\mathbf{n}_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \lambda & -2\mu & 3\lambda\\ \mu & 2\lambda & -3\mu\end{vmatrix}=\left(6\left(\mu^2-\lambda^2\right),6\lambda\mu,2\left(\mu^2+\lambda^2\right)\right).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(1,1,1)$. Astfel, condiţia de paralelism dintre generatoare şi plan se va scrie

$$0=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}=6(\mu^2-\lambda^2)-6\lambda\mu+2(\mu^2+\lambda^2)=8\mu^2+6\lambda\mu-4\lambda^2=2(4\mu^2+3\lambda\mu-2\lambda^2).$$

Trebuie, prin urmare, să rezolvăm ecuaţia

$$4\mu^2+3\lambda\mu-2\lambda^2=0,$$

pentru a determina relaţia dintre λ şi μ. Această ecuaţie, după cum se vede, este o ecuaţie omogenă de gradul al doilea, pe care o vom rezolva cu metoda standard. Anume, împărţim ecuaţia cu λ^2 şi notăm $t=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Atunci ecuaţia devine

$$4t^2+3t-2=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt, după cum remarcăm imediat,

$$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}. \tag{*}$$

Putem alege $\lambda=1$, de unde obţinem $\mu=t_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din prima familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases}x-2t_{1,2}y+3z-6t_{1,2}=0,\\ t_{1,2}x+2y-3t_{1,2}z-6=0\end{cases}$$

unde $t_{1,2}$ sunt valorile date de formula (*). Este de remarcat că, datorită gradului înalt de simetrie a hiperboloidului cu o pânză, există *două* generatoare din prima familie care sunt paralele cu planul dat.

Trecem acum la generatoarele din cea de-a doua familie. Rescriem ecuaţiile lor sub forma

$$\begin{cases}\alpha x+2\beta y+3\alpha z-6\beta=0,\\ \beta x-2\alpha y-3\beta z-6\alpha=0.\end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}\left(\alpha, 2\beta, 3\alpha\right)$, respectiv $\mathbf{n_{22}}(\beta, -2\alpha, -3\beta)$, prin urmare un vector director al generatoarei este

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & 2\beta & 3\alpha \\ \beta & -2\alpha & -3\beta \end{vmatrix} = \left(6\left(\alpha^2 - \beta^2\right), 6\alpha\beta, -2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right).$$

Ca şi în cazul celeilalte familii de generatoare, şi aici condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan se va scrie sub forma

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 2\left(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2\right).$$

Avem, astfel, de data aceasta, ecuaţia omogenă

$$2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

care, după ce punem $s = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ne conduce la ecuaţia de gradul al doilea

$$2s^2 + 3s - 4 = 0,$$

cu soluţiile

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}. \tag{**}$$

Dacă punem $\beta = 1$, obţinem $\alpha = s_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases} s_{1,2}x + 2y + 3s_{1,2}z - 6 = 0, \\ x - 2s_{1,2}y - 3z - 6s_{1,2} = 0, \end{cases}$$

unde numerele $s_{1,2}$ sunt date de formula (**). Şi aici sunt, desigur, două generatoare paralele cu planul dat. □

Problema 8. Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia planului tangent într-un punct oarecare al elipsoidului este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

prin urmare ecuaţia planului tangent prin tăieturi se va scrie

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}} + \frac{y}{\frac{b^2}{y_0}} + \frac{z}{\frac{c^2}{z_0}} - 1 = 0.$$

Astfel, tăieturile planului pe axe sunt $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}$ şi $\dfrac{c^2}{z_0}$.

Cerinţa problemei este ca tăieturile să aibă aceeaşi lungime, prin urmare coordonatele punctului de tangenţă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{|x_0|} = \dfrac{b^2}{|y_0|} = \dfrac{c^2}{|z_0|}, \\ \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0. \end{cases}$$

Ne vom ocupa exclusiv de cazul în care toate coordonatele sunt strict pozitive. Restul soluţiilor se obţin în acelaşi mod (în fapt, ele sunt simetricele acestei soluţii relativ la axele de coordonate, planele de coordonate şi originea coordonatelor).

În această situaţie, primele două ecuaţii se pot scrie sub forma

$$y_0 = \frac{b^2}{a^2} x_0,$$

respectiv

$$z_0 = \frac{c^2}{a^2} x_0.$$

Dacă înlocuim în cea de-a treia ecuaţie, găsim:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{b^2 x_0^2}{a^4} + \frac{c^2 x_0^2}{a^4} = 1,$$

ceea ce ne conduce la soluţia

$$x_0 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad y_0 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad z_0 = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

□

Probleme propuse

Problema 9. Să se scrie ecuaţia normalei în punctul $P(-2, 2, -1)$ la cuadrica

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0.$$

Să se determine coordonatele punctului în care normala înţeapă a doua oară suprafaţa. (Normala este perpendiculara pe planul tangent care trece prin punctul de tangenţă).

Problema 10. Verificaţi dacă dreapta

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$$

este tangentă elipsoidului

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$$

şi, în caz afirmativ, să se determine coordonatele punctului de tangenţă.

Problema 11. Să se determine planele care conţin dreapta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$$

şi sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Problema 12. Determinaţi unghiul pe care îl formează generatoarele conului

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{6} = 0$$

cu axa Oz.

Problema 13. Determinaţi generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

care trec prin punctul $M(6, 2, 8)$.

Problema 14. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$4x^2 - 9y^2 = 36z$$

care trec prin punctul $M(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Problema 15. Se dă paraboloidul hiperbolic

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = z$$

şi unul dintre planele sale tangente,

$$10x - 2y - z - 21 = 0.$$

Determinaţi ecuaţiile celor două drepte de intersecţie dintre paraboloid şi plan.