Geometrie pentru informaticieni

Seminarul 8: Hiperbola şi parabola

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Hiperbola

Problema 1. Stabiliţi ecuaţia unei hiperbole ale cărei focare sunt situate pe axa Ox, simetric faţă de origine şi care satisface unul dintre următoarele seturi de condiţii suplimentare:

1) axele sunt date de $2a = 10$ şi $2b = 8$;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

3) ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm\frac{4}{3}x,$$

iar distanţa dintre focare este $2c = 20$;

Soluţie. 1) Semiaxele sunt $a = 5$ şi $b = 4$, deci ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2) Determinăm mai întâi semiaxele. Avem:

$$c = 3 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

adicâ $a^2 + b^2 = 9$, iar excentricitatea fiind egală cu $3/2$, avem

$$\frac{3}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$

de unde deducem că $a = 2$, prin urmare $b \equiv \sqrt{9 - a^2} = \sqrt{5}$. Aşadar, ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

3) Avem de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3}, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10. \end{cases}$$

Obţinem imediat că $a = 6, b = 8$, deci ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

□

Problema 2. Calculaţi aria triunghiului format de dreapta

$$9x + 2y - 24 = 0.$$

şi de tangentele la hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

în punctele de intersecţie cu dreapta.

Soluţie. Punctele de intersecţie dintre hiperbolă şi dreaptă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0, \\ 9x + 2y - 24 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Rezolvând sistemul, obţinem punctele

$$M_1\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}, \frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ecuaţia tangentei în M_1 este

$$t_1 : 9\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)x - 4\left(\frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right)y - 36 = 0$$

sau

$$t_1 : 9\left(6+\sqrt{2}\right)x + 2\left(6+9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0,$$

iar ecuaţia tangentei în M_2 este

$$t_2 : 9\left(6-\sqrt{2}\right)x + 2\left(6-9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0.$$

De aici rezultă imediat că cel de-al treilea vârf al triunghiului, în care se intersectează cele două tangente, este $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Prin urmare, aria triunghiului $M_1M_2M_3$ va fi dată de

$$\mathcal{A} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{6+\sqrt{2}}{2} & \frac{-6-9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{6-\sqrt{2}}{2} & \frac{-6+9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{128}\begin{vmatrix} 2(6+\sqrt{2}) & -6-9\sqrt{2} & 4 \\ 2(6-\sqrt{2}) & -6+9\sqrt{2} & 4 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2}.$$

□

Problema 3. Demonstraţi că aria paralelogramului format de asimptotele la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi de dreptele duse prin orice punct al hiperbolei, paralele cu asimptotele, este constantă, egală cu $\frac{ab}{2}$.

Soluţie. Fie $A(x_0, y_0)$ un punct de pe hiperbolă. Cele două asimptote au ecuaţiile

$$as_1 : y = \frac{b}{a}x,$$

respectiv

$$as_2 : y = -\frac{b}{a}x.$$

Dreapta care trece prin A şi este paralelă cu as_1 va avea ecuaţia

$$d_1 : y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0),$$

în timp ce dreapta care trece prin A şi este paralelă cu asimptota a doua are ecuaţia

$$d_2 : y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Fie $B = as_1 \cap d_2$, $C = as_1 \cap as_2$, $D = as_2 \cap d_1$. Atunci paralelogramul a cărui arie o căutăm este paralelogramul $ABCD$. Aria sa este egală cu de două ori aria triunghiului ABC. Prin urmare, pentru a determina această arie, este suficient să determinăm coordonatele vârfurilor B şi C. C fiind punctul de intersecţie a asimptotelor, el coincide cu originea, deci tot ce mai trebuie să facem este să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y = \dfrac{b}{a}x, \\ y - y_0 = -\dfrac{b}{a}(x - x_0). \end{cases}$$

Obţinem imediat $B\left(\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0\right), \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0 + y_0\right)\right)$. Conform celor spuse mai sus, aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului ABC, adică

$$\mathcal{A} = \left| \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0 + y_0\right) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2ab}\left|b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right| = \frac{ab}{2},$$

unde, pentru a scrie ultima egalitate, am folosit faptul că punctul A se află pe hiperbolă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia acesteia. □

Problema 4. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$10x - 3y + 9 = 0.$$

Soluţie. Ca în cazul problemei precedente, ecuaţiile acestor tangente sunt

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2},$$

unde, acum, k este chiar panta dreptei date, adică

$$k = \frac{10}{3}.$$

Prin urmare, avem,

$$y = \frac{10}{3}x \pm \sqrt{16 \cdot \frac{100}{9} - 64}$$

sau

$$10x - 3y \pm 32 = 0.$$

□

Problema 5. O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x+2y-15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Căutăm, mai întâi, condiţia general ă pentru ca o dreaptă de ecuaţie

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangent ă unei hiperbole de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1.$$

Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $B \neq 0$. Atunci

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$\left(a^2 A^2 - b^2 B^2\right) x^2 + 2a^2 ACx + a^2 \left(b^2 B^2 + C^2\right) = 0.$$

Condiţia de tangenţă impune ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero. Dar

$$\Delta = 4a^2 b^2 B^2 \left(a^2 A^2 - b^2 B^2 - C^2\right) = 0.$$

Dar a şi B nu se anulează (ele sunt numere strict pozitive), în timp ce B este diferit de zero prin ipoteză. Prin urmare, dreapta este tangentă hiperbolei dacă şi numai dacă avem

$$a^2 A^2 - b^2 B^2 = C^2.$$

Exact aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.

În cazul nostru concret, condiţia de mai sus devine

$$81a^2 - 4b^2 = 225.$$

Aceasta este prima ecuaţie pentru determinarea pătratelor semiaxelor. A doua se obţine din condiţia ca punctul M să se afle pe hiperbolă, ceea ce ne conduce la

$$9a^2 - 6b^2 + a^2 b^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii, obţinem $a^2 = 10/3$, $b^2 = 45/4$ sau $a^2 = 5$, $b^2 = 45$, de unde rezultă ecuaţiile celor două hiperbole care îndeplinesc condiţiile din enunţul problemei. □

Parabola

Problema 6. Determinaţi ecuaţia unei parabole cu vârful în origine dacă axa parabolei este axa Ox şi parabola trece prin punctul $A(9, 6)$.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma $y^2 = 2px$. Sigurul parametru care trebuie determinat este parametrul parabolei, p. Din condiţia ca A să fie pe parabolă, obţinem:

$$36 = 2 \cdot p \cdot 9,$$

de unde rezultă că $p = 2$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 4x.$$

□

Problema 7. Să se afle locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola $y^2 = 2px$.

Soluţie. Ecuaţia tangentei de pantă k la parabolă este

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Tangenta perpendiculară va avea panta $-1/k$, deci va fi de ecuaţie

$$y = -\frac{1}{k}x - \frac{kp}{2}.$$

Ajungem acum la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} my = m^2x + \frac{p}{2}, \\ -my = x + \frac{m^2p}{2}. \end{cases}$$

Dacă adunăm cele două ecuaţii, obţinem

$$(m^2 + 1)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

de unde

$$x = -\frac{p}{2},$$

adică locul geometric este directoarea parabolei. □

Problema 8. Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că tangenta paralelă cu dreapta $5x - 4y - 2 = 0$ trece prin punctul $A(4, 7)$.

Soluţie. panta tangentei este $k = 5/4$. Ecuaţia tangentei de pantă $5/4$ este

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{5}p.$$

Dacă impunem condiţia ca A să se afle pe tangentă, obţinem

$$7 = \frac{5}{4} \cdot 4 + \frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă imediat că $p = 5$, adică ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 10x.$$

□

Probleme rezolvate

Problema 9. Se dă hiperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Să se determine:

1) semiaxele;

2) focarele;

3) ecuaţiile asimptotelor;

Problema 10. Focarele unei hiperbole coincid cu cele ale elipsei

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că excentricitatea ei este egală cu 2.

Problema 11. Demonstraţi că produsul distanţelor de la orice punct de pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

până la asimptote este constant, egal cu $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Problema 12. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x + 3y - 7 = 0.$$

Problema 13. Din punctul $A(5, 9)$ ducem tangente la parabola $y^2 = 5x$. Stabiliţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de tangenţă.

Problema 14. Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că ea este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$ şi determinaţi punctul de tangenţă.