Geometrie pentru informaticieni
Seminarul 10: Generări de suprafeţe

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $(0,0,h)$ şi ale cărui generatoare se sprijină pe lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad z=0.$$

Soluţie. Ecuaţiile vârfului suprafeţei sunt

$$(V): \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z-h=0. \end{cases}$$

Aşadar, ecuaţiile generatoarelor pot fi scrise sub forma

$$(G_{\lambda,\mu}): \begin{cases} y=\lambda x, \\ z-h=\mu x. \end{cases}$$

Prin urmare, condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare este echivalentă cu condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} y=\lambda x, \\ z-h=\mu x, \\ z=0, \\ (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

să fie compatibil. Din primele trei ecuaţii, obţinem imediat că

$$x=-\frac{h}{\mu},\ y=-\frac{\lambda h}{\mu},\ z=0.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia a patra, rezultă

$$\left(\frac{h^2}{\mu^2}+\frac{\lambda^2 h^2}{\mu^2}\right)^2 - a^2\left(\frac{h^2}{\mu^2}-\frac{\lambda^2 h^2}{\mu^2}\right)=0$$

sau

$$h^2\left(1+\lambda^2\right)^2 - a^2\mu^2(1-\lambda^2)=0.$$

Dar $\lambda=\dfrac{y}{x}$ şi $\mu=\dfrac{z-h}{x}$. Dacă înlocuim în ecuaţia de mai sus, obţinem

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 - a^2\left(\frac{z-h}{x}\right)^2\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=0$$

sau

$$(x^2+y^2)^2-a^2(z-h)^2(x^2-y^2)=0.$$

Aceasta este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema 2. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $(0,0,-h)$ ale cărui generatoare sunt tangente la paraboloidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

Soluţie. Vârful conului este dat, în mod evident, de ecuaţiile

$$(V)\begin{cases} x=0,\\ y=0,\\ z+h=0,\end{cases}$$

ceea ce înseamnă că generatoarele se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu})\begin{cases} y=\lambda x,\\ z+h=\mu x.\end{cases}$$

Condiţia de compatibilitate, de data aceasta, înseamnă că sistemul de ecuaţii forma din ecuaţia suprafeţei şi ecuaţiile generatoarelor are soluţie unică. Acest sistem se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2-2a^2b^2z=0,\\ y=\lambda x,\\ z+h=\mu x.\end{cases}$$

Dacă înlocuim y şi z în funcţie de x din ultimele două ecuaţii în prima, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$b^2x^2+\lambda^2a^2x^2-2a^2b^2(\mu x-h)=0$$

sau

$$(b^2+\lambda^2a^2)x^2-2a^2b^2\mu^2x+2a^2b^2h=0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să aibă o singură rădăcină (de fapt, o rădăcină dublă) este echivalentă cu condiţia ca discriminantul ecuaţie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$4a^4b^4\mu^4-8a^2b^2h(b^2+\lambda^2a^2)=0$$

sau

$$a^2b^2\mu^4-2h(b^2+\lambda^2a^2)=0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate. Dacă înlocuim în ea λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$a^2b^2\left(\frac{z+h}{x}\right)^4-2h\left(b^2+a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=0$$

sau

$$a^2b^2(z+h)^4-2a^2b^2x^2(b^2x^2+a^2y^2)=0.$$

Aceasta este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema 3. Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferei $x^2+y^2+z^2=1$, ştiind că generatoarele sale fac unghiuri egale cu cele trei axe de coordonate.

Soluţie. În mod evident, o directoare a acestei suprefeţe este dreapta

$$(\Delta):\ x=y=z,$$

care se poate scrie şi sub forma

$$(\Delta):\begin{cases} x-y=0,\\ x-z=0.\end{cases}$$

Astfel, ecuaţiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} x - y = \lambda, \\ x - z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, punem condiţia ca generatoarele să fie tangente sferei. Din ecuaţiile generatoarelor scoatem pe y şi z în funcţie de x şi înlocuim în ecuaţia sferei. Avem

$$x^2 + (x - \lambda)^2 + (x - \mu)^2 = 1$$

sau

$$3x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0.$$

Condiţia de tangenţă se traduce prin condiţia ca această ecuaţie să aibă discriminantul egal cu zeo, adică

$$4(\lambda + \mu)^2 - 12(\lambda^2 + \mu^2 - 1) = 0$$

sau

$$2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 3 = 0.$$

O altă modalitate de a determina condiţia de compatibilitate este să impunem ca distanţa de la centrul sferei la generatoare să fie egală cu raza sferei (adică cu 1).

Centrul sferei este $O(0, 0, 0)$, iar un punct de pe generatoare este, de exemplu, $M(0, -\lambda, -\mu)$. Un vector director al oricărei generatoare este $\mathbf{v}(1, 1, 1)$, deci condiţia de ompatibilitate se traduce prin condiţia

$$\frac{\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

Dar

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\lambda & -\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mu - \lambda, -\mu, \lambda),$$

deci

$$\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu},$$

în timp ce $\|\mathbf{v} = \sqrt{3}$. Condiţia de compatibilitate se va scrie, deci

$$\frac{\sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu}}{\sqrt{3}} = 1,$$

condiţie care, după ridicarea la pătrat, ne conduce exact la condiţia stabilită mai sus.

Ne întoarcem acum la determinarea ecuaţiei suprafeţei cilindrice. În acest scop, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ î ecuaţiile generatoarelor. Obţinem

$$2(x - y)^2 + 2(x - z)^2 - 2(x - y)(x - z) - 3 = 0$$

sau

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 3 = 0.$$

□

Problema 4. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice având generatoarele paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

şi curbă directoare parabola $y^2 = 4x$, $z = 0$.

Soluţie. Ecuaţia directoarei se mai poate scrie sub forma

$$(\Delta):\begin{cases}2x-y=0,\\3x-z=0,\end{cases}$$

deci ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}):\begin{cases}2x-y=\lambda,\\3x-z=\mu.\end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul de ecuaţie format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases}2x-y=\lambda,\\3x-z=\mu,\\z=0.\end{cases}$$

Se obţine, imediat, $z=0$, $x=\dfrac{\mu}{3}$ şi

$$y=2x-\lambda=\frac{2\mu}{3}-\lambda=\frac{2\mu-3\lambda}{3}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia rămasă, obţinem

$$\frac{(2\mu-3\lambda)^2}{9}=\frac{4\mu}{3}$$

sau

$$(2\mu-3\lambda)^2-12\mu=0.$$

Dacă, acum, înlocuim cei doi parametrii din ecuaţiile generatoarelor, rezultă ecuaţia suprafeţei cilindrice,

$$(6x-2z-6x+3y)^2-12(3x-z)=0$$

sau

$$(3y-2z)^2-36x+12z=0.$$

□

Problema 5. Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide generate de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul $x+z=0$, se sprijină pe axa Ox şi pe cercul $x^2+y^2=1, z=0$.

Soluţie. Ecuaţiile axei Ox sunt

$$\begin{cases}y=0,\\z=0,\end{cases}$$

deci ecuaţiile generatoarelor (drepte care trec prin Ox şi sunt paralele cu planul dat) vor fi

$$\begin{cases}y=\lambda z,\\x+z=\mu.\end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul

$$\begin{cases}y=\lambda z,\\x+z=\mu,\\z=0,\end{cases}$$

format din ecuaţiile generatoarelor şi cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare.

Obţinem imediat $x = \mu$, $y = z = 0$, deci, după înlocuirea în cealaltă ecuaţie a curbei directoare, condiţia de compatibilitate devine

$$\mu^2 = 1.$$

Astfel, după ce înlocuim parametri idin ecuaţiile generatoarelor, ecuaţia suprafeţei conoide va fi

$$(x + z)^2 = 1$$

sau

$$x + z = \pm 1,$$

adică suprafaţa se reduce la o reuniune de două plane paralele. □

Problema 6. Să se afle ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul $z = 0$ şi se sprijină pe dreapta $x = 0, y = a$ şi pe parabola $z^2 - 2px = 0,\ y = 0$.

Soluţie. Ecuaţiile generatoarelor conoidului sunt

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} y - a = \lambda x, \\ z = \mu. \end{cases}$$

Rezolvăm acum sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases} y - a = \lambda x, \\ z = \mu, \\ y = 0. \end{cases}$$

Soluţia este, după cum ne putem convinge imediat, $x = -\dfrac{a}{\lambda}$, $y = 0$ şi $z = \mu$. Dacă înlocuim în prima ecuaţie a curbei directoare, obţinem

$$\mu^2 + 2p\frac{a}{\lambda} = 0$$

sau

$$\lambda\mu^2 + 2pa = 0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate. Nu mai avem altceva de făcut decât să înlocuim în ea λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor. După înlocuire, se obţine

$$\frac{y - a}{x} z^2 + 2pa = 0$$

sau

$$(y - a)z^2 + 2pax = 0.$$

□

Problema 7. Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea dreptei $x - y = a, z = 0$ în jurul dreptei $x = y = z$.

Soluţie. Generatoarele suprafeţei de rotaţie sunt o familie de cercuri, care, la rândul lor, se obţin ca intersecţii dintre sfere de rază variabilă cu centrul pe axa de rotaţie şi plane variabile, perpendiculare pe axa de rotaţie. În cazul nostru, axa de rotaţie trece prin origine, deci putem considera sfere cu centrul în origine. Astfel, generatoarele se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a găsi condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile curbei directoare şi ecuaţia planului perpendicular pe axa de rotaţie, adică sistemul

$$\begin{cases} x - y = a, \\ z = 0, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Obţinem imediat că $x = \dfrac{\mu + a}{2}, y = \dfrac{\mu - a}{2}, z = 0$. Dacă înlocuim în ecuaţia sferei, obţem

$$\left(\frac{\mu + a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu - a}{2}\right)^2 = \lambda^2$$

sau

$$\mu^2 - 2\lambda^2 + a^2 = 0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate pe care o căutam. Pentru a găsi ecuaţia suprefeţei de rotaţie, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ daţi de ecuaţiile generatoarelor. Această ecuaţie se va scrie, prin urmare, sub forma

$$(x + y + z)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2) + a^2 = 0$$

sau

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - a^2 = 0.$$

□

Problema 8. Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea curbei $x^2 + y^2 = z^3, y = 0$ în jurul axei Oz.

Soluţie. Ecuaţiile cercurilor generatoare sunt

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ z = \mu. \end{cases}$$

Dacă adăugăm acestui sistem a doua ecuaţie a curbei directoare, obţinem sistemul

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, z = \mu, y = 0.$$

Din acest sistem, avem imediat $x^2 = \lambda^2 - \mu^2$, $y = 0$ şi $z = \mu$. După înlocuirea în prima ecuaţie a curbei directoare, pbţinem condiţia de compatibilitate sub forma

$$\lambda^2 - \mu^2 = \mu^3.$$

După substituirea lui λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor, obţinem ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = z^3$$

sau

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Remarcăm că rezultatul obţinut ne spune că, de fapt, curba directoare este, în realitate, un cerc generator al suprafeţei de rotaţie. □

Probleme propuse

Problema 9. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C):\begin{cases} x^2+y^2=25,\\ z=0,\end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}.$$

Problema 10. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C):\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu axa Ox.

Problema 11. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0,-1,4)$ şi a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-1=0,\\ z=0.\end{cases}$$

Problema 12. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul de intersecţie a planelor

$$\begin{cases} x+3z-10=0,\\ y-2=0,\\ x-z+2=0\end{cases}$$

şi cu curba directoare

$$\begin{cases} x^2+y^2-3z^2+6xz-4=0,\\ 5x+y-3z=0.\end{cases}$$

Problema 13. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte cercul

$$\begin{cases} y^2+z^2=a^2,\\ x=b.\end{cases}$$

Problema 14. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreapta

$$\begin{cases} x=2,\\ y=0,\end{cases}$$

este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=1,\\ y=2.\end{cases}$$

Problema 15. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de curba

$$\begin{cases} x^2+y^2-2z=0,\\ x-2y=0,\end{cases}$$

care se roteşte în jurul dreptei $x=y=z$.

Problema 16. Să se determine ecuaţia suprafeţei ce se obţine prin rotirea dreptei

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$