1. Suprafețe cilindrice:

$$\Delta: \begin{cases} P_1(x,y,z)=0 \\ P_2(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow G_{\lambda,\mu} = \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda \\ P_2(x,y,z)=\mu \end{cases}$$

+ 2 ec. ale curbei

2 plane (le aflu) generatoarele

$\Rightarrow$ o dreaptă intersecție de 2 plane

2. Suprafețe conice:

Vf. $(a,b,c) \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x,y,z)=0 \\ P_2(x,y,z)=0 \\ P_3(x,y,z)=0 \end{cases} \Rightarrow G_{\lambda,\mu} = \begin{cases} P_1 = \lambda P_3 \\ P_2 = \mu P_3 \end{cases}$

generatoarele

un pct.

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x-a=0 \\ y-b=0 \\ z-c=0 \end{cases}$ 3 plane $\Rightarrow$ un punct

sau inversate

+ 2 ec.

3. Suprafețe conoide

$$\Delta: \begin{cases} P_1(x,y,z)=0 \\ P_2(x,y,z)=0 \end{cases} \quad \pi: P(x,y,z)=0 \quad \Rightarrow G_{\lambda,\mu} = \begin{cases} P_1 = \lambda P_2 \\ P=\mu \end{cases}$$

2 planuri $\qquad$ un plan $\qquad$ + 2 ec.

$\Rightarrow$ o dreaptă

4. Suprafețe de rotație

Δ (axa de rotație)

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

curba + o cond. suplim.

o dreaptă

$$\hookrightarrow G_{\lambda,\mu}: \begin{cases} (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2 \\ lx+my+nz=\mu \end{cases}$$

generatoare + 2 ec.

Formule

Elipsa:

$M(x,y)$ un pct. al elipsei. F_1, F_2 - focare

distanta de la F_1 la $F_2 = 2c$ $\quad F_1(-c,0) \quad F_2(c,0)$

$F_1M = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad F_1M + F_2M = 2a$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - ecuația elipsei $\quad c = \sqrt{a^2-b^2}$

$a =$ axa mare $/2$.

$\varepsilon = \frac{c}{a} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ - excentricitatea

Ec. tangentei: $\forall k$ - panta $\exists$ $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2+b^2}$ (2. ecuații)

$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ - ec. tangentei prin dedublare

Hiperbola:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - ec. hiperbolei

$M(x,y) \quad F_1M - F_2M = -2a$

curba are ecuația $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ - excentricitatea

$\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$ - ec. tangentei prin dedublare

$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2-b^2}$ ec. tangentei cu panta k.

Parabola:

$M(x,y)$ - un pct. oarecare $\quad d(M,F) = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$

$d(M,\Delta) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$

$y^2 = 2px$ - ec. canonică a parabolei de parametru p.

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad \Delta: x = -\frac{p}{2}$

p - dist. de la F la Δ.

$p \to$ parametru focal

$y^2 = -2px \quad x^2 = 2py \quad x^2 = -2py$ - ec. canonică

$yy_0 = p(x+x_0)$ - ec. tangentei $\Leftrightarrow -p(x-x_0) + y_0(y-y_0) = 0$.

$y - y_1 = k(x-x_1)$ - ec. tangentei

Elipsoidul: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - ec. elipsoidului a,b,c - semiaxe

$a\neq b\neq c \Rightarrow$ elipsoid triaxial

$a=b \Rightarrow$ elipsoid de rotație $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$a=b=c \Rightarrow$ elipsoidul = sferă de raza a

ec. unui plan care trece prin Oz are ecuația de forma $\pi: Ax+By=0$

$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{0}$ - ec. normalei la planul π care trece prin $M_0(x_0,y_0,z_0)$

dacă M_0'(simetricul) $\in$ elipsoidului $\Rightarrow \pi$ - e plan de simetrie

$M(x_0,y_0,z_0)$

$(\Delta): \begin{cases} x=x_0+l\cdot t \\ y=y_0+m\cdot t \\ z=z_0+n\cdot t \end{cases}$ - ec. parametrică $v(l,m,n)$ - v. direct

înlocuim în ec. elipsoidului $\frac{(x_0+lt)^2}{a^2}+\frac{(y_0+mt)^2}{b^2}+\frac{(z_0+nt)^2}{c^2}-1=0.$

$\Rightarrow t^2(b^2c^2l^2+a^2c^2m^2+a^2b^2n^2)+2t(b^2c^2x_0l+a^2c^2y_0m+a^2b^2z_0n)=0.$

$\Leftrightarrow$ ec. de intersecție.

Δ e tangentă elipsoidului $\Leftrightarrow$ ec de intersecție admite soluție dublă.

$\Rightarrow (b^2c^2x_0l+a^2c^2y_0m+a^2b^2z_0n=0.$ (*) $n(b^2c^2x_0, a^2c^2y_0, a^2b^2z_0)$

$\Rightarrow n\cdot v=0.$ $\Rightarrow$ orice dreaptă care trece prin M_0 și are vect. director care verifică ecuația(*) este perpendiculară pe n.

$b^2c^2x_0(x-x_0)+a^2c^2y_0(y-y_0)+a^2b^2z_0(z-z_0)=0$ - ec. planului tangent

$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}+\frac{z\cdot z_0}{c^2}=1$ - ec. planului tangent la elipsoid în pct M_0

Conul de gradul al doilea: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ - ec. conului de gr 2.

$\frac{x x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}-\frac{z\cdot z_0}{c^2}=0$ - ec. planului tangent în M_0

$a=b$ - con de rotație $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

Hiperboloidul cu o pânză: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - ec. hiperb. cu o pânză

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$

considerăm sist. de ecuații prima familie $\begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \end{cases}$ λ,μ nu se anulează simultan

rescriem ecuațiile și dăm valori lui μ sau λ și obținem ecuațiile

a doua familie $\Rightarrow \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right) \\ \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right) \end{cases}$ facem calcule

luăm n_1,n_2 - vectori directori din primul sistem și n_3,n_4 vect. dir din al doilea $\Rightarrow v_1=n_1\times n_2$ $v_2=n_3\times n_4$ $\cos\theta=\frac{v_1\cdot v_2}{\|v_1\|\cdot\|v_2\|}$

$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}-\frac{z\cdot z_0}{c^2}=1$
ec. planului tangent

Hiperboloidul cu două pânze: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

$a=b$ - hiperboloid cu două pânze de rotație $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ $\quad \frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y y_0}{b^2}-\frac{z\cdot z_0}{c^2}=-1$ - ec. planului tangent în M_0

Paraboloid eliptic: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ - ec. paraboloidului eliptic $p,q\in\mathbb{R}_+$

$p=q$ - paraboloid eliptic de rotație $\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{p}=2z \Leftrightarrow x^2+y^2=2pz$

$q x_0(x-x_0)+p y_0(y-y_0)-pq(z-z_0)=0$ - ec. planului tangent

$\frac{x\cdot x_0}{p}+\frac{y\cdot y_0}{q}=p(z+z_0)$

Paraboloid hiperbolic: $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ - ec. parab. hip. $p,q\in\mathbb{R}_+$

$\exists$ două familii de drepte ca la hiperboloidul cu o pânză (generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic.)

$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2z\cdot 1$

$\mathrm{I}\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\mu z\\ \mu\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\lambda\end{cases}$ $\quad\quad \mathrm{II}\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha\end{cases}$

↳ prima generatoare $\quad\quad$ ↳ a doua

$\frac{x\cdot x_0}{p}-\frac{y\cdot y_0}{q}=z+z_0$ - ecuația planului tangent (a suprafeței)

Cilindru eliptic: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - ec. $\quad a,b\in\mathbb{R}_+$

$a=b\Rightarrow$ cilindru de rotație $\Rightarrow x^2+y^2=a^2$

putem scrie ec. parametrice înlocuim în ec. cilindrului, obținem ec. de gradul 2., $M_0\in$ cilindrului $\Rightarrow$ termenul liber $=0$., Δ și cilindrul au un singur punct $\Leftrightarrow$ ecuația are sol. dublă $\Rightarrow b^2x_0l+a^2y_0m=0$

$n(b^2x_0,a^2y_0,0)$, $v(l,m,n)$ $\quad n\cdot v=0\Rightarrow \forall$ dreaptă care trece prin M_0, iar vect. director verifică relația este perpendiculară pe n. $\Rightarrow n$-vect. normal

$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1$. - ec. planului tangent

Cilindru hiperbolic: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - ec. $\quad \frac{x x_0}{a^2}-\frac{y y_0}{b^2}=1$ - ec. planului tangent

Cilindru parabolic: $y^2=2px$ $\quad p\in\mathbb{R}_+$ - parametrul cilindrului parabolic

$-p(x-x_0)+y_0(y-y_0)=0 \Leftrightarrow y\cdot y_0=p(x+x_0)$ - ec. planului tangent