Geometrie pentru informaticieni

Seminarul 5: Dreapta şi planul în spaţiu (I)

Paul A. Blaga

Probleme rezolvate

Problema 1. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale planului care trece prin:

1) punctul $M_0(1,0,2)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1(1,2,3)$, $\mathbf{a}_2(0,3,1)$;

2) punctul $A(1,2,1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}$;

3) punctul $A(1,7,1)$ şi este paralel cu planul xOz;

4) punctele $M_1(5,3,2)$, $M_2(1,0,1)$ şi este paralel cu vectorul $\mathbf{a}(1,3,-3)$.

5) punctul $A(1,5,7)$ şi prin axa Ox;

6) prin originea coordonatelor şi punctele $M_1(1,0,1)$, $M_2(-2,-3,1)$.

Soluţie. 1) Plecăm de la ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_{M_0} + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2,$$

adică

$$\mathbf{r}(u,v) = (1,0,2) + u(1,2,3) + v(0,3,1).$$

Obţinem ecuaţiile parametrice proiectând ecuaţia precedentă pe axele de coordonate. Avem:

$$\begin{cases} x &= 1+u, \\ y &= 2u+3v, \\ z &= 2+3u+v. \end{cases}$$

2) Ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u,v) = (1,2,1) + u(1,0,0) + v(0,1,0),$$

deci ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u, \\ y &= 2+v, \\ z &= 1. \end{cases}$$

3) Faptul că planul este paralel cu xOz înseamnă că este paralel cu vectorii $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{k}$, deci ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u,v) = (1,7,1) + u(1,0,0) + v(0,0,1),$$

de unde ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x &= 1+u, \\ y &= 7, \\ z &= 1+v. \end{cases}$$

4) Planul este determinat de punctul M_1 şi este paralel cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(-4,-3,-1)$. Este clar că cei doi vectori nu sunt coliniari, deci, împreună cu punctul, chiar determină un plan. Ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u,v) = (5,3,2) + u(1,3,-3) + v(-4,-3,-1),$$

deci ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= 5+u-4v, \\ y &= 3+3u-3v, \\ z &= 2-3u-v. \end{cases}$$

5) Planul trece prin axa Ox, deci trece şi prin origine, aşa că poate fi descris ca planul care trece prin origine şi este paralel cu vectorii **i** şi $\overrightarrow{OA}(1,5,7)$. Astfel, ecuaţia vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u,v)=(0,0,0)+u(1,0,0)+v(1,5,7),$$

iar ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u+v,\\ y &= 5v,\\ z &= 7v.\end{cases}$$

6) Planul trece prin origine şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{OM_1}(1,0,1)$ şi $\overrightarrow{OM_2}(-2,-3,1)$ care, în mod evident, nu sunt coliniari. Ecuaţia vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u,v)=(0,0,0)+u(1,0,1)+v(-2,-3,1),$$

aşadar ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u-2v,\\ y &= -3v,\\ z &= u+v.\end{cases}$$

$\square$

Problema 2. Scrieţi ecuaţia generală a planului plecând de la ecuaţiile sale parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x &= 2+3u-4v,\\ y &= 4-v,\\ z &= 2+3u;\end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x=u+v,\\ y=u-v,\\ z=5+6u-4v.\end{cases}$$

Soluţie. Ceea ce trebuie este să eliminăm cei doi parametrii din cele trei ecuaţii.

(a) Din ultimele două ecuaţii obţinem $v=4-y$ şi $v=\dfrac{z-2}{3}$. Dacă înlocuim în prima ecuaţie, rezultă

$$x=2+3(4-y)+4\frac{z-2}{3}$$

sau

$$3x=6+36-3y+4z-8$$

sau, în fine

$$3x+3y-4z-34=0.$$

(b) Din primele două ecuaţii obţinem imediat $u=\dfrac{x+y}{2}$ şi $v=\dfrac{x-y}{2}$. Dacă înlocuim în ecuaţia a treia, rezultă

$$z=5+3(x+y)-2(x-y)$$

sau

$$x+5y-z+5=0.$$

$\square$

Problema 3. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale planului plecând de la ecuaţia sa generală:

(a) $3x - 6y + z = 0$;

(b) $2x - y - z - 3 = 0$.

Soluţie. Ecuaţia generală a planului este o ecuaţie de gradul întâi cu trei necunoscute. Tot ce avem de făcut este să identificăm o necunoscută principală şi, în mod implicit, două necunoscute secundare (care vor juca rolul parametrilor) şi să rezolvăm sistemul. La ambele cazuri putem alege z ca variabilă principală. Obţinem reprezentările parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -3u + 6v; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 2u - v - 3. \end{cases}$$

□

Problema 4. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin punctiul $A(3, 5, -7)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente de lungime egală.

Soluţie. Utilizăm ecuaţia planului prin tăieturi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Condiţia este ca segmentele tăiate de plan pe axe să aibă lungimi egale. Aceasta înseamnă că $|a| = |b| = |c| = \lambda$. Avem mai multe situaţii de considerat:

(i) $a, b, c > 0$. De data aceasta avem $a = b = c = \lambda$, deci ecuaţia planului se poate scrie sub forma

$$x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 1$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 1 = 0.$$

(ii) $a, b > 0, c < 0$. Atunci $a = b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 15$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 15 = 0.$$

(iii) $a, c > 0, b < 0$. Atunci $a = -b = c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -9$, soluţie care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(iv) $b, c > 0, a < 0$. Atunci $-a = b = c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -5$, soluţie care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(v) $a, b < 0, c > 0$. Atunci $-a- = b - c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -15$, soluţie care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

(vi) $a, c < 0, b > 0$. Atunci $-a = b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 9$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 9 = 0.$$

(vii) $b, c < 0, a > 0$. Atunci $a = -b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x - y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 - 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 5$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 5 = 0.$$

(viii) $a, b, c < 0$. Atunci $-a = -b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x + y + z + \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 - 7 + \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -1$, soluţie care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

$\square$

Problema 5. Stabiliţi care dintre următoarele plane se intersectează, sunt paralele sau coincid:

(a) $x - y + 3z + 1 = 0$ şi $2x - y + 5z - 2 = 0$;

(b) $2x + 4y + 2z + 4 = 0$ şi $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

(c)

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x = 2 + 3u' + v', \\ y = 1 + u' + v', \\ z = 2 - 2v'. \end{cases}$$

Soluţie. (a) Pentru a studia poziţia celor două plane studiem sistemul format din ecuaţiile lor

$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - y + 5z - 2 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este maxim (adică 2), ceea ce înseamnă că sistemul este compatibil, simplu nedeterminat, prin urmare planele se intersectează după o dreaptă.

(b) Este analog punctului precedent şi răspunsul este acelaşi.

(c) Putem deduce ecuaţiile generale ale celor două plane, aplicând, pe urmă, aceiaşi metodă ca la punctele precedente. Preferăm să folosim o altă metodă. Este clar că două plane sunt paralele sau egale dacă şi numai dacă vectorii lor normali sunt coliniari. Vom determina, mai întâi, vectorii normali la cele două plane.

În cazul primului plan, remarcăm imediat că vectorii directori sunt $\mathbf{a}_1(1, 0, 1)$ şi $\mathbf{a}_2(2, 1, -1)$. Atunci un vector normal la suprafaţă este produsul vectorial al acestor doi vectori:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-1, 3, 1).$$

Analog, pentru al doilea plan vectorii directori sunt $\mathbf{b}_1(3, 1, 0)$ şi $\mathbf{b}_2(1, 1, -2)$,. deci vectorul normal va fi vectorul

$$\mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2(-1, 3, 1) = 2\mathbf{n}_1,$$

prin urmare, cele două plane sunt paralele sau egale. Pentru a stabili în care situaţie ne aflăm, este suficient să verificăm dacă au un punct comun, pentru că dacă au, atunci toate punctele sunt comune.

Remarcăm imediat că punctul $A(0,1,0)$ aparţine primului plan şi verificăm dacă aparţine şi celui de-al doilea. În acest scop, trebuie să verificăm dacă sistemul

$$\begin{cases} 2+3u'+v'=0, \\ 1+u'+v'=1, \\ 2-2v'=0. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuaţii obţinem imediat că $u'=-1$ şi $v'=1$. Este uşor de verificat că aceste valori verifică şi prima ecuaţie, deci cele două plane coincid. □

Problema 6. Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului $A(1,3,5)$ pe dreapta de intersecţie a planelor $2x+y+z-1=0$ şi $3x+y+2z-3=0$.

Soluţie. Proiecţia lui A pe dreapta dată se obţine intersectând această dreaptă cu planul care trece prin A şi este perpendicular pe dreaptă. Remarcăm că planul este perpendicular pe dreaptă dacă şi numai dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe plan, adică este vector normal la plan.

Începem prin a determina vectorul director al dreptei. În acest scop, considerăm vectorii normali la cele două plane, $\mathbf{n}_1(2,1,1)$ şi $\mathbf{n}_2(3,1,2)$. Produsul lor vectorial este un vector director al dreptei, dar este, în acelaşi timp, un vector normal la planul perpendicular pe dreaptă prin punctul dat:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = (1,-1,-1).$$

Astfel, ecuaţia planului perpendicular pe dreapta dată, care trece prin punctul A este $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)=0$, adică

$$1\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-3)+(-1)\cdot(z-5)=0$$

sau

$$x-y-z+7=0.$$

Proiecţia punctului A pe dreaptă este la intersecţia dintre dreaptă şi planul care trece prin A şi este perpendicular pe dreaptă, deci coordonatele sale se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+y+2z-3=0, \\ x-y-z+7=0. \end{cases}$$

După efectuarea calculelor, se obţine punctul $A'(-2,1,4)$. □

Problema 7. Determinaţi distanţa dintre planele paralele $x-2y-2z+7=0$ şi $2x-4y-4z+17=0$.

Soluţie. Distanţa dintre două plane paralele este distanţa de la un punct oarecare dintr-unul dintre plane până la celălalt. Notăm cu Π_1 şi Π_2 planele. Se observă imediat că $A(-7,0,0)\in\Pi_1$, deci

$$d(\Pi_1,\Pi_2)=d(A,\Pi_2)=\frac{|-14+17|}{\sqrt{4+16+16}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

□

Altă soluţie. Scriem ecuaţiile planelor sub forma normală. Avem

$$\Pi_1 : -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-\frac{7}{3}=0,$$

în timp ce

$$\Pi_2 : -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{17}{6} = 0.$$

Cum vectorii normal la cele două plane au acelaşi sens, planele sunt situate de aceeaşi parte a originii, deci distanţa dintre ele este modulul diferenţei termenilor liberi, adică

$$d\left(\Pi_1, \Pi_2\right) = \left|\frac{17}{6} - \frac{7}{3}\right| = \frac{1}{2}.$$

□

Problema 8. Se dau vârfurile $A(1, 2, -7), B(2, 2, -7), C(3, 4, -5)$ ale unui triunghi. Să se scrie ecuaţiile bisectoarei interioare a unghiului A.

Soluţie. Aşa cum am văzut în cazul triunghiurilor plane, ideea este să considerăm doi vectori de aceeaşi lungime, unul având aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AB}$ şi celălalt cu aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AC}$. Suma celor doi vectori este un vector director al bisectoarei interioare.

Avem $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2) = 2(1, 1, 1)$. Atunci vectorul $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 0, 0)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AB}$ şi are modulul $\sqrt{3}$, în timp ce vectorul $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\overrightarrow{AC}$ şi are, de asemenea, modulul egal cu $\sqrt{3}$. Prin urmare, un vector director al bisectoarei interioare este $\mathbf{c} = (1 = \sqrt{3}, 1, 1)$. De aici rezulă că ecuaţiile canonice ale bisectoarei sunt

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{3}} = y - 2 = z + 7.$$

□

Problema 9. Stabiliţi că dreapta $x = 1-2t, y = 3t, z = -2+t$ este paralelă cu dreapta $x = 7+4s, y = 5 - 6s, z = 4 - 2s$ şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Vectorul director al primei drepte este $\mathbf{a}(-2, 3, 1)$, în timp ce vectorul director al celei de-a doua drepte este $\mathbf{b}(4, -6, -2) = -2\mathbf{a}$, prin urmare cele două drepte sunt paralele, pentru că vectorii lor directori sunt coliniari.

Pentru a calcula distanţa dintre cele două drepte, calculăm distanţa de la un punct al primei drepte până la a doua dreaptă. Observăm imediat că $A(1, 0, -2)$ aparţine primei drepte. De asemenea, punctul $B(7, 5, 4)$ aparţine celei de-a doua drepte. Atunci, după cum ştim, formula de calcul a distanţei de la un punct la o dreaptă ne conduce la

$$d(\Delta_1, \Delta_2) \equiv d(B, \Delta_1) = \frac{\|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Dar $\overrightarrow{AB} = (6, 5, 6)$, deci

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-13, -18, 28),$$

deci

$$\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\| = \sqrt{169 + 324 + 784} = \sqrt{1277},$$

în timp ce $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, deci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{1277}{14}}.$$

□

Probleme propuse

Problema 10. Pentru ce valoare a parametrului m dreapta $x = -1 + 3t, y = 2 + mt, z = -3 - 2t$ nu are puncte comune cu planul $x + 3y + 3z - 2 = 0$?

Problema 11. Stabiliţi ecuaţia unui plan care este paralel cu planul $2x - 2y - z - 6 = 0$ şi care este situat la distanţă de 7 unităţi de acesta. Este soluţia problemei unică?

Problema 12. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de planele $x + y + 2z - 3 = 0$ şi $x - y + z - 1 = 0$.

Problema 13. Demonstraţi că dreapta $x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1$ se intersectează cu dreapta $x = 1 + 5s, y = 1 + 13s, z = 1 + 10s$ şi determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.

Problema 14. Stabiliţi ecuaţia unui plan, ştiind că punctul $A(1, -1, 3)$ este proiecţia ortogonală a originii pe acest plan.

Problema 15. Demonstraţi că paralelipipedul care are trei feţe neparalele situate în planele $2x + y - 2z + 6 = 0$, $2x - 2y + z + 8 = 0$ şi $x + 2y + 2z + 10 = 0$ este dreptunghic.

Problema 16. Se dau vârfurile unui tetraedru: $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin muchia AB şi prin mijlocul muchiei CD.

Problema 17. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin:

1. punctul $M_0(2, 0, 3)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3, -2, -2)$;
2. punctul $A(1, 2, 3)$ şi este paralelă cu axa Ox;
3. punctele $M_1(1, 2, 3)$ şi $M_2(4, 4, 4)$.