SISTEME DINAMICE

SEMINAR 3

Sist. de ec. liniare cu coef. constanți

Teorie:

Sist. liniar omogen: $\begin{cases} y_1'(x) = a_{11} \cdot y_1(x) + a_{12} y_2(x) & (1) \\ y_2'(x) = a_{21} \cdot y_1(x) + a_{22} y_2(x) & (2) \end{cases}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Forma vectorială a sist.: $y' = A \cdot y$

$S_0 \to$ mulțime sol. sist.

$\{Y_1, Y_2\}$ - bază în S_0

$U = (y^1, y^2) \to$ matrice fundamentală de sol.

Sol. generală: $y = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

① Met. reducerii la o ec. cu coef. constanți:

Alegem una din ec. și o derivăm (1) sau (2)

$(1)' \Rightarrow y_1'' = a_{11} \underbrace{y_1'}_{(1)} + a_{12} \underbrace{y_2'}_{(2)}$ substituim y_1' și y_2'

$$y_1'' = a_{11}(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + a_{12}(a_{21} y_1 + a_{22} y_2) =$$

$$= \underbrace{(a_{11}^2 + a_{12} a_{11})}_{\alpha_1} y_1 + \underbrace{(a_{21} a_{12} + a_{12} a_{22})}_{\alpha_2} y_2$$

$$\Rightarrow y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \ !$$

$$\begin{cases} y_1'' = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \Rightarrow y_2 = (y_1' - a_{11} y_1) \cdot \dfrac{1}{a_{12}} \quad * \\ y_1'' = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \Rightarrow y_1'' = \alpha_1 y_1 + \dfrac{\alpha_2}{a_{12}} \overbrace{(y_1' - a_{11} y_1)}^{*} \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow y_1'' + p_1 + y_1' + p_2 y_1 = 0$

$\to$ Folosim metoda de rezolvare a ec. omogene de ord. 2:

$$y_1(x) = c_1 \cdot Q_1(x) + c_2 Q_2(x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\to$ Substituim în $*$ și aflăm y_2

(a) $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases} \to y_1'' = y_2' \Rightarrow y_1'' = y_1 \Rightarrow \underline{\underline{y_1'' - y_1 = 0}}$

Ec. lin. omog cu coef const. de ord 2

Ec. caract.: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \pm 1$

$$Q_1(x) = e^{r_1 x} = e^x \; ; \; Q_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-x}$$

Sol. generală: $y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_1' = c_1 \cdot e^x - c_2 \cdot e^{-x} \Rightarrow y_2(x) = c_1 \cdot e^x - c_2 e^{-x}$

$\Rightarrow$ sol. sist: $\begin{cases} y_1(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \\ y_2(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \end{cases}$

(2) <u>Metoda ec. caracteristice (met. valorilor proprii)</u>

Forma matriceală a sis: $Y' = A \cdot Y$

Căutăm sol. de f: $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \neq (0,0)$

Din $Y' - AY = 0 \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda x} \\ \alpha_2 e^{\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (\lambda I_2 - A) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ : e^{\lambda x}$$

$\Rightarrow \det |\lambda I_2 - A| = 0 \Rightarrow \lambda$ este o val. proprie a lui A și $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ e un vector propriu corespunzător val. proprii λ

(A) Cazul val. proprii simple

Dacă matricea A admite 2 val. proprii simple λ_1 și λ_2

Pt. fiecare val. λ se det. un vector propriu nenul de forma (α_1^i, α_2^i) și astfel se construiesc 2 sol: $y_{(x)}^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^i \cdot e^{\lambda_i x} \\ \alpha_2^i \cdot e^{\lambda_i x} \end{pmatrix}$ $i = \overline{1,2}$

Matricea fundam. de soluții va fi: $U(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 \cdot e^{\lambda_1 x} & \alpha_1^2 e^{\lambda_2 x} \\ \alpha_2^1 e^{\lambda_1 x} & \alpha_2^2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix}$

Sol. generală: $Y(x) = U \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

(B) Cazul val. proprii complexe

Dacă A admite val. proprii complexe conjugate $\lambda = \alpha \pm i\beta$

$z(x) = z_1(x) + i z_2(x)$, $z(x)$ sol a sist. $\Leftrightarrow$ $z_1(x)$ și $z_2(x)$ sunt sol. ale sist.

Se det. un vector propriu nenul în $\mathbb{C}^2$ de forma $(a_1 + i b_1, a_2 + i b_2) \neq (0,0)$ și se det. soluția corespunzătoare $z(x) = \begin{pmatrix} (a_1 + i b_1) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} \\ (a_2 + i b_2) \cdot e^{(\alpha + i\beta)x} \end{pmatrix}$

* Formula lui Euler *

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x + i \sin(\beta x))$$

Obț. că $z(x) = z_1(x) + i z_2(x)$ unde

$z_1(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(a_1 \cos(\beta x) - b_1 \sin(\beta x)) \\ e^{\alpha x}(a_2 \cos(\beta x) - b_2 \sin(\beta x)) \end{pmatrix}$ $z_2(x) = \begin{pmatrix} e^{\alpha x}(a_1 \sin(\beta x) + b_1 \cos(\beta x)) \\ e^{\alpha x}(a_2 \sin(\beta x) + b_2 \cos(\beta x)) \end{pmatrix}$

$z_1, z_2 \to$ cele 2 sol din sist. fundamental de soluții

(C) Cazul val. proprii multiple

Dacă λ este o val proprie reală a lui A cu ord. de multiplicitate $2 \Rightarrow$ ea va genera 2 sol. în sist. fundamental de soluții, de forma:

$y^1(x) = e^{\lambda x} \cdot u_1$ $\qquad$ $u_1, u_2 \Rightarrow$ vect. proprii generali ...

$y^2(x) = e^{\lambda x}\left(\frac{x}{1!} \cdot u_1 + u_2\right)$

$$\begin{cases} A \cdot u_1 = \lambda u_1 \\ A \cdot u_2 = \lambda u_2 + u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \lambda I_2) u_1 = 0 \\ (A - \lambda I_2) u_2 = u_1 \end{cases}$$

Exerciții:

① $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(1) Det. val. proprii:

Ec. caracteristică atașată care ne dă val. proprii este:

$\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \{2, 3\}$

valori proprii, reale și distincte $\Rightarrow$ caz I

(2) Pt. fiecare val proprie se det un vect. propriu nenul

• $\lambda_1 = 2$

$(\lambda_1 I_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ soluție

$S = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ alegem vect. propriu $(1, 1)$

$\Rightarrow$ prima sol. a sist. fundamental de sol. este $Y^1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = 3$

$(\lambda_2 I_2 - A)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 2\alpha_1$ sol

$S = \{(\alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ Alegem vect. propriu numul $(1,2)$

$\Rightarrow$ a doua sol a sist. fund. de sol este: $y^{2}(x) = e^{3x}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{3x}\\2e^{3x}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Matricea fundamentală de sol: $U = \begin{pmatrix}\alpha_1^1 e^{2x} & \alpha_1^2 e^{3x}\\ \alpha_2^1 e^{2x} & \alpha_2^2 2 e^{3x}\end{pmatrix}$

Sol. generală: $y(x) = U\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

(2) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

Ec. caract: $\det(\lambda I_2 - A) = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda-1 & 5\\ -2 & \lambda+1\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)+10=0$

$\Rightarrow \lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$ $\quad$ (caz 2)

• Sist. vect. proprii pentru $\lambda = 3i$

$(\lambda I_2 - A)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3i-1 & 5\\ -2 & 3i+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}(3i-1)\alpha_1 + 5\alpha_2 = 0\\ -2\alpha_1 + (3i+1)\alpha_2 = 0\end{cases}$

Luăm $\alpha_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \begin{cases}(3i-1)\alpha_1 + 1 = 0\\ -2\alpha_1 + \frac{3i+1}{5} = 0\end{cases}$ $\quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-1}{3i-1} = \frac{3i+1}{10}$

$z(x) = \begin{pmatrix}\overbrace{\frac{1+3i}{10}}^{\alpha_1}\cdot e^{3ix}\\ \underbrace{\frac{1}{5}}_{\alpha_2}\cdot e^{3ix}\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ aplicăm Euler pt e^{3ix} $\rightarrow$ partea reală o sol

$\rightarrow$ partea imaginară o sol