SISTEME DINAMICE

SEMINAR 6

Sist. dinamice generate de sisteme planare de ec. dif. autonome

1. FLUXUL. PORTRET FAZIC

Fie sistemul planar de ec. dif. autonome: $\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$

Fluxul generat de sistemul planar este sol. saturată a problemei Cauchy.

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}$$ unde $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ parametru

intervalul maxim

Notăm $x(t,\eta), y(t,\eta) : I_\eta \to \mathbb{R}$ unica sol. a problemei Cauchy, $I_\eta = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$ în ipoteza că f este continuă.

Fluxul este dat de $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t,\eta) = (x(t,\eta), y(t,\eta))$

$$W = \{ I_\eta \times \{\eta\} \mid \eta \in \mathbb{R}^2 \}$$

pt. mai multe vezi curs 9

Exerciții:

1. Fie sistemul $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$. Determinați:

a) fluxul generat de sistem

b) orbitele

c) portretul fazic

fluxul

a) $\frac{dx}{dt} = -x$

$\frac{dx}{x} = -dt$

$\ln x = -t + c_1$

$x = e^{-t} \cdot c_2, \ c_2 \in \mathbb{R}$

$\frac{dy}{dt} = -2y$

$\frac{1}{2y} dy = -dt \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|y| = -t + c_2$

$\ln|y| = -2t + c_2$

$y = e^{-2t} c_2$

$\Rightarrow x = e^{-t} c_1$

$y = e^{-2t} c_2$ sol generală a sistemului

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

determinăm sol. problemei Cauchy:

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \\ x(0) = \eta_1 \\ y(0) = \eta_2 \end{cases}$

$\eta_1 = x(0) = e^{-0} c_1 = c_1$

$\eta_2 = y(0) = e^{-2 \cdot 0} \cdot c_2 = c_2$

$\Rightarrow x(t, \eta) = e^{-t} \eta_1, \ y(t, \eta) = e^{-2t} \eta_2$

Obs! $I_\eta = \mathbb{R}, \forall \eta \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow W = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ fluxul este $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ \varphi(t, \eta) = (e^{-t} \eta_1, e^{-2t} \eta_2)$

b) orbitele

I $\eta_1 = \eta_2 = 0$

$\varphi(t, (0,0)) = (0,0)$

$\gamma^+(0,0) = \bigcup_{t \in (0,+\infty)} \varphi(t, (0,0)) = \{(0,0)\}$ orbita pozitivă

$\gamma^-(0,0) = \bigcup_{t \in (-\infty,0)} \varphi(t, (0,0)) = \{(0,0)\}$ orbita negativă

$\eta_1 > 0,\ \eta_2 = 0$

$\varphi(t,(\eta_1,0)) = (e^{-t}\eta_1, 0)$

$\gamma^+(\eta_1,0) = \underleftarrow{(0,\eta_1]} \times \{0\}$ orbita pozitivă

$\gamma^-(\eta_1,0) = \underleftarrow{[\eta_1,\infty)} \times \{0\}$ orbita negativă

produsul cartezian e distributiv față de înmulțire

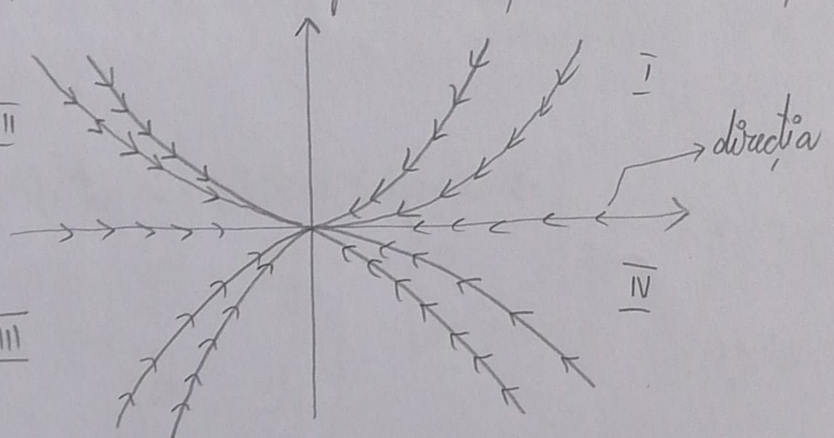
$\gamma(\eta_1,\eta_2) = (0,+\infty)\times\{0\}$

c) portretul fazic

met I: $\begin{cases} x(t) = e^{-t}\eta_1 \\ y(t) = e^{-2t}\eta_2 \end{cases}$ $/()^2$ vrem să scăpăm de t

$$\begin{cases} x^2 = e^{-2t}\eta_1^2 \\ y = e^{-2t}\eta_2 \end{cases} \ (:) \Rightarrow \frac{x^2}{y} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2} \Rightarrow x^2 = y\frac{\eta_1^2}{\eta_2} \Rightarrow \frac{\eta_2}{\eta_1^2}x^2 = y$$

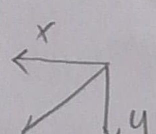
$\Rightarrow y = cx^2,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow$ o familie de parabole ce trec prin $(0,0)$



facem o analiză pe cadrane: I $x(t)>0$

$y(t)>0$

$\begin{cases} x' = -x \Rightarrow x'<0 \\ y' = -2y \Rightarrow y'<0 \end{cases}$



și așa la toate

metoda II: folosim ec. dif. a orbitelor

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases} \Big/ (:) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{2y} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} \Big/ \int \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{2}\ln|y| + c \,/\cdot 2$

$2\ln|x| = \ln|y| + c$

$x^2 = y \cdot c \Rightarrow cx^2 = y$

2. PUNCTE DE ECHILIBRU. STABILITATE

Fie sistemul planar autonom $\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$

Soluțiile constante de forma $(x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ s.n. sol. de echilibru. Punctele (x^*, y^*) s.n. puncte de echilibru.

Punctele de echilibru sunt soluțiile reale ale sistemului $\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases}$

Exerciții:

1. Det. punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora.

a) $\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = 5x + y \end{cases}$ liniar

$f_1(x,y) = x + 5y$

$f_2(x,y) = 5x + y$

$\left.\begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + 5y = 0 \Rightarrow x = -5y \end{cases}\right\} \Rightarrow -24y = 0 \Rightarrow (0,0)$ este pct. de ech.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $\det A = 1 - 25 = -24 \neq 0$

calc. valorile proprii ale matricii $\lambda = ?$

$\det(\lambda \cdot I_2 - A) = 0$

$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -5 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = (\lambda - 6)(\lambda - 4) = 0$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow \lambda_1 = 6 > 0 \\ \lambda_2 = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ punct de ech. instabil

TEOREMĂ (Criteriul de stabilitate pt. sist. liniar)

Punctul de ech. $(0,0)$ este:

a) local stabil $\Leftrightarrow$ $Re\,\lambda \leq 0$ $\forall \lambda$ val. proprie a lui A cu egalitate pt. val. proprii simple

b) local asimptotic stabil $\Leftrightarrow$ $Re\,\lambda < 0$ $\forall \lambda$ val. proprie A

c) instabil $\Leftrightarrow$ NU ARE LOC a

TIP	
nod	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$
șa	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$
focus	$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta,\ \alpha \neq 0$
centru	$\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

b) $\begin{cases} x' = y \\ y' = 2x^3 + x^2 - x \end{cases}$ neliniar

$f_1(x,y) = y$

$f_2(x,y) = 2x^3 + x^2 - x$

aflăm pct. de echilibru:

$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ f_2(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^3 + x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x^2 + x - 1) = 0 \end{cases}$ $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ punctele sunt $(0,0), (-1,0), (\frac{1}{2}, 0)$

$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6x^2 + 2x - 1 & 0 \end{pmatrix}$

I punctul de ech. $(0,0)$

$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

det. val. proprii a lui $J_f(0,0)$

$\det(\lambda I_2 - J_f(0,0)) = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\Rightarrow$ nu putem preciza stabilitatea lui $(0,0)$

II punctul de ech. $(-1,0)$

la fel $\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (-1,0)$ pct. de ech. instabil

III la fel: temă