2021_1

4. Se consideră sistemul $\begin{cases} x'(t) = -x-y-x^3 \\ y'(t) = x-y-y^3 \end{cases}$. Să se studieze stabilitatea pct. de echi $x^*(0,0)$ utilizând funcția de tip Lyapunov $V(x,y) = x^2+y^2$.

$V(0,0) = 0$

$V(x,y) > 0 \ \forall \ x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ se poate aplica stabilitatea

$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x(-x-y-x^3) + 2y(x-y-y^3) =$$

$$= -2x^2 - \cancel{2xy} - 2x^4 + \cancel{2xy} - 2y^2 - 2y^4 =$$

$$= -2(x^2+y^2+x^4+y^4) < 0 \ \forall \ x,y \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

$\Rightarrow$ punct de echi local as. stabil

6. Se consideră problema Cauchy $\begin{cases} y' = x+2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Scrieți formula Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pt. o rețea de noduri echidistante. Pt. pasul $h = 0,1$ calculați primele 3 valori aproximante ale sol. pe $[0,1]$

formula lui Euler: $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$, $h = x_{n+1} - x_n$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$h = \frac{b-a}{N} = \frac{1-0}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{h} = \frac{1}{0,1} = 10 \Rightarrow n \in \{0, .., 9\}$

$y_1 = y_0 + (x_0 + 2y_0) \cdot h = 1 + (0 + 2 \cdot 1) \cdot 0,1 = 1 + 2 \cdot 0,1 = 1,2$! $x_1 = 0,1$ apoi 0,2 apoi 0,3, ...

$y_2 = y_1 + (x_1 + 2y_1) h = 1,2 + (0,1 + 2 \cdot 1,2) \cdot 0,1 = 1,45$ $\quad x_2 = 0,2$

$y_3 = 1,45 + (0,2 + 2 \cdot 1,45) \cdot 0,1 = 1,76$

1. Det. ec. orbitelor din portretul fazic, situate în cadranul pozitiv pt. sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = 2x - xy \\ y'(t) = -4y + 2xy \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(2-y) \\ \frac{dy}{dt} &= -2y(2-x) \end{aligned}\right| (:) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x(2-y)}{-2y(2-x)}$$

$$\frac{2-x}{x}\,dx = -\frac{2-y}{2y}\,dy \; \Big/ \int$$

$$2\int \frac{1}{x}\,dx - \int dx = -\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{2}\int dy$$

$$2\ln x - x = -\ln y + \frac{1}{2}y + c$$

$$\ln x^2 + \ln y = \frac{1}{2}y + x + c$$

$$\ln x^2 + \ln y = \frac{y}{2} + c + c$$

2. Determinați sol. generale pt. ecuațiile:

a) $xy' = y + 2y(\ln y - \ln x)$

b) $y'' - 6y' + 13y = 13x - 6$

a) $y' = \frac{y}{x} + 2\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$

not $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = z \cdot x \;/()'$

$y' = z + z'x$

$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + 2z\ln z$

$z'x = 2z\ln z$

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{1}{x}\, 2z\ln z \\ z' &= \frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{dz}{2z\ln z} = \frac{dx}{x} \;\Big/\int$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\ln z}\,dz = \ln x$

$\frac{1}{2}\ln(\ln z) = \ln x + c$

$\ln(\ln z) = 2\ln x + c$

$\ln z = e^{2\ln x} \cdot c$

$\ln z = x^2 \cdot c$

$z = e^{x^2} \cdot c \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{x^2}\cdot c \Rightarrow y = xe^{x^2}\cdot c$

$y'' - 6y' + 13y = 13x - 6$

I rez. ec. omogenă

$y'' - 6y' + 13y = 0$

$r^2 - 6r + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 52 = -16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4i$

$r_{1,2} = \frac{6 \pm 4i}{2} \Rightarrow r_1 = 3 + 2i, \quad r_2 = 3 - 2i \Rightarrow \alpha = 3, \quad \beta = 2$

$\Rightarrow y_0 = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

II găsim o sol particulară

avem $13x - 6 \Rightarrow ax + b = y_p$

$y_p' = a$

$y_p'' = 0$

$\Rightarrow -6a + 13ax + 13b = 13x - 6$

$\begin{cases} 13a = 13 \Rightarrow a = 1 \\ -6a + 13b = -6 \Rightarrow +13b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow y_p = x$

$\Rightarrow y = x + c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x$

3. Det. sol. problemei bilocale:

$\begin{cases} (1+x^3) y'' - 3x^2 \cdot y' = 6x^2 \\ y(0) = 2 \\ y(1) = 5 \end{cases}$

not $y' = z \Rightarrow (1+x^3) z' - 3x^2 z = 6x^2$ → $z = 2$ sol. singulară

$z' = \frac{3x^2 (z+2)}{1+x^3}$

$z' = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dz}{z+2} = dx \cdot \frac{3x^2}{x^3+1} \quad / \int$

$\ln(z+2) = \ln(x^3+1) + c$

$z + 2 = c(x^3+1)$

$z = c(x^3+1) - 2 = y'$

$\Rightarrow y = \int (c_1 x^3 + c_1 - 2) = c_1 \frac{x^4}{4} + c_1 x - 2x + c_2$

$y(0) = 2 \Rightarrow \boxed{c_2 = 2}$

$y(1) = 5 \Rightarrow \frac{1}{4} c_1 + c_1 - \cancel{2} + \cancel{2} = 5 \Rightarrow 5c_1 = 20 \Rightarrow \boxed{c_1 = 4}$

$\Rightarrow y = x^4 + 4x - 2x + 2 = x^4 + 2x + 2$

7. Se consideră sistemul $\begin{cases} x'(t) = x - y \\ y'(t) = x - xy^2 \end{cases}$. a) pct de ech b) stabilitatea

a) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$x - xy^2 = 0 \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow$ I $x = 0 \Rightarrow y = 0$

II $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$

avem punctele $(0,0), (1,1), (-1,-1)$

b) $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1-y^2 & -2xy \end{pmatrix}$

I $M(0,0) \Rightarrow J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda(\lambda - 1) + 1 = 0$

$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ punct instabil de tip focus

apoi la fel la toate

Să se det. și să se studieze stabilitatea pct. de ech. pt. ecuația

$x' = ax^2 - x^3 - 4a + 4x$ unde a - parametru real.

$f(x) = ax^2 - x^3 - 4a + 4x = x^2(a-x) - 4(a-x) = (a-x)(x^2-4)$

$f(x) = 0 \Rightarrow (a-x)(x^2-4) = 0 \Rightarrow x^* = a$ punct de echilibru

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$	+ + + +		0	− − −	
	$\longrightarrow$			$\longleftarrow$	

$\Rightarrow x^* = a$ pct de ech local as. stabil