

Examen Sisteme dinamice

1p oficiu

Exercițiul 1 (0,5p) Se consideră modelul dezintegrării radioactive:

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Determinați timpul de înjumătățire al unei substanțe radioactive știind că 10 Kg din această substanță scade în 5 ani la 2 Kg.

Exercițiul 2 Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:

(a) **(0,5p)** $(xy - x^2) \cdot y' = x^2 + y^2$

(b) **(1p)** $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

Exercițiul 3 (1p) Determinați soluția problemei Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \cdot y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Exercițiul 4 (0,5p) Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} x'(t) = 2xy - x^3 \\ y'(t) = -x^2 - y^5 \end{cases}$$

Să se studieze stabilitatea punctului de echilibru $X^*(0,0)$ utilizând funcția de tip Lyapunov $V(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Exercițiul 5 (1p) Să se determine și să se studieze stabilitatea punctelor de echilibru pentru ecuația

$$x' = a \cdot x^2 - x^3 + 3a - 3x,$$

unde a parametru real.

Exercițiul 6 (1p) Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4x^3 + 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Scriveți ecuația integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.

Exercițiul 7 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x'(t) = 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) \end{cases}$$

Se cere:

(a) **(1p)** Să se determine fluxul.

(b) **(0,5p)** Să se determine portretul fazic și să se precizeze stabilitatea și tipul punctului de echilibru $(0,0)$.