2021_2

7. Se consideră sistemul $\begin{cases} x'(t) = 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) \end{cases}$. a) fluxul
b) portret fazic și stabilitatea lui (0,0)

a) $x(0) = \eta_1$

$y(0) = \eta_2$

$x' = 4y \;/()' \Rightarrow x'' = 4y' = -8x$

$x'' + 8x = 0$

$r^2 + 8 = 0 \Rightarrow r^2 = -8 \Rightarrow r = \pm 2\sqrt{2}\, i$

$\Rightarrow x = c_1 \cos 2\sqrt{2}x + c_2 \sin 2\sqrt{2}x$

$x' = -2\sqrt{2}c_1 \sin 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}c_2 \cos 2\sqrt{2}x \Rightarrow y = \frac{x'}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}c_1 \sin 2\sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 \cos 2\sqrt{2}x$

$x(0) = \eta_1 \Rightarrow c_1 = \eta_1$

$y(0) = \eta_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}c_2 = \eta_2 \Rightarrow c_2 = \frac{2\eta_2}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \varphi(t, \eta_1, \eta_2) = \left(\eta_1 \cos 2\sqrt{2}x + \frac{2\eta_2}{\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2}x,\; -\frac{\sqrt{2}}{2}\eta_1 \sin 2\sqrt{2}x + \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\eta_2}{\cancel{\sqrt{2}}} \cos 2\sqrt{2}x\right)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi : I_{max} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ I_{max} = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

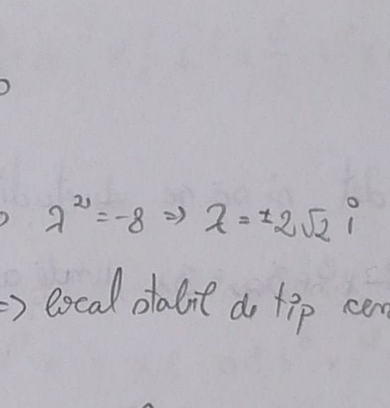
b) stabilitatea lui (0,0)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -4 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -8 \Rightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{2}\, i$

$\Rightarrow$ local stabil de tip centru

portret fazic



$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4y \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases} \Big/ (:) \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\cancel{4}^{2}y}{\cancel{-2}x}$

$-x\,dx = 2y\,dy \;/\int$

$-\frac{x^2}{2} = y^2 + c \Rightarrow y^2 + \frac{x^2}{2} + c = 0$

$y > 0,\ x > 0 \Rightarrow x' = 4y > 0 \quad y' = -2x < 0 \quad \searrow$

6. Se consideră problema Cauchy $\begin{cases} y' = 4x^3 + 2y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$. Scrieți ec. integrală Volterra ech. cu problema Cauchy, formula șirului aprox. succesive și pt. funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele 2 aprox. succesive.

$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$ ec. Volterra

$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,ds$ șirul aprox succesive

a) $x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ f(x,y) = 4x^3 + 2y^2$

$\Rightarrow y = 1 + \int_0^x \left(4s^3 + 2y(s)^2\right) ds$ ec. Volterra

$= 1 + 4\frac{x^4}{4} + \int_0^x 2y(s)^2\,ds = 1 + x^4 + \int_0^x 2y(s)^2\,ds$

b) $y_1 = 1 + x^4 + \int_0^x 2 \cdot 1^2\,ds$ pt. că $y_{n+1}(x) = 1 + x^4 + \int_0^x 2(y_n(s))^2\,ds$ forma șirului aprox. succesive

$y_1 = 1 + x^4 + 2x$

$y_2 = 1 + x^4 + \int_0^x 2(1 + 2s + s^4)^2\,ds = 1 + x^4 + 2\int (1 + 4s^2 + s^8 + 4s + 2s^4 + 4s^5)\,ds =$

$= 1 + x^4 + \left(2s + 8\frac{s^3}{3} + \frac{2s^9}{9} + \frac{8s^2}{2} + \frac{4s^5}{5} + \frac{8s^6}{6}\right)\Big|_0^x$

$= 1 + x^4 + \frac{2}{9}x^9 + \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{8}{3}x^3 + 4x^2 + 2x$

5. Să se det. și să se ~~de~~ studieze stabilitatea punctelor de ech în $x' = a \cdot x^2 - x^3 + 3a - 3x$, unde a - parametru real.

$f(x) = ax^2 - x^3 + 3a - 3x = x^2(a - x) + 3(a - x) = (a - x)(x^2 + 3)$

$f(x) = 0 \Rightarrow (a - x)(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow a = x^*$ punct de ech

x	$-\infty$		a		∞
$f(x)$		+ + + +	0	− − −	
		$\longrightarrow$		$\longleftarrow$	

$x^* = a$ pct de ech local as. stabil

. Se consideră sistemul: $\begin{cases} x'(t) = 2xy - x^3 \\ y'(t) = -x^2 - y^5 \end{cases}$. Să se studieze stab. pct. de ech. $x^*(0,0)$ utilizând funcția de tip Lyapunov $V(x,y) = x^2 + 2y^2$.

$V(0,0) = 0$

$V(x,y) > 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R} / \{(0,0)\}$

$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x(2xy - x^3) + 4y(-x^2 - y^5) =$

$= \cancel{4x^2y} - 2x^4 - \cancel{4x^2y} - 4y^6 = -(2x^4 + 4y^6) < 0 \ \forall x,y$

$\Rightarrow$ pct. de ech. local as. stabil

3. Det. soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'' - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \cdot y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

I rez. ec. omogenă

not $y' = z \Rightarrow z' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} z$

$z' = \frac{dz}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dz}{z} = dx \cdot \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \ \Big| \int$

$\ln z = \ln(e^{2x}+1) + c$

$\Rightarrow z = c(e^{2x}+1)$

II det. o soluție particulară

$z_p = c(x)(e^{2x}+1)$

$z_p' = c'(x)(e^{2x}+1) + c(x)\, 2e^{2x}$

înlocuim $\Rightarrow c'(x)(e^{2x}+1) + \cancel{c(x) \cdot 2e^{2x}} - \cancel{\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \cdot c(x)(e^{2x}+1)} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$

$c'(x)\cdot(e^{2x}+1)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \Leftrightarrow c'(x)=\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \Big/ \int$ $\qquad ((e^{2x}+1)^2)'=2(e^{2x}$

$=2(2e$

$c(x)=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)^2$

$\Rightarrow z=$

de la capăt not $z=y'$

$$\left.\begin{aligned} &z'-\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}(z+1)=0 \\ &z'=\frac{dz}{dx}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dz}{z+1}=dx\cdot\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} \Big/ \int$$

$$\ln|z+1|=\ln(e^{2x}+1)+c$$

$$z+1=c(e^{2x}+1)$$

$$z=c(e^{2x}+1)-1$$

$$y'=z$$

$$\Rightarrow y=\int\left(c(e^{2x}+1)-1\right)=c_1\frac{1}{2}e^{2x}+c_1\cdot x-x+c_2$$

$y(0)=2 \Rightarrow \frac{1}{2}c_1+c_2=2 \Rightarrow c_2=2-\frac{1}{2}c_1=2-\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$y'(0)=3 \Rightarrow 2c_1-1=3 \Rightarrow c_1=2$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}e^{2x}+2x-x+1$$

2. Det. soluția generală pt. ecuațiile:

a) $(xy-x^2)y'=x^2+y^2$

b) $y''-2y'+2y=xe^x$

a) $(xy-x^2)y'=x^2+y^2 \;/:x^2$

$$\left(\frac{y}{x}-1\right)y'=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2$$

not $\frac{y}{x}=z \Rightarrow y'=z'x+z$

$(z-1)(z'x+z) = 1+z^2$

$z'x(z-1) + \cancel{z^2} - z = \cancel{z^2} + 1$

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{1+z}{x(z-1)} \\ z' &= \frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dz \cdot \frac{z-1}{z+1} = \frac{dx}{x} \Big/ \int$$

$$\int \frac{z+1}{z+1} - 2\int \frac{1}{z+1} = \ln|x|$$

$$z - 2\ln(z+1) = \ln|x| + c$$

$$z - 2\ln(z+1) = \ln cx$$

$$\frac{y}{x} - 2\ln\left(\frac{y}{x} + 1\right) = \ln cx$$

b) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$

I ec. omogenă

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 1-i \\ r_2 = 1+i \end{cases} \Rightarrow y_1 = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

II sol. particulară

avem $xe^x \Rightarrow e^x(ax+b) = y_p$

$$y_p' = e^x(ax+a+b)$$

$$y_p'' = e^x(ax+2a+b)$$

înlocuim $\Rightarrow$ $ax + \cancel{2a} + b - \cancel{2ax} - \cancel{2a} - \cancel{2b} + \cancel{2ax} + \cancel{2b} = x$

$$\begin{cases} ax = x \Rightarrow a = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow y_p = e^x \cdot x$$

$$y = y_0 + y_p = xe^x + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

1. Se consideră modelul dezintegrării radioactive.

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$x(t) = ?$

$t = ?$

Determinați timpul de înjumătățire al unei substanțe radioactive știind că 10 kg din această subst. scade în 5 ani la 2 kg.

const. dezint

$$\begin{cases} x'(t) = -k \cdot x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ cant. init

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$$

$x_0 = 10 \text{ kg}$

$t = 5$ ani

$x(t) = 2$ kg

$k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ ← necunoscuta

soluția:

init

$$x(t) = x_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \Leftrightarrow 2 = 10 \cdot 2^{-\frac{5}{T_{1/2}}} \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{-\frac{5}{T_{1/2}}} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{5}{T_{1/2}}} = \frac{1}{5} \; / \log_2 () \Rightarrow -\frac{5}{T_{1/2}} = \log_2 \frac{1}{5} \Rightarrow T_{1/2} = -\frac{5}{\log_2 \frac{1}{5}} = \frac{5}{\log_2 5} \text{ ani}$$