SISTEME DINAMICE

SEMINAR 1

Teorie:

Ec. diferențiale de ord. I sunt date în formă normală rezolvabile efectiv:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

① $\underline{\text{Ec. cu variabile separabile}}$

Sunt de forma: $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \quad /: g(y(x)) \neq 0$

$f \in$

$g \in$

Fie y o sol. a ecuației și $f: (x_1, x_2) \to \mathbb{R}$, $g: (y_1, y_2) \to \mathbb{R}$.

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Știm că $y' = \frac{dy}{dx}$, substituim $\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$.

Fie $x_0 \in (x_1, x_2)$, $y_0 \in (y_1, y_2)$ $\to$ integrăm: $\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad / G^{-1}$

Fie $G(\gamma) = \int_{y_0}^{\gamma} \frac{dt}{g(t)}$ $\to$ derivabilă, s. monotonă $\Rightarrow$ injectivă
$\to y$ nu poate lua val. o dat. semnului $f \cdot g$ $\quad \Rightarrow \exists\, G^{-1}$

$$\Rightarrow y = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right)$$

Exerciții:

① $y'(x) = \underbrace{2x(1+y^2)}_{\text{ec. cu variabile separabile (EVS)}} \quad /:(1+y^2)$

$f(x) = 2x$

$g(y) = 1+y^2 \to g$ ia valori nenule! $g > 0$

(1) $\dfrac{y'}{1+y^2} = 2x$

(2) substituim $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dx}} \Rightarrow \dfrac{dy}{1+y^2} = 2x\,dx \;/\int \Rightarrow \int \dfrac{dy}{1+y^2} = \int 2x\,dx \Rightarrow \operatorname{arctg} y = x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$

↓

soluție implicită

$\Rightarrow y = tg(x^2+c)$

↓

soluție explicită

② $(x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0$

$y' = -\dfrac{2xy^2}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

$f(x) = -\dfrac{2x}{x^2-1}$, $g(y) = y^2$, $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$

! Dacă $y \equiv 0$ este sol. singulară

$\dfrac{y'}{y^2} = \dfrac{-2x}{x^2-1}$

pp. că $y \neq 0$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dy}{y^2} = \dfrac{-2x}{x^2-1}\,dx \;/\int \Rightarrow \int \dfrac{dy}{y^2} = \int \dfrac{-2x}{x^2-1}\,dx \Rightarrow y^{-1} = \ln(x^2-1) + c$

↓

sol implicită

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{\ln(x^2-1)+c}$, $c \in \mathbb{R}$

↓

sol. explicită

③ $xy' = y^3 + y \Rightarrow y' = \dfrac{y^3+y}{x}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = y^3 + y = y(y^2+1)$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ $\left(\dfrac{y'}{y^3+y} = \dfrac{1}{x} \right)$

$\dfrac{dy}{y(y^2+1)} = \dfrac{dx}{x} \;/\int$

! $y = 0$ sol. singulară

pp. $y \neq 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y(y^2+1)} = \int \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{a}{y} + \frac{bx+c}{y^2+1}$$

$$\frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)y} = \frac{1+y^2}{(1+y^2)y} - \frac{y^2}{(1+y^2)y} = \frac{1}{y} - \frac{y^2}{(1+y^2)y}$$

$$\int \frac{1}{y}dy - \int \frac{y}{1+y^2}dy = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|y^2+1| = \ln|x| + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$c = \ln c_1,\ c_1 > 0$

$$\ln\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = \ln(|x| \cdot c_1) \Rightarrow \frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = |x| \cdot c_1 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = xc_2,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

y pozitiv

$$y = xc_2\sqrt{y^2+1}\ /()^2$$

$$y^2 = x^2c_2^2(y^2+1) = x^2c_2^2y^2 + x^2c_2^2 \Rightarrow y^2(1-x^2c_2^2) = x^2c_2^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2c_2^2}{1-x^2c_2^2}},\ x \neq \pm\frac{1}{c}$$

sol. explicită

Teorie:

② Ecuații omogene în sens Euler:

Au forma: $y'(x) = g(x,y)$ unde f · g este omogenă de grad 0.

Def*: Funcția $g(x,y)$ este omogenă de grad k dacă:

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k \cdot g(x,y)$$

pentru $k=0$, $g(\lambda x, \lambda y) = g(x,y)$

putem rescrie ec.: $y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Rezolvarea constă în substituția $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

① $2x^2 \cdot y' = x^2 + y^2 \ , x > 0$

$\Rightarrow y' = \frac{x^2+y^2}{2x^2} \Rightarrow \underline{\underline{y' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$

Substituim: $z = \frac{y}{x} \Rightarrow x \cdot z = y \ /()' \Rightarrow x' \cdot z + x \cdot z' = y' \Rightarrow \underline{y' = z + x \cdot z'} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2}}$

Înlocuim: $z + x z' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow x \cdot z' = \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}z^2 \Rightarrow z' = \frac{1}{2x}(1 - 2z + z^2)$

$\Rightarrow z' = \frac{1}{2x}(z-1)^2$ EVS

! Sol. singulară când $z \equiv 1 \Rightarrow y(x) = x \quad \left(z = \frac{y}{x}\right)$

pp. $z \neq 1$

$z' = \frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{(z-1)^2} = \frac{dx}{2x} \ /\int \Rightarrow \int \frac{dz}{(z-1)^2} = \int \frac{dx}{2x} \Rightarrow \frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\ln x + C_0$

$C_0 = \frac{c}{2}$

$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}(\ln x + c) \Rightarrow 1 - z = \frac{2}{\ln x + c} \Rightarrow z = 1 - \frac{2}{\ln x + c} \Rightarrow y = x\left(1 - \frac{2}{\ln x + c}\right), \ c \in \mathbb{R}$

② $y' = -\frac{x+y}{y} \Rightarrow y' = -\left(\frac{x}{y} + 1\right) = -\frac{x}{y} - 1$

$\underline{\underline{z = \frac{y}{x}}} \Rightarrow \underline{x \cdot z = y} \qquad \Rightarrow z'x + z = \underbrace{-\frac{1}{z} - 1}_{y'} \ /-z \Rightarrow x z' = -\frac{1}{z} - z - 1 \ /: \frac{1}{x}$

$z' = \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{z} - z - 1\right) = -\frac{1}{x}\left(\frac{z^2+z+1}{z}\right) \ /: \frac{z^2+z+1}{z}$ EVS

$\frac{z \cdot z'}{z^2+z+1} = -\frac{1}{x} \ ; \ z' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{z}{z^2+z+1} \cdot dz = -\frac{1}{x}dx \ /\int \Rightarrow \int \frac{z}{z^2+z+1}dz = -\int \frac{1}{x}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2z+1-1}{z^2+z+1}dz = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2z+1}{z^2+z+1}dz - \int \frac{1}{z^2+z+1}dz\right)$

$$y=\frac{1}{2}\left(\ln|z^2+z+1|-\int\frac{1}{z^2+2\left(\frac{1}{2}\right)z+\frac{3}{4}}dz\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\ln(z^2+z+1)-\int\frac{1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dz\right)$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\ln(z^2+z+1)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left[\left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right]\right)$$

$\downarrow$ sol implicită

Teorie

③ Ecuații liniare

Au forma: $y'+P(x)y=Q(x)$, P,Q - f. continue

Rezolvare

1) Se rezolvă ec. liniară omogenă: $y'+P(x)y=0$

Soluția o notăm cu y_o (sol. omogenă)

2) Se caută o sol. particulară a ec. neomogene y_p prin metoda variației constantelor ($c \dashrightarrow f(x)$)

3) Sol. generală a ec. liniare este $y=y_o+y_p$

Exerciții

① $y'+y\overbrace{\operatorname{tg}x}^{P(x)}=\overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{Q(x)}$

I ec. omogenă: $y'+y\cdot\operatorname{tg}x=0 \Rightarrow y'=-y\operatorname{tg}x \,/:(-y)$

! $y=0$ sol singulară

$y'=\frac{dy}{dx}$

$y\neq 0 \Rightarrow \frac{y'}{y}=-\operatorname{tg}x \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\operatorname{tg}x\,dx\,/\int \Rightarrow \ln|y|=-\ln|\cos x|+c_1$, $c_1=\ln c>0$

$\Rightarrow \ln|y|=\ln|\cos x|+c \Rightarrow y_o=c\cos x$

II Sol particulară prin metoda variației constantelor

$y_p = \varphi(x)\cos x \,/\,'$ sol pt. ecuația inițială

$\Rightarrow y_p' = \varphi'\cos x - \varphi\sin x$

Înlocuim y_p și y_p' în ec. inițială $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overbrace{\varphi'\cos x - \varphi\sin x}^{y'} + \overbrace{\varphi\cos x}^{y}\cdot\overbrace{tg\, x}^{P(x)} = \overbrace{\frac{1}{\cos x}}^{Q(x)}$$

$$\Rightarrow \varphi'\cos x - \underline{\varphi\sin x} + \underline{\varphi\sin x} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \varphi'\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \varphi' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \varphi = tg\, x \Rightarrow y_p = \underbrace{tg\, x}_{\varphi}\cdot\cos x = \sin x$$

III Sol generală

$$y = y_0 + y_p = c\cos x + \sin x,\ c\in\mathbb{R}$$