SUBIECTE CU REZOLVĂRI

SUBIECT 1

3. Det. soluțiile generale pt. ecuațiile

a) $(x^2+1)y'+2xy=1$

I prima dată rezolvăm ec. omogenă $(x^2+1)y'+2xy=0 \Rightarrow y'=\frac{-2x}{x^2+1}\cdot y$ EVS

$$\left.\begin{array}{l}\frac{y'}{y}=-\frac{2x}{x^2+1}\\ y'=\frac{dy}{dx}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{2x}{x^2+1}dx \;/\int \Rightarrow \ln|y|=-\ln|x^2+1|+c$$

$$\ln|y|=\ln\frac{c}{x^2+1} \Rightarrow y_o=\frac{c}{x^2+1} \qquad y_o'=\frac{c'\cdot(x^2+1)-c(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2cx}{(x^2+1)^2}$$

II det. soluția particulară

$$y_p=\frac{c(x)}{x^2+1}$$

$$y_p'=c'(x)\cdot\frac{1}{x^2+1}+c(x)\cdot\left(\frac{1}{x^2+1}\right)'=\frac{c'(x)}{x^2+1}+\frac{c(x)\cdot(-2x)}{(x^2+1)^2}$$

înlocuim în prima $\Rightarrow (x^2+1)\left[\frac{c'(x)}{x^2+1}+\frac{c(x)\cdot(-2x)}{(x^2+1)^2}\right]+2x\cdot\frac{c(x)}{x^2+1}=1$

$$c'(x)-\cancel{\frac{2xc(x)}{x^2+1}}+\cancel{\frac{2xc(x)}{x^2+1}}=1 \Rightarrow c'(x)=1\;/\int$$

$$\left.\begin{array}{l}c(x)=x+c_1\\ c_1=0\end{array}\right\}\Rightarrow c(x)=x$$

$$\Rightarrow y_p=\frac{x}{x^2+1}$$

III scriem soluția $y=y_o+y_p=\frac{c}{x^2+1}+\frac{x}{x^2+1},\ c\in\mathbb{R}$

b) $y''+2y'+10y=10x+2$

I rezolvăm ec. omogenă $y''+2y'+10y=0$

$$\left.\begin{array}{l}r^2+2r+10=0\\ \Delta=-36\Rightarrow\sqrt{\Delta}=6i\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}r_1=-1+3i\\ r_2=-1-3i\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha=-1\\ \beta=3\end{array}$$

$$y_1=e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x=e^{-x}\cdot\cos 3x$$

$$y_2=e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x=e^{-x}\cdot\sin 3x$$

$$\Rightarrow y_o=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{-x}\cos 3x+c_2e^{-x}\sin 3x,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

II determinăm o soluție particulară

avem $10x+2$ => căutăm o sol de forma $ax+b = y_p$

$$y_p' = a$$

$$y_p'' = 0$$

înlocuim în prima => $0+2a+10ax+10b = 10x+2$ => $\begin{cases} 10a = 10 \Rightarrow a=1 \\ 2a+2b = 2 \Rightarrow b=0 \end{cases}$ => $y_p = x$

III scriem sol finală $y = y_0 + y_p = c_1 e^{-x}\cos 3x + c_2 e^{-x}\sin 3x + x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4. Det. soluția problemei bilocale:

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x\ln x} y' = 12x^2 \ln x \\ y(1) = -\frac{1}{4} \\ y(2) = e^4 \end{cases}$$

I prima dată rezolvăm ec. omogenă $y'' - \frac{1}{x\ln x} y' = 0$, not $z = y'$

=> $z' - \frac{1}{x\ln x} z = 0$ => $\left.\begin{array}{l} \frac{z'}{z} = \frac{1}{x\ln x} \\ z' = \frac{dz}{dx} \end{array}\right\}$ => $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x} \,/\!\int$ => $\ln|z| = \ln(\ln x) + c$

$$z_0 = c\ln x, \; c \in \mathbb{R}$$

II det. o sol. particulară

$\left.\begin{array}{l} z_p = c(x)\ln x \\ z_p' = c'(x)\cdot \ln x + c(x)\frac{1}{x} \end{array}\right\}$ => înlocuim în prima

$$c'(x)\cancel{\ln x} + \cancel{c(x)\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x\ln x}c(x)\ln x} = 12x^2 \cancel{\ln x}$$

$$c'(x) = 12x^2 \,/\!\int \Rightarrow c(x) = 12\frac{x^3}{3} \Rightarrow c(x) = 4x^3 \Rightarrow z_p = 4x^3\ln x$$

III scriem sol finală => $z = z_0 + z_p = c\ln x + 4x^3\ln x$, $c \in \mathbb{R}$

IV înlocuim înapoi $y' = z$

$$y' = c\ln x + 4x^3\ln x \,/\!\int \Rightarrow y = c\underbrace{\int \ln x\, dx}_{I_1} + 4\underbrace{\int x^3 \ln x\, dx}_{I_2} + c_1$$

$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\,dx$

$$I_1 = \int \ln x\, dx = \int \underset{g'}{x'}\, \underset{f}{\ln x}\, dx = x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx = x\ln x - x$$

$$I_2 = \int \underset{g'}{x^3}\, \underset{f}{\ln x}\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{4}3}}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$$

Înlocuim I_1 și I_2 $\Rightarrow$ $y = c(x\ln x - x) + 4\left(\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}\right) = cx\ln x - cx + x^4\ln x - \frac{x^4}{4} + c_1$

$y(1) = -\frac{1}{4}$, $y(2) = e^4$

$y(1) = 0 - c + 0 - \frac{1}{4} + c_1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = c_1$

$y(2) = e^4 \Rightarrow 2\ln 2 \cdot c - 2c + 16\ln 2 - 4 + c_1 = e^4$

$c(2\ln 2 - 2 + 1) = e^4 + 4 - 16\ln 2 \Rightarrow c = \dfrac{e^4 + 4 - 16\ln 2}{2\ln 2 - 1} = c_1$

5. Se consideră problema Cauchy $\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$. Scrieți formula lui Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pt. o rețea de noduri echidistante. Pt. pasul $h = 0.2$ calculați primele 3 val. aproximante ale soluției pe $[0, 1]$.

I rezolvăm problema Cauchy

$y' = x^2 + y \Rightarrow y' - y = x^2$

rez. ec. omogenă $\Rightarrow y' - y = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} y' = y \\ y' = \frac{dy}{dx} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln|y| = x + c$

$y_o = e^x \cdot c$

det. o sol. particulară $y_p = e^x \cdot c(x) \Rightarrow y_p' = e^x c(x) + e^x c'(x)$

înlocuim sus $\Rightarrow \cancel{e^x c(x)} + e^x c'(x) - \cancel{e^x c(x)} = x^2 \Rightarrow e^x c'(x) = x^2$

$\Rightarrow c'(x) = \frac{x^2}{e^x} \,/\!\int \Rightarrow c(x) = \int \frac{x^2}{e^x}\,dx$

$f = x^2$, $g' = e^{-x}$

$c(x) = x^2 \cdot (-e^{-x}) + 2\int e^{-x} x\,dx$

$g' = e^{-x}$, $f = x$

$c(x) = x^2(-e^{-x}) + 2\left(-e^{-x} \cdot x + \int e^{-x}dx\right) + c$

$c(x) = -x^2 e^{-x} - 2e^{-x} \cdot x - 2e^{-x} + \overset{0}{c}$

$c(x) = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$

$\Rightarrow y_p = -(x^2 + 2x + 2)$

scriem sol finală $\begin{cases} y = y_o + y_p = ce^x - x^2 - 2x - 2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(0) = c - 0 - 0 - 2 = 0 \Rightarrow c = 2$

$\Rightarrow y(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

II $h=0,2 \Rightarrow N=5$

$f(x,y)=x^2+y$

$x_0=0 \Rightarrow y_0=0$

$x_1=0,2 \Rightarrow y_1=0$

$x_2=0,4$

$x_3=0,6$

$y_{m+1}=y_m+(x_m^2+y_m)h$

$y_1=y_0+(x_0^2+y_0)h \Rightarrow y_1=0+0=0$

$y_2=y_1+(x_1^2+y_1)h=0+(0,2^2+0)\cdot 0,2=(0,2)^3$

$y_3=y_2+(x_2^2+y_2)h=(0,2)^3+((0,4)^2+(0,2)^3)\cdot 0,2$

6. Se consideră sistemul $\begin{cases} x'(t)=xy-1 & f_1 \\ y'(t)=x^2-y^2 & f_2 \end{cases}$

a) Să se det. pct. de echilibru.

b) Să se studieze stabilitatea lor.

a) $\begin{cases} xy-1=0 \Rightarrow xy=1 \Rightarrow x=\frac{1}{y} \\ x^2-y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{y^2}-y^2=0 \Rightarrow y^4=1$

$y_1=1 \Rightarrow x_1=1$

$y_2=-1 \Rightarrow x_2=-1$

$y_3=i \Rightarrow x_3=\frac{1}{i}=-i$

$y_4=-i \Rightarrow x_4=\frac{-1}{i}=i$

$\Rightarrow X_1^*(1,1),\ X_2^*(-1,-1)$ - pct. de ech. (x și y trb. să $\in \mathbb{R}$)

b) $J_f=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$

I $J_f(1,1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=A$

$\det(\lambda I_2-A)=0$

$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -2 & \lambda+2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)-2=0 \Rightarrow \lambda^2+\lambda-4=0$

$\Delta=17 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{17} \Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow X_1^*(1,1)$ - pct. de ech. instabil de tip șa

nu ambele părți reale sunt <0

$J_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)-2=0$

$\Delta = 17 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow X_2^*(-1,-1) \rightarrow$ pct de ech. instabil de tip şa

7. Să se det. sol. generală a sistemului.

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = \frac{2y_1 - y_1'}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$y_2' = \frac{1}{5}(2y_1' - y_1'')$$

$$\frac{1}{5}(2y_1' - y_1'') = 5y_1 + \frac{4y_1 - 2y_1'}{5} \quad \Big| \cdot 5$$

$$2y_1' - y_1'' = 25y_1 + 4y_1 - 2y_1'$$

$$y_1'' - 4y_1' + 29y_1 = 0$$

$$r^2 - 4r + 29 = 0 \Rightarrow \Delta = -100 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 10i \Big\} \Rightarrow r_{1,2} = 2 \pm 5i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 5$$

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\Rightarrow y_1 = c_1 e^{2x}\cos 5x + c_2 e^{2x}\sin 5x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_1' = c_1 \cdot (2e^{2x}\cos 5x - 5e^{2x}\sin 5x) + c_2(2e^{2x}\sin 5x + 5e^{2x}\cos 5x)$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{1}{5}\Big[2c_1 e^{2x}\cos 5x + 2c_2 e^{2x}\sin 5x - 2c_1 e^{2x}\cos 5x + c_1 5e^{2x}\sin 5x - 2c_2 e^{2x}\sin 5x - 5c_2 e^{2x}\cos 5x\Big]$$

$$y_2 = c_1 e^{2x}\sin 5x - c_2 e^{2x}\cos 5x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$