SISTEME DINAMICE

SEMINAR 2

Ec. diferențiale de ord 2

Teorie:

Ec. de forma: $y''(x) = f(x)$, f - continuă

Sol. generală se obține integrând de 2 ori, adăugându-se după fiecare integrare câte o constantă.

Exerciții

① $y'' = x + \cos x + \sin x \;/\int$

$\Rightarrow y' = \int (x + \cos x + \sin x)\,dx \Rightarrow y' = \frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1,\; c_1 \in \mathbb{R} \;/\int$

$\Rightarrow y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x - \cos x + c_1\right) dx = \frac{x^3}{6} - \cos x - \sin x + c_1 x + c_2,\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② $y'' = 1 + tg^2 x \;/\int$

$\Rightarrow y' = x + \int tg^2 x\,dx = x + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = x + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \cancel{x} + tg\,x - \cancel{x} + c_1 =$

$= tg\,x + c_1 \;/\int$

$\Rightarrow y = \int (tg\,x + c_1)\,dx = c_1 x + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = c_1 x - \int \frac{1}{t}\,dt = c_1 x - \ln|t| + c_2$

not $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\,dx$

$\Rightarrow y = -\ln|\cos x| + c_1 x + c_2,\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Teorie:

Ec. de forma $y''(x) = f(x, y')$

Acest tip de ec. dif. permite reducerea ordinului ec. cu o unitate prin substituția $z(x) = y'(x)$

Exerciții

① $xy'' + y' + x = 0$

Substituția $z = y' \Rightarrow y'' = z'$

ec. $\Rightarrow x\overset{y''}{z'} + \overset{y'}{z} + x = 0 \quad / -x \Rightarrow xz' + z = -x \,/ : x \Rightarrow z' + \frac{z}{x} = -1 \rightarrow$ ec. lin. neomogenă

I ec. lin. omogenă: $z' + \frac{z}{x} = 0$

$\Rightarrow z' = -\frac{1}{x} z$ (EVS)

Obs! $z \equiv 0$ sol. singulară $\Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \boxed{y = c}$, $c \in \mathbb{R}$

pp. că $z \neq 0 \Rightarrow \frac{z'}{z} = -\frac{1}{x}$

Substituim: $\underline{\underline{z' = \frac{dz}{dx}}} \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad / \int \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|x| + \underset{\ln c_2,\ c_2 > 0}{\underset{\shortparallel}{c_1}}$, $c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \ln|z| = -\ln|x| + \ln c_2$

$\Rightarrow \ln|z| = \ln \frac{c_2}{|x|} \Rightarrow z = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$

$z_0 = \frac{c}{x}$, $c \in \mathbb{R}$ <u>sol omogenă</u>

II det. o sol. particulară z_p prin metoda variației constantelor

$z_p = \frac{c(x)}{x} \Rightarrow z_p' = \frac{c'(x) \cdot x - c(x) \cdot \overset{1}{\cancel{x'}}}{x^2}$

III* substituim z și z' în ecuația neomogenă

$\overbrace{\frac{c'(x) \cdot x - c(x)}{x^2}}^{z'} + \overbrace{\frac{\frac{c(x)}{x}}{x}}^{\frac{z}{x}} = -1 \Rightarrow \frac{c'(x)}{x} - \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{c'(x)}{x} = -1 \Rightarrow c'(x) = -x \Rightarrow c(x) = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow z_p = \frac{\frac{-x^2}{2}}{x} \rightarrow z_p = -\frac{x}{2}$ <u>sol. particulară</u>

III sol. generală $z = z_0 + z_p = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}$, $c \in \mathbb{R}$

revenim la y : $y' = z \Rightarrow y' = \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \,/\!\int \Rightarrow y = \int\left(\frac{c}{x} - \frac{x}{2}\right)dx$

$\Rightarrow y = c\ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$ <u>sol. generală</u>

② $x \cdot y'' = y' \cdot \ln \frac{y'}{x}$

substituim: $z = y'$; $z' = y''$

$\Rightarrow x \cdot z' = z \cdot \ln \frac{z}{x} \,/ :x \Rightarrow z' = \frac{z}{x} \cdot \ln \frac{z}{x}$

not $t = \frac{z}{x} \Rightarrow t \cdot x = z \Rightarrow \underline{\underline{z' = t'x + t}}$

$x \cdot t' + t = t \cdot \ln t$

$t' = \frac{t \cdot \ln t - t}{x}$ (EVS)

$\frac{t'}{t(\ln t - 1)} = \frac{1}{x}$

nu ne convine

$t(\ln t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \frac{z}{x} = 0 \Rightarrow z = 0 \quad (1) \quad \times \\ \ln t - 1 = 0 \Rightarrow t = e \Rightarrow \frac{z}{x} = e \Rightarrow z = x \cdot e \quad (2) \end{cases}$

(2) $y' = x \cdot e \,/\!\int \Rightarrow y = \int ex \Rightarrow y = e \cdot \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$

$t' = \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x} \,/\!\int \Rightarrow \int \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int \frac{1}{x}\,dx$

not $u = \ln t - 1 \Rightarrow du = \frac{1}{t}dt \;\Big\| \Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = \ln|x| + c_1 \Rightarrow \ln|u| = \ln|x| + c_1$

$\Rightarrow \ln|\ln t - 1| = \ln|x| \cdot c_2$, $\ln c_2 = c_1 \Rightarrow \underbrace{\ln t - 1 = x \cdot c}_{\text{include (2)}} \Rightarrow \ln t = x \cdot c + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = e^{xc+1}$

$t = \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{2}{x} = e^{xc+1} \Rightarrow 2 = x e^{xc+1}$

$2 = y' \Rightarrow y' = x \cdot e^{xc+1} \; / \int \Rightarrow y = \int x e^{xc+1}$

$\underline{I}'$ $c = 0 \Rightarrow y = \int xe\,dx \Rightarrow y = e\frac{x^2}{2} + c, \; c \in \mathbb{R}$

$\underline{II}'$ $c \neq 0 \Rightarrow y = \int x e^{xc+1} dx = \frac{1}{c}\int xc\, e^{xc+1} dx = \frac{1}{c}\int x (e^{xc+1})' dx =$

$= \frac{1}{c}\left(x e^{xc+1} - \frac{e^{xc+1}}{c}\right) + c_2 = \underbrace{\frac{xe^{xc+1}}{c} - e^{xc+1} + c_2}_{\text{sol. generală}}, \; c_2 \in \mathbb{R}, \; c \in \mathbb{R}^*$

Teorie:

Ec. liniare cu coef. constanți

Forma generală a unei ec. lin. cu coef. constanți, neomogenă:

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Ec. $y'' + ay' + by = 0$ este o ec. lin. omogenă.

$\Rightarrow$ În cazul ec. lin. omogene cu coef. constanți, sistemul fundamental de soluții se construiește căutând sol. de forma $y(x) = e^{rx}$. Astfel se obține ec. caracteristică atașată ec. lin. omogene: $r^2 + ar + b = 0$.

Algoritm de det. a soluțiilor generale pt. ec. lin. omogenă:

P_1: Se atașează ec. caracteristică

P_2: Se det. rădăcinile r_1 și r_2 ale ec. caracteristice

P_3: Fiecărei rădăcini i se atașează funcțiile y_1 și y_2 astfel:

- Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ și $r_1 \neq r_2$ $(\Delta > 0)$
  $y_1(x) = e^{r_1 x}$ și $y_2(x) = e^{r_2 x}$
- Dacă $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$ $(\Delta = 0)$ atunci
  $y_1(x) = e^{r_1 x}$ și $y_2(x) = xe^{r_1 x}$
- Dacă $r_1, r_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $(\Delta < 0) \Rightarrow r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
  $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$ și $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$

P4: Se obține sol. generală: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

În cazul ec. liniare neomogene cu coef. constanți sol. generală este:

$$y(x) = y_0(x) + \underbrace{y_p(x)}_{\text{sol. particulară a ec. neomogene}} \qquad y'' + ay' + by = f(x)$$

Cazuri speciale de det. ale lui y_p:

caz I: Dacă $f(x) = P_m(x)$ atunci

(a) Dacă $b \neq 0 \Rightarrow y_p(x) = Q_m(x)$

(b) Dacă $b = 0$ și $a \neq 0$ atunci $y_p(x) = x\, Q_m(x)$

caz II: Dacă $f(x) = e^{rx} \cdot P_m(x)$ atunci

$P_m(x)$ → polinom de grad m

(a) Dacă r nu e rădăcină a ec. caracteristice $\Rightarrow y_p(x) = e^{rx} \cdot Q_m(x)$

(b) Dacă r este răd. cu ord. de multiplicitate $\mu \Rightarrow y_p(x) = x^{\mu} \cdot e^{rx} \cdot Q_m(x)$

caz III: Dacă $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \cdot \cos \beta x$ sau $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x) \cdot \sin \beta x$

(a) Dacă $\alpha + i\beta$ NU e răd. a ec. caract. $\Rightarrow$

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_m(x) \cdot \sin \beta x\right]$$

(b) Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină $\Rightarrow$

$$y_p(x) = x \cdot e^{\alpha x}\left[Q_m(x) \cdot \cos \beta x + R_m(x) \cdot \sin \beta x\right]$$

Exerciții:

① $y'' - y = 0$ → ec. liniară omogenă cu coef. constanți

P1: ec. caracteristică: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1/2} = \pm 1$

Pornim de la răd. ec. caract., construim sist. fundamental de soluții:

$r_1 = 1 \rightarrow y_1(x) = e^x$

$r_2 = -1 \rightarrow y_2(x) = e^{-x}$

Sol generală: $y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$ ec. lin. neomogenă

P1: Ec. lin omogenă: $y'' - 5y' + 6y = 0$

Ec. caracteristică: $r^2 - 5r + 6 = 0 \quad r_{1,2} \in \{2, 3\}$

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 2 \xrightarrow{\text{i se asociază}} y_1(x) = e^{2x} \\ r_2 = 3 \longrightarrow y_2(x) = e^{3x} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

P2: Det. o sol. particulară y_p:

$f(x) = 6x^2 - 10x + 2$ polinom de gr. 2 (caz 1)

căutăm un y_p de forma $y_p = Q_2(x) = ax^2 + bx + c$

$$y_p' = 2ax + b$$

$$y_p'' = 2a$$

$\Rightarrow 2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2$

$6ax^2 + (-10a + 6b)x + (2a - 5b + 6c) = 6x^2 - 10x + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a = 6 \Rightarrow a = 1 \\ -10a + 6b = 10 \Rightarrow -10 + 6b = 10 \Rightarrow b = 0 \\ 2a - 5b + 6c = 2 \Rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$Q_2(x) = x^2 \Rightarrow y_p = x^2$

P3: Sol. generală: $y = y_0 + y_p \Rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + x^2, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

③ $y'' + 3y' + 2y = e^x$ (caz 3)

P1: Ec. omogenă: $y'' + 3y' + 2y = 0$

Ec. caracteristică: $r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = e^{-2x} \\ y_2(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y_0 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

P_2: Det. sol. particulară y_p

$$f(x) = e^x = e^{1\cdot x} \underbrace{P_0(x)}_{=1}$$

$$y_p = e^{1\cdot x} \cdot Q_0(x) = a \cdot e^x = y_p' = p'' p$$

$$\Rightarrow a e^x + 3 a e^x + 2 a e^x = e^x \quad / : e^x$$

$$\Rightarrow 6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6} \Rightarrow y_p = \frac{1}{6} e^x$$

Sol. generală: $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{6} e^x$