SISTEME DINAMICE

SEMINAR 5

Sist. dinamice generate de ec. diferențiale autonome

Teorie:

Def.: O ecuație dif. se numește ec. autonomă dacă variabila funcției necunoscute nu apare în mod explicit în expresia ecuației diferențiale.

ex.: $x' = t^2 x + x^3$ - nu e autonomă

$x' = x + x^3$ - este autonomă

$x'(t) = f(x(t))$

<u>Fluxul generat de o ec. dif. autonomă. Portret fazic.</u>

Fie o ec. autonomă: $x' = f(x)$

Teoremă: Dacă f e o funcție $f \in C^1(\mathbb{R})$ atunci problema Cauchy

$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = \eta \end{cases}$ are o unică sol. <u>saturată</u>

$\eta \in \mathbb{R}$ pt $\forall \eta \in \mathbb{R}$

Printr-o sol. saturată a unei ec. dif. înțelegem o sol. definită pe cel mai mare interval posibil.

<u>notăm</u>: prin $x(t,\eta)$ unica sol. a problemei Cauchy

$x(\cdot,\eta): I_\eta \to \mathbb{R}$ unde I_η este intervalul maximal

Intervalul I_η este un interval deschis $J_\eta = (\alpha_\eta, \beta_\eta)$, $\alpha_\eta, \beta_\eta \in \overline{\mathbb{R}}$

Pt. ca problema Cauchy să fie bine definită $0 \in J_\eta \Rightarrow \alpha_\eta < 0 < \beta_\eta$

Fluxul generat de ec. este soluția saturată a probl. Cauchy

$$\varphi: \omega \to \mathbb{R},\ \varphi(t,\eta) = x(t,\eta) \text{ unde } \omega = \{J_\eta \times \{\eta\} \ / \ \eta \in \mathbb{R}\}$$

Obs. Dacă $J_\eta = \mathbb{R}$, $\forall \eta \in \mathbb{R} \Rightarrow \omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Pt. $\forall t$ fixat putem defini operatorul $\eta \to \varphi(t,\eta)$ se num. sistemul dinamic generat de ec. dif..

Exerciții:

Fie ecuația $x' = x+1$

a) Să se det. fluxul

b) Să se det. orbitele pozitive, negative

c) Să se det. portretul fazic

a) $x' = x+1$

$\frac{dx}{dt} = x+1 \Rightarrow \frac{dx}{x+1} = dt \Big/ \int \Rightarrow \ln|x+1| = t+c,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow |x+1| = e^{t+c} \Rightarrow |x+1| = e^t \cdot c,\ c>0$

$\Rightarrow x+1 = e^t \cdot c,\ c\in\mathbb{R} \Rightarrow x = e^t \cdot c - 1$ sol generală a ec. diferențiale

Fluxul: $\begin{cases} x' = x+1 \\ x(0) = \eta,\ \eta\in\mathbb{R} \end{cases}$ $x(0) = c_2 - 1 \Rightarrow c_2 = \eta + 1 \Rightarrow x(t,\eta) = e^t(\eta+1) - 1$

$I_\eta = \mathbb{R}\ \forall \eta\in\mathbb{R},\ W = \mathbb{R}^2$

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(t,\eta) = e^t(\eta+1) - 1$

b) * $\eta = -1,\ \varphi(t,-1) = -1$

$\left.\begin{array}{l} \gamma^+(-1) = \bigcup\limits_{t\in[0,\infty)} \varphi(t,-1) = \{-1\} \\ \gamma^-(-1) = \bigcup\limits_{t\in(-\infty,0]} \varphi(t,-1) = \{-1\} \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(-1) = \{-1\}$

* $\eta = 0$

$\varphi(t,0) = e^t - 1$

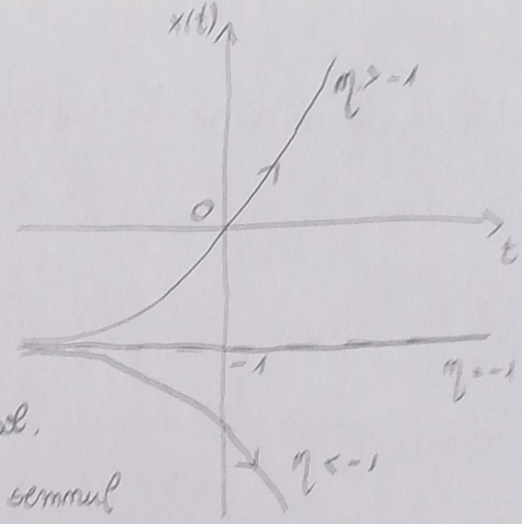
$\left.\begin{array}{l} \gamma^+(0) = \bigcup\limits_{t\in[0,\infty)} \varphi(t,0) = \underrightarrow{[0,+\infty)} \\ \gamma^-(0) = \bigcup\limits_{t\in(-\infty,0]} \varphi(t,0) = (-1,0] \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(0) = (-1,\infty)$

* $\eta < -1,\ \varphi(t,\eta) = e^t(\eta+1) - 1$

$\left.\begin{array}{l} \gamma^+(\eta) = \bigcup\limits_{t\in[0,\infty)} \varphi(t,\eta) = (-\infty,\eta] \\ \gamma^-(\eta) = \bigcup\limits_{t\in(-\infty,0]} \varphi(t,\eta) = [\eta,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma(\eta) = \underleftarrow{(-\infty,-1)}$

portret fazic

$-\infty \quad \longleftarrow \quad -1 \quad \longrightarrow \quad +\infty$



→ portretul fazic poate fi obț. direct din analiza semnului funcției $f(x)$.

→ mai întâi rezolv ec. $f(x)=0$. Fie $x_1, \dots, x_m$ sol. reale în ord crescătoare. Construim tabelul cu semnul

x	$-\infty$	x_1		x_2	$\dots$	x_m		$+\infty$
$f(x)$	$+++$ $\longrightarrow$	0	$---$ $\longleftarrow$	0	$++++$ $\longrightarrow$	0	$++++$ $\longrightarrow$	

portretul fazic: $-\infty \longrightarrow x_1 \longleftarrow \longrightarrow x_m \longrightarrow +\infty$

în ex anterior: $x' = x+1$, $f(x) = x+1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$---$ $\longleftarrow$	0	$+++$ $\longrightarrow$	

② Puncte de echilibru. Stabilitate

Fie $x' = f(x)$

Def.: Sol. constante $x(t) = x^*$ ale ec $x' = f(x)$ s.n. sol. de ech sau sol. staționare.
Valoarea $x^* \in \mathbb{R}$ s.n. punct de ech. sau punct static.
Se obs. că dacă $x(t) = x^*$ este o sol. de echilibru a ecuației $\Rightarrow x^* \in \mathbb{R}$ este o sol a ec $f(x)=0$
Stabilitatea pct. de ech. poate fi determinată folosind 2 metode:

(1) Metoda portretului fazic

$\longrightarrow \; x^* \; \longleftarrow$ — x^* este pct de ech. asimpt. stabil

$\longrightarrow \; x^* \; \longleftarrow$ — x^* este punct de ech. instabil

(2) Metoda liniarizării (met. primei aproximații)

Exerciții:

Să se det. punctele de ech. și să se studieze stabilitatea lor.

a) $x' = -2x$

I met. portretului fazic:

$f(x) = -2x$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pct. de ech.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+ + + +$	$\longrightarrow$	0	$\longleftarrow$	$- - - -$

$\rightarrow$ punct de ech. asimptotic stabil

II met. liniarizării

$f'(x) = -2$

$f'(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ pct. de ech. asimptotic stabil