Seminar 8

Temă: 1.4.40, 1.4.41, 1.4.42, 1.4.53, 1.4.54.!

2.1.52. (Grupul quaternionilor)

Fie mulțimea $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$. Pe H definim o operație de înmulțire a.î.:

- 1 este elem. neutru
- regula semnelor $(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -x\cdot y$
- $i^2 = j^2 = K^2 = -1$.
- $i\cdot j = K$; $j\cdot K = i$; $K\cdot i = j$ (ex: $j\cdot i = -K$)

$K \to i \to j \to K$

S.s.a.c $(H, \cdot)$ este un grup

Calculăm tabla Cayley / operației

$\cdot$	1	-1	i	-i	j	-j	K	-K
1	$\boxed{1}$	-1	i	-i	j	-j	K	-K
-1	-1	$\boxed{1}$	-i	i	-j	j	-K	K
i	i	-i	-1	$\boxed{1}$	K	-K	-j	j
-i	-i	i	$\boxed{1}$	-1	-K	K	j	-j
j	j	-j	-K	K	-1	$\boxed{1}$	i	-i
-j	-j	j	K	-K	$\boxed{1}$	-1	-i	i
K	K	-K	j	-j	-i	i	-1	$\boxed{1}$
-K	-K	$\cancel{K}$	-j	j	i	-i	$\boxed{1}$	-1

Pt ca $(H, \cdot)$ să fie grup rămâne să verif asociat. „$\cdot$",

Metoda 1: Computațională

$\forall x, y, z \in H \quad x\cdot(y\cdot z) \overset{?}{=} (x\cdot y)\cdot z$

$512 = 8^3$ cazuri

Metoda 2: Considerăm matrici din $M_2(\mathbb{C})$

$1 \rightsquigarrow I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$i \longrightarrow I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$j \longrightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$k \longrightarrow U = I\cdot J = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Fie mult. $\{1_2, -1_2, I, -I, J, -J, K, -K\}$.

$I^2 = J^2 = K^2 = -1_2$ $\quad\quad$ $\mid S$

$I \cdot J = K = -J \cdot I$ $\quad\quad$ $(H, \cdot)$

$K \cdot I = J = -I \cdot K$

$Ker f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1\}$

$\quad\quad$ ↳ elem neutru din $(\underbrace{\mathbb{C}^*}_{codom.}, \cdot)$

$f(x) = 1 \Rightarrow \cos x + i \sin x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$Ker f = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$Im f = f(\mathbb{R}) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$f(x) = \cos x + i \sin x$ → argumentul redus

Recap: $z \in \mathbb{C} \Rightarrow z = r(\cos\alpha + i \sin\alpha), \alpha \in [0, 2\pi)$

$r = |z| = d(0, z)$

$= \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$.

$Im f = \mathcal{C}(O; 1) \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$ ← raza

$O = (0,0)$

! $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

$f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, R)$

2.1.57. Să se găsească toate subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$

Indicație: $Subgr(\mathbb{Z}, +) = \{n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$n\mathbb{Z} = \mathcal{M}_n$ - mulțimea multiplilor $= \{nx \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Pas 1. $n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z}, +)$ $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x+y \in n\mathbb{Z}$

Asadar $n\mathbb{Z} \leq (\mathbb{Z},+)$

Pas 2 Dacă $H \leq (\mathbb{Z},+)$

Vrem $\exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $H = n\mathbb{Z}$

$H \leq (\mathbb{Z},+) \Rightarrow 0 \in H$

Caz I : $H = \{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$

Caz II : $H \neq \{0\} \Rightarrow \exists x \neq 0, \underline{x \in H}$.

$\left.\begin{array}{l} H \text{ grup} \\ x \in H \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-x \in H}$ $\Rightarrow$ H cont nr întregi pot. nenule. (nr nat nenule) $\Rightarrow$

$(\mathbb{N}, \leq)$ orice subm. admite un cel mai mic element

$\Rightarrow$ Putem alege un cel mai mic nr nat $\overset{\text{nenul}}{\text{din}}$ $H \overset{\text{not}}{=} n$.

Dem că $H = n\mathbb{Z}$

1) Vrem $n\mathbb{Z} \subseteq H$

$n \in H \Rightarrow \underbrace{n+n+\ldots+n}_{x \text{ ori}} \in H, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}$

$n \cdot 0 = 0 \in H$

$n \cdot x \in H \Rightarrow -n \cdot x \in H, \forall x \in \mathbb{N}^*$

$n\mathbb{Z} \subseteq H$.

2) Vrem $H \subseteq n\mathbb{Z}$

Pp $x \in H$ a.î. $x \notin n\mathbb{Z}$

$\Downarrow$

$n \nmid x. \Rightarrow \exists q, r \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = n \cdot q + r$, $r > 0$, $r < n$

$$\left.\begin{matrix} x \in H \\ n \in H \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \underbrace{-n-n-\dots-n}_{q \text{ ori}} \in H.$$

$\Rightarrow x - nq \in H \Rightarrow r \in H.$

Contradicție cu alg lui n $\Rightarrow \left.\begin{matrix} H \subseteq n\mathbb{Z} \\ n\mathbb{Z} \subseteq H \end{matrix}\right| \Rightarrow H = n\mathbb{Z}$

2158, 2159, 2161, 2162