TEORIE

1. Seria Taylor în punctul x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$$

2. Seria de puteri

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ - forma generală serie de puteri centrată în x_0 de variabilă x

raza de convergență : seria abs. conv. pe (x_0-r, x_0+r) și div. pe $(-\infty, x_0-r) \cup (x_0+r, \infty)$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

3. integrarea prin părți : $\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$

4. INTEGRALE IMPROPRII

4.1. criteriul comparației

$f, g : [a, b) \to (0, \infty)$

1. $\exists\, c \in [a, b)$ a.î. $f(x) \le g(x)$ $\forall\, x \in [c, b)$ atunci

dacă $\int_c^{b-0} g(x)\,dx$ - conv $\Rightarrow \int^{b-0} f(x)\,dx$ - conv

dacă $\int_c^{b-0} f(x)\,dx$ - div $\Rightarrow \int_c^{b-0} g(x)\,dx$ - div

2. sub formă de limită not $\ell = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \in [0, \infty]$

dacă $\ell < \infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ - conv $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - conv

dacă $\ell > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ - div $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ - div

4.2. proprietăți cu p și λ

$f:[a,b)\to(0,\infty)$ $\lim\limits_{x\nearrow b}(b-x)^{p}\cdot f(x)=\lambda$ să fie pozitiv

dacă $p<1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{a}^{b-0} f(x)\,dx$ - convergentă

dacă $p\geq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{a}^{b-0} f(x)\,dx$ - divergentă

$f:(a,b]\to(0,\infty)$ $\lim\limits_{x\searrow a}(x-a)^{p}\cdot f(x)=\lambda$

dacă $p<1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ - convergentă

dacă $p\geq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ - divergentă

$f:[a,+\infty)\to(0,\infty)$ $\lim\limits_{x\to\infty}x^{p}\cdot f(x)=\lambda$

dacă $p>1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ - conv.

dacă $p\leq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ - div

$f:(-\infty,b]\to(0,\infty)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)^{p}\cdot f(x)=\lambda$

dacă $p>1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ - conv

dacă $p\leq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ - div

5. VECTORI

5.1 $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)\in\mathbb{R}^m$

$\|x\| = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_m^2}$

$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_m-y_m)^2}$ - distanța euclidiană de la x la y

5.2. Bila $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x-x_0\|<r\}$

$\overline{B}(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^m \mid \|x-x_0\|\leq r\}$

5.3. Consecințe:

Bilele deschise sunt mulțimi deschise și bilele închise sunt mulțimi închise.

5.4. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $x_0 = (a, b)$

$\lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x,y)$ și $\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x,y)$ - lim. iterate

dacă $\exists \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell \Rightarrow$ lim iterate $= \ell$

5.5. A - compactă dacă este mărginită și închisă

T. Weistrass: $f: A \to \mathbb{R}$ și A - compactă $\Rightarrow$ 1. f - mărginită

2. f își atinge extremele

6. DERIVATE PARȚIALE ȘI DIFERENȚIALE

6.1. Derivata după direcția vectorului v $f'_v(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t \cdot v) - f(x)}{t}$

(dacă funcție pe ramuri și cere deriv în pct. de ramificare folosim form asta cu direcția vec. canonici)

↳ vectorul cu 1 pe poz deriv. pe care o vrem

! Deriv. parțiale ale unei funcții sunt cazuri particulare ale deriv. după direcția vectorilor canonici

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{e^i}(x)$

pt. f reale de var. vectorială

6.2. gradientul lui f : $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right)$

6.3. diferențiala de ord I : $df(x)(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot u_i$ $\forall u = u_1, \dots, u_m$

6.4. matricea $J(f(x)) =$

pt. f vectoriale de var. vectorială

$f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & & \end{vmatrix}$$

avem $g(x) \Rightarrow \nabla(g \circ f)(x) = \nabla g(f(x)) \cdot J(f(x))$

6.5. matricea Hessiană în x

$$H(f(x)) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(x) & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m} \end{pmatrix} \end{array}$$

6.6. diferențiala de ordin 2

$\Rightarrow d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \cdot u_1^2$ ---- (luăm cu u indice 1 · u indice 2)

6.7. extremele unei funcții

x-punct critic dacă $\nabla f(x) = 0_m$

orice punct de extrem e punct critic!

6.8. met. multiplicatorilor lui Lagrange

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ și $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ $F: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

pct. de extrem cond f/S (comp. lui $F = 0$) se află printre pct. critice a funcției $L(x, \alpha) = f(x) + \alpha F(x)$ unde $x \in \mathbb{R}^m$ și $\alpha \in \mathbb{R}^p$

↳ câte restricții sunt

Criterii

1. comp sub formă de ineg: $x_n \leq y_n$

$\sum y_n$ conv $\Rightarrow \sum x_n$ conv

$\sum x_n$ div $\Rightarrow \sum y_n$ div

2. comp sub formă de lim: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell$

$\ell < \infty$ și $\sum y_n$ conv $\Rightarrow \sum x_n$ conv

$\ell > 0$ și $\sum y_n$ div $\Rightarrow \sum x_n$ div

! $\exists \lim \frac{x_n}{y_n} = \ell \in (0,\infty) \Rightarrow \sum x_n \sim \sum y_n$

Stolz-Cesaro

1. b_n - cresc și divergent

$\Rightarrow \lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

2. dacă $\exists \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0,\infty]$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$ (reciproca falsă)

C. condensării al lui Cauchy

x_n - desc. s.t.p.

$\sum x_n \sim \sum 2^n \cdot x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \dots$

C. raportului pt. șiruri

x_n - s.t.p.

dacă $\exists \lim \frac{x_n}{x_{n+1}} = \ell$: $\ell > 1 \Rightarrow \lim x_n = 0$

$\ell < 1 \Rightarrow \lim x_n = \infty$

! Dacă $\sum x_n$ - conv $\Rightarrow \lim x_n = 0$!

~~RANDOM~~

- f deriv $\to$ f cont
- are derivată: $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$
- e derivabilă: $\exists$ lim și $\ell \in \mathbb{R}$

lim FINITĂ: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0 \ |x_n - \ell| < \varepsilon$

$\lim = +\infty$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_0$: $x_n > \varepsilon$

(respectiv $x_n < -\varepsilon$)

Kummer:

1. D'Alembert

$\lim \frac{x_n}{x_{n+1}} = D \in \overline{\mathbb{R}}$: $D < 1 \Rightarrow x_n$ - div

$D > 1 \Rightarrow x_n$ - conv

2. Raabe-Duhamel

$\lim n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = R \in \overline{\mathbb{R}}$: $R < 1 \Rightarrow x_n$ - div

$R > 1 \Rightarrow x_n$ - conv

3. Bertrand

$\lim (\ln n) \cdot \left[n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] = B \in \overline{\mathbb{R}}$: $B < 1 \Rightarrow x_n$ - div

$B > 1 \Rightarrow x_n$ - conv

4. Cauchy

$\lim \sqrt[n]{x_n} = C \in \overline{\mathbb{R}}$: $C < 1 \Rightarrow x_n$ - conv

$C > 1 \Rightarrow x_n$ - div

$C = \frac{1}{D}$

~~STP~~

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ - conv. $\Leftrightarrow a \in (-1,1)$ și $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$ (geometrică)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - conv. $\Leftrightarrow p > 1$ (s.t.p.) (armonică generalizată)

$p = 1 \Rightarrow$ divergentă

1. seria geom.:

$x_n = a^n \quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & a \in (-1,1) \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a \in (1,\infty) \\ \nexists, & a \in (-\infty,-1] \end{cases}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \ln 2$ - semiconvergentă

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

~~SERII ALTERNATE~~

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$

a_n - desc. și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot a_n$ - conv.

- absolut convergentă $\Rightarrow \sum |x_n|$ - conv

Leibniz

$f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ indefinit deriv. pe (a,b)

$(f \cdot g)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$