$\mathcal{U}$

Seminarul 10.

2.2.33) Se cons. o mulț. A și un inel R. Pe mulțimea $R^A = \{f : A \to R \mid f \text{ funcție}\}$, se definesc operațiile $+, \cdot$ | $R^A \to R^A$ prin $f+g$, $f \cdot g : A \to R$.

$(f+g)(x) = \underset{\in R}{f(x)} + \underset{\in R}{g(x)}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

S. Sac. $(R^A, +, \cdot)$ este un inel, iar R^A este unitar / comutativ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ R este ~~unit~~ unitar / comutativ.

Pas: $(R^A, +)$ grup comutativ.

1.1. Vrem „+" este comutativă

Fie $f, g \in R^A$. Vrem $f+g = g+f$.

sunt def pe același dom și codom ✓

Mai trebuie $\forall x \in A$ $(f+g)(x) = \cancel{g(x)+}(g+f)(x)$

Fie $x \in A$

$(f+g)(x) \overset{\text{def}_{„+"}}{=} \underset{\in R}{f(x)} + \underset{\in R}{g(x)}$

+ în R este comut pt că $(R, +, \cdot)$ inel

1.2. Vrem „+" este asociativă

$\forall f, g, h \in R^A : (f+g)+h = f+(g+h)$

1.3. Vrem să $\exists$ elem. n față de op de „+"

Fie $\theta : A \to R$,

$\theta(x) = 0, \forall x \in A$

el neutru din R.

1.4. Vrem să

să arătăm că ~~toate~~ $\forall f \in R^A$, $\exists$ opusul lui f.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Fie } -f : A \to R \\ (-f)(x) = -f(x) \in R \end{array}} \quad \forall x \in A.$$

Trebuie să arătat $f + (-f) = \underline{\theta}$ temă

<u>Pas 2</u> Vrem „$\cdot$" este asociativă

$$\Leftrightarrow \forall f, g, h \in R^A : (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$

(temă)

<u>Pas 3</u> Vrem op de „$\cdot$" să fie distrib față de „$+$" $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall f, g, h \in R^A : f(g+h) = f \cdot g + f \cdot h \quad \text{temă}$$

Dacă $(R, +, \cdot)$ inel comutativ.

Vrem $(R^A, +, \cdot)$ inel comutativ

$\Updownarrow$

„$\cdot$" este comutativă

$\Updownarrow$

$f \cdot g = g \cdot f$, $\forall f, g \in R^A$.

Fie $x \in A$

$$(f \cdot g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in R} \cdot \underbrace{g(x)}_{\in R} = g(x) \cdot f(x) = (g \cdot f)(x)$$

Dacă $(R, +, \cdot)$ inel unitar

$\Updownarrow$

Idel n. față de op de „$\cdot$"

$\begin{cases} f: A \to R \\ f(x) = 1_R \end{cases}$ $\forall x \in A$

Vrem $g \cdot f = g$, $\forall$ $g \in R^A$ temă

2.2.37. Să se det toate subinelele lui $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

S subinel în $\underbrace{(R, +, \cdot)}_{\text{inel}}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} S \neq \emptyset \\ \forall\ x, y \in S \text{ atunci } x+y \in S \\ \forall\ x, y \in S \text{ atunci } x \cdot y \in S. \end{cases}$

Obs $(S, +) \leq (R, +)$

Subgrupurile lui $(\mathbb{Z}, +)$ sunt:

$$n\mathbb{Z} = \{ nx \mid x \in \mathbb{Z} \} \leq (\mathbb{Z}, +)$$

verificăm dacă $\forall a, b \in n\mathbb{Z}$, deci $a \cdot b \in n\mathbb{Z}$

$$a = n \cdot x \text{ pt } x \in \mathbb{Z}$$

$$b = n \cdot y \text{ pt } y \in \mathbb{Z}$$

$$a \cdot b = n^2 \cdot x \cdot y = n \underbrace{(n \cdot xy)}_{\in \mathbb{Z}} \in n\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow (n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ subinel în $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

2.2.38 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Știm $U(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n^* = \{ \widehat{k}_n \mid \gcd(n, k) = 1 \}$

Să se fol acest rezultat pt a dem că $\mathbb{Z}_n$ este corp $\Leftrightarrow$ n este prim.

Fie $[k] \in U(\mathbb{Z}_m) \Leftrightarrow \exists [l] \in \mathbb{Z}_m$ a.î. $[k] \cdot [l] = [1]$

$\Leftrightarrow [k \cdot l] = [1]$

$\Leftrightarrow m \mid k \cdot l - 1$

$\boxed{\hat{k} \cdot \hat{l} = \widehat{k \cdot l} \quad \text{în } \mathbb{Z}_4 \ \hat{1} = \hat{5}}$

$\Downarrow$

$4 \mid 5 - 1$

$([a]_m = [b]_m \Leftrightarrow m \mid (a-b))$

$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $k \cdot l - 1 = m \cdot x \Leftrightarrow k \cdot l - m \cdot x = 1 \overset{2.1.62}{\Leftrightarrow} 1 = \gcd(k, n)$

$\mathbb{Z}_n$ corp $\Leftrightarrow$ m este prim

$\Updownarrow$

$U(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}^*$

Dacă m prim $\Rightarrow \gcd(k, m) = 1 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$

$\Downarrow$

$U(\mathbb{Z}_m) = \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots, \widehat{m-1}\} = \mathbb{Z}_n^*$.

Dacă $\mathbb{Z}_n$ corp $\Rightarrow U(\mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n-1\}$

$\hat{k} \in U(\mathbb{Z}) \Rightarrow \gcd(m, k) = 1 \Rightarrow$ m prim.

2.2.39 Să se rezolve ecuații în $\mathbb{Z}_6$:

$[4]x + [5] = [1]$ și $[5]x + [3] = [1]$

$[4]x + [5] = [1] \Leftrightarrow [4]x + [5] - [1] = [0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [4]x + [4] = [0] \Leftrightarrow [4]([x + [1]]) = [0]$

$[4] \cdot [0] = [0] \qquad [4] = [4]x$

$[1] = [4]x \qquad [5] = [2]x$

$[2] = [2]x \qquad x + [1] \in \{[0], [3]\}$

$[3] = [0]$ ✓

Cazul I $x+[1]=[0] \Rightarrow x=[5]$

Cazul II $x+[1]=[3] \Rightarrow x=[2]$.

$S=\{[2],[5]\}$.

$[5]x+[3]=[1] \mid -[5]$

$\Rightarrow [5]x=[4]$

Metoda I Încercăm [5] elem din $\mathbb{Z}_6$

Met II

$\gcd(5,6)=1 \Rightarrow \exists [5] \in U(\mathbb{Z}_6)$ și $[5]^{-1}=[5]$.

$[5] \mid \quad [5]\cdot x=[4]$

$\Rightarrow x=[5]\cdot[4]=[20]_6=[2]$

$S=\{[2]\}$.

2.2.49 Să se arate următoarele perechi de inele NU sunt izomorfe

a) $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$.

PpRA că $\exists f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ izomorfism $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y) & \forall x,y \in \mathbb{Z} \\ f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y) \\ f \text{ bijectivă} \end{cases}$$

Pp $f(1)=c \quad n \in \mathbb{N}^*$

$f(n)=f(1+1+\dots+1)=\underbrace{f(1)+f(1)+\dots+f(1)}_{n \text{ ori}}=$

$=n\cdot f(1)=n\cdot c$.

$f(0)=0=0\cdot c$.

$0=f(0)=f(m+(-m))=f(m)+f(-m)=m\cdot c+f(-m)$

$\Rightarrow f(-m)=-m\cdot c$

$f(z)=z\cdot c \quad \forall z\in\mathbb{Z}$

$c=f(1)$

$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)\ ,\ \forall x,y\in\mathbb{Z}$

$x=y=1\Rightarrow f(1)^2=f(1)\Rightarrow c^2=c\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow c\in\{0,1\}$.

Dacă $c=0\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{morfism nul}}}{f(z)=0}\ ,\forall z\in\mathbb{Z}$

f nu este surj $\Rightarrow f$ nu este bij $\Rightarrow f$ NU e izomorf.

Dacă $c=1\Rightarrow f(z)=z\ ,\ \forall z\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{Im} f=\mathbb{Z}$

$f(z)\neq\frac{1}{2}\ ,\ \forall z\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f$ nu e izomorfism.

Așadar $\mathbb{Z}\not\cong\mathbb{Q}$

e) $\mathbb{R}$ și $\mathbb{C}$

PpRA că $\exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ izomorf

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow f \text{ surj}\\ i\in\mathbb{C}\end{array}\right|\Rightarrow \exists a\in\mathbb{R}$ a.î. $f(a)=i$

$f(a\cdot a)=f(a)\cdot f(a)=i^2=-1$.

$\parallel$

$f(a^2)\geq$

Similar ca la pct a) avem că $f(z)=z, \forall z\in\mathbb{Z}$

$$\Downarrow$$

$f(-1)=-1$

$f(a^2)=f(-1) \xRightarrow{f \text{ inj}} a^2=-1 \left.\right\} \Rightarrow (F)$

$a\in\mathbb{R}$

c) $\mathbb{Z}$ și $M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

Ca și la pct a) $f(1)=C\in M_{2\times2}(\mathbb{Z})$

$f(z)=\underline{z\cdot C}, \forall z\in\mathbb{Z}$

$f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)=C^2$

$\quad\; \parallel$

$\quad\; C$

$\Rightarrow C^2=C\Rightarrow C(\underline{C-I_2)=O_2}$

$C^2-C=O_2$

$TrC=-1 \quad \det C=0$