Seminar 2 algebră

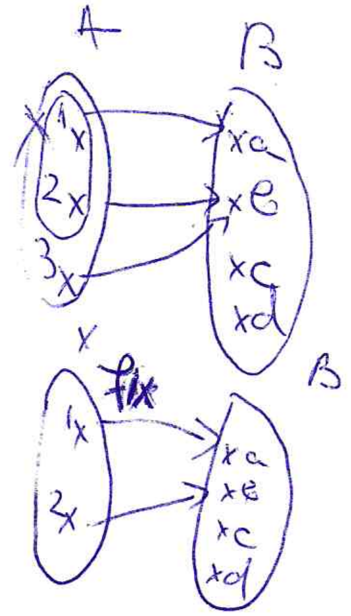
Recap: Restricția unei funcții

Fie $f: A \to B$ funcție

$X \subseteq A$

$f|_X : X \to B$

$f|_X(x) = f(x), \forall x \in X$



$\boxed{1.3.38}$. Fie A, B, C mulțimi a.î. $C \subseteq A$ și fie $f: A \to B$ funcție. S.a.

$f|_C = f \circ i$, unde $i: C \to A$ este funcția de incluziune.

$i: C \to A$; $i(x) = x, \forall x \in C$

$f|_C : \underline{C} \to \underline{B}$.

$$C \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B$$

$f \circ i : \underline{C} \to \underline{B}$

Fie $x \in C$. Vrem $\underline{f|_C(x) =}$

$\underline{= (f \circ i)(x)}$

$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$

$(f|_C)(x) = f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f|_C = f \circ i$

=/=

Recap: Imaginea și contraimaginea unei mulțimi printr-o funcție

Fie $f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$.

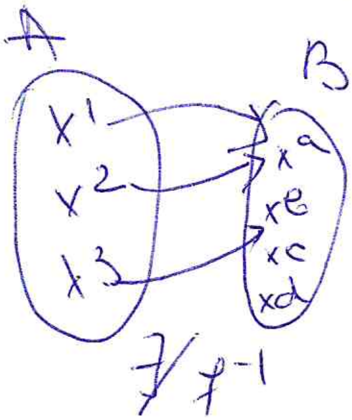
$f(X) := \{ f(x) \mid x \in X \}$

imaginea lui X prin f.

(Fie $b \in f(X) \Rightarrow \exists\, x \in X$ a.î. $f(x) = b$)

$f^{-1}(Y) := \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$

contraimag lui Y prin f.



$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$

$f^{-1}(\{a, b\}) = \{1, 2, 3\}$

$f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$

$\nexists\, f^{-1}$

1.3.39 Fie $f: A \to B$ o fct inversabilă și fie $Y \subseteq B$.
Atunci prin $f^{-1}(Y)$ putem înțelege fie contraimaginea lui Y prin f sau imaginea Y prin f^{-1}. Să se arate că cele 2 moduri nu intră în conflict (conduc la aceeași mulțime)

$f: A \to B \qquad f^{-1}: B \to A$

$U = f^{-1}(Y)$ ca și contraimag $= \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$.

$V = f^{-1}(Y)$ ca și imagine $= \{ f^{-1}(y) \mid y \in Y \}$

Vrem $U = V \Leftrightarrow U \subseteq V$ și $V \subseteq U$; Fie $x \in U$. Vrem $x \in V$

$\Downarrow$

$x \in A$ și $f(x) \in Y$: $f(x) = y \in Y$. $f(x) = y \in Y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$\Rightarrow x \in V$

" $V \subseteq U$ ", Fie $v \in V$. Vrem $v \in U$ $\Leftrightarrow$ $v \in A$ și $f(v) \in Y$

$\Downarrow$ $\exists y \in Y$ a.î. $v = f^{-1}(y)$ $\Downarrow$ $v \in A$ ✓

Din $v = f^{-1}(y) \Rightarrow f(v) = y \Rightarrow f(v) \in Y$ ✓ / → ale e valabil oricând.

$\boxed{1.3.40}$ Să se găsească un ex de funcții $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $g \circ f \neq f \circ g$ (deci compunerea este definită bilateral, dar nu este comutativă).

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{N}$$
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(x) = x+1,\ \forall x \in \mathbb{N}$$

$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = 2x+2$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x+1$

pt $x = 7$. $(g \circ f)(7) = 15$
$(f \circ g)(7) = 16$ $\neq$ $\Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$.

1.3.45 $f : A \to B$ funcție. Fie $X, X_1, X_2 \subset A$ și $X, X_1, X_2 \subset B$

(i) $X \subseteq f^{-1}(f(x))$

Fie $a \in X$ | Vrem $a \in f^{-1}(f(x))$

$X \subseteq A$ | $\Rightarrow a \in A \Rightarrow f(a) \in B$.

$a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X)$

$f(a) = y \Rightarrow y \in f(x)$

$f^{-1}(\{y\}) = \{u \in A \mid f(u) = y\}$.

$\Rightarrow a \in f^{-1}(\{y\})$

$a \in f^{-1}(f(x))$

$y \in f(x) \Rightarrow \{y\} \subset f(x) \Rightarrow f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(f(x))$

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$.

„$f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$"

Fie $b \in f(X_1 \cup X_2)$. Vrem $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

$\exists\, a \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a) = b$.

$\Downarrow$

$a \in X_1$ sau $a \in X_2$

$\Downarrow$

$f(a) \in f(X_1)$ sau $f(a) \in f(X_2)$

$\Downarrow$

$b \in f(X_1) \cup f(X_2)$

~~[illegible]~~ „$f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$"

Fie $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Vrem $b \in f(X_1 \cup X_2)$

$\Downarrow$

$b \in f(X_1)$ sau $b \in f(X_2) \Rightarrow (\exists\, a_1 \in X_1$ a.î. $f(a_1) = b)$ sau

$(\exists\, a_2 \in X_2$ a.î. $f(a_2) = b) \Rightarrow$

$X_1, X_2 \subseteq X_1 \cup X_2$

$\Rightarrow$ $(\exists\, a_1 \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a_1) = b)$ sau $(\exists\, a_2 \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a_2) = b)$

$\Rightarrow \exists\, a \in X_1 \cup X_2$ a.î. $f(a) = b$. ✓

(3) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

Fie $b \in f(X_1 \cap X_2)$. Vrem $b \in f(X_1) \cap f(X_2)$

$\exists\, a \in X_1 \cap X_2$ a.î. $f(a) = b$.

$\Downarrow$

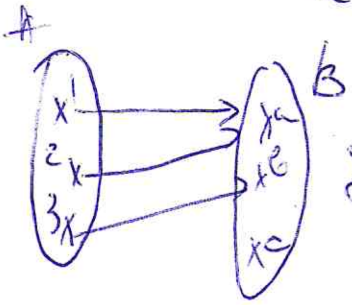
$a \in X_1$ și $a \in X_2$

$\Downarrow f(a) = b \qquad \Downarrow f(a) = b$

$b \in f(X_1) \qquad b \in f(X_2)$

$\Downarrow$

$b \in f(X_1) \cap f(X_2)$



$f(\{1\}) = \{a\}$

$f(\{2\}) = \{a\}$

$f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{a\}$

$f(\{1\} \cap \{2\}) = f(\emptyset) = \emptyset$

Temă: subpunctele rămase

(4) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

(5) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

(4) Fie $a \in f(f^{-1}(Y))$ vrem $a \in Y$

$\Downarrow$

$f(a) = z,\ a \in f^{-1}(Y)$

$z \in f^{-1}(Y)$ $\quad$ $f(a) \in Y$

$f^{-1}(\{z\}) = \{u \in A \mid f(u) = z\}$ [illegible]

(5) Fie $b \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. Vrem $b \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

$\Downarrow$

$b \in A$ și $f(b) \in Y_1 \cup Y_2$

$\Downarrow$

$f(b) \in Y_1$ sau $f(b) \in Y_2$

$\Downarrow$

$f^{-1}(f(b)) \in f^{-1}(Y_1)$ sau $f^{-1}(f(b)) \in f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(f(b)) \in f^{-1}(f(\cancel{b})) \cup f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow b \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

Fie $\cancel{x} \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \Rightarrow \exists y \in Y_1 \cap Y_2$ a.î. $x = f(y)$

$y \in Y_1$ și $y \in Y_2$

$f^{-1}(y) \in f^{-1}(Y_1)$ și $f^{-1}(y) \in f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow f^{-1}(y) \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

II. Fie $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1)$ și $x \in f^{-1}(Y_2)$

$x \in \{x' \mid f(x') \in Y_1\}$ și $x \in \{x'' \mid f(x'') \in Y_2\}$

~~$\Rightarrow x \in$~~