SEMINAR 7

① a) N - cunoscut
p - necunoscut

$p \in (0,1)$

$X \sim Bino(N, p) \rightarrow \boxed{\text{media} : N \cdot p}$

METODA MOMENTELOR

$E(x) = N \cdot p \text{ (teoretic)} = \frac{x_1 + \ldots x_n}{n}$

$\hat{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{N \cdot n} \rightarrow$ val. aproximată

aprox p

METODA VEROSIMILITĂȚII MAXIME

$P(X=x) = C_N^x \, p^x (1-p)^{N-x}, \quad x \in \{0, 1, \ldots, N\} \rightarrow$ prob. într-un punct

$L(x_1, \ldots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot (1-p)^{N-x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right) p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{\sum N - x_i} =$

funcție de verosimilitate

$= \left(\prod_{i=1}^{n} C_N^{x_i}\right) \cdot p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n \cdot N - \sum x_i} \quad / \ln =$

$\Rightarrow \ln L = \ln\left[\left(\prod C_N^{x_i}\right) \cdot p^{\sum x_i} \cdot (1-p)^{n \cdot N - \sum x_i}\right] =$

$= \sum x_i \cdot \ln p + (n \cdot N - \sum x_i) \ln(1-p) + \sum \ln C_N^{x_i} = / (\,)'$ înd dep

$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum x_i - \frac{n \cdot N - \sum x_i}{1-p}$ apoi îl scoate pe p

$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = 0$

RENUNȚ NUS

6) doar cu met. momentelor fac că cealaltă zip

$p \in (0,1)$

$n = 6$ serii $\qquad N = 5$ extrageri

3, 4, 2, 0, 2, 1 bile albe

X = distribuție binomială $\text{Bino}(5; p)$ — $5 = N$

$E(X) = N \cdot p$ media lor (teoretică)

$m = \dfrac{3+4+2+0+2+1}{6} = 2$ media mostră

$N \cdot p = 2 \Leftrightarrow 5p = 2 \Rightarrow p = \dfrac{2}{5} = 40\%$

(2) $f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$

λ prin met momentelor

ne legăm de medie

$m = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ → aproximată (a mostră)

$E(X) = \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x}\,dx = \lambda^2 \int_0^\infty \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^{-\lambda x}}\,dx = \lambda^2 \left[x \cdot -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx \right] =$

teoretică (a lor)

$= \lambda^2 \left[\left(x \cdot -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \left(\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty \right] =$

$= -\lambda x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = 0 + 1 = 1$

$\lim_{x \to \infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim -\lambda x \frac{1}{e^{\lambda x}} \to 0$

am greșit puțin trb să calculăm $\int x \cdot f(t)\,dt$ și va da $\dfrac{2}{\lambda}$

apoi le egalăm $\dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \dfrac{2}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \dfrac{2n}{x_1 + \dots + x_n}}$

$$\frac{2n}{x_1+\dots+x_n} \to \frac{2}{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}} = \lambda \to \text{consistent}$$

$\frac{x_1+\dots+x_n}{n} \to = \frac{2}{\lambda}$

dacă cerea nedeplasat $E\left(\frac{2n}{x_1+\dots+x_n}\right) = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot E(x)} = \lambda \to$ nedeplasat

$E(x) \to \frac{2}{\lambda}$

(3) 71, 68, 77, 69, 65

$\sim N(\mu, 6^2)$

95% interval de încredere

a) media

multe formule trântite

(5) $m_0 \geq 50\,m$ (zisă de ei) pt 80 km/h (provider)

$n = 100$

$\overline{X_{100}} = 49\,m$

$\sigma = 1\,m \to$ pt. eșantion

$\alpha = 0{,}01$

a) $\left(-\infty, \overline{X_n} - \frac{6}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha\right) = \left(-\infty, 49 + \frac{1}{10} \cdot 2{,}36\right) = (-\infty; 49{,}236)$

$\Rightarrow$ nu e mai performant că $m_0 \notin (-\infty; 49{,}236)$ am respins ipoteza H_0 în favoarea H_1

se acc că sist. nou e mai performant

b) $\sigma = 2\,m \to$ a tuturor (reală)

$\alpha = 0{,}06$ 49 50

$z = \frac{\overline{X_{100}} - m_0}{\frac{\sigma = 2}{\sqrt{n} = 10}} = \cancel{\frac{49-50}{\frac{1}{5}} = \frac{-1}{\frac{1}{5}} = -5} = \frac{\overline{X_{100}} - 50}{\frac{2}{10}}$

$z_{0.06} = -1{,}55$

concluzia e că $z \leq z_\alpha$ se respinge H_0 în favoarea lui H_1

$$\frac{\overline{X_{100}} - m_0}{\frac{6}{\sqrt{n}}} \leq -1{,}55 \Leftrightarrow \overline{X_{100}} \leq 49{,}69$$

$\Rightarrow$ max medie = 49,69