Algebră Seminar I

Mimuță Aurelian - mimuta.aurelian@math.ubbcluj.ro
Teams Seminar - zc9kadt

Funcții injective, surjective, bijective

Def: O funcție (aplicație) este un triplet (A, B, f), unde A și B sunt mulțimi, iar f este o lege de corespondență aî fiecărui element din A îi corespunde un singur element din B.

$$f: A \to B \quad \text{sau} \quad A \xrightarrow{f} B$$

domeniu de def   domeniul de valori
                         codomeniu

Def: Funcția $f: A \to B$ s.m. <u>injectivă</u> dacă
$$\forall x_1 \neq x_2 \in A \to f(x_1) \neq f(x_2)$$

Obs: f injectivă $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$

Def: Funcția $f: A \to B$ s.m. <u>surjectivă</u> dacă
$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ aî } f(x) = y.$$

Def: Funcția $f: A \to B$ este <u>bijectivă</u> dacă f este atât inj cât și surj $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists! x \in A$ aî $f(x) = y \Rightarrow$
$$\Rightarrow \exists f^{-1}: B \to A, \; f^{-1}(y) = x.$$

Ex 1.3.35/11 Se considera funcțiile, să se studieze injectivitatea, surjectivitatea, bijectivitatea; în cazul existenței inversei să se determine aceasta.

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$

(2) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x^2$

(3) ~~$f_3 : [0, \infty) \to f_3$~~ $f_3 : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f_3(x) = x^2$ $\neq 0$, $\forall x$

(4) $f_4 : [0, \infty) \to (0, \infty)$, $f_4(x) = x^2$

(1) • Injectivitate

Fie $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$

Dar $f(x_1) = 1$
$f(x_2) = 1$

$\left. \rule{0pt}{40pt} \right\} \Rightarrow$ (F) $\Rightarrow$ funcția nu este injectivă și nici nu este bijectivă

• Surjectivitate

Fie Pp. $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x) = y \Rightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$
$\nexists x \in \mathbb{R}$ a.î. $f(x_2)$

(2) Fie $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ și $f_2(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow x_1 \overset{?}{=} x_2$

$f_2(x_1) = x_1^2$

$f_2(x_2) = x_2^2$

$f_2(x_1) = f_2(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$|x_1| = |x_2|$

Dar $x_1, x_2 \in [0, \infty) \Rightarrow |x_1| = x_1$
$|x_2| = x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

f nu e surj, același contraexemplu ca la 1.

(3) Injectivă; nu același contraexemplu Analog.

surj: Fie $y \in (0,\infty) \underset{\text{?}}{\Rightarrow} \exists x \in \mathbb{R}$ aî $f(x) = y$.

$\Rightarrow x^2 = y \ |\sqrt{}$

$|x| = \sqrt{y}$

$|x| = x, \ x \geq 0$

$|x| = -x, \ x < 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y}, \ x \geq 0 \\ x = -\sqrt{y}, \ x < 0 \end{cases} \Rightarrow f_3$ este surj.

(4) Este injectivă și surjectivă Analog restul est $\Rightarrow f_4$ bijectivă

$\Rightarrow \exists \ f_4^{-1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$f_4^{-1}(y) = x$

$f_4^{-1}(x) = \sqrt{y}.$

Ex 1.3.36

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x+2, & \text{dacă } 1 < x. \end{cases}$

① Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ |f(x_1) = f(x_2)| \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

I. $x_1 \in (-\infty, 1] \Rightarrow f(x_1) = 2x_1 + 1$

$x_2 \in (1, \infty) \Rightarrow f(x_2) = x_2 + 2$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2x_1 + 1 = x_2 + 2$

$x_1 = \dfrac{x_2 + 1}{2} \in (1,\infty)$

$\Rightarrow x_1 \in (1,\infty)$

=3=

$*$ (1) $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dacă } x \leq 1 \\ x - 1, & \text{dacă } -1 < x \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{dacă } x < 3 \\ x - 2, & \text{dacă } 3 \leq x. \end{cases}$$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(-x+1), & \text{dacă } x < 3 \\ f(x-2), & \text{dacă } 3 \leq x \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-x+1)^2 - 1, & \text{dacă } x < 3 \text{ și } -x+1 \leq -1 \quad {}^{2 \leq x} \\ -x + 1 - 1, & \text{dacă } x < 3 \text{ și } -1 < -x+1 \quad {}^{x < 2} \\ (x-2)^2 - 1, & \text{dacă } 3 \leq x \text{ și } x - 2 \leq -1 \quad {}^{x \leq 1}_{1 < x.} \\ x - 2 - 1, & \text{dacă } 3 \leq x \text{ și } -1 < x - 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - 2x + x^2 - 1, & x \in (2,3) \\ -x, & x \in (-\infty, 2) \\ x^2 - 4x + 4 - 1, & x \in \emptyset \\ x - 3, & x \in [3, \infty) \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 2) \\ x^2 - 2x, & x \in [2,3) \\ x - 3, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2 - 1), & x \leq -1 \text{ și } x^2 - 1 < 3 \\ g(x-1), & x > -1 \text{ și } x - 1 \geq 3. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2+1+1, & x \le -1 \text{ și } x^2 < 4, -x \in (-2,2) \quad (x^2-1<3) \\ x^2-1-1, & \cancel{x} \le \cancel{1} \text{ și } \cancel{x^2 \lt 4} \quad (x^2-1 \ge 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,2) \cup (2,\infty) \\ -x+1+1, & x > -1 \text{ și } x-1 < 3 \rightarrow x < 4 \\ x-1-2, & x > -1 \text{ și } x-1 \ge 3, \rightarrow x \ge 4. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2+2, & x \in (-2,-1] \\ x^2-2, & x \in (-\infty, -2] \\ -x+2, & x \in (-1,4) \\ x-3, & x \in (4,\infty) \end{cases}$$

Temă: pag 11 ex 1.3.36 $\rightarrow$ (2), (3)

$$\ne \ne =$$