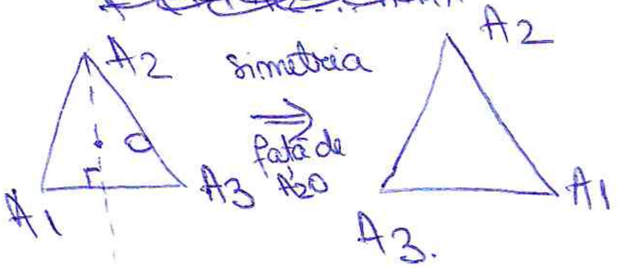
Seminar 7.

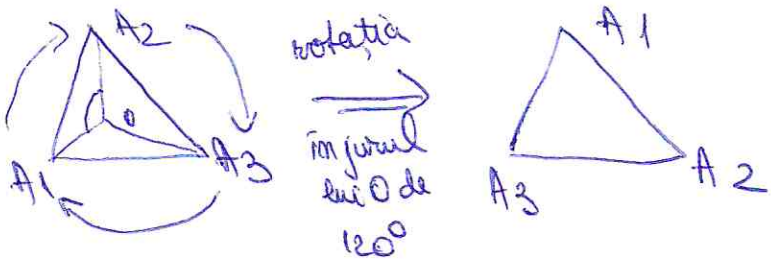
2.1.51. (Grupul diedral de grad n)

Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi şi n vârfuri cu centrul O într-un plan α. O izometrie este o funcţie $f:\alpha\to\alpha$ cu prop că $\forall\, x,y\in\alpha$: $|xy| = |f(x)f(y)|$

$Izom(\alpha) = \{f:\alpha\to\alpha \mid f \text{ izometrie}\}$.

$D_n \overset{not}{=} \{f:\alpha\to\alpha \mid f \text{ izometrii şi } f(A_1A_2\ldots A_n) = A_1A_2\ldots A_n\}$.
(grupul diedral de grad n)





Notăm cu s – rotaţia în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani (de la A_1 atr A_2)

t = simetria axială faţă de axa A_1O

E clar că $s, t: \alpha\to\alpha$ sunt izometrii

Să se arate că: (1) $s^n = 1 = t^2$ (1 = la funcţia identitate a planului α)

(2) $t\cdot s = \underbrace{s^{n-1}\cdot t}_{\text{compunerea}}$

(3) $D_n = \{1, s, s^2, s^3, \ldots, s^{n-1}, t, st, s^2t, \ldots, s^{n-1}t\}$.

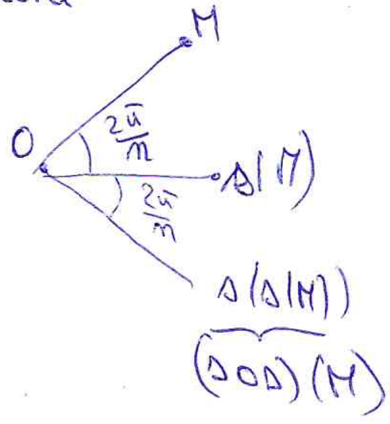
(4) D_n este un grup în raport cu operația de compunere a fct,

(5) Det $\langle s\rangle$, $\langle t\rangle$, $\langle s,t\rangle$

(6) Să se constr tablele op pt D_3 și D_4

(1) s = rot în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani

Vrem $s^n = 1$



$s^2 = s\circ s$

= rotația în jurul centrului O

cu $2\cdot\frac{2\pi}{n}$ radiani.

$s^n = \underbrace{s\circ s\circ\ldots\circ s}_{\text{de } n \text{ ori}}$

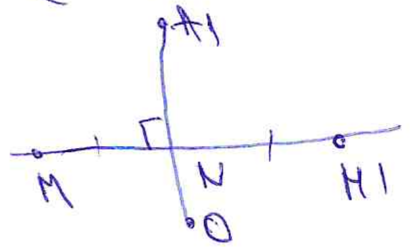
= rotația în jurul centrului O cu $n\cdot\frac{2\pi}{n}$ radiani.

$= 1.$

t = simetria axială față de axa A_1O

Vrem $t^2=1$

$t^2(M) = (t\circ t)(M) = t(t(M)) = t(M') = 1_d(M)$



$t(M) = M'$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} MN = NM' \\ MM' \perp A_1O \end{cases}$

$\Downarrow$

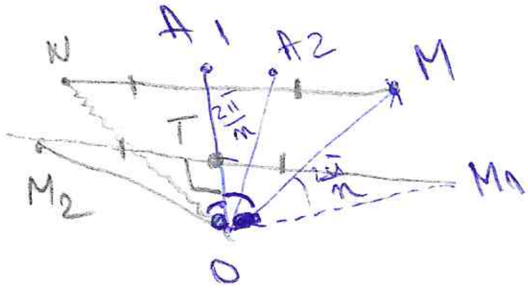
$t(M') = M$

$\Rightarrow \boxed{t^2 = 1_d}$

(2) $t \cdot s = s^{n-1} \cdot t$

Fie $M \in d$ arbitrar. Vrem $(ts)(M) = (s^{n-1} \cdot t)(M)$

$(ts)(M) = (t \circ s)(M) = t(s(M)) = t(\underset{M_2}{\underset{\shortparallel}{M_1}})$



$s(M) = M_1 \iff \begin{cases} m(\sphericalangle MOM_1) = \frac{2\pi}{n} \\ OM \equiv OM_1 \end{cases}$

$t(M_1) = M_2 \iff \begin{cases} M_1M_2 \perp A_1O \\ M_1T \equiv M_2T \end{cases}$

$= s^{n-1}(N) \overset{?}{=} M_2$

$(s^{n-1} \cdot t)(M) = (s^{n-1} \circ t)(M) = s^{n-1}(t(M))$

$t(M) = N \iff \begin{cases} MN \perp A_1O \\ MP \equiv NP \end{cases}$

s^{n-1} = rotații în jurul lui O cu $(n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}$ radiani.
(de la A_1 către A_2)
= rotația în jurul lui O cu $\frac{2\pi}{n}$ radiani (de la A_2 la A_1)

Așadar ajunge să arătăm că măsura $(\sphericalangle M_2ON) = \frac{2\pi}{n}$ rad.
și $M_2O \equiv ON$

Avem că A_1O este mediat pt MN și $M_1M_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \Delta MON \text{ și } \Delta M_1OM_2 \text{ isoscele} \\ \Rightarrow A_1O \text{ este bis pt } \sphericalangle MON \text{ și } \sphericalangle M_1OM_2 \quad (1) \\ \Rightarrow MO \equiv ON \text{ și } M_1O \equiv OM_2 \end{cases}$

$\Rightarrow MO \equiv \underline{ON} \equiv M_1O \equiv \underline{OM_2} \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $\sphericalangle MOA_1 \equiv \sphericalangle A_1ON$

$\sphericalangle M_1OA_1 \equiv \sphericalangle A_1OM_2$ (-)

$\underbrace{m(\sphericalangle MOM_1)}_{\frac{2\pi}{n}} = m(\sphericalangle NOM_2)$

$\frac{2\pi}{n} \Rightarrow \frac{2\pi}{n}$

(4) Redem. $(Izom(\alpha), \circ)$ grup.

Se dem că orice izometrie este o funcție bijectivă

Bijectivitate:

Fie $x, y \in \alpha$ a.î. $f(x) = f(y)$. Vrem $x = y$.

$$\Downarrow$$

$$|f(x) f(y)| = 0$$

$$\Downarrow f \text{ izometrie}$$

$$|xy| = 0 \Rightarrow x = y$$

Surjectivă

Vom arăta $izom(\alpha) \leq S(\alpha) = \{ f : \alpha \to \alpha \mid f \text{ bij} \}$.

• $1_\alpha : \alpha \to \alpha \in Izom(\alpha)$

$x, y \in \alpha \quad |1_\alpha(x) 1_\alpha(y)| = |xy|$

• $f, g \in Izom(\alpha) \Rightarrow f \circ g \in Izom(\alpha)$

$x, y \in \alpha$

$$|(f \circ g)(x)(f \circ g)(y)| = |f(\overbrace{g(x)}^{A}) f(\overbrace{g(x)}^{B})| =$$

$$= |f(A) \; f(B)| \overset{f \text{ izom}}{=\!=} |AB| =$$

$$= |g(x) g(y)|$$

$\overset{g \text{ izom}}{=\!=} |xy| \Rightarrow f \circ g \in Izom(\alpha)$

• $f \in Izom(\alpha) \Rightarrow f^{-1} \in Izom(\alpha)$

Fie $x, y \in \alpha$.

$$|f^{-1}(x) f^{-1}(y)| \overset{f \text{ izom}}{=\!=} |f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))|$$

$$= |xy|$$

Asadar $Izom(\alpha)$ grup.

$D_n = \{ f : \alpha \to \alpha \mid f$ izom și $f(A_1A_2...A_n) = A_1A_2A_3...A_n \}$.

Vom dem că $D_n \leq \text{Izom}$.

- $1_\alpha : \alpha \to \alpha$ izom, $1_\alpha(A_1A_2...A_n) = A_1A_2...A_n$ $\Big\} \Rightarrow 1_\alpha \in D_n$.

- Dacă $f, g \in D_n \Rightarrow f \circ g \in D_n$.

$$(f \circ g)(A_1A_2,...A_n) = f(g(A_1A_2...A_n)) = $$
$$\overset{g \in D_n}{=} f(A_1A_2...A_n) \overset{f \in D}{=} A_1A_2A_3...A_n$$

$\Rightarrow f \circ g \in D_n$.

- Dacă $f \in D_n \overset{?}{\Rightarrow} f^{-1} \in D_n$.

$f^{-1}(A_1A_2...A_n) = A_1A_2...A_n$.

$$f^{-1}(A_1A_2...) \underset{=}{\overset{f(A_1A_2...A_n) = A_1A_2...A_n}{=}} f^{-1}(f(A_1A_2...A_n)) = A_1...A_n.$$

$\Rightarrow f^{-1} \in D_n$

$\Rightarrow D_n \leq \text{Izom}(\alpha)$

$\Rightarrow (D_n, \circ)$ grup.

$(3) = D_x = \{1, s, s^2, ..., s^{n-1}, t, st, s^2t, ..., s^{n-1}t\}$.

Fie $f \in D_n \Rightarrow f$ izometrie

$\Rightarrow f(A_1A_2...A_n) = A_1A_2...A_n$,

$\Rightarrow f(A_1) \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Dp $f(A_1) = A_k$ $\quad k = \overline{1,n}$

$f(A_2) = ?$ f izom $\underset{=5=}{\{A_{k-1}, A_{k+1}\}}$ $\quad A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$

Cazul I Dacă $\boxed{f(A_2) = A_{k+1}.}$

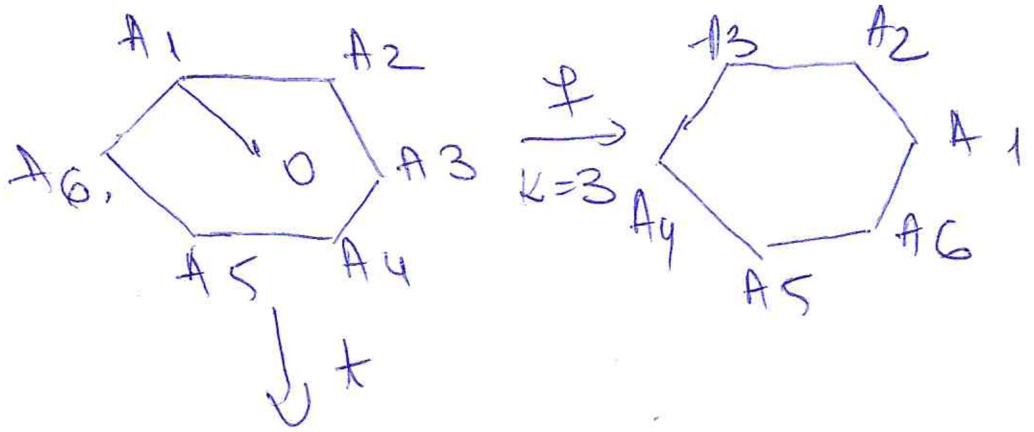
$f(A_i) = A_{k+i}$ (suma este modulo m)

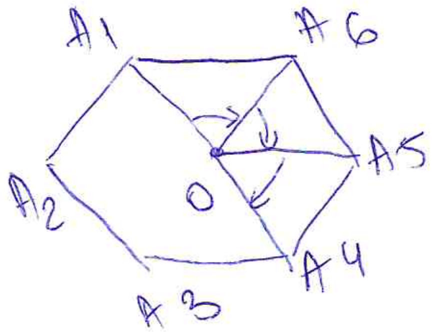
$\Rightarrow f =$ rotația în jurul centrului O cu $\frac{2\pi}{m}$ k radiani $= s^k$

$\Rightarrow \langle s \rangle \subseteq D_m$

$\langle s \rangle = \{1, s, s^2, \dots, s^{m-1}\}$ (pt că $s^m = 1$)

Cazul II $f(A_2) = A_{k-1}$





$f = s^2 \circ t$

Obs: $|D_m| = 2 \cdot m.$

$\langle t \rangle = \{1, t\}.$

$\langle s, t \rangle = \{1, s, s^2, \dots, s^{m-1}, t, st, s^2t, \dots, s^{m-1}t\}.$

$t \cdot s = s^{m-1} \cdot t$

$t \cdot s = s^{m-2} \cdot t$

$(st)^2 = st\,st = s \cdot s^{m-1} \cdot t \cdot t = s^m t^2 = 1$

$(s^k t)^2 \overset{\text{Temă}}{=} 1.$

$D_n = \langle s, t \mid s^n = 1 = t^2,\ ts = s^{n-1} \cdot t \rangle$

$D_3 = \langle s, t \mid s^3 = 1 = t^2,\ ts = s^2 \cdot t \rangle$

$= \{1, s, s^2, t, s \cdot t, s^2 \cdot t\}$.

	1	s	s^2	t	st	s^2t
1	1	s	s^2	t	st	s^2t
s	s	s^2	1	st	s^2t	t
s^2	s^2	1	s	s^2t	t	st
t	t	s^2t	st	1	s^2	s
st	st	t	s^2t	s	1	s^2
s^2t	s^2t	st	t	s^2	s	1