SUBIECTUL C

1. Determinați inf A, sup A, min A și max A pentru mulțimea:

a) $A = \left\{ \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \;/\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

calculăm limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = \left(\frac{\infty^\infty}{\infty^\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (\infty \cdot 1^\infty) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}\right]^{-\frac{n}{n+1}} =$$

$$= \infty \cdot e^{-1} = \infty \Rightarrow \sup A = \infty \text{ și } \max A \not\exists$$

monotonie:

$$x_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{[n(n+2)]^{n+1}} = \frac{[(n+1)^2]^{n+1}}{[n(n+2)]^{n+1}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} =$$

$$= \left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right]^{n+1} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow x_n \text{ - crescător}$$

$\Rightarrow x_1$ - minim $= \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2}$

dacă există minim, acesta este egal cu infimumul mulțimii $\Rightarrow \inf A = \frac{1}{2}$

b) $A = \left\{ \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} \;/\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}$

calculăm limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n-1}}{(n-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 0 \cdot e = 0$$

monotonie:

$$x_n = \frac{n^{n-1}}{(n+1)^n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n-1)^n}{n^{n-1}} = \frac{(n^2-1)^n}{n^n \cdot n^n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n < 1 \Rightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow x_n \text{ -descrescător}$$

$\Rightarrow x_2$ - marg. superioară $\Rightarrow \max A = \sup A = x_2 = 2$

$\min A \not\exists$ (0 nu face parte dintre valorile mulțimii A)

$\inf A = 0$

2. Calculați suma seriei numerice:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2^3}\right)^n$$

folosim $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ - conv. $\Leftrightarrow a \in (-1,1)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$$

$-\frac{1}{2^3} \in (-1,1)$

$a = -\frac{1}{2^3}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{3n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = -\frac{4}{9}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1} = -3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(+\frac{1}{3^2}\right)^n \Rightarrow \text{folosim } \sum_{n=0}^{\infty} a^n,\ a \in (-1,1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{9}{8} \Rightarrow -3\sum_{n=0}^{\infty} = -3 \cdot \frac{9}{8}$$

suma începe de la 1 $\Rightarrow$ scădem primul termen $= \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = -3$

$$\Rightarrow -(-3) - 3 \cdot \frac{9}{8} = 3 - 3 \cdot \frac{9}{8} = \frac{24-27}{8} = -\frac{3}{8}$$

Det. punctele de extrem local și valorile extreme ale funcției

a) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|\cdot(1+x)$

$$f(x)=\begin{cases} x(1+x), & x\in[0,1] \\ -x(1+x), & x\in[-1,0) \end{cases}$$

verificăm derivabilitatea în 0:

$$f'_d(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x(1+x)}{x-0}=1$$

$$f'_s(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-x(1+x)}{x-0}=-1$$

$\Rightarrow$ f nu e deriv în 0

f - combinație de funcții elementare $\Rightarrow$ f deriv pe $[-1,1]/\{0\}$

$$f'(x)=\begin{cases} (x+x^2)'=1+2x, & x\in(0,1] \\ (-x-x^2)=-1-2x, & x\in[-1,0) \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ I $1+2x=0$, $x=-\frac{1}{2}\notin(0,1]$

II $-1-2x=0$, $x=-\frac{1}{2}\in[-1,0)$

x	-1	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$	+ + +	0	- - -	|	+ + + + +	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(0)=0$
$f(-1)=0$
$f(1)=2$
$f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$x\in[-1,-\frac{1}{2}] \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ f cresc. (1)

$x\in[-\frac{1}{2},0) \Rightarrow f'(x)\leq 0 \Rightarrow$ f desc. (2)

$x\in(0,1] \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ f cresc. (3)

din (1) și (2) $\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ pct de maxim ($x=-1$ și $x=1$ nu sunt pct. de acumulare)

din (2) și (3) $\Rightarrow x=0$ pct de minim

din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \max(f[-1,1])=\max(\{f(-\frac{1}{2}), f(1)\})=\max(\{\frac{1}{4},2\})=2$

$\min(f[-1,1])=\min(\{f(0),f(-1)\})=\min(\{0,0\})=0$

$\Rightarrow$ extremele funcției sunt 0 și 2, se ating

b) $f:[-1,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|(1-x)$

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x), & x\in[0,1] \\ x(x-1), & x\in[-1,0) \end{cases}$$

verificăm derivabilitatea în 0

$$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x(1-x)}{x}=1$$

$$f'_s(0)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{x(x-1)}{x}=-1$$

$\Rightarrow f$ nu este derivabilă în 0

f - combinație de funcții elementare $\Rightarrow f$ - derivabilă pe $[-1,1]/\{0\}$

$$f'(x)=\begin{cases} 1(1-x)+x(-1)=1-x-x=1-2x, & x\in(0,1] \\ 1(x-1)+x\cdot1=x-1+x=2x-1, & x\in[-1,0) \end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow$ I $1-2x=0$ II $2x-1=0$

$2x=1$ $2x=1$

$x=\frac{1}{2}\in(0,1]$ $x=\frac{1}{2}\notin[-1,0)$

x	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$f(-1)=2$

$f(0)=0$

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$f(1)=0$

interpretare:

$f'(x)\le0\ \forall x\in[-1,0] \Rightarrow f$- descresc. pe $[-1,0)$ (1)

$f'(x)\ge0\ \forall x\in(0,\frac{1}{2}] \Rightarrow f$- cresc. pe $(0,\frac{1}{2}]$ (2)

$f'(x)\le0\ \forall x\in[\frac{1}{2},1] \Rightarrow f$- descresc. pe $[\frac{1}{2},1]$ (3)

din (1) și (2) $\Rightarrow x=0$ - pct. de minim

din (2) și (3) $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ - pct. de maxim

din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ I $\max(f[-1,1])=\max(\{f(-1),f(\frac{1}{2})\})=\max(\{2,\frac{1}{4}\})=2$

II $\min(f(-1,1])=\min(\{f(0),f(1)\})=\min(\{0,0\})=0$

$\Rightarrow$ extremele funcției sunt 0 și 2, iar ele se ating