Examen scris: Probabilităţi şi statistică - 24.01.2022

1. [3p] Se consideră vectorii: $a = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$, $b = [1, 2, 3, 1, 2]$. Fie x o permutare aleatoare a vectorului a, iar u şi v permutări aleatoare şi independente ale vectorului b. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsurile corecte (fără justificări).

a) Probabilitatea evenimentului $\{x = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]\}$ este ...$\frac{1}{7!}$

b) Probabilitatea ca $u(1)$ să fie egal cu 1 sau 2 este ....$\frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

c) Fie X variabila aleatoare binară definită astfel:
$P(X = 0) = P($" $x(2)$ este număr par "$)$ şi $P(X = 1) = P($" $x(2)$ este număr impar "$)$.
Valoarea medie a lui X este ...18

d) Probabilitatea evenimentului $\{u = [2, 3, 1, 1, 2]\} \cup \{v = [2, 3, 1, 1, 2]\}$ este .$\frac{59}{30^2}$

e) Este adevărată afirmaţia următoare?
Evenimentele $\{u(2) = 1\}$ *şi* $\{u(2) = 2\}$ *sunt independente.* NU..... DA/NU.

2. [1.5p] Fie $x_1, ..., x_8$ date statistice pentru caracteristica X, a cărei distribuţie depinde de parametrul necunoscut $\theta \in (0, 0.5)$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.5 - \theta & 0.5 & \theta \end{pmatrix}.$$

Se ştie că media de selecţie este 0.1. Să se estimeze valoarea parametrului necunoscut θ, folosind metoda momentelor. Justificaţi toate răspunsurile.

parametrul necunoscut : $\theta \Rightarrow$ avem sistemul $\begin{cases} E(X^k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$, observăm că $E(X) = \overline{x_i} = \frac{1}{10}$

În același timp $E(X) = (-1)\cdot(0,5-\theta) + 0\cdot 0,5 + 1\cdot\theta =$

$= -0,5 + \theta + 0 + \theta = 2\theta - \frac{5}{10}$

$2\theta - \frac{5}{10} = \frac{1}{10} \Big/ \cdot 10 \Rightarrow 20\theta - 5 = 1 \Rightarrow 20\theta = 6 \Rightarrow \theta = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = \underline{0,3}$

3. [2.5p] Fie X şi Y două variabile aleatoare independente, având aceeaşi funcţie de densitate $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [0,2]. \end{cases}$$

Rezolvaţi cerinţele următoare, justificând toate răspunsurile.

a) Calculaţi expresiile funcţiilor de repartiţie $F_X(x)$ pentru $x \in [0,2]$, respectiv $F_Y(y)$ pentru $y \in [2,5]$.

b) Calculaţi $P(X \leq 1, Y \leq 3)$.

c) Calculaţi $E(3X + Y^2)$.

a) $$\cancel{F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{0} + \int_{0}^{2} f(t)\,dt + \underbrace{\int_{2}^{\infty} f(t)\,dt}_{0} = \int_{0}^{2} f(t)\,dt = \int_{0}^{2} \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{4}{4} = 1}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{0} + \int_{0}^{2} f(t)\,dt +$$

$$F_X(x) = \int_{0}^{2} \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^2 = 1$$

pt. $x \in [0,2]$.

$$F_Y(y) = \int_{2}^{5} f(t)\,dt = \int_{2}^{5} 0 = 1$$

pt. ... $\lim_{y \to \infty} F_Y(y) = 1 \Rightarrow$

b) $$P(X \leq 1, Y \leq 3) = \int_{-\infty}^{1} \left(\int_{-\infty}^{3} f_{(X,Y)}(s,t)\,dt \right) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} \int_{0}^{2} \frac{t}{2}\,dt = \int_{-\infty}^{1} \left(\frac{t^2}{4}\Big|_0^2 \right) = \int_{-\infty}^{1} 1 = \int_{0}^{1} 1 = s\Big|_0^1 = 1$$

c) $$E(3X + Y^2) = 3E(X) + E(Y^2) = 3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{t}{2}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \frac{t^2}{2}\,dt =$$

$$= 3 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{2}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^3}{2}\,dt = 3 \cdot \frac{t^3}{6}\Big|_0^2 + \frac{t^4}{8}\Big|_0^2 = 3 \cdot \frac{8}{6} + \frac{16}{8} =$$

$$= \boxed{4 + 2 = 6}$$