① $a = [1,2,3,4,5,6,7]$

$b = [1,2,3,1,2]$

x - perm. pt. a

u, v - perm. pt. b (aleatoare și independente)

a) prob. $\{x = [1,2,3,4,5,6,7]\} = \dfrac{1}{7!}$

b) prob $u(1) = 1$ sau 2

să fie 1 pe prima poz (perm cu repetiție restul) $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

să fie 2 pe prima poz (la fel) $= 12$

$\Rightarrow 24$ cazuri favorabi

cazuri totale $\dfrac{5!}{2! \, 2! \, 1!} = 30$

$\Rightarrow P(E) = \dfrac{24}{30} = \dfrac{12}{15} = \dfrac{4}{5}$

c) $P(x=0) = P("x(2)$ e nr. par$")$ și $P(x=1) = P("x(2)$ e nr. impar$")$.

Valoarea medie a lui X?

$P \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$

$P(x(2)$ e nr par$) = \dfrac{3}{7} \Rightarrow P(x=0) = \dfrac{3}{7}$ și $P(x=1) = \dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow E(P) = 0 \cdot \dfrac{3}{7} + 1 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$

sunt independente

d) prob. $(u = [2,3,1,1,2]$ o $v = [2,3,1,1,2]) = p(\text{prima}) + p(\text{a doua}) - p(\text{prima} \cap \text{a doua})$

$= \dfrac{30\%}{\frac{1}{30}} + \dfrac{30\%}{\frac{1}{30}} - \dfrac{1}{30} \cdot \dfrac{1}{30} = \dfrac{59}{30^2}$

e) $P(v(2) = 1$ și $u(2) = 2) = 0$ grt

$P(v(2)=1) \cdot p(u(2)=2) = \dfrac{12}{30} \cdot \dfrac{12}{30} = \dfrac{12^2}{30^2}$ $\Big\}$ nu-s egale $\Rightarrow$ nu-s independente

② $X_1, \dots, X_8$ date statistice

$\theta \in (0.05)$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5-\theta & 0.5 & \theta \end{pmatrix}$$

$\overline{X_8} = 0.1$

Să se estimeze θ cu met. momentelor.

$E(X) = -1(0,5-\theta) + 0 + 1\cdot\theta = -\frac{1}{2} + 2\theta$ $\Bigg\}$ $\Rightarrow$ $-\frac{1}{2} + 2\theta = 0,1$

egalăm $E(X) = \overline{X_8}$ $\qquad 2\theta = 0,6 \Rightarrow \theta = 0,3$

③ X, Y v.a. cu funcția de densitate $f: R \to [0, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

a) $F_X(x)$ pt. $x \in [0,2]$ $= \dfrac{x^2}{4}$

$F_Y(y)$ pt. $y \in [2,5]$ $= 1$

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{2} t \, dt = \frac{1}{2} \frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4} & x \in [0,2] \\ \\ 0 & x < 0 \\ \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ sunt independente

b) $P(X \leq 1, Y \leq 3) = P(X \leq 1) \cdot P(Y \leq 3) = F(1) \cdot F(3) = \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

c) $E(3X + Y^2) = 3E(X) + E(Y^2) = 3 \cdot \dfrac{4}{3} + 2 = 6$

$E(Y^2) = \displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{16}{8} = 2$

$E(X) = \displaystyle\int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$