~~[illegible]~~

Algebră seminar 11

Spații vectoriale

Def: Fie $(K,+,\cdot)$ un corp comutativ (ex $K=\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\dots$)

Un sp. vect peste K este format dintr-un grup abelian $(V,+)$ și o operație externă : $K\times V\to V$ care satisface urm. axiome:

I. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$ $\quad\forall x,y\in V$ vectori

II. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$. $\quad\forall\alpha,\beta\in K$ scalari.

III. $(\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$

IV. $1_K\cdot x=x$.

○ - op externă
○ - op din K
○ - op din V.

31.31 Spac $\mathbb{R}_+^*=(0,\infty)$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor.

$\boxed{+}:\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$, $x\boxed{+}y=x\cdot y$ și cu înmulțirea cu scalar:

$\boxed{\cdot}:\underset{\text{scalar}}{\mathbb{R}}\times\underset{\text{vector}}{\mathbb{R}_+^*}\to\mathbb{R}_+^*$, $\underset{\text{scalar}}{\alpha}\boxed{\cdot}x=x^{\alpha}$.

Știm $(\mathbb{R},+,\cdot)$ corp comutativ ✓

Vrem $(\mathbb{R}_+^*,\boxed{+})$ grup abelian:

I. Vrem op $\boxed{+}$ bine-def. ✓

$x,y\in\mathbb{R}_+^*$ $x\boxed{+}y=x\cdot y\in\mathbb{R}_+^*$

II. Comutativ:

$x\boxed{+}y=y\boxed{+}x$, $\forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$?

$x\boxed{+}y=xy$, $y\boxed{+}x=yx$ — sunt egale pt că înm e comutativă în $\mathbb{R}$.

III. Asociativă:

Vrem: $x \boxplus (y \boxplus z) = (x \boxplus y) \boxplus z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$

$x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z)$ – sunt egale pt că înm a asociativă pe $\mathbb{R}$

$(x \boxplus y) \boxplus z = (xy) \boxplus z = (x \cdot y) \cdot z$

IV. Elem. neutru față de $\boxplus$ (vectorul nul)

Arem că $1 \in \mathbb{R}_+^*$ este vect nul:

Vrem: $x \boxplus 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$x \boxplus 1 = x \cdot 1 = x$ ✓

V. Toate elem trebuie să fie simetriz în rap cu $\boxplus$ (elem opuse)

Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, Arem că $\frac{1}{x}$ este vectorul opus lui x,

$\frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$; Verifică $\frac{1}{x} \boxplus x = 1$?

$\frac{1}{x} \boxplus x = \frac{1}{x} \cdot x = 1.$

Așadar $(\mathbb{R}_+^*, \boxplus)$ este un grup abelian.

Rămâne să verificăm cele 4 axiome ale op externe de înmulțire:

I. $\alpha \boxdot (x \boxplus y) = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\alpha \boxdot y)$

II. $(\alpha + \beta) \boxdot x = (\alpha \boxdot x) \boxplus (\beta \boxdot x)$

III. $(\alpha \cdot \beta) \boxdot x = \alpha \boxdot (\beta \boxdot x)$

IV. $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalar} \in \mathbb{R}}}{1} \boxdot x = x.$

I. $\alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot (x \cdot y) = (x \cdot y)^\alpha$

$(\alpha \boxdot x) \boxplus (\alpha \boxdot y) = (x^\alpha) \boxplus (y^\alpha) = x^\alpha \cdot y^\alpha.$

II. $(\alpha \overset{\leftarrow \text{ op de „+" la nr reale}}{+} \beta) \boxdot x = x^{\alpha + \beta}$

$(\alpha \boxdot x) \boxplus (\beta \boxdot x) = (x^\alpha) \boxplus (x^\beta) = x^{\beta\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pt că „·" din } \mathbb{R} \text{ este comutativ}}}{=} x^{\alpha\beta}$

- 2 -

vrem

IV. 1 ⊡ $A = A$

1 ⊡ $x = x^1 = x$

scalar $\in \mathbb{R}$

$\Big\} \Rightarrow$ Așadar $\mathbb{R}_+^*$ este un $\mathbb{R}$-spațiu vectorial

Recap: Fie V un K-sp vectorial, $U \subseteq V$. Sp că U este un K-subspațiu a lui V dacă $\begin{cases} 0 \in U \\ \forall x, y \in U, x+y \in U \\ \forall \alpha \in K, \forall x \in U, \alpha \cdot x \in U \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \in U \\ \forall \beta, \alpha \in K, \forall x, y \in U: \underbrace{\alpha \cdot x + \beta \cdot y}_{\text{combinație liniară a vect } x, y} \in U. \end{cases}$

$\boxed{3.1.33}$ Care dintre urm submulțimi ale mulțimii $\mathbb{R}^3$ sunt $\mathbb{R}$-subspații: $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

$(0,0,0) \in A$?

$2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in A$

$\forall \beta, \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in A$ avem că $\alpha x + \beta \cdot y \in A$.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in A \Rightarrow 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$y = (y_1, y_2, y_3) \in A \Rightarrow 2y_1 + y_2 - y_3 = 0$

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3)$$
$$= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3)$$
$$= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \overset{?}{\in} A$$

$$2(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) - (\alpha x_3 + \beta y_3) =$$
$$= \alpha(2x_1 + x_2 - x_3) + \beta(2y_1 + y_2 - y_3) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in A$.

Așadar un $A \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

$B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$.

$(0,0,0) \in B$?

$2 \cdot 0 + 0 - 0 = 0 \neq 1 \Rightarrow (0,0,0) \notin B$.

$\Rightarrow B \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$.

$= \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$(0,0,0) \in C$ clar

Vrem $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in C$

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in C$

$x \in C \Rightarrow x = (a, a, a) \in \mathbb{R}^3$

$y \in C \Rightarrow y = (b, b, b) \in \mathbb{R}^3$

$\alpha \cdot x + \beta \cdot y = (\alpha a, \alpha a, \alpha a) + (\beta b, \beta b, \beta b)$

$= (\alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b) \in C$

Deci $C \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2 = 0\}$.

$(0,0,0) \in D$.

$0^2 + 0 = 0 \Rightarrow (0,0,0) \in D$.

Vrem $\forall x, y \in D$

$x = (2, -4, 0) \in D$ pt că $2^2 - 4 = 0$

$y = (1, -1, 0) \in D$ pt că $1^2 - 1 = 0$

$x + y = (3, -5, 0) \notin D$.

$3^2 - 5 = \underbrace{4}_{=4} \neq 0$ Deci $D \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.

$E = \mathbb{R}^3 \setminus A$

$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}.$

$(0,0,0) \in A \Rightarrow (0,0,0) \notin \mathbb{R}^3 \setminus A \Rightarrow (0,0,0) \notin E \Rightarrow$

$\Rightarrow E \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$

subspațiu.

$F = (\mathbb{R}^3 \setminus A) \cup \{(0,0,0)\}.$

$(0,0,0) \in F.$

$\forall\, x, y \in F$ vrem $x + y \in F.$

contraex:

$x = (1,1,1)$

$2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in F.$

$y = (1,0,0)$

$2(-1) + 0 - 0 = -2 \neq 0 \Rightarrow y \notin A \Rightarrow y \in F$

$x + y = (0,1,1)$

$2 \cdot 0 + 1 - 1 = 0$ $\cancel{\neq 0 \Rightarrow x+y \notin A \Rightarrow x+y \in F}$

$\Rightarrow x + y \in A \Rightarrow x + y \notin F$

Așadar $F \not\leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3.$

3.1.37/38 Se cons. submulț. $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ date prin:

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$

$T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}.$

Ssarc $\underbrace{S, T \leq_{\mathbb{R}}}_{\text{Temă.}} \mathbb{R}^3$ și $S \oplus T = \mathbb{R}^3.$

Recap: $S, T \leq_K V$

$$V = S \oplus T \Leftrightarrow \begin{cases} S\cap T = \{0_V\}. \\ V = S+T \end{cases}$$

Vrem. $S \cap T = \{(0,0,0)\}$.

Fie $x = (x_1, x_2, x_3) \in S\cap T \Rightarrow$
vector

$$\Rightarrow \begin{cases} x\in S \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 0 \\ x\in T \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 \end{cases}$$

$3x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x = (0,0,0)$

$\Rightarrow S\cap T = \{(0,0,0)\}$.

Vrem $\mathbb{R}^3 = S+T \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^3, \exists s\in S, \exists t\in T$ a.î. $v = s+t$.

Fie $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$s \in S \Rightarrow s_1+s_2+s_3 = 0$

$t\in T \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3$

$v = s+t \Rightarrow (v_1, v_2, v_3) = (s_1+t_1, s_2+t_2, s_3+t_3)$

$$\begin{cases} s_1+s_2+s_3 = 0 \\ t_1 = t_2 = t \\ v_1 = s_1+t_1 \\ v_2 = s_2+t_2 \\ v_3 = s_3+t_3. \end{cases} \Bigg| \oplus \Rightarrow v_1+v_2+v_3 = \overbrace{s_1+s_2+s_3}^{0} + \underbrace{t_1+t_2+t_3}_{3t_1}.$$

$\Rightarrow t_1 = \frac{v_1+v_2+v_3}{3} = t_2 = t_3$

$s_1 = v_1 - t_1 = \frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}$

$s_2 = v_2 - t_2 = \frac{2v_2 - v_1 - v_3}{3}$

$s_3 = v_3 - t_3 = \frac{2v_3 - v_1 - v_2}{3}$.

$\Rightarrow \forall (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$.

$(v_1, v_2, v_3) = \left(\frac{2v_1 - v_2 - v_3}{3}, \frac{2v_2 - v_1 - v_3}{3}, \frac{2v_3 - v_1 - v_2}{3}\right) + \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{3}, \frac{v_1+v_2+v_3}{3}, \frac{v_1+v_2+v_3}{3}\right)$

$\in S$ $\in T$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = S\oplus T$.