Logică computațională

Logica propoz.

propoz. < A, F

Sintaxa = reguli
Semantică = sens

Sintaxa logică propoz.

• alfabetul

Σ_p = Var_propoz $\cup$ Conective $\cup$ $\{(,)\}$

Val_propoz = $\{p, q, r, p_1, p_2, \ldots\}$

Conective = $\{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

negația

în ordinea puterii (priorității):
$\neg$ negația
$\wedge$ conj.
$\vee$ disj.
$\to$ implicația
$\leftrightarrow$ echivalența

$\neg p \vee q = (\neg p) \vee q$

• reguli de formare a form. propoz.

* bază
* inducție
* închidere

dacă : atunci (implicație)

Semantica

- domeniu $\{F = \text{false} ; T = \text{true}\}$
- semantica conectivelor

$\uparrow$ nand $p \uparrow q := \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

$\downarrow$ nor $p \downarrow q := \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

$\oplus$ xor $p \oplus q := \neg(p \Leftrightarrow q)$

Interpretarea (Def)

$i : F_p \to \{T, F\}$

Concepte semantice (Def) - cont

- consist (realizabilă)
- validă (tautologii) toate A
- inconsistentă toate F
- contigentă nu (valide, inconsistente)

$U(p, q, r) \Rightarrow 2^3$ interpretări

	p	q	r	$\neg p \vee q$	$r \vee p$	$\cup(p,q,r)$	$\vee(p,q,r)$	$p \uparrow \neg p$	$p \downarrow \neg p$
1	0	0	0						
2	0	0	1						
3	0	1	0						
4	0	1	1						
5	1	0	0						
6	1	0	1						
7	1	1	0						
8	1	1	1						

modele pt U: i_1, i_2, i_5, i_7

anti-modele pt U, celelalte

Metasimboluri - relații semantice între formule

- consecință logică $U \models V$
- logice echivalente $\equiv$
- consecință logică $U_{1,2} \ldots \models V$

Teoremă

~~consist → consist.~~

Echivalențe logice în logica computațională
- Legile lui DeMorgan
- Legile de absorbție
- Legi de comutativitate
- Legi de asociativitate
- Legi de distributivitate
- Legi de impotență

Principiul dualității
- conective duale: $(\wedge, \vee)$, $(\uparrow, \downarrow)$, $(\Leftrightarrow, \oplus)$
- val. de adev. duale: T, F
- concepte duale: tautologie și formulă inconsistentă

Forme normale în logica propoz.
1. Un literal
2. o clauză (disjuncția unui nr. finit de literali)
3. club (conjuncția unui nr. finit de literali)
4. ~~clau~~ clauză vidă ($\square$) e sg. clauză inconsistentă
5. FND

6. Formă normală conjunctivă (FNC)

Alg. de normalizare

4 paşi, unul e ~~op~~ opţional

Seminar 4

Folosind metoda tabelară de adev. verif. distributivitatea conectivei $\downarrow$ faţă de conectiva „$\uparrow$": $p\downarrow(q\uparrow r) \equiv (p\downarrow q)\uparrow(p\downarrow r)$

	p	q	r	$q\uparrow r$	$p\downarrow r$	$p\downarrow q$	$p\downarrow(q\uparrow r)$	$(p\downarrow q)\uparrow(p\downarrow r)$
i_1	T	T	T	F	F	F	F	A
i_2	T	T	F	T	F	F	F	A
i_3	T	F	T	T	F	F	F	A
i_4	T	F	F	T	F	F	F	A
i_5	F	T	T	F	F	F	A	A
i_6	F	T	F	T	T	F	F	A
i_7	F	F	T	T	F	T	F	A
i_8	F	F	F	T	T	T	F	F

T

(1) $\neq$ (2)

$\Downarrow$

nu are loc rel. de echiv.

$q\uparrow r \equiv \neg(q\wedge r)$

$p\downarrow r \equiv \neg(p\vee r)$

~~F A F~~

pt $i_1 : \{p, q, r\} \to \{T, F\}$

$i_1(p) = T$

$i_1(q) = T$

$i_1(r) = T$

~~$i_1(q\uparrow r) = F$~~ $i_1(p\downarrow(q\uparrow r)) \neq i_1((p\downarrow q)\uparrow(p\downarrow r)) \Rightarrow$

~~$i_2(p\downarrow r)$~~

$\Rightarrow$ nu are loc rel. de echiv.

9.1.2. $T \to F$ e F

7) $A = p \to (q \wedge r) \vee q \wedge \neg p$

	p	q	r	$q \wedge r$	$q \wedge \neg p$	$(q \wedge r) \vee q \wedge \neg p$	A
1	T	T	T	T	F	T	T
2	T	T	F	F	F	F	F
3	T	F	T	F	F	F	F
4	T	F	F	F	F	F	F
5	F	T	T	T	T	T	T
6	F	T	F	F	T	T	T
7	F	F	T	F	F	F	T
8	F	F	F	F	F	F	T

e consist. și conting.

a) $\to$ e falsă numai de la T la F

b) $\boxed{\text{Conting. pt că e consistentă și nu e tautologie.}}$

e consist. și conting.

Modelele sunt cele care au la A val T.
Antimodelele sunt cele care au la A val F

Antimodelele: $i_5, i_6, i_7 : \{p, q, r\} \to \{T, F\}$

$i_5(p) = T$ $\quad i_6(p) = T$ $\quad i_7(p) = T$

$i_5(q) = F$ $\quad i_6(q) = F$ $\quad i_7(q) = T$

$i_5(r) = F$ $\quad i_6(r) = T$ $\quad i_7(r) = F$

8) Dem. că e tautologie:

Legea reunirii premiselor

$(p \to (q \to r)) \to (p \land q \to r) = A = U$

i	p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \land q$	$p \land q \to r$	$A = U$
1	T	T	T	T	T	T	T	T
2	T	T	F	F	F	T	F	T
3	T	F	T	T	T	F	T	T
4	T	F	F	T	T	F	T	T
5	F	T	T	T	T	F	T	T
6	F	T	F	F	T	F	T	T
7	F	F	T	T	T	F	T	T
8	F	F	F	T	T	F	T	T

tautologie

Se obs că $\forall$ i o interpretare, $i(U) = T$, $\Rightarrow$ U tautologie $(\models U)$

9) Dem. că are loc o rel de ~~consistență~~ consecință logică

$p \to (q \to r) \models (p \to q) \to (p \to r)$

1
2
3
4
5
6
7
8

	p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$ V	$p \to q$	$p \to r$	$(p\to q)\to(p\to r)$ U
1	F	F	F	T	T	T	T	T
2	F	F	T	T	T	T	T	T
3	F	T	F	F	T	T	T	T
4	F	T	T	T	T	T	T	T
5	T	F	F	T	T	F	F	T
6	T	F	T	T	T	F	T	T
7	~~T~~	~~T~~	~~F~~	~~F~~	~~F~~	~~T~~	~~F~~	~~F~~
8	T	T	T	T	T	T	T	T

Are loc rel. de cons. logică deoarece $\forall i \in \{i_1, \dots i_6, i_8\}$ pt. care $i_k(U) = T$ și $i_k(V) = T$

$\Rightarrow U \models V$

9.1.7. Utilizând forma normală adecvată (FNC sau FND) dem.

7) $\overset{?}{\models} (u \to z) \to ((v \to z) \to ((u \lor v) \to z))$

FNC = $\land$ de clauze ; clauza = $\lor$ literali

FND = $\lor$ cuburi ; cub = $\land$ literali

literal $p, \neg p$

FNC = $\lor$ de literali

Pas 1: $u \to z \equiv \neg u \lor z$ (M)

implicația

$A \equiv (\neg u \lor z) \to ((\neg v \lor z) \to (\neg(u \lor v) \lor z)) \equiv$

~~$\equiv \neg(\neg u \lor z) \lor$~~

$\equiv \neg(\neg u \lor z) \lor (\neg(\neg v \lor z) \lor (\neg(u \lor v) \lor z))$

Pas 2: $\underset{\text{Morgan}}{\overset{\text{De}}{\equiv}} (u \land \neg z) \lor ((v \land \neg z) \lor (\neg u \lor \neg v) \lor z))$

negația

$\underset{\text{asoc. lui } \lor}{\equiv} (u \land \neg z) \lor (v \land \neg z) \lor (\neg u \lor \neg v) \lor z$

distributivitatea Pas 3 $\equiv (\overline{U} \vee \cancel{v} \vee \neg U \vee Z) \wedge (U \vee \overline{v} \vee \neg v \vee Z) \wedge (\overline{u} \vee \neg Z \vee \neg U \vee Z)$

$\wedge (\overline{U} \vee \neg Z \vee \neg v \vee Z) \wedge (\neg Z \vee v \vee \neg U \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \overline{v} \vee \neg v \vee Z)$

$\wedge (\neg Z \vee \neg Z \vee \neg U \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \neg Z \vee \neg U \vee Z)$ – FNC cu 8 clause

$\Rightarrow$ A e tautologie

9.1.8. Utilizând forma normală adevărată, aciești toate modelele formulei: FND

7) $(q \vee r \to p) \to (r \to r) \wedge q$ $= U$

Pas 1: $U \equiv ((\neg q \vee r) \vee p) \to ((\neg p \vee r) \wedge q) \equiv$

$\equiv \neg((\neg q \vee r) \vee p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge q) \equiv$

Pas 2 $\overset{\text{De Morgan}}{\equiv} ((q \vee r) \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee r) \wedge q) \equiv$

Pas 3 $\overset{\text{distrib.}}{\equiv} (q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (r \wedge q)) \equiv$

V e asociat.

$\equiv (q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q) \vee (r \wedge q)$ (e FND cu 4 culori)

dispar parant.

idempotență $\equiv$ comutat. $(q \wedge \neg p) \vee (r \wedge \neg p) \vee (r \wedge q)$ (e FND cu 3 culori)

culul: $q \wedge \neg p$

$i_1, i_2 : \{p, q, r\} \to \{F, T\}$

$i_1(q) = T$ $\quad i_2(q) = T$

$i_1(p) = F$ $\quad i_2(p) = F$

$i_1(r) = T$ $\quad i_2(r) = F$

culbul $r \wedge \neg p$ ca să fie „A"

$i_1, i_3 : \{p, q, r\} \to \{T, F\}$

$i_3(p) = F$

$i_3(r) = T$

$i_3(q) = F$

culbul $r \wedge q$

$i_4(p) = T$

$i_4(q) = T$

$i_4(r) = T$

Modelele lui U sunt i_1, i_2, i_3, i_4

9.1.9. Dem. că urm. formulă e inconsist. utilizând ~~Fom~~ FN adecv.: FND disj. e falsă at. când v e falsă

$$(u \to (v \to z)) \wedge \neg(v \to (u \to z)) \equiv A$$

rezolv „→"

Pas 1: $A \equiv (\neg u \vee (\neg v \vee z)) \wedge \neg(\neg v \vee (\neg u \vee z))$

rezolv „¬"

Pas 2: prin DeMorgan

$A \equiv (\neg u \vee (\neg v \vee z)) \wedge (v \wedge (u \wedge \neg z)) \equiv$

Aplic asoc. pt conj. și disj. $\equiv (\neg u \vee \neg v \vee z) \wedge v \wedge u \wedge \neg z \equiv$

distrib.

$\equiv \cancel{\neg u \vee \neg v \vee z \wedge v}$

$\equiv (\neg u \wedge v \wedge u \wedge \neg z) \vee (\neg v \wedge v \wedge u \wedge \neg z)$

$\vee (z \wedge v \wedge u \wedge \neg z) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ FND cu 3 culbuși inconsist. $\Rightarrow A \equiv$ inconsistentă

Seminar 5

9.19* Dem. că urm. formulă este inconsist. forma normată adevărată.

→ Forma norm. disjunctivă

$$(u \to (v \to z)) \land \neg(v \to (u \to z))$$

Pas 1:

$$(u \to (\neg v \lor z)) \land \neg(v \to (\neg u \lor z))$$

$$(\neg u \lor (\neg v \lor z)) \land \neg(\neg v \lor (\neg u \lor z))$$

Pas 2: Leg. lui De morgan.

$$(\neg u \lor (\neg v \lor z)) \land (v \land (u \land \neg z))$$

Asoc: $(\neg u \lor \neg v \lor z) \land v \land u \land \neg z$

Pas 3: Distrib.

$$(\neg u \land v \land u \land \neg z) \lor (\neg v \land v \land u \land \neg z) \lor (z \land v \land u \land \neg z)$$

$\Rightarrow$ FND cu 3 cuburi inconsistente $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ formula inițială e inconsistentă

9.16* Aduceți la FND și FNC   tautologie = FNC

$$(u \to v) \land ((u \land v) \to z) \to (u \to z) \equiv$$

Pas 1

$$(\neg u \lor v) \land (\neg(u \land v) \lor z) \to (\neg u \lor z) \equiv$$

$$\equiv ((\neg u \lor v) \land \neg(\neg(u \land v) \lor z)) \lor (\neg u \lor z)$$

Leg. lui De Morgan Pas 2 $(u \lor \neg v) \lor ((u \land v) \land \neg z) \lor (\neg u \lor z)$

$\equiv (u \wedge \neg v) \vee (u \wedge v \wedge \neg z) \vee \neg u \vee z$ FND cu 4 clauze

Pas 3

$(u \vee v \vee \neg u \vee z) \wedge (v \vee u \vee \neg u \vee z) \wedge (u \vee \neg$

FNC cu 6 clauze tautologie

Seminar 6

9.1.15. Dem. că formula A e tautologie folosind metoda tabelelor semantice.

$A = (p \to q \wedge r) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r)$

Regulile α

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ | \\ A \\ | \\ B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \vee B) \\ | \\ \neg A \\ | \\ \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{c} \neg(A \to B) \\ | \\ A \\ | \\ \neg B \end{array}$$

Regulile β

$$\begin{array}{ccc} & A \vee B & \\ / & & \backslash \\ A & & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B) & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & \neg B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & A \to B & \\ / & & \backslash \\ \neg A & & B \end{array}$$

$U \Leftrightarrow V \equiv (U \vee V) \to (U \wedge V)$

$\neg A \equiv \neg(((p \to q \wedge r) \vee ((p \to q) \wedge (p \to r))) \to ((p \to q \wedge r) \wedge$
$\wedge ((p \to q) \wedge (p \to r)))$ (A)

$\neg A = \neg(((p \to q \wedge r) \vee ((p \to q) \wedge (p \to r))) \to ((p \to q \wedge r) \wedge ((p \to q) \wedge (p \to r))))$ (1) ✓

regula α pt (1)

$(p \to q \wedge r) \vee ((p \to q) \wedge (p \to r))$ (2)

$\neg((p \to q \wedge r) \wedge ((p \to q) \wedge (p \to r)))$ (3) ✓

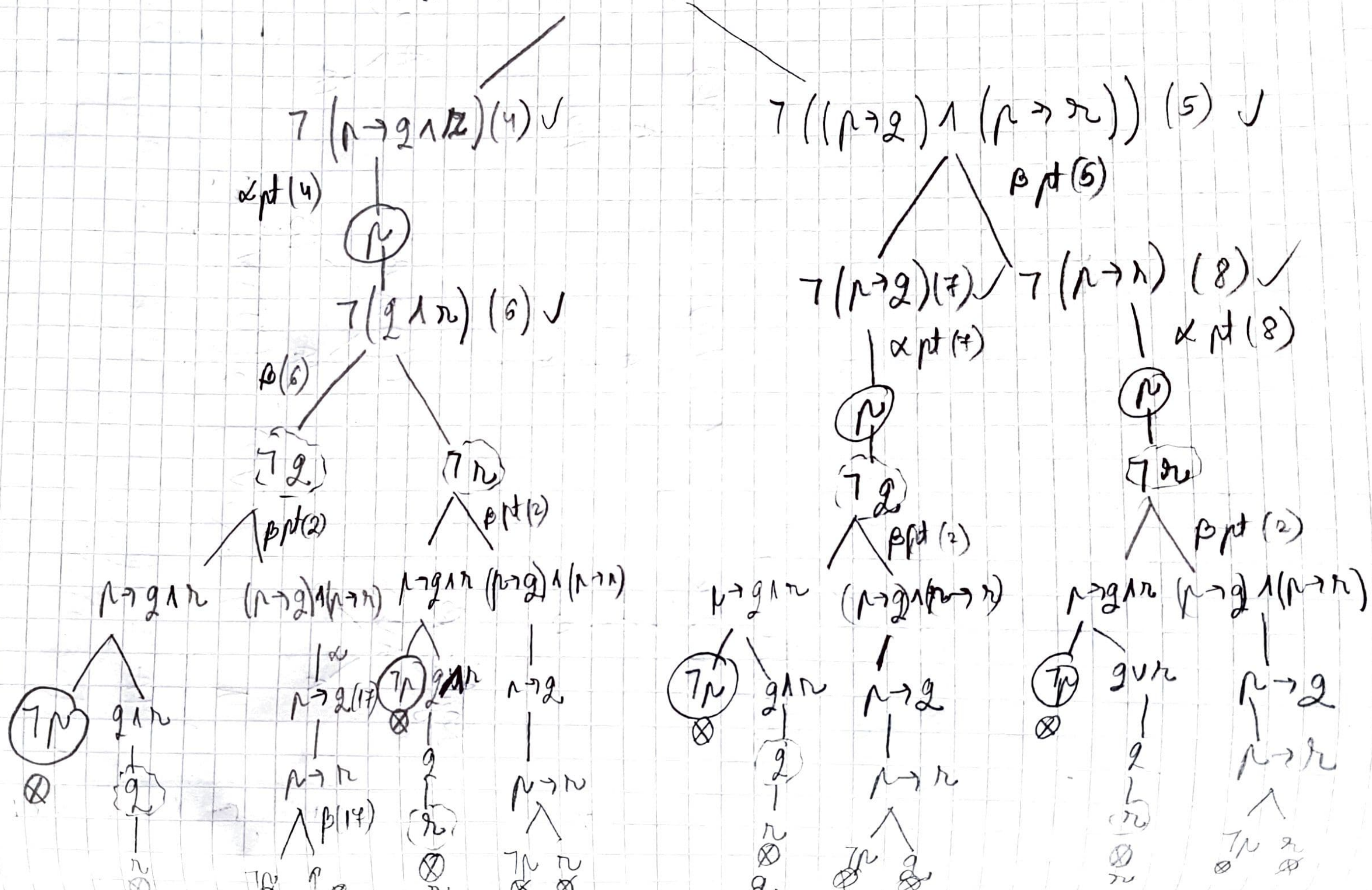


tabela semantică închisă $\overset{TCC}{\Longrightarrow}$ formula A este tautologie

T. completitudinii și corectitudinii

9.1. 16.7. $p \to (q \to r) \models q \to (p \to r)$ Să se dem. că rel. de consist. logică cu ajut. tabelelor sem.

$U_1, U_2, \dots, U_n \models V \Leftrightarrow U_1 \wedge U_2 \wedge \dots \wedge U_n \wedge \neg V$ are loc. o tabelă semantică închisă

$(p \to (q \to r)) \wedge (\neg(q \to (p \to r)))$ (1) ✓

| reg α pt 1

$p \to (q \to r)$ (2)

$\neg(q \to (p \to r))$ (3) ✓

| reg α pt (3)

q

$\neg(p \to r)$ (4) ✓

| reg α pt (4)

p

$\neg r$

reg β pt (2)

$\neg p$ — $\otimes$ — p

$q \to r$ (5)

Reg β pt (5)

$\neg q$ — $\otimes$ — q

r — $\otimes$

tabela sem. închisă $\Rightarrow$ are loc rel. de consecință logică

Decideți tipul formulei A. Dacă e consist., scrieți modelele.

$A = (q \wedge r \to p) \to (p \to r) \wedge q \; (1)$ ✓

β pt 1

$\neg(q \wedge r \to p)$ (2) $(p \to r) \wedge q$ (3)

α pt (2)

$q \wedge r$ (4)

$\neg p$

α pt. 4

q

r

⊙

ramură deschisă

α pt 3

$p \to r$ (5)

$\neg p$ r

⊙ ⊙

Tabela sem compl, deschisă ⟹ A consistentă

$FND(A) = (r \wedge q \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q) \vee (r \wedge q)$

cubul: $r \wedge q \wedge \neg p$

$i_1 : \{r, q, p\} \to \{T, F\}$ $i_1(p) = F$ $i_1(q) = T$ $i_1(r) = T$

cubul: $\neg p \wedge q$ $i_1, i_2 : \{p, q, r\} \to \{T, F\}$ $i_2(p) = F$, $i_2(q) = T$, $i_2(r) = F$

cubul: $p \wedge q$ $i_2, i_3 : \{p, q, r\} \to \{T, F\}$ $i_3(p) = T$, $i_3(q) = T$, $i_3(r) = T$

Modelele formulei A sunt i_1, i_2, i_3. Formula A ~~e consist. și~~ contingentă

⟹ A = consist. și conting.

Metoda rezoluției - Curs 6.

regula rezoluției : $A \vee l,\ B \vee \neg l \vdash_{res} \Rightarrow A \vee B$

Notație : $C_3 = Res_l(C_1, C_2)$ ~~clauza~~ inconsist.

C_1, C_2 - clause părinte

caz parti. $C_1 = l,\ C_2 = \neg l,\ Res_l(C_1, C_2)$ - inconsist

$$\left\{\begin{array}{ll} \begin{array}{l} U \\ U \to V \end{array} \vdash_{mp} V & U, U \to V \text{ adica } U, \neg U \vee V \vdash_{res} V \\ \\ \begin{array}{l} U \to V \\ \neg V \end{array} \vdash_{mt} \neg U & U \to V, \neg V \text{ adică } \neg U \vee V, \neg V \vdash_{res} \neg U \\ \\ \begin{array}{l} U \to V \\ V \to Z \end{array} \vdash_{sil.} U \to Z & U \to V, V \to Z \text{ adică } \neg U \vee V, \neg V \vee Z \vdash_{res} \\ & \neg U \vee Z = U \to Z \end{array}\right.$$

Dacă se obț. clauză vidă $\Rightarrow$ incosist $\Rightarrow$ STOP

Altfel $\Rightarrow$ consistență

S $\vdash_{res}$ $\square$ clauza vidă

U tautologie $\Leftrightarrow FNC(\neg U) \vdash_{Res} \square$

$FNC(U_1 \wedge U_2 \wedge \ldots \wedge U_n \wedge \neg V) \vdash_{Res} \square$

Mod text:

$C_5 = Rez_g(C_1, C_4) = \neg p \vee \neg r$

$C_6 = Rez_p(C_3, C_5) = \neg r$

$C_7 = Rez_r(C_2, C_6) = \neg p$

$C_8 = Rez_p(C_7, C_3) = \square \overset{TCC}{\Rightarrow} S$ inconsistentă

Mod:

C_1, C_4 ~~trez~~ $C_5 = \neg p \vee r$

Problemă:

$p =$ "Ion își face laboratorul"

$v =$ "Vasile își face laboratorul"

$g =$ "Gheorghe își face laboratorul"

$v_1 \quad p \to (v \vee p) \equiv \neg p \vee p \vee v \overset{not}{\equiv} C_1$

$v_2 \quad p \to v \equiv \neg p \vee v \overset{not}{=} C_2$

$v_3 \quad \neg v \to g \equiv v \vee g \overset{not}{\equiv} C_3$

$v_4 \quad \neg g \to (\neg p \vee v) \equiv g \vee \neg p \vee v \overset{not}{\equiv} C_4$

$v_5 \quad \neg g \overset{not}{\equiv} C_5$

$v_6 \quad v$ ~~$\overset{not}{\equiv} C_6$~~ negația concluziei: $\neg v \overset{not}{\equiv} C_6$

$S = \{C_1, C_2, \dots, C_6\}$

$C_7 = Rez_g(C_3, C_5) = v$

$C_8 = Rez_v(C_6, C_4) = g \vee \neg p$

$C_9 = Rez_v(C_1, C_6) = \neg p \vee p = True$ (=> clauză inutilă)

$C_{10} = Rez_v(C_6, C_7) = \square \overset{TCC}{\Rightarrow} S$ inconsistentă =>

=> $v \Rightarrow$ "Vasile și-a făcut laboratorul"

Strategii: - Strategia eliminării

• se păstrează consistența/inconsistența ~~lor~~ și prin aplicarea urm. transformări:

- Eliminarea clauzelor tautologice: $\cancel{\neg p \vee q \vee p \vee \neg r}$

- El. clauzelor subsumate $\cancel{\neg p \vee q \vee r}$ sau $\neg p \vee q$

(cea mai mare)

- El. clauzelor care conțin literali puri

lit. pur = literal care nu are negația în ~~niciun~~ nici o clauză.

- El. clauzelor unitate (= literal), se șterg toate clauzele care-l conțin pe l și $\neg l$ din clauzele rămase

$\{\neg p \vee q, \neg p \vee r, \cancel{p}, \neg q \vee \neg r, \cancel{p \vee \neg r}\}$ $\{q, r, \neg q \vee \neg r\}$

$\{\} = \emptyset$ consist.

$\{\square\}$ - inconsistență

$S = \{\underbrace{\cancel{\neg p \vee p} \vee v}_{\text{clauză tautol.}}, \neg p \vee v, v \vee q, \underbrace{\cancel{q \vee \neg p \vee v}}_{\text{clauza subsumată } C_3}, \neg q, \neg v\}$

$S \setminus y = \{\underbrace{\cancel{\neg p \vee p \vee v}}_{\text{cl. taut.}}, \underbrace{\cancel{\neg p \vee v}}_{\neg p \text{ lit. pur}}, \underbrace{\cancel{v \vee q}}_{v \text{ lit. pur}}, \underbrace{\cancel{q \vee \neg p \vee v}}_{\text{cl. subsum. de } C_3}, \neg q\}$

$y = \{\neg v\}$; și sunt contradictorii?

$\Rightarrow S = \{\underbrace{\cancel{\neg p \vee v}}_{\text{lit. pur.}}, v \vee \cancel{q}, \underbrace{\cancel{\neg q}}_{\text{cl. unit}}, \neg v\}$

$S = \{\underbrace{\cancel{v}}_{\text{cl. unitate}}, \cancel{\neg v}\}$ $\Rightarrow S = \{\square\}$ inconsist.

$S \setminus y = \{ \cancel{7g} \}$ $\Rightarrow S \setminus \{y\} = \emptyset$ consist.
lit. pur

! $\neg p(r \vee g) \equiv \neg p \wedge \neg g$

Strategia ~~pe~~ saturării pe nivele

$S^0 \overset{not}{=} \{ \overset{C_1}{\neg p \vee r \vee v}, \overset{C_2}{\neg p \vee v}, \overset{C_3}{v \vee g}, \overset{C_4}{g \vee \neg p \vee v}, \overset{C_5}{\neg g} \}$

$Rez_p(C_1, C_2) = \neg p \vee v = C_2$

$Rez_p(C_1, C_4) = \neg p \vee v \vee g = C_4$

$Rez_g(C_3, C_5) = v = C_6$

$Rez_g(C_4, C_5) = \neg p \vee v = C_2$

$S^1 = \{ C_6 \}$

$S^2 = \emptyset \overset{TCS}{\Longrightarrow}$

! Când $Rez_v(C_9, C_6) = \square \overset{TCC}{\Longrightarrow} S$ inconsistentă

Strategia mulțimii suport

$y = \{ \overset{C_6}{\neg v} \}$

$Rez_r(C_6, C_3) = g = C_7$

$Rez_g(C_7, C_5) = \square \overset{TCS}{\Longrightarrow}$ inconsistentă

Seminar 7

9.1.2 Folosiți rezoluția generală pt. a dem. că următoarele formule sunt tautologii.

f) $U = (A \to B) \to ((\neg A \to C) \to (\neg B \to C))$

FNC pt. $\neg U$

$\neg U \equiv \neg(\neg(A \to B) \vee ((\neg A \to C) \to (\neg B \to C))$

$\neg U \equiv (A \to B) \wedge \neg((\neg A \to C) \to (\neg B \to C))$

$\neg U \equiv (\neg A \vee B) \wedge \neg(\neg(\neg A \to C) \vee (\neg B \to C)) \equiv$

$\equiv (\neg A \vee B) \wedge ((\neg A \to C) \wedge \neg(\neg B \to C)) \equiv$

$\equiv (\neg A \vee B) \wedge ((A \vee C) \wedge (\neg B \wedge \neg C)) \equiv$

$\equiv \underbrace{(\neg A \vee B)}_{C_1} \wedge \underbrace{(A \vee C)}_{C_2} \wedge \underbrace{\neg B}_{C_3} \wedge \underbrace{\neg C}_{C_4}$

$S = \{\neg A \vee B, A \vee C, \neg B, \neg C\}$

$C_1, C_3 \vdash_{Res_B} \neg A = C_5$

$C_2, C_4 \vdash_{Res_A} A = C_6$

$C_5, C_6 \vdash_{Res_A} \square \overset{TCS}{\Rightarrow}$ S. inconsistentă $\Rightarrow \models U$

$\vdash^{?} (A \to B) \to ((\neg A \to C) \to (\neg B \to C))$ ITD = inv. t. deducției

$\overset{ITD}{\Longrightarrow} A \to B \vdash^{?} (\neg A \to C) \to (\neg B \to C)$

$\overset{ITD}{\Longrightarrow} (A \to B), (\neg A \to C) \vdash^{?} (\neg B \to C)$

$\overset{ITD}{\Longrightarrow} \underset{U_1}{(A \to B)}, \underset{U_2}{(\neg A \to C)}, \underset{U_3}{\neg B} \vdash^{?} \underset{V}{C}$

$U_1 \equiv \neg A \vee B = C_1$

$U_2 = A \vee C = C_2$

$U_3 = \neg B = C_3$

$\neg V \equiv \neg C = C_4$

$S = \{C_1, C_2, C_2, C_3\}$

$\cancel{C_1}, Res_A(C_1, C_2) = B \vee C = C_5$

$Res_C(C_4, C_5) = B = C_6$

$Res_B(C_3, C_6) = \square$

$\overset{TCG}{\Longrightarrow}$ S inconsistentă $\overset{R.R.}{\Longrightarrow} \models U$

9.1.24.7 Folosind strategia eliminării, verif dacă mult. e inconsistentă. Eliminați o clauză la alegere din mulțime și verif inconsistența noii mulțimi de clauze.

$S = \{\cancel{p}, q \vee r, \cancel{\neg p} \vee q \vee \neg r, \cancel{\neg p} \vee \neg q\}$

1 nu avem clauze tautologice
2 nu avem clauze subsumate
3 nu avem literali puri
4 p - clauză unitate

$S = \{\cancel{q} \vee r, \cancel{q} \vee \neg r, \neg q\}$

$\neg q$ - clauză unitate

$S = \{r, \neg r\} = \{\cancel{r}, \cancel{\neg r} \vee \square\}$

r - clauză unitate

$\Rightarrow S = \{\square\}$ = mult. inconsistentă.

$S' = \{p, \cancel{q \vee r}, \neg p \vee \neg q\}$

1 - nu avem clauze tautologice
2 - nu avem clauze subsumate
3. r este literar pur

$S' = \{p, \cancel{\neg p \vee \neg q}\}$

$\neg q$ este literar pur

$S' = \{\cancel{p}\}$

p - literal pur

$S' = \emptyset$ mult. consistentă

9.1.25.7 Utilizând strategia mult. suport, dem:

$\neg p \to q \vee r,\ \neg q,\ p \to q \vdash \neg(p \vee q) \wedge r$

$U_1 = \neg p \to q \vee r = p \vee q \vee r = C_1$

$U_2 = \neg q = C_2$

$U_3 = p \to q = \neg p \vee q = C_3$

$\neg v = \neg(\neg(p \vee q) \wedge r) \equiv (p \vee q) \vee \neg r = p \vee q \vee \neg r = C_4$

$S = \{p \vee q \vee r,\ \neg q,\ \neg p \vee q,\ p \vee q \vee \neg r\}$

$Y = \{p \vee q \vee \neg r\}$

$S \setminus Y = \{p \vee q \vee r,\ \neg q,\ \neg p \vee q\}$

$\boxed{C_2 = \neg q}$ $\boxed{C_4 = p \vee q \vee \neg r}$

$\boxed{C_5 = p \vee \neg r}$ $\boxed{C_1 = p \vee q \vee r}$

$\boxed{C_6 = p \vee q}$ $\boxed{C_3 = \neg p \vee q}$

$\boxed{C_7 = q}$ $\boxed{C_2 = \neg q}$

$\boxed{C_8 = \square}$ $\overset{TCC}{\Rightarrow}$ S inconsist $\overset{RR}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ are loc deducția

Dem. că

$S \setminus Y = \{ \cancel{p \vee q \vee r}, \neg q, \neg p \vee q \}$

1 - nu sunt

2 - nu sunt

3 - r lit. pur

$S \setminus Y = \{ \neg q, \cancel{\neg p \vee q} \}$

$\neg p$ - lit pur

$S \setminus Y = \{ \neg q \}$

$\neg q$ - lit pur

$S \setminus Y = \emptyset \Rightarrow S \setminus Y$ consistentă

9.1.29. Folosind strategia saturării pe nivele determinați

$p \to q, r \to t, p \wedge r \models q \wedge t$

$U = (p \to q) \wedge (r \to t) \wedge p \wedge r \wedge \neg(q \wedge t) \equiv$

$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee t) \wedge p \wedge r \wedge (\neg q \vee \neg t)$

$S = \{ \underbrace{\neg p \vee q}_{C_1}, \underbrace{\neg r \vee t}_{C_2}, \underbrace{p}_{C_3}, \underbrace{r}_{C_4}, \underbrace{\neg q \vee \neg t}_{C_5} \}$

Nivel 0

$Res_p(C_1, C_3) = q = C_6$

$Res_q(C_1, C_5) = \neg p \vee \neg t = C_7$

$Res_r(C_2, C_4) = t = C_8$

$Res_t(C_2, C_5) = \neg r \vee \neg q = C_9$

Nivel 1

$S' = \{ \overset{C_6}{q}, \overset{C_7}{\neg p \vee \neg t}, \overset{C_8}{t}, \overset{C_9}{\neg r \vee \neg q} \}$

$Res_q(C_6, C_5) = \neg t = C_{10}$

$Res_q(C_6, C_9) = \neg r = C_{11}$

$Rez_t(C_7, C_2) = \neg p \vee \neg r = C_{12}$

$Rez_r(C_7, C_3) = \neg t = C_{10}$

$Rez_t(C_7, C_8) = \neg p = C_{13}$

$Rez_t(C_8, C_5) = \neg q = C_{14}$

$Rez_q(C_9, C_1) = \neg r \vee \neg p = C_{12}$

$Rez_r(C_9, C_4) = \neg q = C_{14}$

Nivel 2:

$S^2 = \{\overset{C_{10}}{\neg t}, \overset{C_{11}}{\neg r}, \overset{C_{12}}{\neg p \vee \neg r}, \overset{C_{13}}{\neg p}, \overset{C_{14}}{\neg q}\}$

$Rez_t(C_{16}, C_2) = C_{11}$

$Rez_t(C_{10}, C_8) = \square \xRightarrow{TCC} S$ inconsist $\Rightarrow$ are loc rel. de consecință logică

Curs 7

Rezoluția blocării

$\underset{(2)}{p} \vee \boxed{\underset{(1)}{q}}$, $\boxed{\underset{(3)}{\neg r}} \vee \underset{(4)}{q} \vee \underset{(5)}{r}$ nu rezolvă în această ordine

$\boxed{\underset{(5)}{s}} \vee \underset{(4)}{\neg t}$, $\boxed{\underset{(7)}{\neg q}} \vee \boxed{\underset{(6)}{\neg s}} \vee \underset{(8)}{\neg t}$ (rezolvă) $\vdash_{Rez}^{lock} \underset{(4)}{\neg t} \vee \underset{(7)}{\neg q}$

$4 = \min(4, 8)$

Dacă nu folosim strategia eliminării C_5 și C_6 pot fi folosite

$$Res_{p}^{block}(C_5, C_2) = \underset{(4)}{q} \vee \underset{(8)}{\neg p} = C_7$$

$$Res_q(C_7, C_4) = \underset{(8)}{\neg p} = C_8$$

$$Res_p(C_8, C_3) = \underset{(6)}{\neg q} = C_9$$

$$Res_q(C_9, C_1) = C_{10} = \underset{(2)}{p}$$

$$Res_p(C_{10}, C_8) = \square \overset{TCS}{\Longrightarrow} \text{inconsistentă}$$

Rez blocare + strateg. ~~supo~~ mulț. suport nu e completă

$C_1 = \underset{(1)}{r} \vee \underset{(2)}{\neg q} \vee \underset{(3)}{\neg p}$

$C_2 = \underset{(4)}{p} \vee \underset{(5)}{\neg s} \vee \underset{(6)}{\neg r}$

$C_3 = \underset{(7)}{s} \vee \underset{(8)}{\neg u}$

$C_4 = \underset{(9)}{\neg t} \vee \underset{(10)}{\neg u}$

$C_5 = \underset{(13)}{u}$

$Y = \{C_5, C_6, C_7\}$

~~Util~~ Utilizând strategia mulț. suport, nu putem

Fără strateg. mulț. suport

$$Res^{lock}(C_2, C_4) = \underset{(5)}{\neg s} \vee \underset{(6)}{\neg r} \vee \underset{(10)}{\neg u} = C_8$$

$$Res_{s}^{lock}(C_5, C_3) = \underset{(6)}{\neg r} \vee \underset{(8)}{\neg u} = C_9$$

$$Res_{r}^{lock}(C_1, C_9) = \underset{(2)}{\neg q} \vee \underset{(3)}{\neg p} \vee \underset{(8)}{\neg u} = C_{10}$$

$Res_q^{lock}(C_6, C_7) = \neg p \vee \neg r$

$Res_p^{lock}(C_8, C_5) = \underset{(8)}{\neg r} = C_9$

Rezoluția liniară

$S = \{\underset{C_1}{p \vee q}, \underset{C_2}{\neg p \vee q}, \underset{C_3}{p \vee \neg q}, \underset{C_4}{\neg p \vee \neg q}\}$

$\boxed{C_1 = \underline{p} \vee q}$ $\boxed{C_2 = \underline{\neg p} \vee q}$

$\boxed{C_5 = \underline{q}}$ $\boxed{C_3 = p \vee \underline{\neg q}}$

$\boxed{C_6 = \underline{p}}$ $\boxed{C_4 = \underline{\neg p} \vee \neg q}$

$\boxed{C_7 = \underline{\neg q}}$ $\boxed{C_5 = \underline{q}}$

$\boxed{C_8 = \square}$ $\xRightarrow{TCC}$ S inconsistentă

Cazuri particulare ale rezoluției liniare
- rezoluția unitară - cel puțin o clauză părinte unitară
- rezoluția de intrare (input): clauzele laterale sunt clauze inițiale.

Tabela de adev. :

FNC - tautologii

FND - consistența

$\boxed{\text{Temă } 9.2.13.7}$

9.2.13.7

Seminar 8

9.1.23. Dem. inconsistența următoarelor mulțimi de clause utilizând rezoluția blocării. Alegeți două indexări diferite pt. literalii din clause.

$$S = \{p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, r \vee q, \neg r \vee q\}$$

$C_1 = \underset{(1)}{p} \vee \underset{(2)}{\neg q}$

$C_2 = \underset{(3)}{\neg p} \vee \underset{(4)}{\neg q} \vee \underset{(5)}{r}$

$C_3 = \underset{(6)}{\neg p} \vee \underset{(7)}{\neg q} \vee \underset{(8)}{\neg r}$

$C_4 = \underset{(9)}{r} \vee \underset{(10)}{q}$

$C_5 = \underset{(11)}{\neg r} \vee \underset{(12)}{q}$

$C_6 = Res_p^{lock}(C_1, C_2) = \underset{(2)}{\neg q} \vee \underset{(5)}{r}$

$C_7 = Res_r^{lock}(C_4, C_5) = \underset{(10)}{q}$

$C_8 = Res_q^{lock}(C_6, C_7) = \underset{(5)}{r}$

$C_9 = Res_p^{lock}(C_1, C_3) = \underset{(2)}{\neg q} \vee \underset{(8)}{\neg r}$

$C_{10} = Res_q^{lock}(C_7, C_9) = \underset{(8)}{\neg r}$

$C_{11} = Res_r^{lock}(C_{10}, C_8) = \square \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S-inconsistentă

$S = \{ \ \ldots \ \}$

$C_1 = \underset{(11)}{\neg g} \lor \underset{(12)}{p}$

$C_2 = \underset{(5)}{\neg g} \lor \underset{(7)}{r} \lor \underset{(8)}{\neg p}$

$C_3 = \underset{(1)}{\neg g} \lor \underset{(2)}{\neg r} \lor \underset{(3)}{\neg p}$

$C_4 = \underset{(15)}{r} \lor \underset{(18)}{g}$

$C_5 = \underset{(21)}{g} \lor \underset{(22)}{\neg r}$

$C_6 = Res_{g}^{look}(C_1, C_5) = \underset{(12)}{p} \lor \underset{(22)}{\neg r}$

$C_7 = Res_{g}^{look}(C_3, C_5) = \underset{(2)}{\neg r} \lor \underset{(3)}{\neg p}$

$C_8 = Res_{r}^{look}(C_4, C_7) = \underset{(3)}{\neg p} \lor \underset{(18)}{g}$

$C_9 = Res_{p}^{look}(C_6, C_8) = \underset{(18)}{g} \lor \underset{(22)}{\neg r}$

~~[illegible]~~ $Res_{g}^{look}(C_1, C_9) = C_6$

$C_{10} = Res_{g}^{look}(C_2, C_5) = r \lor$

9.1.24. Constr. o respingere liniară din mult. de clauze. ∃ respingeri unit și input din S?

1. $S = \{C_1 = p,\ C_2 = q \vee r,\ C_3 = \neg p \vee q \vee \neg r,\ C_4 = \neg p \vee \neg q\}$

$C_1 = p$ $\qquad$ $C_3 = \neg p \vee q \vee \neg r$

$C_5 = q \vee \neg r$ $\qquad$ $C_2 = q \vee r$

$C_6 = q$ $\qquad$ $C_4 = \neg p \vee \neg q$

$C_7 = \neg p$ $\qquad$ $C_1 = p$

$C_8 = \square \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S - inconsistentă

Este o ~~resp~~ resp. liniară input, dar nu unit deoarece C_6 nu are nici un părinte clauză unitată.

deoarece toate clauzele lat. sunt inițiale (din S)

$C_1 = p$ $\qquad$ $C_4 = \neg p \vee \neg q$

$C_5 = \neg q$ $\qquad$ $C_2 = q \vee r$

$C_6 = r$ $\qquad$ $C_3 = \neg p \vee q \vee \neg r$

$C_7 = \neg p \vee q$ $\qquad$ $C_1 = p$

$C_8 = q$ $\qquad$ $C_5 = \neg q$

$C_9 = \square \overset{TCC}{\Longrightarrow}$ S - inconsistentă $\Rightarrow$ resp. liniară unit, dar nu și input

9.1.26. Dem. legea silogismului $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)) \overset{not}{\equiv} U$, utilizând o met. semantică și prin respingere

$\neg U = \neg((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$

Pas 1: $\equiv \neg(\neg(p \to q) \vee (\neg(q \to r) \vee (p \to r)))$

$\equiv \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg(\neg q \vee r) \vee (\neg p \vee r)))$

Pas 2 $\overset{DeMorgan}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge ((\neg q \vee r) \wedge \cancel{\neg(\neg p \vee r)}\ (p \wedge \neg r)) \equiv$

Pas 3 $\overset{asoc\ lui\ \wedge}{\equiv} (\neg p \vee q) \wedge \neg q \vee r \wedge (p \wedge \neg r) \equiv$

$\equiv (\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p \wedge \neg r \wedge r) \vee (q \wedge p \wedge \neg r \wedge \neg q)$

$\vee (q \wedge p \wedge \neg r \wedge r) \Rightarrow$ ~~U e taut.~~ FND cu 4 clauze inconsist.

$\Rightarrow$ U e validă (= tautologie)

Problemă:

ipoteze

p = "plouă"

s = "suflă vântul"

u = "ai umbrelă"

t = "uzi"

f = "e frig"

i = "este iarnă"

e = "este furtună"

n = "este neplăcut"

$e \to p \wedge s$

$p \wedge \neg u \to t$

$p \wedge u \wedge s \to t$

$i \to f$

$t \wedge f \to n$

Concluzie: $i \wedge e \to n$

Logica predicatelor

- În fiecare zi plouă • $(\forall x) P(x)$ (x - ziua)
- Mâine va ploua • $P(b)$ (b - mâine)
- Afară plouă $p = P(a)$ (a - azi)
- Acum o lună a plouat $P(f(a))$ ($f(x) := x - 30$)

$(\exists x)\, U(x) = \neg\neg(\exists x)\, U(x) = \neg(\forall x)\neg U(x)$

Ex. Transf. unor aff.

$D = \mathbb{N}$

$x, y (\in D)$ var

const

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$

$P: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \{T, F\}$ $P(x, y) = "x > y"$

$P(x, y) \longrightarrow P(f(x), f(y))$

Exercițiu $(\forall y) P(y) \overset{?}{\vdash} (\forall x)(Q(x) \to P(x))$

$f_1: (\forall y) P(y)$ ipoteză

$f_2: (\forall y) P(y) \to P(x)$ Axioma 4

$f_1, f_2 \vdash_{mp} f_3: P(x)$

$f_4: P(x) \to (Q(x) \to P(x))$

$f_3, f_4 \vdash_{mp} f_5: Q(x) \to P(x)$

$f_5 \vdash_{gen} f_6: (\forall x)(Q(x) \to P(x)) \Rightarrow f_1, \ldots, f_6$ este deducția lui $(\forall x)(Q(x) \to P(x))$ din $(\forall y) P(y)$

Exercițiu:

$U = (\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$

$I = \langle D, m \rangle$

$D =$ mulțimea studenților din această sală

$m(P): D \to \{T, F\}$ $m(P)(x) =$ "st. e băiat"

$m(Q): D \to \{T, F\}$ $m(Q)(x) =$ "st. e fată"

$v^I(U) = v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)) =$

$= v^I((\forall x)(P(x) \vee Q(x))) \to v^I((\forall x)P(x)) \vee v^I((\forall x)Q(x))$

= orice st. din sală este băiat sau fată →

→ orice st. din sală este băiat ∨ orice st. din sală este fată

$T \to F \vee F = T \to F = F \Rightarrow I$ este antimodel pt U

$I_2 = \langle D_2, m_2 \rangle$

$D_2 = \{Ana, Maria\}$

$m_2(P): D_2 \to \{T, F\}$; $m_2(P)(x) =$ "st. e băiat"

$m_2(Q): D_2 \to \{T, F\}$, $m_2(P)(x) =$ "st x e fată"

$v^{I_2}(U) = v^{I_2}((\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x))$

$= v^{I_2}((\forall x)P(x) \vee Q(x))) \to v^{I_2}((\forall x)P(x)) \vee v^{I_2}((\forall x)Q(x))$

$= (m_2(P)(Ana) \vee m_2(Q)(Ana)) \wedge (m_2(P)(Maria)$

$\vee m_2(Q)(Maria)) \to m_2(P)(Ana) \wedge m_2(P)(Maria)) \vee$

$(m_2(P)(Ana) \wedge m_2(P)(Maria)) \vee (m_2(Q)(Ana) \wedge m_2(Q)(Maria)$

$= (F \vee T) \wedge (F \vee T) \to (F \wedge F) \vee (T \wedge T) = T \wedge T \to F \vee T = T \to F$

$= T \Rightarrow I_2$ e model $\Rightarrow U$ consistentă și nu e tautol. $\Rightarrow U$ contingentă

Ex. Forma normală Skolem

$(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\exists t)(\forall s)(\exists u)\, P(x, y, z, t, s, u)$

$x \leftarrow a$

$y \leftarrow b$

$t \leftarrow f(z)$

$u \leftarrow g(z, s)$

$(\forall z)(\forall s)\, P(a, b, z, f(z), s, g(z, s))$

Ex. $U = (\forall \cancel{x})(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x) P(x) \vee (\forall \cancel{x}) Q(x)$

P_1: $\not\rightarrow$ $U \equiv \neg(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \vee (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$

P_2: DM $U \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall x) P(x) \vee (\forall x) Q(x)$

P_3: Redenumim: $U \equiv (\exists x)(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (\forall y) P(y) \vee (\forall z) Q(z)$

P_4: Extragem în față cuantificatorii

$U^P \equiv (\exists x)(\forall y)(\forall z)((\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee P(y) \vee Q(z))$

P_5: SK $x \leftarrow a$ $U^S \equiv (\forall y)(\forall z)((\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee P(y) \vee Q(z))$

P_6: $\cancel{\forall}$ $(\neg P(a) \wedge \neg Q(a)) \vee P(y) \vee Q(z)$

P_7: Distrib. : U^C $(\neg P(a) \vee P(y) \vee Q(z)) \wedge (\neg Q(a) \vee P(y) \vee Q(z))$

Dacă A este din S at. A este deduct din S.

Tabele semantice.

- clasa γ pt. cuant. univ

reg. gama înainte de ale δ

$$\overset{?}{\models} (\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \to (\exists x) A(x) \wedge (\exists x) B(x)$$

$$\neg\big((\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \to (\exists x) A(x) \wedge (\exists x) B(x)\big) \quad (1) \checkmark$$

$\mid$ α pt (1)

$$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \quad (2)$$

$\mid$

$$\neg\big((\exists x) A(x) \wedge (\exists x) B(x)\big) \quad (3)$$

Implicația inversă nu are loc

9.2.13. 7 $\vdash (\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)p(x)$

$\neg((\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x))) \Leftrightarrow (\exists x)p(x)$ (1)

$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$\neg((\exists x)p(x) \rightarrow (\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x)))$ (1) ✓

| α pt. 1

$(\exists x)p(x)$ (2) ✓

|

$\neg((\exists x)p(x) \vee (\exists x)(p(x) \wedge q(x)))$ (3) ✓

| δ pt. 2 a constantă nouă

$p(a)$

| α pt. 3

$(\forall x)\neg p(x)$ (4) ✓

|

$\neg((\exists x)(p(x) \wedge q(x)))$ (5)

| δ pt. 4 a cst. existentă

$\neg p(a)$

|

$(\forall x)\neg p(x)$ – copie după 4

$\otimes$

$\overset{TCC}{\Longrightarrow}$ U_2 – teoremă

α $\wedge$

$A \wedge B$
A
B

$\neg(A \vee B)$
$\neg A$
$\neg B$

$\neg(A \to B)$
A
$\neg B$

β $\vee$

$A \vee B$
$A \quad B$

$\neg(A \wedge B)$
$\neg A \quad \neg B$

$A \to B$
$\neg A \quad B$

α $\wedge$

$A \wedge B$
A
B

$\neg(A \to B)$
A
$\neg B$

$\neg(A \vee B)$
$\neg A$
$\neg B$

β $\vee$

$A \vee B$
$A \quad B$

$\neg(A \wedge B)$
$\neg A \quad \neg B$

$A \to B$
$\neg A \quad B$

Seminar

9.2.2. Transformați

7. Ușile oricărui lift ar trebui să se deschidă doar dacă liftul este oprit exact la un etaj

D = mulțimea tuturor lifturilor

$P(x)$ = "x este oprit la un etaj"

$Q(x)$ = "x are ușile deschise"

$$(\forall x)(\cancel{(P(x) \rightarrow Q(x))} \wedge (Q(x) \rightarrow P(x)))$$

9.2.3. Să se evalueze form. urm în:

7. $U = (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$

$I_1 = \langle D_1, m_1 \rangle$

D_1 – mult. tuturor mașinăriilor

$m_1(P): D_1 \rightarrow \{T, F\}$, $m_1(P)(x)$ = "x are nevoie de o sursă de energie pt. a funcționa"

$m_1(Q): D_1 \rightarrow \{T, F\}$, $m_1(Q)(x)$ = "x este un perpetum mobile"

$$v^{I_1}(U) = v^{I_1}((\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)) =$$

$$= v^{I_1}((\exists x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^{I_1}((\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)) =$$

$$= v^{I_1}((\exists x)(P(x) \vee Q(x))) \rightarrow v^{I_1}((\exists x) P(x)) \wedge v^{I_1}((\exists x) Q(x)) =$$

= "există x o mașinărie care are nevoie de o sursă de energ pt. a funcționa sau este un perpetum mobile" →

→ "există o mașinărie care are nevoie de o sursă de energ. pt a funct." ∧ "∃ un perpetum mobile" $= T \rightarrow T \wedge F =$

$= T \wedge F = F \Rightarrow I_1$ este antimodel

• $I_2 = \langle D_2, m_2 \rangle$

$D_2 = \{ Sami, Katy \}$

$m_2(P) : D_2 \to \{T, F\}$, $m_2(P)(Sami) = T$, $m_2(P)(Katy) = F$

$m_2(Q) : D_2 \to \{T, F\}$, $m_2(Q)(Katy) = F$, $m_2(Q)(Sami) = T$

$v^{I_2}(U) = v^{I_2}((\exists x)((P(x) \vee Q(x)) \to v^{I_2}((\exists x) P(x)) \wedge v^{I_2}((\exists x) Q(x))$

$= ((m_2(P)(Sami) \vee m_2(Q)(Sami)) \vee$

$\vee (m_2(P)(Katy) \vee m_2(Q)(Katy))) \to$

$\to (m_2(P)(Sami) \vee m_2(P)(Katy)) \wedge (m_2(Q)(Sami) \vee m_2(Q)(Katy)))$

$= ((T \vee T) \vee (T \vee F)) \to ((T \vee F) \wedge (T \vee F)) =$

$= T \vee F \to T \wedge F = T \to T = T \Rightarrow I_2$ model $\Rightarrow$

$\Rightarrow U$ contingentă

9.2.14.7. Utilizând met. tabelelor semantice, verificați:

7. $\vdash (\exists y)(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)P(x,y) = U$

U este teoremă $\Leftrightarrow$ U_1 și U_2 sunt teoreme

$\neg U_1 = \neg((\exists y)(\exists x)P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y))$ (1) ✓

| α pt. 1

$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$ (2) ✓

|

$\neg(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ (3) ✓

| δ pt. 2 a cst nouă

$(\exists x)P(x,a)$ (4) ✓

| δ pt. (4) b cst. nouă

$P(b,a)$

| δ la 3 c cst nouă

$\neg(\exists y)P(c,y)$ (5)

| γ la 5 a, b, c - cst existente

$\neg P(c,a)$

|

$\neg P(c,b)$

|

$\neg P(c,c)$

|

$\neg(\exists y)P(c,y)$ - copia lui 5.

⊙

$\overset{T.cc}{\Rightarrow}$ U_1 nu e teoremă $\Rightarrow$ U nu e teoremă

Seminar

9.2.7.7. Aduceți la o formă normală prenexă și la o formă normală clauzală

$U = (\forall x)(\forall y)((\exists z)P(z) \land (\exists u)(Q(x,u) \to (\forall z)Q(y,z)))$

Pas 1: Înlocuiesc $\to$ și $\leftrightarrow$

$U = (\forall x)(\forall y)((\exists z)P(z) \land (\exists u)(\neg Q(x,u) \lor (\forall z)Q(y,z)))$

Pas 2: Legile lui De Morgan - nu e cazul

Pas 3: Redenumirea var. legate a.î. să nu se repete:

$U = (\forall x)(\forall y)((\exists z)P(z) \land (\exists u)(\neg Q(x,u) \lor (\forall w)Q(y,w)))$

Pas 4: atrag cuantif. în față

$U^{P} = (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists u)(\forall w)(P(z) \land (\neg Q(x,u) \lor Q(y,w)))$

Pas 5: elimin cuantif. existențiali: $z \leftarrow f(x,y)$, $u \leftarrow g(x,y)$

$U^{S} = (\forall x)(\forall y)(\forall w)(P(f(x,y)) \land (\neg Q(x,g(x,y)) \lor Q(y,w)))$

Pas 6: elimin cuantif. univ.

$U^{Sg} = P(f(x,y)) \land (\neg Q(x,g(x,y)) \lor Q(y,w))$

Pas 7: aduc la FNC, nu e cazul

$U^{C} = P(f(x,y)) \land (\neg Q(x,g(x,y)) \lor Q(y,w))$

9.2.6.7. Constr. toate formele normale prenexe, Skolem, clauzale

$U = (\forall z)\neg((\forall y)P(y) \land (\exists y)(\neg Q(z) \to R(y)))$

Pas 1: $U = (\forall z)\neg((\forall y)P(y) \land (\exists y)(Q(z) \lor R(y)))$

Pas 2: $U = (\forall z)((\exists y)\neg P(y) \lor (\forall y)(\neg Q(z) \land \neg R(y)))$

Pas 3

$U = (\forall z)((\exists y)\neg P(y) \lor (\forall x)(\neg Q(z) \land \neg R(x)))$

Pas 4: $U^{P_1} = (\forall z)(\exists y)(\forall x)(\neg P(y) \lor (\neg Q(z) \land \neg R(x)))$

$U^{P_2} = (\forall z)(\forall x)(\exists y)(\neg P(y) \lor (\neg Q(z) \land \neg R(x)))$

Pas 5:

$[y \leftarrow f(z)]: U^{S_1} = (\forall z)(\forall x)(\neg P(f(z)) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg R(x)))$

$[y \leftarrow g(z,x)]: U^{S_2} = (\forall z)(\forall x)(\neg P(g(z,x)) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg R(x)))$

Pas 6:

$U^{Sg_1} = \neg P(f(z)) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg R(x))$

$U^{Sg_2} = \neg P(g(z,x)) \vee (\neg Q(z) \wedge \neg R(x))$

Pas 6: aplic distrib. lui $\vee$ față de $\wedge$

$U^{C_1} = (\neg P(f(z)) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg P(f(z)) \vee \neg R(x))$

$U^{C_2} = (\neg P(g(z,x)) \vee \neg Q(z)) \wedge (\neg P(g(z,x)) \vee \neg R(x))$

3.2.8. Sunt unificabili atomii din perechile următoare? Dacă da, identificați cel mai general unificator (mgu)

$A_1 = P(a, x, g(g(y)))$ și $A_2 = P(y, f(z), f(z))$

1. Același simbol predicativ? ✓(P)

2. Aceeași aritate? ✓(3)

3. $\lambda_1 = [y \leftarrow a]$

$\lambda_1(A_1) = P(a, x, g(g(a)))$

$\lambda_1(A_2) = P(a, f(z), f(z))$

$\lambda_2 = [x \leftarrow f(z)]$

$\lambda_2(A_1) = P(a, f(z), \underline{g}(g(a)))$ } nu se pot ⇒ substitui 2 funcții

$\lambda_2(A_2) = P(a, f(z), \underline{f}(z))$

A_1 și A_2 nu sunt unificabili

$A_5 = P(a, x, g(g(y)))$ și $A_6 = P(z, h(z, u), g(u))$

1. Simbol pred. ✓ (P)

2. Aceeași aritate ✓ (3)

3. $\theta_1 = [z \leftarrow a]$

$\theta_1(A_5) = P(a, x, g(g(y)))$

$\theta_1(A_6) = P(a, h(z, u), g(u))$

$\theta_2 = [x \leftarrow h(z, u)]$

$\theta_2(\theta_1(A_5)) = P(a, h(z, u), g(g(y)))$

$\theta_2(\theta_1(A_6)) = P(a, h(z, u), g(u))$

$\theta_3 = [u \leftarrow g(y)]$

$\theta_3(\theta_2(\theta_1(A_5))) = P(a, h(z, u), g(g(y)))$

$\theta_3(\theta_2(\theta_1(A_6))) = \nearrow$

$mgu(A_5, A_6) = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3 = [z \leftarrow a, x \leftarrow h(z, g(y)), u \leftarrow g(y)]$

9.2.16. Verif. dacă urm. formulă e teoremă:

7. $((\forall x) P(x) \to (\forall x) Q(x)) \to (\forall x)(P(x) \to Q(x)) \overset{not}{=} \mathcal{U}$

$A \vee l_1, B \vee \neg l_2 \vdash_{Rez.} \theta(A) \vee \theta(B)$

$\exists \theta = mgu(l_1, l_2)$

$\Rightarrow S = \{\underbrace{\neg P(a) \vee Q(x)}_{C_1}, \underbrace{P(b)}_{C_2}, \underbrace{\neg Q(b)}_{C_3}\}$

Rez. $Q, [x \leftarrow b]\ (C_1, C_3) = \neg P(a) = C_4$

$\overset{TCC}{\Rightarrow}$ S nu e inconsistentă $\Rightarrow$ U nu e teoremă

9.2.21. Utilizând rezol. generală, verif dacă formulele urm. sunt sau nu teoreme.

$$(\forall y)(\forall x)\, P(x,y) \Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\, P(x,y) \overset{not.}{=} U$$

$$U_1 \overset{not.}{=} (\forall y)(\forall x)\, P(x,y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)\, P(x,y)$$

$$U_2 \overset{not.}{=} (\forall x)(\exists y)\, P(x,y) \rightarrow (\forall y)(\forall x)\, P(x,y)$$

$$\neg U_2^c \Rightarrow S = \{ P(x, f(x)), \neg P(g(s), h(s)) \}$$

Se obs. că f și h nu se pot substitui $\Rightarrow$ nu putem obț. clauza vidă $\Rightarrow$ S inconsist. $\Rightarrow U_2$ nu e teoremă $\Rightarrow$ U nu e teoremă

9.2.15. ~~7~~ Dem inc. urm. mult. de clauze utilizând rez. blocării (2 idx dif)

$$S = \{ \underset{(1)}{P(x)} \vee \underset{(2)}{Q(x)}, \neg \underset{(3)}{P(x)}, \neg \underset{(4)}{Q(f(a))} \vee \underset{(5)}{R(z)}, \neg \underset{(7)}{W(z)}, \neg \underset{(6)}{R(y)} \vee \underset{(8)}{W(y)} \}$$

$$C_1 = \underset{(1)}{P(x)} \vee \underset{(2)}{Q(x)}$$

$$C_2 = \neg P(x)$$

$$C_3 = \neg Q(f(a)) \vee R(z)$$

$$C_4 = \neg W(z)$$

$$C_5 = \neg R(y) \vee W(y)$$

$$Rez^{lock}_{P}(C_1, C_2) = \underset{(2)}{Q(x)} = C_6$$

$$Rez^{lock}_{Q,[x \leftarrow f(a)]}(C_3, C_6) = \underset{(5)}{R(z)} = C_7$$

$Res^{lock}_{R_1,[x \leftarrow y]}(C_5, C_7) = \underset{(8)}{W(y)} = C_8$

$Res^{lock}_{W,[y \leftarrow z]}(C_4, C_8) = \square \overset{TCC}{\Rightarrow} S$ inconsistentă

9.2.20.7. Verif. urm. echivalenţă utilizând o strateg./rafinare a rez. predicative:

$(\exists y)(\exists x)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y) \overset{not.}{=} U$

$U_1 = (\exists y)(\exists x)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

$U_2 = (\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

$\neg U_1^c \Rightarrow S = \{P(a,b), \neg P(x, f(x))\}$ nu se poate substitui o funcţie cu o constantă $\Rightarrow$ lit. nu sunt unificabili $\Rightarrow$ nu se poate det. $\square \Rightarrow S$ consistentă $\rightarrow U_1$ nu e teoremă $\rightarrow U$ nu e teoremă

9.2.18. Să se dem. deductiile urm. utilizând o strategie/rafinare a rezoluţiei:

$\overset{U_1}{(\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))}, \overset{U_2}{(\forall y)(P(y) \rightarrow Q(y))}, \overset{U_3}{P(a)},$

$\underset{U_4}{\neg R(c)} \vdash \underset{V}{(\exists z)Q(z)}$

$U_1^c, U_2^c, U_3^c, U_4^c, \neg V^c \Rightarrow S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

$C_1 = \underset{(1)}{\neg P(x)} \vee \underset{(2)}{R(x)}$

$C_2 = \underset{(3)}{\neg P(y)} \vee \underset{(4)}{Q(y)}$

$C_3 = \underset{(5)}{P(a)}$

$C_4 = \underset{(6)}{\neg R(c)}$

$C_5 = \underset{(7)}{\neg Q(z)}$

$C_6 = Res^{lock}_{r,[y \leftarrow a]}(C_2, C_3) = \underset{(4)}{Q}(a)$

$C_7 = Res^{lock}_{q,[z \leftarrow a]}(C_5, C_6) = \square \xrightarrow{T.C.C.} S$ inconsistentă $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ are loc deducția.

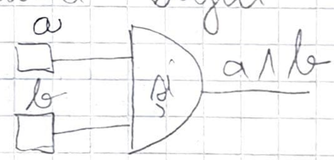
<u>Obs:</u> $P(x) \vee R(y) \vee P(a) \vdash_{fact,[x \leftarrow a]} P(a) \vee R(y)$

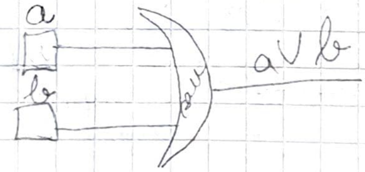
Seminar 14.

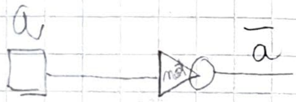
9.3.8. Desenați circuitul logic al funcției booleene de mai jos, simplificați funcția și desenați circuitele logice corespunzătoare tuturor formelor simplificate utilizând doar porți de bază.

7. $f(x,y,z) = x(y \oplus \bar{z}) \vee y(\bar{x} \oplus z) \vee x(y \downarrow z) \vee (x \downarrow y)\bar{z}$

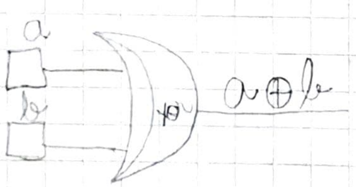
circuitele logice de bază:

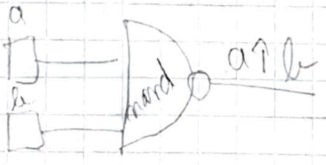


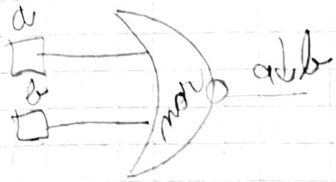




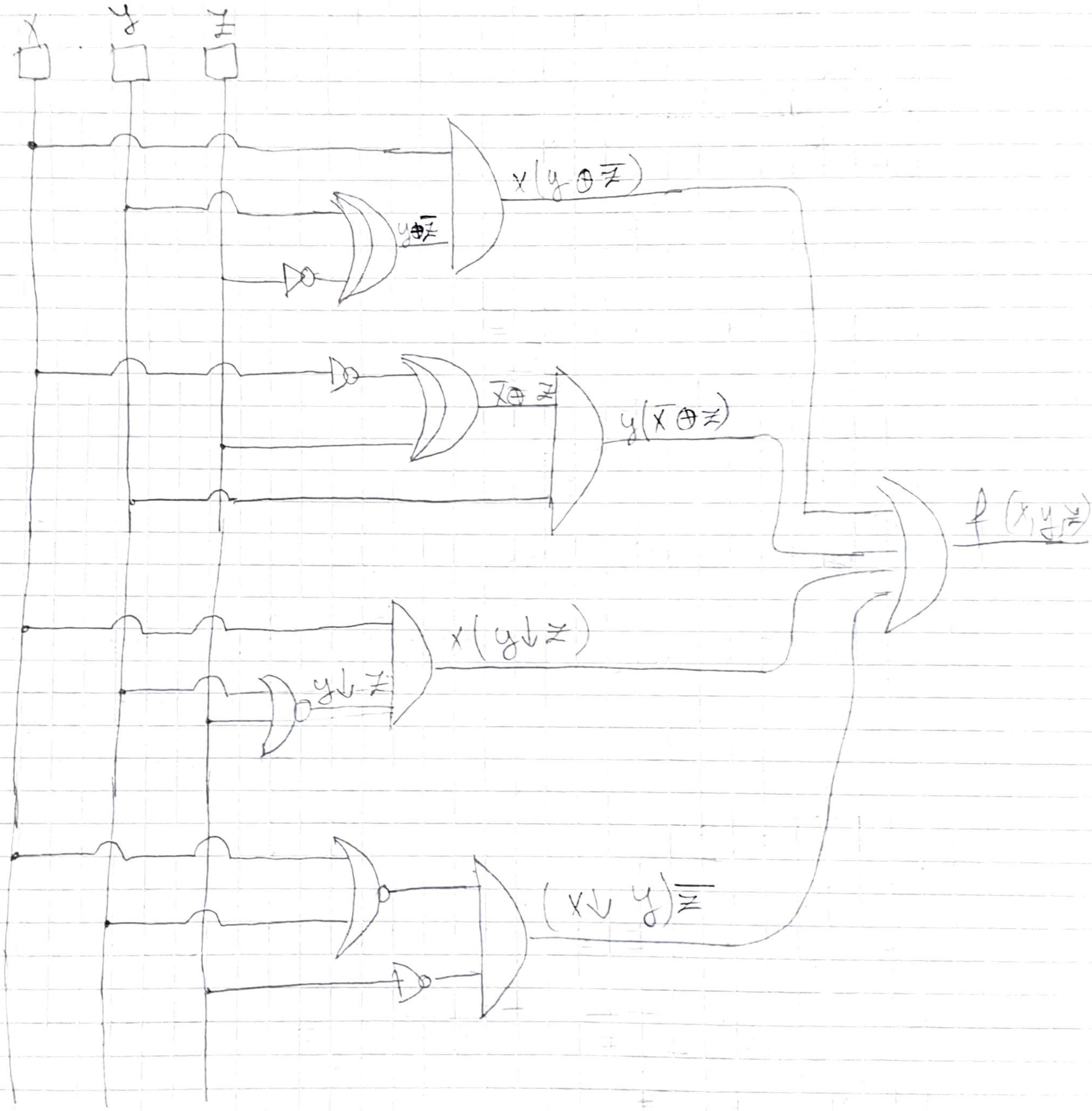
circuitele logice derivate







Rezolvare:



$$a \oplus b = \overline{a \leftrightarrow b} = \overline{(a \to b) \wedge (b \to a)} = \overline{(a \to b)} \vee \overline{(b \to a)}$$

$$= \overline{(\bar a \cup b)} \vee \overline{(\bar b \vee a)} = a\bar b \cup b\bar a$$

$$a \downarrow b = \overline{a \cup b} = \bar a\, \bar b$$

$$A = x(y \oplus \bar z) = x(y z \vee \bar y \bar z) = \underline{xyz \vee x\bar y \bar z}$$

$$B = y(\bar x \oplus z) = y(\bar x \bar z \vee x z) = \bar x y \bar z \vee \underline{xyz}$$

$$C = x(y \downarrow z) = x(\bar y \bar z) = \underline{x \bar y \bar z}$$

$D = (x \downarrow y)\bar{z} = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$

$f(x,y,z) = xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = m_7 \vee m_4 \vee m_2 \vee m_0$

Diagrama Karnaugh

x \ yz	00	01	11	10
0	m_0			m_2
1	m_4		m_7	

$max_1 = m_0 \vee m_4 = \bar{y}\bar{z}$

$max_2 = m_0 \vee m_2 = \bar{x}\bar{z}$

$max_3 = m_7 = xyz$

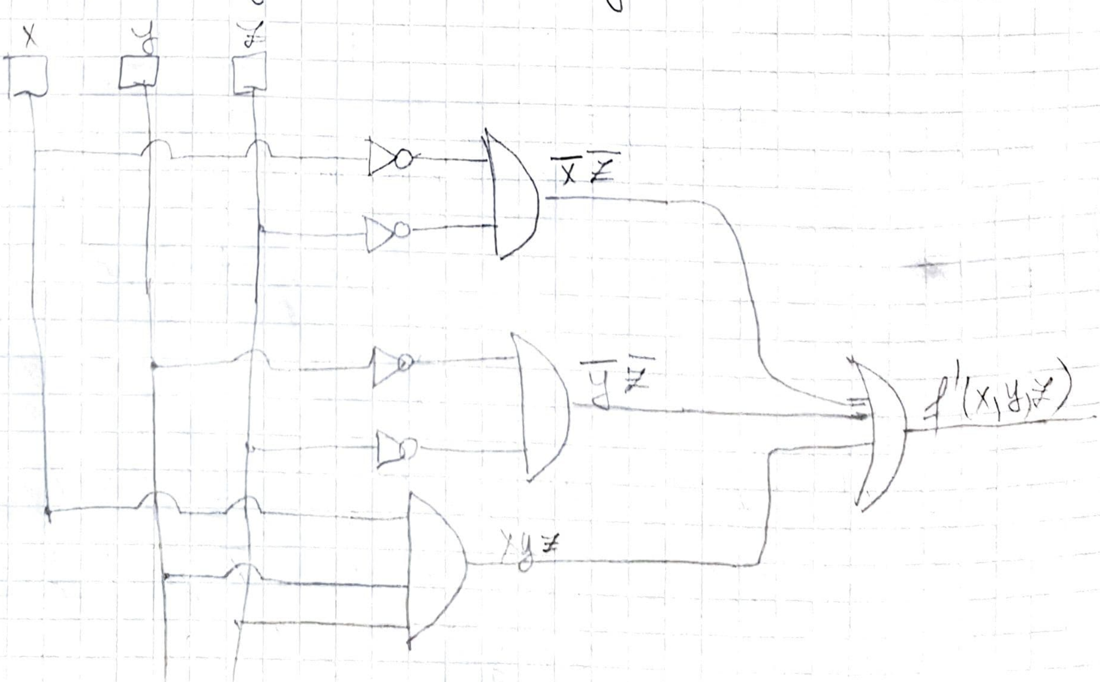
$M(f) = \{max_1, max_2, max_3\}$

$C(f) = \{max_1, max_2, max_3\}$ (pt. că au un minterm pe care nu-l împart cu niciun altul)

$M(f) = C(f)$

$\rightarrow f'(x,y,z) = max_1 \vee max_2 \vee max_3$

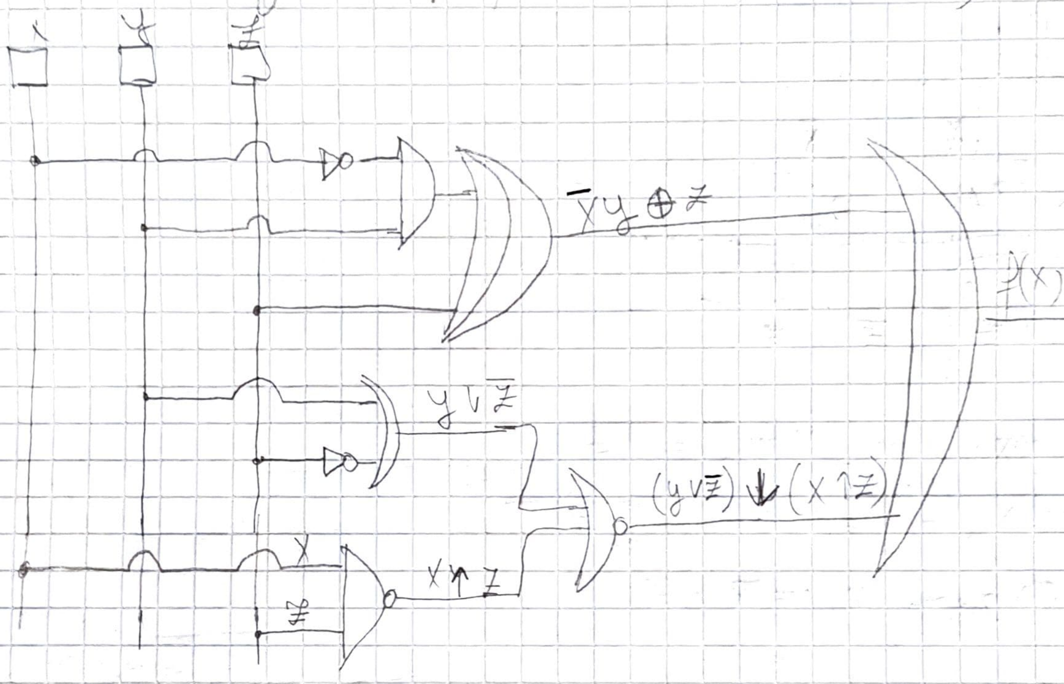
$f'(x,y,z) = \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z} \vee xyz$



9.3.9. Desenați un circuit logic având 3 var. de intrare și conținând toate porțile de bază și derivate. Scrieți fct-a booleană corespunzătoare și simplificați-o, iar apoi desenați un circuit logic simplificat.

$\bar{x} = 0$

$\bar{x} = 1$



$$f(x,y,z) = (\bar{x}y \oplus z) \vee ((y \vee \bar{z}) \downarrow (x \uparrow z))$$

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{z}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}y \oplus z$ (A)	$y \vee \bar{z}$	$x \uparrow z$	$(y \vee \bar{z}) \downarrow (x \uparrow z)$ (B)	A∨B
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1 m_1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1 m_2
0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1 m_5
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1 m_7

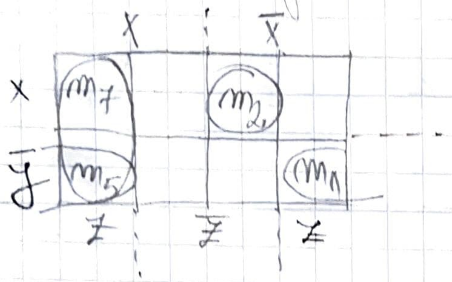
$m_1 = \bar{x}\bar{y}z$

$m_2 = \bar{x}y\bar{z}$

$m_5 = x\bar{y}z$

$m_7 = xyz$

Metoda diagramelor Veitch



$max_1 = m_7 \vee m_5 = xz$

$max_2 = m_5 \vee m_1 = \bar{y}z$

$max_3 = m_2 = \bar{x}yz$

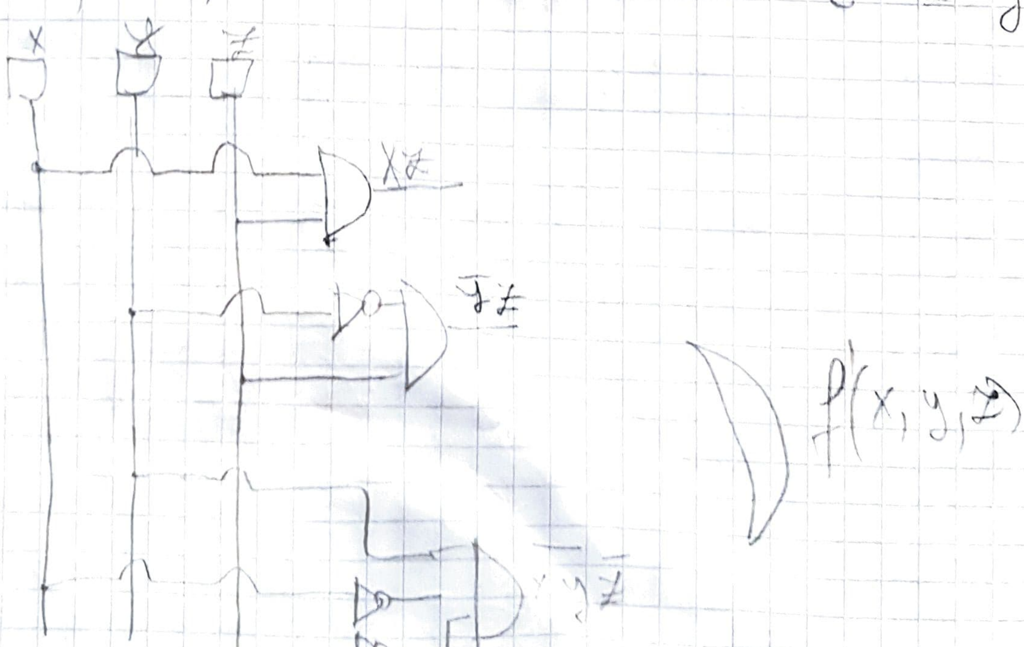
$M(f) = \{max_1, max_2, max_3\}$

! Porculețul e mort

$C(f) = \{max_1, max_2, max_3\}$

$M(f) = C(f) \Rightarrow$ caz 1

$\Rightarrow f'(x,y,z) = max_1 \vee max_2 \vee max_3 = xz \vee \bar{y}z \vee \bar{x}yz$



1) $r \to p \lor q,\ p \lor \neg q,\ \neg r \lor \neg p \lor q \models r \to p \land q$

$(r \to p \lor q) \land (p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg p \lor q) \land (\neg(r \to p \land q)) \equiv$

$(\neg r \lor p \lor q) \land (p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg p \lor q) \land (r \land \neg p \lor \neg q) \equiv$

$\equiv (\neg r \lor p \lor q) \land (p \lor \neg q) \land (\neg r \lor \neg p \lor q) \land r \land (\neg p \lor \neg q)$

$S = \{\underbrace{\neg r \lor p \lor q}_{C_1}, \underbrace{p \lor \neg q}_{C_2}, \underbrace{\neg r \lor \neg p \lor q}_{C_3}, \underbrace{r}_{C_4}, \underbrace{\neg p \lor \neg q}_{C_5}\}$

$C_6 = Res_p(C_2, C_5) = \neg q$

$C_7 = Res_p(C_1, C_3) = \neg r \lor q$

$C_8 = Res_q(C_6, C_7) = \neg r$

$C_9 = Res_r(C_8, C_4) = \square \Rightarrow S$ inconsistentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ are loc consecința logică

---

2) $S = \{\underbrace{\neg p \lor q \lor r}_{C_1}, \underbrace{\neg p \lor q}_{C_2}, \underbrace{p \lor q \lor \neg r}_{C_3}, \underbrace{\neg p \lor \neg q}_{C_4}, \underbrace{p \lor \neg q}_{C_5}\}$

$C_6 = Res_p(C_4, C_5) = \neg q$

$C_7 = Res_p(C_1, C_3) = q \lor r \lor \neg r = q$

$C_8 = \neg q \lor q = \square \Rightarrow$ inconsist.

3)

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0	m_0	[illegible]	m_3	m_2
1	m_4	m_5		m_6

	x		$\bar{x}$	
y		m_6	m_2	m_3
$\bar{y}$	m_5	m_4	m_0	[illegible]
	z		z	z

$max_1 = m_0 \lor m_4$

$max_2 = m_4 \lor m_5$

$max_3 = m_4 \lor m_5$

$max_4 = m_3 \lor m_2$

$max_5 = m_2 \lor m_0$