SEMINAR 2

① Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare față, apoi e împărțit în 1000 de cubulețe de aceleași dimensiuni. Un cubuleț este ales aleator. Calculați probabilitatea:

a) A: „cubul are exact 3 fețe vopsite"

$P(A) = \frac{8}{1000}$ → colțuri

b) B: „cubul are exact 2 fețe vopsite"

10^3 cuburi total → 10^2 pe o față → 10 pe o latură

$8 \cdot 12 = 96 \Rightarrow P(B) = \frac{96}{1000}$

8 → fără colțuri; 12 → muchii

c) C: „cubul are exact o față vopsită"

$P(C) = \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{1000} = \frac{64}{100}$ (6 → fețe)

d) D: „cubul nu are nicio față vopsită"

$P(D) = \frac{8^3}{1000}$ sau $1 - P(A) - P(B) - P(C)$

practic un cub mai mic

② Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând pt. fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20. Care e prob. ca prima pers. din listă să primească 5 email-uri?

$f: \{m_1, \dots, m_{10}\} \to \{p_1, \dots, p_{20}\} \Rightarrow 20^{10}$ funcții se pot defini, C_{10}^{5} → email-uri ce pot fi trimise

mai rămân 5 email-uri de trimis la celelalte persoane (19^5 funcții)

$\Rightarrow P(E) = \frac{C_{10}^{5} \cdot 19^5}{20^{10}}$

③ Presupunem că data nașterii unei pers. alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleași șanse. Care e prob. ca:

a) dintr-un grup de 5 persoane să fie minim 2 care își serbează zilele de naștere în aceeași lună?

b) într-un grup de 5 persoane zilele de naștere sunt serbate în cel mult 2 luni? → aka 1 sau 2

a) B: „în grup fiecare pers. e născută în lună diferită"

$P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5}$

12 → alegeri pt. prima pers., apoi scade

12^5 → de la persoane la luni funcții

b) $f: \{p_1, \dots, p_5\} \to \{l_1, l_2\} \Rightarrow 2^5 - 2$ (2 e cazul în care toate-s în l_1 sau toate-s în l_2)

$\frac{C_{12}^{1} + C_{12}^{2}(2^5 - 2)}{12^5}$

alegem o lună din 12

12^5 → total posibilități persoane → luni

④ La un concurs de șah participă 5 băieți și 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care e prob. ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

b_1 _ b_2 _ b_3 _ b_4 _ b_5 _ 5! (permutăm fetele) → cazuri favorabile

totalul perechilor:

1. C_{10}^2
2. C_8^2
⋮
5. C_2^2

înmulțirea lor e totalul perechilor $\Rightarrow \dfrac{5!}{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot \ldots \cdot C_2^2}$

⑤ 5 bile numerotate consecutiv de la 1 la 5 sunt așezate orizontal în mod aleator. Determinați

a) prob. ca prima și ultima să aibă numere pare: sunt 2 nr. pare

$\_\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{3!}\ \_ \Rightarrow \dfrac{3! \cdot 2}{5!}$ → moduri de așezare al celor pare

b) prob. ca primele 2 să aibă nr. impare

$\_\ \_\ \underbrace{\_\ \_\ \_} \Rightarrow \dfrac{A_3^2 \cdot 3!}{5!}$

c) prob. ca bilele cu numere pare să fie alăturate

permutăm practic 4 entități $\Rightarrow \dfrac{2 \cdot 4!}{5!}$ (2 pt. că se permută alea pare)

d) prob. ca cel puțin 2 bile alăturate să aibă aceeași paritate

$\overline{D}$: „niciuna nu are acc. paritate" i p i p i apoi le permutăm pare-pare imp-imp

$\Rightarrow P(D) = 1 - \dfrac{2! \cdot 3!}{5!}$

⑥ 9 persoane se îmbarcă aleator într-un tren cu 3 vagoane. Calc. prob. ca:

a) în primul vagon să fie exact 3 persoane

$f: \{p_1, \ldots, p_9\} \to \{v_1, v_2, v_3\} \Rightarrow 3^9$ funcții $f: \{p_1, \ldots, p_6\} \to \{v_2, v_3\} \Rightarrow 2^6$ funcții (restul pers

moduri de a alege 3 pers. → $\dfrac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9}$ → moduri de plasare pt. restul

b) în fiecare vagon să fie 3 persoane

$\dfrac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9}$

c) într-un vagon să fie o persoană, iar în celelalte 2 câte 4

$$\frac{C_9^1 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3^9}$$

3^9

d) în fiecare vagon să fie minim o persoană (încercăm să negăm $\frac{total - nefav}{totale}$)

cel puțin un vagon e gol

$\{p_1, \dots, p_9\} \to \{v_1, v_2\} \Rightarrow 2^9$ funcții $\cdot 3$ (pt. că fiecare poate fi gol la rândul lui)

$3 \to 1,2$
$2 \to 1,3$ (intră de 2 ori fiecare gol)
$1 \to 2,3$ $\Rightarrow$ scădem

$$\Rightarrow \frac{3^9 - (3 \cdot 2^9 - 3)}{3^9}$$

se repetă

3 vagoane

⑦ Un alfabet are 21 consoane și 5 vocale. În câte moduri se pot alege 6 litere a.î. să fie 4 consoane distincte și 2 vocale distincte? dacă:

a) nu se ia în considerare ordinea lor $C_{21}^4 \cdot C_5^2$

b) se ia în considerare ordinea lor

$A_{21}^4 \cdot A_5^2 \cdot A_5^2$

↳ 5 poz de inserat vocale printre consoane

⑧ La o petrecere sunt 8 femei și 8 bărbați. Ana și Vlad sunt în acest grup. Cele 16 persoane se așează aleator pe 16 fotolii într-un rând.

a) Care e probabilitatea ca 2 bărbați și 2 femei să nu stea alături?

16! → cazuri totale

pot fi bfbf... sau fbfb... și apoi permutăm $\Rightarrow \frac{2 \cdot 8! \cdot 8!}{16!}$

b) Prob. ca 2 bărbați și 2 femei să nu stea alături și Ana și Vlad să stea alături?

bfbfb

↳ Vlad e în stânga sau dreapta

fbfbf

↳ Vlad e în stânga sau dreapta

pe ei îi fac o entitate și îi permut pe restul

$$\frac{2 \cdot 15 \cdot 7! \cdot 7!}{16!}$$

entități totale

de permutat restul

⑨ Det. în câte moduri se pot împărți urm. fructe la copii: nu din formulă sunt obiectele distincte!

a) 5 banane $\to C_{3+5-1}^{2 \text{ sau } 5}$ (combinări cu repetiție)

$$C_{m+k-1}^{k} = C_{m+k-1}^{m-1}$$

b) 5 banane și 3 portocale $\to C_7^2 \cdot C_5^2$

copii sunt m și fructele k

c) o banană, o portocală, o pară, un măr și un kiwi $\to 3^5$

d) 5 banane, 3 portocale și 4 pere $\to C_7^2 \cdot C_5^2 \cdot C_6^2$