SEMINAR 3

① Un patron deține 3 magazine (m_1, m_2, m_3), care au 50, 75, 100 de angajați, din care 50%, 60%, 70% sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pt. un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul să lucreze la m_3, știind că acesta e bărbat?

$P(\text{„angajatul să lucreze la } m_3\text{"} \mid \text{„angajatul este bărbat"}) = \frac{30}{85}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ -> probabilitate condiționată

85 bărbați în total

30 lucrează la m_3

$P(A|B) = \frac{\text{nr. cazuri fav. lui } A \cap B}{\text{nr. total cazuri pt. apariția } B}$

② O persoană are în buzunar 2 zaruri roșii, 3 albastre și alege aleator unul. Dacă a ales un zar roșu, atunci aruncă zarul de 3 ori, dacă a ales un zar albastru atunci aruncă de 2 ori. Calculați probabilitatea ca suma punctelor să fie 10.

practic: $P(E) = \frac{2}{5} \cdot \frac{27}{6^3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6^2}$

-> moduri de a lua nr. de la 1 la 6 să dea 10

-> total comb.

roșii din 5 zaruri

teoretic: $P(S) = P(S|A) \cdot P(A) + P(S|R) \cdot P(R)$ - formula probabilității totale

R: „zarul e roșu" A: „zarul e albastru" S: „suma e 10"

$R \cup A = \Omega$ (eveniment sigur)

$\{R, A\}$: sistem complet de evenimente

$A \cap R = \emptyset$

$\Rightarrow P(S|A) \cdot P(A) = \frac{P(S \cap A)}{P(A)} \cdot P(A) = P(S \cap A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6^2}$ la fel pt. roșii

③ Se aruncă un zar. Fie N nr. care a apărut. Apoi, zarul e aruncat de N ori. Care e prob. ca N = 3, știind că:

a) nr. obținute în urma celor N aruncări sunt diferite D

b) nr. obținute în urma celor N aruncări sunt egale E

a) ne-ar ajuta să găsim 3 n.c. toate-s diferite -> Bayes

Formula lui Bayes: $P(E) = P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(\bar{H}) \Rightarrow \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E|H) \cdot P(H) + P(E|\bar{H}) \cdot P(H)} = P(H|E)$

-> $= P(E)$ -> sist. complet

$$\Rightarrow \frac{P(D|N=3) \cdot P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(D|N=i) \cdot P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^3} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6} \cdot \sum \frac{A_6^i}{6^i}}$$

-> sist. complet

trebuie sistem complet de evenimente la Bayes!

b) acelaşi lucru but:

$$P(N=3/E)=\frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum_{i=1}^{6} P(E|N=i)\cdot P(N=i)}=\frac{\frac{1}{6^3}}{\sum_{i=1}^{6}\left(\frac{1}{6}\right)^i}$$

Binom

$$X \sim \begin{pmatrix} k \\ C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \end{pmatrix} \Rightarrow C_i^i \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(1-\frac{1}{6}\right)^{i-i}=\left(\frac{1}{6}\right)^i$$

Modelul binomial: în cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (succese) şi $\bar{A}$ (insuccese). Un succes are loc cu $P(A)=p$, un insucces cu $P(\bar{A})=1-P(A)$. Probabilitatea de a obţine k succese din m repetări independente este: $b(k;m)=C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$, $k\in\{0,\dots,m\}$

DISTRIBUŢIA BINOMIALĂ

④ Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este de 0,06. O componentă pt. calculator ~~at~~ are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta e funcţională dacă cel puţin 11 cipuri sunt funcţionale.

1) Calculaţi prob. ca: a) 12 astfel de cipuri să fie funcţionale

b) componenta să fie funcţională

2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care e prob. p ca cel puţin 3 dintre ele să fie funcţionale?

3) Dacă un calculator are instalate 3 astfel de componente, care e prob. ca în total > 30 de cipuri să fie funcţionale?

1. a) $C_{12}^{12}\cdot 0,94^{12}(1-0,94)^0$ doar formula

b) $C_{12}^{11}\cdot 0,94^{11}(1-0,94)^1+C_{12}^{12}\cdot 0,94^{12}\cdot(1-0,94)^0$ → notăm e

2. $C_4^3\cdot e^3(1-e)^1+C_4^4\cdot e^4(1-e)^0$

3. în total $12\cdot 3=36$ cipuri

i cipuri funcţionale $=C_{36}^i\cdot 0,94^i\cdot(1-0,94)^{36-i}$ apoi facem suma $\sum_{i=31}^{36}$

Modelul urnei cu r culori şi bila returnată

$b(k_1,\dots,k_r;n)$ = prob. de a obţine k_i bile de culoare i, $i=\overline{1,r}$ din n extrageri cu returnare

$$= \frac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_r!}\cdot p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r},$$

unde p_i = prob. de a extrage bilă de culoarea i, $i=\overline{1,r}$ (cazul $r=2$ corespunde distr. binomiale)

⑤ O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care e prob. ca literele tastate să poată fi permutate a.î. să obţinem abracadabra?

$$b(5,2,1,1,2;11) = \frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}\cdot\left(\frac{1}{26}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{26}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{26}\right)^2\cdot\frac{1}{26}\cdot\frac{1}{26}$$

⑥ Un zar este aruncat de 5 ori. Calculaţi prob. următoare:

a) A: „exact 2 numere sunt pare"

b) B: „1 apare de 2 ori, 3 apare o dată, 6 apare de 2 ori"

c) C: „exact 2 nr. sunt prime, un nr $=1$, alte 2 nr. sunt $=4$"

a) $\text{Bino}(5,\frac{1}{2}) = C_5^2\left(\frac{1}{2}^2\cdot(1-\frac{1}{2})^3\right) = C_5^2\,\frac{1}{2}^5$

b) $b(2,1,2;5) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$

c) prob. nr. prim $=\frac{1}{2}$

$$b(2,1,2) = \frac{5!}{2!\,1!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

⑦ O persoană întârzie la muncă într-o zi ploioasă cu probabilitate de 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitate de 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitatea 0,8. Care e probabilitatea ca:

a) O persoană să ajungă la timp

b) ziua urm. să fie ploioasă, ş.c. persoana ajunge la timp

a) A: „ajunge la timp" B: „plouă" C: „nu plouă"

$P(B)=0,8$ $\quad P(C)=0,2$

$$P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|C)\cdot P(C) = 0,8\cdot 0,8 + 0,9\cdot 0,2 = 0,82$$

b) $$P(C|A) = \frac{P(A|C)\cdot P(C)}{\underbrace{P(A|C)\cdot P(C) + P(A|\bar{C})\cdot P(c)}_{P(A)}} = \frac{0,8\cdot 0,8}{0,82}$$ BAYES

$\bar{C} = B$

⑧ O pereche de zaruri (unul alb și unul roșu) se aruncă o dată, apoi încă o dată. Calculați prob. ca numerele apărute la cea de-a doua aruncare să fie aceleași ca la prima.

A_1 : apare la prima aruncare pe zarul alb

A_2 : apare la a doua aruncare pe zarul alb

R_1 : apare la prima aruncare pe zarul roșu

R_2 : apare la a doua aruncare pe zarul roșu

$$\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} P(\{A_1=i\}\cap\{R_1=j\}\cap\{A_2=i\}\cap\{R_2=j\}) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$