# SEMINAR 1

## Noțiuni de combinatorică

1. Principiul fundamental de numărare: numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în $m$ moduri și al doilea în $n$ moduri ($m, n \in \mathbb{N}$) este $m \cdot n$.

ex.: în câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăși distincte și 3 blugi diferiți: $2 \cdot 3 = 6$

2. Aranjamente de $n$ luate câte $k$: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

3. $P_n = A_n^n = n!$ $\qquad 0! = 1$

4. $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

5. Nr. de funcții de la o mulțime A cu $k$ elem. la o mulțime B cu $n$ elem. este $n^k$

ex.: în câte moduri se pot împărți un măr, o banană și un kiwi la 4 copii? (un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate. $\Rightarrow 4^3$

6. Permutări cu repetiție: Considerăm $n$ obiecte care pot fi împărțite în $k$ grupuri. Primul are $n_1$ obiecte identice, al doilea $n_2$ obiecte identice, ... 2 obiecte sunt distincte $\Leftrightarrow$ fac parte din grupuri diferite. Nr. de permutări ale acestor obiecte este: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

7. Combinări cu repetiție de $n$ luate câte $k$: alegeri de $k$ obiecte, nu neapărat distincte (un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din $n$ obiecte distincte date.

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \qquad n \text{ sunt obiectele distincte!}$$

ex.: împărțim 5 bile identice la 3 copii aka 5 de 0 și 2 de 1 aranjăm: $C_{5+2}^{5} = C_{5+2}^{2} = 21$

8. Definiția clasică a probabilității: $P(E) = \frac{\text{nr. cazuri favorabile ale lui } E}{\text{nr. cazuri posibile}}$

## EXERCIȚII

① În câte moduri se pot așeza pe raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică și 4 romane ș.c. fiecare carte are un autor diferit, a.î.

a) cărțile de același tip să fie alăturate

b) doar romanele să fie neap. alăturate,

c) doar cele de mate, respectiv info să fie alăturate.

a) considerăm 3 entități diferite, apoi în fiecare entitate permutăm cărțile $\Rightarrow 3! \cdot 5! \, 3! \, 4!$

b) $4! \, (5+3+1)! \rightarrow$ entități în total
↳ permutări de romane

c) $\underset{\text{mate}}{5!} \cdot \underset{\text{engl}}{3!} \cdot 6! \rightarrow$ entități

② Se aruncă 2 zaruri. Det. probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: "se obține o dublă" b) B: "suma nr e pară" c) C: "suma nr $<= 10$"

a) $P(A) = \dfrac{6}{6 \cdot 6} \begin{matrix} \rightarrow \text{val favorabile} \\ \rightarrow \text{total} \end{matrix}$

b) 2 nr impare sau 2 nr pare $\Rightarrow$ 1, 3 sau 5 $\Rightarrow 3 \cdot 3$ combinații
2, 4 sau 6 $\Rightarrow 3 \cdot 3$ combinații

$P(B) = \dfrac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{6 \cdot 6}$

c) $\overline{C}$: "suma nr $> 10$" adică $5+6, 6+5, 6+6 \Rightarrow P(\overline{C}) = \frac{3}{36} \Rightarrow P(C) = 1 - \frac{3}{36}$

③ În câte moduri se pot aranja în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?
Dar în cerc?

permutări cu repetiție: $\dfrac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$

orice așezare în cerc se identifică cu 9 permutări circulare distincte ale unei așezări în linie (doar se mută mai la dreapta) $\Rightarrow$ în cerc $= \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$

④ X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete și n băieți ($m, n \in \mathbb{N} \geq 2$). X și prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele au fost distr. aleator. Care este probabilitatea ca X să aibă 2 vecine?

→ locurile lui X (fără capete)
→ posibile fete
→ persoane ce rămân de aranjat

$$\frac{(m+n-1) \cdot A_m^2 \cdot (m+n-2)}{(m+n+1)!}$$

5) 7 călușari se așează în cerc, în ordine aleatoare. Prob. ca c1 și c7 să fie vecini?

$c_1 c_7$ / $c_7 c_1$ → entitate, apoi îi permutăm pe restul (de 5 entități)

$$P(E) = \frac{2 \cdot 6! + 2 \cdot 5!}{7!} = \frac{1}{3}$$

↳ cazuri posibile

⑥ b) Câte soluții $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ are ecuația $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N})$

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad | + k$

$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) = n + k$

(acum sigur „n" > k)

$\Rightarrow y_1 + \dots + y_k = n + k;\ y_1, \dots y_n \in \mathbb{N}^*$ → pe baza ⓐ → $C_{n+k-1}^{k-1}$ soluții

a) Câte soluții $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ are ec. $x_1 + \dots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N}^*, n > k)$?

1_1_1_ ... _1 unde sunt n valori de 1. Dacă în spațiile libere punem k-1 valori de „+", ștergem spațiile libere și obț. k grupuri de „1"-uri.

$x_i$ = suma de „1"-uri din grupa i. ∄ 2 simboluri „+" consecutive ⇒ $x_i \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} x_i = n \rightarrow C_{n-1}^{k-1}$ moduri de a pune „+" (aka soluții)

(↳ „+"-uri ; ↳ spații libere)

⑦ Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre și nu au 2 cifre alăturate de 1?

k biți 1 ⇒ 10-k biți 0. punem în linie biții nuli și spațiile pt 1 ⇒ _0_0_ . . . _0_

⇒ avem 11-k spații pt 1 (k de 1) ⇒ $C_{11-k}^{k}$ unde $k \in \{0, 1, \dots 5\}$ (pt. k>5 avem < 6 spații libere)

$\Rightarrow 1 + C_{10}^{1} + \dots + C_{6}^{5}$