Seminar 5

Relații binare

Recap:

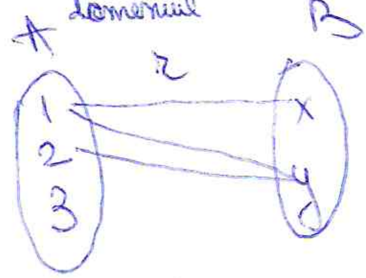
Def: Fie A, B mulțimi, $R \subseteq A \times B$.
Spunem că structura (A, B, R) este o relație binară.

Ex: $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y\}$.

$A \times B = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)\}$.

$R = \{(1,x), (1,y), (2,y)\} \subseteq A \times B$

$r = (\underset{\text{domeniul}}{A}, \overset{\text{codomeniu}}{B}, R)$ graf



Notație:

$(u, v) \in R$

$\Updownarrow$

$u \, r \, v$. (u merge prin r în v)

ex: $1 r x$, $1 r y$, $2 r y$.

Obs: Dacă $f: A \to B$ funcție

$Gf = \{\overbrace{(\underbrace{x}_{\in A}, \underbrace{f(x)}_{\in B})}^{A \times B} \mid x \in A\} \subseteq A \times B$.

$f = (A, B, Gf)$ relație binară.

- O rel de tipul $r = (A, A, R)$ este o rel. omogenă ($R \subseteq A \times A$)

Def: Spunem că rel $r = (A, A, R)$ este: ~~reflexivă dacă~~
- reflexivă dacă: $\forall a \in A$ $a \, r \, a$ (toate perechile (a,a))
- tranzitivă dacă: $\forall a, b, c \in A$ $a \, r \, b$ și $b \, r \, c \Rightarrow a \, r \, c$
- simetrică dacă: $\forall a, b \in A$ dacă $a \, r \, b$ atunci $b \, r \, a$
- antisimetrică dacă: $\forall a, b \in A$ dacă $a \, r \, b$ și $b \, r \, a$ atunci $a = b$.

· relația de preordine → reflexivă, tranzitivă.

$\xrightarrow{+\text{antisim}}$ rel de ordine.

$\xrightarrow{+\text{simetrie}}$ rel de echivalență

1.4.36 Ssac rel de diviz pe $\mathbb{Z}$ este o preordine, care NU este nici simetrică, nici antisimetrică

$a \mid b \overset{def}{\iff} \exists c \in \mathbb{Z}$ aî $b = a \cdot c$.

divizibilitatea e relația

$J = (\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mid)$

Reflex: Vrem $\forall a \in \mathbb{Z}$, $a \mid a$ (adică a în rel cu a)

adev pt că $a = a \cdot 1$ (1)

Tranz: Dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, vrem $a \mid c$.

$a \mid b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}$ aî $b = a \cdot x$

$b \mid c \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z}$ aî $c = y \cdot b$.

$c = a \cdot \overbrace{x \cdot y}^{z} = a \cdot \underset{\in \mathbb{Z}}{z} \Rightarrow a \mid c$ (2)

Din (1) și (2) ⇒ rel de preordine

Simetrică: $a \mid b \overset{?}{\Rightarrow} b \mid a$.

Contraex: Cum $2 \mid 4$ dar $4 \nmid 2 \Rightarrow \mid$ nu e simetrică (vizau relația)

Antisim: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, dacă $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = b$.

contraex: $4 \mid -4$, $-4 \mid 4$ dar $4 \neq -4 \Rightarrow$ ~ nu e antisimetrică.

(1.4.37) Să se det toate rel de echivalență care se pot defini pe mult. $A = \{a, b, c\}$.

$r = (A, A, R)$ rel de echiv $\Leftrightarrow$ reflex, tranz, sim.

r reflexivă $\Rightarrow \forall x \in A$ avem $x r x \Rightarrow (x, x) \in R$

$\{(a,a), (b,b), (c,c)\} \subseteq R$

r tranzitivă $\Rightarrow \forall x, y, z \in A$ dacă $\underline{x r y \text{ și } y r z}$ atunci $x r z$

r simetrică $\Rightarrow \forall x, y \in A$ dacă $x r y$ atunci $y r x$.

$R_1 = \{(a,a), (b,b), (c,c)\}$. ✓

$R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a)\}$. ✓

$R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$ ✓

$R_4 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (b,c), (c,b)\}$ ✓

$R_5 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (c,a), (a,b),$
$(b,a), (c,b), (b,c)\} \subseteq A \times A$ ✓

Obs: (c,a) și (a,b)

$c r a$ și $a r b \rightarrow c r b$.

(4.38) Să se arate că rel sunt echivalente și să se calculeze respectivele mulțimi factor

a) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ $x \equiv y \Leftrightarrow |x| = |y|$

Recapit. teorie: $r = (A, A, R)$ rel de echivalență

Fie $a \in A$, $[a] = \{y \mid y r a\}$.

clasa lui

A.

Ex: $R_3 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a)\}$.

$[a] = \{a, b\} = [b]$

reprezentanți pentru aceeași clasă

$[c] = \{c\}$.

Clasele distincte conduc la o partiție a mulțimii (a lui A)

$A = \{a, b, c\} = [a] \cup [c]$.

$\underbrace{A/_{\sim}}_{\text{mulț. factor}} = \{[x] \mid x \in A\}$.

$\Rightarrow A/_{R_3} = \{[a], [c]\}$.

Revenind la 1.9.38.

Refl: Vrem $\forall x \in \mathbb{C}.\ x \equiv x$
$\Updownarrow$
$|x| = |x|$ adev

Tranz: Vrem $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$ dacă $x \equiv y$ și $y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$?

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y \Rightarrow |x| = |y| \\ y \equiv z \Rightarrow |y| = |z| \end{array}\right\} \Rightarrow |x| = |z| \Rightarrow x \equiv z$$

Sim: $\forall x, y \in \mathbb{C}$ dacă $x \equiv y$ atunci $y \equiv x$.
$\Downarrow$
$|x| = |y| \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y \equiv x$

Așadar „$\equiv$" este o rel de echivalență

$[x] \overset{def}{=} \{y \in \mathbb{C} \mid x \equiv y\}$.

$= \{y \in \mathbb{C} \mid |x| = |y|\}. = \mathcal{C}(0, |x|)$

$\mathbb{C}/_{\equiv} \stackrel{def}{=} \{[x] \mid x \in \mathbb{C}\}.$

(1.4.39) S. se ac relația dată prin $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

este o echivalență pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ și să se det

Reflex: vrem $\forall$ a $(a,b) \sim (a,b) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \cdot b = a \cdot b$ adev.

Tranzit. $\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

Dacă $(a,b) \sim (c,d)$ și $(c,d) \sim (e,f)$

vrem $(a,b) \sim (e,f) \Rightarrow af = be.$

$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \xRightarrow{d \neq 0} a = \frac{b \cdot c}{d}$

$(c,d) \sim (e,f) \Rightarrow cf = de. \xRightarrow{f \neq 0} c = \frac{d \cdot e}{f}.$

$\Rightarrow a = \frac{b \cdot \frac{de}{f}}{d}$

$a = \dots \Rightarrow a = \frac{be}{f} \mid \cdot f \Rightarrow af = be.$ Var 2 pag 6

Simetria $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

Dacă $(a,b) \sim (c,d)$ vrem $(c,d) \sim (a,b)$

$\Updownarrow \qquad \Updownarrow$

$a \cdot d = b \cdot c \Longrightarrow c \cdot b = a \cdot d$

$(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$

$[(a,b)] \overset{def}{=} \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (a,b) \sim (x,y) \}$.

ex $[(1,2)] = \{ (1,2), (2,4), (3,6), \ldots \} \overset{not}{=} \frac{1}{2}$

$\boxed{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_{\sim}} = \mathbb{Q}$ | $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ne referim ca $(1,2)$ și $(2,4)$ (sunt în aceeași clasă)

Varz $a \cdot d = b c \mid \cdot f \Rightarrow a d f = b (c \cdot f)$

$c f = d e$ $\quad$ $a d f = b d e$ $\Rightarrow d \mid a \ldots$