Seminar 6

Relații ordinare

Recap: Fie A, B mulțimi, o relație binară este o structură

$r = (A, B, R)$, $R \subseteq A \times B$

Dacă $A = B$, $(r = (A, A, R), R \subseteq A \times A)$ este o relongție

r este o rel de ordine pe A dacă:

- r reflexivă: $\forall a \in A$ $a r a$.
- r tranzitivitate: $\forall a, b, c \in A$ dacă $a r b$ și $b r c$ atunci $a r c$.
- r antisimetrică: $\forall a, b \in A$, dacă $a r b$ și $b r a$ atunci $a = b$.

Spunem că (A, r) este o mulț ordonată

Dacă $(A, \leq)$ este o mulț ordonată

- Dacă $(A, \leq)$ este o mulț ordonată atunci sp că A este un lanț ohea

$\forall x, y \in A$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$

- Dacă $(A, \leq)$ este mulț ord și $a \in A$ atunci spunem că a este

→ elem. minimal dc:

$\forall x \in A$ cu $x \leq a$ atunci $x = a$.

→ elem. maximal dc:

$\forall x \in A$ cu $a \leq x$ atunci $x = a$.

$$\left.\begin{array}{l} a \geq b \Rightarrow b \leq a \\ b \geq c \Rightarrow c \leq b \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Tranz } „\leq"} c \leq a.$$

<u>Antisim</u> $\forall a, b \in A$

dacă $a \geq b$ și $b \geq a$ atunci $a = b$.

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ b \leq a & & a \leq b. \end{array}}$$

$$\Downarrow \text{ Antisim } „\leq"$$

$$b = a. \checkmark$$

$\Rightarrow (A, \geq)$ mulț ordonată

$\boxed{\text{Recap}}$: Fie $(A, \leq)$ o mulțime ordonată și $X \subseteq A$.

Atunci $a \in A$ se numește:

- margine inferioară pt X dacă $\forall x \in X$ avem că $a \leq x$.
- margine superioară pt X dacă $\forall x \in X$ avem că $x \leq a$.
- infimum pt X dc. a este cea mai mare margine inferioară.

$$a = \inf_A X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X \quad a \leq x \\ \text{dacă } a' \in A \text{ astfel încât} \\ \forall x \in X, a' \leq x \text{ atunci } a' \leq a. \end{cases}$$

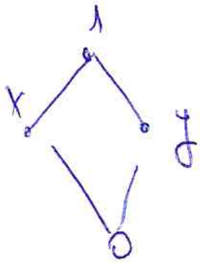
- supremum pt X dacă a este cea mai mică margine superioară.

$$a = \sup_A X \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in X, x \leq a \\ \text{dacă } a' \in A \text{ a.î. } \forall x \in X, x \leq a' \\ \text{atunci } a \leq a' \end{cases}$$

~~1.4.50 Orice lanț~~

- Spunem că A este o latice dacă $\forall x, y \in A$, $\exists \inf_A\{x,y\}$, $\exists \sup_A\{x,y\}$.

Ex:



$\inf_A\{x,y\} = 0 = x \wedge y$

$\sup_A\{x,y\} = 1 = x \vee y$.

- A este o <u>latice completă</u> dacă $\forall S \subseteq A$, $\exists \inf_A S$, $\exists \sup_A S$.

$\boxed{1.4.50}$ Orice lanț este o latice. ~~este o latice~~. Este orice lanț o latice completă?

Fie $(A, \leq)$ lanț $\Rightarrow \forall x, y \in A$ $x \leq y$ sau $y \leq x$

Vrem A este latice $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$, $\exists$ $\sup_A\{x,y\}$, $\inf_A\{x,y\}$.

Fie $x, y \in A$ arbitrare $\xRightarrow{A\text{-lanț}}$ $x \leq y$ sau $y \leq x$.

<u>Cazul I</u> Dacă $x \leq y$

$\inf_A\{x,y\} = x \in A$

$\sup_A\{x,y\} = y \in A$.

<u>Cazul II</u> Dacă $y \leq x$

$\inf_A\{x,y\} = y$

$\sup_A\{x,y\} = x$.

$\longrightarrow (A, \leq)$ latice.

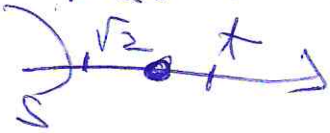
<u>Obs</u>: <u>Nu</u> orice lanț este o latice completă.

Ex: $(\mathbb{Q}, \leq)$ lanț

$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$

$\sup_{\mathbb{R}} S = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\sup_{\mathbb{Q}} S = t \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2}$



1.4.52. Să se arate că $(\mathbb{N}, |)$ este o latice. (| - divizib.)

Vrem $(\mathbb{N}, |)$ mulț. ord. (R, T, Antisim)

R: $\forall x \in \mathbb{N}$, $x | x$.

adev pt că $x = x \cdot 1$.

T: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}$ dacă $x|y$ și $y|z \Rightarrow x|z$,

$x|y \Downarrow$, $y|z \Downarrow$

$y = x \cdot p \quad z = y \cdot q \;;\; p, q \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$z = x \cdot \underbrace{(p \cdot q)}_{\in \mathbb{N}} \Rightarrow x | z$ (A).

Antisim: $\forall x, y \in \mathbb{N}$ dacă $x|y$ și $y|x$ atunci $x = y$

$x|y \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ a.î. $y = p \cdot x$

$y|x \Rightarrow \exists q \in \mathbb{N}$ a.î. $x = q \cdot y \Rightarrow x = p \cdot q \cdot x$

Cazul I $x \neq 0 \Rightarrow p \cdot q = 1 \Rightarrow p = q = 1$

Cazul II $x = 0 \xRightarrow{y = p \cdot x} y = 0 \Rightarrow x = y$.

Așadar $(\mathbb{N}, |)$ este o mulț. ordonată.

Vrem $(\mathbb{N}, |)$ latice $\Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}$, $\exists \sup_{\mathbb{N}}\{x, y\}$

$\exists \inf_{\mathbb{N}}\{x, y\}$.

$\underbrace{\inf_{\mathbb{N}}\{x, y\}}_{a \in \mathbb{N}} \overset{def}{=} \{a | x$ și $a | y$

dacă $a' \in \mathbb{N}$ a.î.

$a' | x$ și $a' | y$ atunci

$a' | a$.

$=$ cmmdc$\{x, y\}$

$\sup_{\mathbb{N}}\{x, y\}$ = cmmmc(x, y)

Temă: 1.4.53
1.4.54.