SUBIECTUL A

1. Det. mulțimea punctelor limită ale șirului:

a) $x_m = \left(\frac{m+3}{m+1}\right)^{m \cdot \cos\frac{2\pi}{m}}$

calculăm limita $\Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = (1^{\infty}) = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{2}}\right]^{\frac{2}{m+1}\cdot m\cdot\cos\frac{2\pi}{m}} =$

$= e^{\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{m+1}\cdot\cos\frac{2\pi}{m}}$

$= e^{\lim_{m\to\infty}\frac{2m}{m+1}\cdot\lim_{m\to\infty}\cos\frac{2\pi}{m}} = e^{2\cdot\lim_{m\to\infty}\cos\frac{2\pi}{m}}$

$\lim_{m\to\infty}\cos\frac{2\pi}{m}$: $m=1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}=0$

$m=2 \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{2} = -1$

$m=3 \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$m=4 \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{2} = 1$

$m=5 \Rightarrow \cos\frac{5\pi}{2} = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ~ se repetă

$\Rightarrow LIM(x_m) = \{e^0, e^{-2}, e^2\}$

b) $x_m = \left(\frac{m+1}{m+3}\right)^{m\cdot\sin\frac{m\pi}{2}}$

calculăm limita $\Rightarrow \lim_{m\to\infty} x_m = (1^{\infty}) = \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{m+3}\right)^{\frac{m+3}{-2}}\right]^{\frac{-2}{m+3}\cdot m\cdot\sin\frac{m\pi}{2}} =$

$= e^{-2\lim_{m\to\infty}\sin\frac{m\pi}{2}}$

$\lim_{m\to\infty}\sin\frac{m\pi}{2}$ $m=1 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$m=2 \Rightarrow \sin\pi = 0$

$m=3 \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$m=4 \Rightarrow \sin 2\pi = 0$

$m=5 \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{2} = \sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ~ se repeta

$\Rightarrow LIM(x_m) = \{e^{-2}, e^0, e^2\}$

2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Atunci seria

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ este convergentă

criteriul comparației sub formă de limită

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \lim x_n = 0$$

$\downarrow$

știm $\sum x_n$ - convergentă

$\lim \frac{x_n^2}{x_n} < \infty$ și x_n - conv $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ - convergentă

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n^2}$ este convergentă

criteriul comparației sub formă de inegalitate

$\frac{x_n}{1+x_n^2} \leq x_n$ (pt. că $\sum x_n$ - s.t.p) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n^2}$ - convergentă

5. Calculați derivata de ordin $n \in \mathbb{N}$ a funcției (cu Leibnitz)

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x+1}} = x^2 \cdot e^{-(x+1)}$ $\qquad f(x) = x^2 \qquad g(x) = e^{-(x+1)}$

$g' = -e^{-(x+1)} = (-1)^1 \cdot e^{-(x+1)}$

$g'' = (-1)^2 \cdot e^{-(x+1)}$

$\vdots$

$g^{(n)} = (-1)^n \cdot e^{-(x+1)}$ + inducție

$C_n^0 \cdot x^2 \cdot (-1)^n \cdot e^{-(x+1)} + C_n^1\, 2x\,(-1)^{n-1} \cdot e^{-(x+1)} + C_n^2 \cdot 2\,(-1)^{n-2} \cdot e^{-(x+1)} + 0$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^{-(x+1)} \cdot \left[x^2 \cdot (-1)^n + n \cdot 2x \cdot (-1)^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\right]$

b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x} = (x+1)^2 \cdot e^{-x} = (x^2+2x+1) \cdot e^{-x}$

inducție pentru $(e^{-x})^{(n)} = (-1)^n \cdot e^{-x}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = e^{-x} \cdot \left[(x^2+2x+1)(-1)^n + (2x+2) \cdot (-1)^{n-1} + \cancel{2} \cdot \dfrac{n(n-1)}{\cancel{2}}\right]$