Algebră seminar 4

Teorie:

$f : A \to B$

f bij $\Leftrightarrow$ f invers $\Leftrightarrow$ $\exists g : B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$ — g este inversă la dr

f surj $\Leftrightarrow$ — $g \circ f = 1_A$ — g este inversă la st.

f inj $\Leftrightarrow$

Obs: Inversa la st/dr <u>NU</u> e neapărat unică.

(1.3.42) Găsiți un ex de funcții $f : A \to B$ a.î.

(1) f este o fct inj, dar <u>nu</u> are inversă la dr

Obs: f nu are inv la dr $\Rightarrow$ f nu e surj.

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ a.î. $f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ (A) $\Rightarrow f$ inj.

$\operatorname{Im} f = \{0, 2, 4, \dots\} \subsetneq \mathbb{N} \Rightarrow f$ nu e surj.

Rămâne să dem că f nu are inversă la dreaptă.

Pp. că $\exists$ inversă la dreapta:

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a.î. $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

Fie $x \in \mathbb{N} \Rightarrow (f \circ g)(x) = 1_{\mathbb{N}}(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(x)) = x \Rightarrow 2g(x) = x, \forall x \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}, \forall x \in \mathbb{N}$ (F)

$= 1 =$ $g(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, dar $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\Rightarrow \nexists$ g ai ... inversă la dr.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(x) = 2x$

f inj $\Rightarrow$ f are inv la st

$\exists g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aî $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$

Fie $x \in \mathbb{N}$

$(g \circ f)(x) = 1_{\mathbb{N}}(x) \Rightarrow g(f(x)) = x$

$\Rightarrow g(2x) = x, \ \forall x \in \mathbb{N},$

Definim g astfel $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

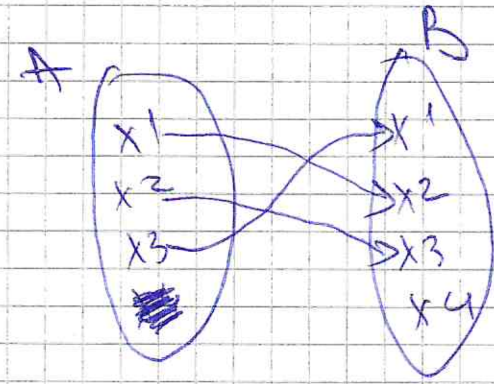
$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{dacă } x \text{ par} \\ 0 \ (\text{sau oricare}), & \text{dacă } x \text{ impar} \end{cases}$$

putem construi o ∞ de funcții inverse la stânga pentru f (ref. (4))

(2) f are exact o inversă la stânga, dar f nu este bij.

Obs: f are inv la st $\Rightarrow$ f inj.

f nu e bij $\Rightarrow$ f nu e surj.



f inj

$\text{Im} f = \{1, 2, 3\} \subsetneq B$

f nu e surj.

O f-ție inv la st: $g: B \to A$ aî:

$\boxed{g \circ f = 1_B}$ $\quad A = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$(g\circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow g(f(1)) = 1 \Rightarrow g(2) = 1$

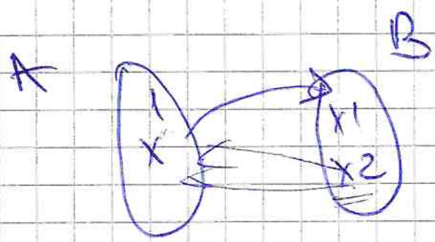
$(g\circ f)(2) = 1_A(2) \Rightarrow g(f(2)) = 2 \Rightarrow g(3) = 2$

$(g\circ f)(3) = 1_A(3) \Rightarrow g(f(3)) = 3 \Rightarrow g(1) = 3.$

Obs $g(4) \in \{1,2,3\} = A$

x	1	2	3	4
$g_1(x)$	3	1	2	1
$g_2(x)$	3	1	2	2
$g_3(x)$	3	1	2	3

Avem exact 3 inverse la st pt f.



f inj

f nu e surj

$(Im\ f = \{1\} \neq B)$.

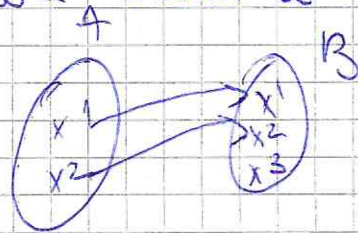
inversa la st este: $g: B \to A$

$g(1) = 1 \quad g(2) = 1$

$g\circ f = ?$

$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$

(3) f are exact 2 inverse la st



f inj

f nu e surj

$Im\ f = \{1,2\} \subsetneq B$.

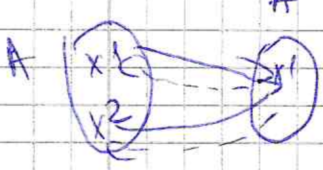
Inv la st: $g: B \to A$ ai $g\circ f = 1_A$.

$(g\circ f)(1) = 1_A(2) \Rightarrow g(f(2)) = 2 \Rightarrow g(2) = 2$

$g(3) \in \{1, 2\}$

x	1	2	3
$g_1(x)$	1	2	1
$g_2(x)$	1	2	2

1.3.43 Să se găs un ex de fct $g : B \to A$ a.î.



(1) g are inversă la dr $\Rightarrow g$ e surj.

$\exists\, Im\, g = \{1\} = A$.

g surj, nu e inj $\Rightarrow g$ nu e inj.

g surj $\Rightarrow$ are inv la dr

$f : A \to B$ a.î. $g \circ f = 1_A$

$A = \{1\}$

x	1
$f_1(x)$	1
$f_2(x)$	2

$(g \circ f)(1) = 1_A(1) \Rightarrow g(f(1)) = 1.$

$\Rightarrow f(1) \in \{1, 2\}.$

(2) g are o ∞ de inv la dr (temă)

<u>Ex</u>: Să se arate că g are exact o inv la dr $\Leftrightarrow g$ bij.

"$\Rightarrow$" Pp g are exact o inv la dr

<u>Vrem</u> g bijectivă

g are inv la dr $\Rightarrow g$ surj

Rămâne să dem că g este inj.

Pp. R.A că g nu este injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, x_1 \neq x_2 \in B$ a.î. $g(x_1) = g(x_2) = a \in A$

g are invers la dr $\Rightarrow \exists!\, f: A \to B$ a.î. $g \circ f = 1_A$.

$(g \circ f)(a) = 1_A(a) \Rightarrow g(f(a)) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \in \{x_1, x_2\}$.

$\Rightarrow$ avem cel puțin 2 inverse la dr.

(F) $\Rightarrow$

$\Rightarrow g$ inj $\xRightarrow{g\ surj}$ g bij.

~~1.8.44. Compunerea de funcții:~~

Reciproca: Arătăm că o fcț bij are exact o inversă la dr

$g: B \to A$ bij $\Rightarrow g$ inversabilă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, g^{-1}: A \to B$ inversa bij.

EXISTENȚA

g^{-1} este inclusiv inversa la dr pt g

UNICITATEA

Pp că $\exists\, f_1, f_2$ inversa la dr pt g. $\Rightarrow$

$\Rightarrow g^{-1} \mid g \circ f_1 = g \circ f_2 = 1_A \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1 = f_2 = g^{-1}$

~~(Teza) (Ex. 3)~~

© Herlitz

(1.3.46) Funcția $f: A \to B$ UASE
(1) f inj
(2) $\forall X \subseteq A,\ X = f^{-1}(f(X))$ → contraimag
(3) $\forall X_1, X_2 \subseteq A,\ f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$

R (2) $\Rightarrow$ (1) Pp. $\forall X \subseteq A,\ X = f^{-1}(f(X))$
Vrem f inj.
Fie $x_1, x_2 \in A$ ai $f(x_1) = f(x_2)$. Vrem $x_1 = x_2$

$X = \{x_1, x_2\} \subseteq A \Rightarrow \{x_1, x_2\} = f^{-1}(f(\{x_1, x_2\}))$
$\Rightarrow \boxed{\{x_1, x_2\} = f^{-1}(\{y\})}$

$X = \{x_1\} \subseteq A$
$\{x_1\} = f^{-1}(\underbrace{f(\{x_1\})}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_1\} = f^{-1}(\{y\})$

dar $f(x_2) = y \Rightarrow x_2 \in f^{-1}(\{y\})$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 \in \{x_1\} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ inj.

3.44. Exemple de funcții

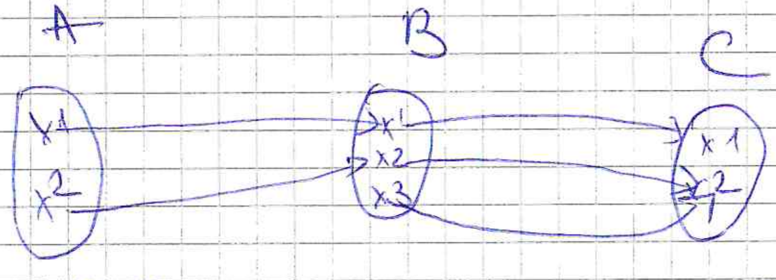
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$ ai

a) $g \circ f$ inj, dar g să nu fie inj.

$f = 2x$

$g = \frac{1}{2}x$

$g(f(x)) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$



$g(2) = g(3)$
$\Rightarrow g$ nu e inj.

$g \circ f : A \to C$

$g \circ f = 1_A = 1_C \Rightarrow$ bij și inj

$g : B \to A$ bij $\Rightarrow g$ invers $\Rightarrow \exists g^{-1} : A \to B$ inversă

g^{-1} inversă la dr pt g

EXISTENȚA

UNICITATEA: Pp că $\exists f_1, f_2$ inverse la dr pt g

$g^{-1} \mid g \circ f_1 = g \circ f_2 = 1_A$

$\Rightarrow f_1 = f_2 = g^{-1}$