SEMINAR 5

① O v.a. continuă X are funcția de densitate $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ cxe^{-x}, & x>0\end{cases}$. Det $c\in\mathbb{R}$ apoi calc:

a) val medie X

b) funcția de repartiție a lui X

c) prob. evenimentului $\{|X-3|>2\}$

d) prob. evenimentului $\{X<3\}$ ş.c. are loc $\{X>1\}$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_{x}^{\infty} t\cdot e^{-t}dt = c\int_{0}^{\infty} \underset{f}{t}\cdot \underset{g'}{e^{-t}}dt = c\left(t\cdot(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-t}dt\right)=$$

$$=c\left(-te^{-t}\Big|_0^{\infty}+(-e^{-t})\Big|_0^{\infty}\right)=$$

suma prob. în toate punctele $=1$ → caz discret

$\int_{\mathbb{R}}$ funcția de densitate $=1$ → caz continuu (practic arii)

$$\lim_{t\to\infty} -te^{-t} = \lim_{t\to 0}\frac{-t}{e^t}\to 0$$

$$\Rightarrow c\cdot 1=1 \Rightarrow c=1$$

$$\lim_{t\to\infty} -e^{-t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}\to 0$$

a) $\boxed{\text{val medie}}$ $\int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,dx$ → funcție de densitate

$c=1$ (am calculat sus)

$$\int_{\mathbb{R}} \underset{f}{x^2}\cdot \underset{g'}{e^{-x}}\,dx = \underbrace{x^2\cdot(-e^{-x})\Big|_0^{\infty}}_{0}+2\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 2$$

b) funcția de repartiție

pe caz discret

1	2	3
0.2	0.5	0.3
↓	↓	↘
0.2	0.7 (0.2+0,5)	1

funcția de repartiție e CDF-ul din OCTAVE

pt. calculul ăla ceva < ceva dat

pe caz continuu facem integrala că nu putem face + ∞ valori

facem începând din cel mai din stânga punct (continuu e $-\infty$)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & x\le 0\\ \int_0^x \underset{f}{t}\,\underset{g'}{e^{-t}}dt = t\cdot(-e^{-t})\Big|_0^x+\int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x}+(-e^{-t})\Big|_0^x = -xe^{-x}-e^{-x}+1 = \\ \qquad = -e^{-x}(x+1)+1\end{cases}$$

Examen $\quad -e^{-x}(x+1)+1$

c) $\{|X-3|>2\}$

$P(|X-3|>2\} = P((X-3)>2 \cup (X-3)<-2) = P(X>5 \cup X<1) = P(X>5)+P(X<1)$

$= 1-P(X<5)+P(X<1) = 1-F(5)+F(1) = \cancel{1}+e^{-5}\cdot 6 \cancel{-1} + (-e^{-1})\cdot 2+1 =$

folosim funcția de repartiție

$= 6e^{-5}-2e^{-1}+1$

d) $P(X<3 | X>1) = \dfrac{P(X<3 \cup X>1)}{P(X>1)} = \dfrac{P(1<X<3)}{1-P(X<1)} = \dfrac{F(3)-F(1)}{1-F(1)} =$

$= \dfrac{-e^{-3}\cdot 4+1-(-e^{-1}\cdot 2+1)}{1-(-e^{-1}\cdot 2+1)} = \dfrac{-4e^{-3}\cancel{+1}+2e^{-1}\cancel{-1}}{\cancel{1}+2e^{-1}\cancel{-1}} = \dfrac{-4e^{-3}+2e^{-1}}{2e^{-1}}$

② $F(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & 0\le x<2 \\ d, & x<0 \\ e, & x\ge 2 \end{cases}$ funcție de repartiție

$-\infty$	-1	0	1	2	3	...	∞
0	0	$0{,}2$	$0{,}5$	1	1		1

i) $P(1<X<2) = \frac{1}{2}$

* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \Rightarrow \boxed{d=0}$

* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 \Rightarrow \boxed{e=1}$

*! funcția de repartiție e continuă la dreapta!

$\lim_{x\searrow 0} F(x) = F(0) = a\cdot 0+b\cdot 0+c = c$

$\Rightarrow \boxed{c=0}$

$\lim_{x\nearrow 0} F(x) = d = 0$ (din ramura 2)

* $\lim_{x\nearrow 2} F(x) = F(2) = e = 1$

$\Rightarrow \boxed{4a+2b=1 \Leftrightarrow 2a+b=\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\nearrow 2} F(x) = 4a+2b$

$P(1<X<2) = F(2) - F(1) \Rightarrow F(2) - F(1) = \frac{1}{2}$

$$1-(a+b) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a+b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} - a \\ 2a+b = \frac{1}{2} \text{ (de dinainte)} \end{cases}$$

$$2a + \cancel{\frac{1}{2}} - a = \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{a=0} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

ii) $E(X) = 1$ $E(X)$ - media var. aleatoare

$\int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)\, dx$

$\int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)\, dx = 1$

f densitate

avem f. de repartiție $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \Rightarrow$ ca să aflăm f. de densitate derivăm $F(x)$

$$(F(x))' = \begin{cases} 2ax + b & 0 < x < 2 \\ 0 & x < 0 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

acolo e ramura

$$\int_{\mathbb{R}} x \cdot (2ax+b)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (2ax^2 + bx)\, dx = 2a \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + b \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2a\frac{8}{3} + b\frac{4}{2} = \frac{16}{3}a + 2b$$

știm că $E(X) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{3}a + 2b = 1 \\ 2a+b = \frac{1}{2} \text{ (de sus)} \Rightarrow b = \frac{1}{2} - 2a \end{cases}$

$$\frac{16}{3}a + 2\left(\frac{1}{2} - 2a\right) = 1$$

$$\frac{16}{3}a + {}^{3)}1 - {}^{3)}4a = {}^{3)}1 \Leftrightarrow 16a + 3 - 12a = 3$$

$$4a = 0 \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

3) valoarea medie = 3 minute (pt. exp) $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$ (lambda)

a) în paralel

media la exp este $\frac{1}{\text{lambda}}$

funcția de densitate la exp $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

aflăm $F(x)$ - f. de repartiție

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{3}t} dt = \frac{1}{3}\cdot(-3)\, e^{-\frac{1}{3}t}\Big|_{-\infty}^{x} =$$

dacă $X<0$ avem tot $=0$

$$\Rightarrow -e^{-\frac{1}{3}t}\Big|_{0}^{x} = -e^{-\frac{x}{3}}+1 = 1-e^{-\frac{x}{3}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-\frac{x}{3}}, & x>0 \end{cases}$$ pt. un condensator

acum

$F_c \rightarrow$ funcția de repartiție a circuitului pe a (cazul 1)

X - var. aleatoare pt. timpul de execuție a circuitului în cazul a

$X_1 \rightarrow$ condensator 1

$X_2 \rightarrow$ condensator 2

$X_3 \rightarrow$ condensator 3

$\Rightarrow X = \max(X_1, X_2, X_3)$

$F_c(t) = P(X \le t) =$

$= P(\max(X_1, X_2, X_3) \le t) =$

$= P(X_1 \le t \cap X_2 \le t \cap X_3 \le t) =$

sunt independente $\Rightarrow \cap = \cdot$

$= P(X_1 \le t)\cdot P(X_2 \le t)\cdot P(X_3 \le t) =$

$= (F(t))^3 \rightarrow$ pt. că urmează acc. distribuție

$$\Rightarrow F_c(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ (1-e^{-\frac{x}{3}})^3, & t>0 \end{cases}$$

$$f_c(t) = (F_c(t))' = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 3\cdot(1-e^{-\frac{x}{3}})^2 \cdot (1-e^{-\frac{x}{3}})' = 3(1-e^{-\frac{x}{3}})^2(+\frac{1}{3}\cdot e^{-\frac{x}{3}}) = \\ = e^{-\frac{x}{3}}(1-e^{-\frac{x}{3}})^2 \end{cases}$$

$\downarrow$

funcția de densitate

ni se cere val medie $\rightarrow \int_{\mathbb{R}} x\cdot f(x) = \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x}{3}}(1-e^{-\frac{x}{3}})^2 dx =$

$$= \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x}{3}}(1-2e^{-\frac{x}{3}}+e^{-\frac{2x}{3}})dx = \int_{0}^{\infty}(\underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^{-\frac{x}{3}}} - 2x e^{-\frac{2x}{3}} + x\cdot e^{-\frac{3x}{3}})dx = \ldots$$

b) în serie

$X = X_1 + X_2 + X_3$ / aplicăm $E \to$ media

$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3)$

$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$

$= 3 \cdot E(X_1)$ ~ pt. că urmează acc. distribuție

$E(X_1) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx = \int_0^\infty \underset{f}{x} \cdot \frac{1}{3} \underset{g'}{e^{-\frac{x}{3}}}\, dx = \left(x \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\right)\Big|_0^\infty - \frac{1}{3}\int_0^\infty -3e^{-\frac{x}{3}} =$

$= \underbrace{\frac{1}{3}x \cdot \left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\Big|_0^\infty}_{=0} + -3e^{-\frac{x}{3}}\Big|_0^\infty = 3$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3}x \cdot \left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right) = \lim \frac{x}{-e^{\frac{x}{3}}} = 0$

(4)

(5) $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & , x>0, y>0 \\ 0 & , \text{altfel} \end{cases}$ f. de densitate

a) f. de repartiție aka $F_{XY}(x,y)$

$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv = \int_0^x \int_0^y 2e^{-u-2v}\, du\, dv =$

$* \int_0^y 2e^{-u-2v}\, dv = 2 \cdot \int_0^y e^{-u} \cdot e^{-2v}\, dv = 2e^{-u} \cdot -\frac{1}{2} e^{-2v}\Big|_0^y =$

$\left[(e^{-2v})' = (-2v)' \cdot e^{-2v} = -2e^{-2v} \right.$

$\Rightarrow$ introduc $\frac{1}{2}$ în față să scap de 2

$= -e^{-u} \cdot e^{-2y} + e^{-u} = -e^{-u}(e^{-2y} - 1)$

$* -(e^{-2y} - 1) \int_0^x e^{-u}\, du = (1 - e^{-2y}) \cdot (-e^{-u})\Big|_0^x = (1 - e^{-2y}) \cdot (-e^{-x}) + (1 - e^{-2y}) =$

$= (1 - e^{-2y})(-e^{-x} + 1)$

apoi în cealaltă ramură e 0 mereu

b)

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{y\to\infty} (1-e^{-2y})(1-e^{-x}), & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} (1-e^{-2y})(1-e^{-x}), & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-2y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$$

c) funcții de densitate ale v.a X, Y

$$f_X(x) = (F_X(x))' = \begin{cases} (1-e^{-x})', & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} +e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = \begin{cases} (1-e^{-2y})', & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases} = \begin{cases} +2e^{-2y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

d) val. medii de v.a X, Y

$$E_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x\cdot f_X(x)\,dx = \begin{cases} \int_0^\infty \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^{-x}}\, dx, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} \underbrace{x\cdot(-e^{-x})\Big|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-x}dx, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -e^{-x}\Big|_0^\infty, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases} = \begin{cases} +1, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

acc. lucru pt. $E_Y(y)$

e) dacă X și Y sunt independente sau dependente

sunt independente dacă $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = e^{-x}\cdot 2e^{-2y}$ = cu cât zice problema

$\Rightarrow$ independente