SEMINAR 6

Reamintim: $X \sim U[a, b]$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

① Un jucător de darts ochește discul roșu cu centrul în centrul țintei și diametru de 1cm. La o aruncare, distanța dintre centrul țintei și punctul nimerit de săgeată urmează distr. unif. pe intervalul $[a, b]$ unde $0 \leq a < b$, cu val. medie $\frac{3}{2}$ cm și deviația standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinați:

$* \; E(X) = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$ media

a) prob. ca jucătorul să nimerească discul roșu

X - distanța de la săgeată la centru $\Rightarrow f(x)$ - funcție de densitate pt $X \Rightarrow \boxed{E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx} =$

$= \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$

TREBUIE AFLAT A ȘI B

$\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{a+b=3}$

$* \; \boxed{Var(X) = E(X^2) - E^2(X)}$

$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{(b-a)(b^2+a^2+ab)}{3(b-a)} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$

$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x^2)\,dx$

$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$

deviația $= \sqrt{\text{varianță}}$ sau varianța = deviația^2

$\Rightarrow Var(X) = \frac{a^2+b^2+ab}{3} - \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{(a-b)^2}{12} = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \boxed{(a-b)^2 = 9}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b=3 \Rightarrow a = 3-b \\ (a-b)^2 = 9 \Rightarrow (3-2b)^2 = 9 \end{cases}$

$9 + 4b^2 - 12b = 9$

$4b(b-3) = 0$

I $b=0 \Rightarrow a=3$ II $b=3 \Rightarrow a=0$ dar $a<b \Rightarrow a=0, b=3$

$\frac{1}{2}$ pt că diametrul e de 1

$F(\frac{1}{2}) \to$ funcția de repartiție $= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\Rightarrow$ prob. de a nimeri discul roșu este: $\underset{F(\frac{1}{2})}{P(X \leq \frac{1}{2})} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{3-0} \cdot x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$

b) prob. ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roșu din 10 aruncări

$Bino(n;p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ($k \to$ succese)

$Z \sim Bino(10, \frac{1}{6})$ ($\frac{1}{6} \to$ prob. să nimerească discul)

$= C_{10}^{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{6}\right)^8 \approx 29\%$ ($2 \to$ reușite din 10 aruncări)

②a) Fie datele statistice $(x_i)_{i=\overline{1,10}}$: 2, 1, 3, 1, 5, 2, 3, 5, 1, 1. Să se calculeze expresia funcției de repartiție empirice corespunzătoare acestor date

aproximare $\hat{F}_{10}: \mathbb{R} \to [0,1]$ definită prin $\hat{F}_{10}(x) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,10\} : x_i \leq x\}}{10}$

→ este elem are mulțimea de după

$\hat{F}_{10}: \mathbb{R} \to [0,1]$ are $\hat{F}_{10}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 0{,}4 & , x \in [1,2) \\ 0{,}4+0{,}2 & , x \in [2,3) \\ 0{,}4+0{,}2+0{,}2 & , x \in [3,5) \\ 1 & , x \geq 5 \end{cases}$

Sumă cumulativă!

→ aproximare

reală

b) Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. independente care au aceeași distribuție. Notăm cu F funcția de repartiție comună.

b1) Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat și se consideră pt. $n \in \mathbb{N}^*$ v.a. $Y_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } X_n(\omega) \leq x \\ 0 & \text{dacă } X_n(\omega) > x \end{cases} = \begin{cases} 1, F(x) \\ 0, 1-F(x) \end{cases}$

Ce distribuție au Y_n, respectiv $Y_1 + \dots + Y_n$?

$Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-F(x) & F(x) \end{pmatrix}$. $Y_1 + \dots + Y_n \sim Bino(n, p)$

! sumă de Bernoulli e Bino!

not $F(x) = p$

⇓

$Y_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \sim$ Distr. Bernoulli

distr. lui Y_n

b2) Spre ce valoare converge a.s. șirul $(\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n))_n$?

$\frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n) \xrightarrow{a.s} E(Y_n) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p = F(x)$ (din notație)

b3) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie $F_n : \mathbb{R} \times \Omega \to [0,1]$, $F_n(x, \omega) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i(\omega) \leq x\}}{n}$

funcția de repartiție empirică calculată în pct $x \in \mathbb{R}$. Ce relație există între cele două v.a.

$\frac{1}{n}(\overset{F(x)}{\overset{\shortparallel}{Y_1}} + \dots + Y_n)$ și $F_n(x, \cdot)$?

$\frac{1}{n}(Y_1(\omega) + \dots + Y_n(\omega)) = F_n(x, \omega)$ aka suma calculată = val. funcției aproximate în același punct

b4) Este $F_n(x, \cdot)$ un estimator nedeplasat și consistent pt. $F(x)$?

da - teorie din aia de mai sus demonstrată

③ $Unif\,[1,3]$

a) durata $\xrightarrow{a.s.} 2$

(X_n) - şir cu $X_i \sim Unif\,[1,3]$

medie: $\dfrac{X_1+\dots+X_n}{n} \underset{LTNM}{\xrightarrow{a.s.}} m = E(X_1) = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \int_1^3 x \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = 2$

b) media geometrică $\rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{e}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}}$$

$$\underset{LTNM}{\xrightarrow{a.p}} e^{E(\ln x_n)} = \text{(am calculat mai jos)} = e^{\frac{1}{2}(3\ln 3 - 2)} = e^{\frac{1}{2}(\ln 3^3 - \ln e^2)} =$$

$$E(\ln X_n) = \int_a^b \ln x_n \cdot \frac{1}{b-a} = \int_1^3 \ln x_n \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^3 x' \cdot \ln x\,dx = \frac{1}{2}(x \ln x)\Big|_1^3 - \int_1^3 dx =$$

$$= \frac{1}{2}(3\ln 3 - 2)$$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln \frac{3^3}{e^2}} = e^{\ln\left(\frac{3^3}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{2}{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{e}$$

c) media armonică $\rightarrow \dfrac{2^e}{\ln 3}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n}} \underset{LTNM}{\xrightarrow{a.s.}} \frac{1}{E\left(\frac{1}{X_n}\right)} = \frac{1}{\frac{\ln 3}{2}} = \frac{2}{\ln 3}$$

$$E\left(\frac{1}{X_n}\right) = \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^3 = \frac{\ln 3}{2}$$

④ $T_1 \to 0,4 \to T_1 \sim Exp(\frac{1}{5})$ λ

$T_2 \to 0,6 \to T_2 \sim Unif[4,6]$

a) val medie și deviația standard

* X - v.a. pentru timpul de printare

ce distr. urmează X?

că și T_1, T_2 sunt v.a.

$$X \sim \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \qquad E(X) = 0,4 \cdot E(T_1) + 0,6 \cdot E(T_2)$$

f. de densitate pt. exp

pt. $E(T_1)$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

$\lambda = \frac{1}{medie}$

$\Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{medie} \Rightarrow$ $\underline{\underline{media = 5}}$

pt. $E(T_2) = \int_4^6 x \cdot \frac{1}{6-4} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \Big|_4^6 = \frac{36}{4} - \frac{16}{4} = \frac{20}{4}$
$= 5$

f. de densitate pt. unif

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & altfel \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{E(X) = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot 5 = 5}}$ media

* $std(X) = \sqrt{Var(X)}$

o avem

$var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$X^2 = \begin{pmatrix} T_1^2 & T_2^2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

aici ex!! cu x^2

$E(X^2) = E(T_1^2) \cdot 0,4 + E(T_2^2) \cdot 0,6 =$

$E(T_1^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{x^2}{5}} dx = \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{5} e^{-\frac{y}{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} dy = \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{10} \cdot e^{-\frac{y}{5}} dy$??? calcule eroa

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

not $y = x^2$

$dy = 2x dx$

$\Rightarrow dx = \frac{dy}{2x} = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$E(T_2^2) = \int_4^6 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{2} \Big|_4^6 = \ldots$

. apoi înlocuim sus, urâtă integrală

⑤ $U \sim \mathrm{Unif}[1,3]$

$E(U^2)$?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3-1} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$E(U^2) = \int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{6}_3} = \frac{13}{3}$$

calculăm pt $Y \sim \mathrm{Unif}[1,9]$

$$E(Y) = \int_1^9 \frac{x}{8}\,dx = \frac{x^2}{16}\Big|_1^9 = \frac{81}{16} - \frac{1}{16} = \frac{80}{16}$$

$\frac{13}{3} \neq \frac{80}{16}$

(R: pt. că nu au acc. medie)

⑥ $U_1, U_2 \sim \mathrm{Unif}[0,3]$

$V(U_1+U_2) = ?$

$V(U_1+U_2) = V(U_1) + V(U_2)$ pt. că U_1, U_2 - independente

$V(U_1) = E(U_1^2) + E^2(U_1)$

$V(U_2) = E(U_2^2) + E^2(U_2)$

apoi calcule apoi $Z \sim \mathrm{Unif}[0,6]$

și calculăm $V(Z)$

și spunem $\neq$

⑦ $X \sim \mathrm{Unif}[0,2]$

$Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ lambda

$T = \min\{X, Y\}$ (în serie)

a) $P(X < 0,5) = ? = F_X(0,5)$

$$F_X = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0 & x>2 \\ \int_0^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}x & x \in [0,2] \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

$\Rightarrow F_X(0,5) = \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,25$

b) $P(T>1) = P(X>1, Y>1) = P(X>1) \cdot P(Y>1) = (1 - P(X<1)) \cdot (1 - P(Y<1)) =$

sunt ind. $\Rightarrow$ putem

$(1 - F_X(1)) \cdot (1 - F_Y(1)) =$ (am calc jos pt Y) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e}$

$$F_Y = \int_{-\infty}^{x} f_Y(t)\,dt = \begin{cases} \int_0^x e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} -e^{-t}\big|_0^x, & x>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} -e^{-x}+1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

c) $P(T<1 \mid X \geq 1) = \frac{P(T<1 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(Y<1 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = P(Y<1) = F_Y(1) = -e^{-1}+1$

nu sunt independente T și X!!

X sigur $\geq 1 \Rightarrow T$ ia val. lui Y

acum sunt independente $\rightarrow$ punem.