Seminar 3 Algebră

sem 2 temă

1.3.45

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

„$\supseteq$" Fie $a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$. Vrem $a \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$

$a \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \Rightarrow a \in f^{-1}(Y_1)$ și $a \in f^{-1}(Y_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists b_1 \in Y$ ai $f(a) = b_1)$ și

$(\exists b_2 \in Y_2$ ai $f(a) = b_2)$

$\Rightarrow b = b_1 = b_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow b \in Y_1 \text{ și } b \in Y_2 \Rightarrow \underline{b \in Y_1 \cap Y_2} \\ \text{Știm că } f(a) = b \end{array}\right\} \Rightarrow f(a) \in Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{a \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)}$

(4) $\underline{f(f^{-1}(Y))} \subseteq Y$

Fie $b \in f(f^{-1}(Y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a \in f^{-1}(Y)$ ai $\underline{f(a) = b}$

$\Downarrow$

$\exists b' \in Y$ ai $f(a) = b'$

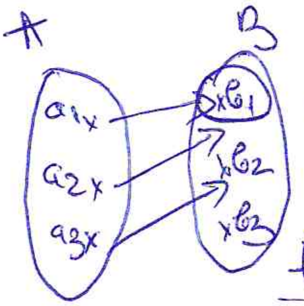
$\Rightarrow b = b' = f(a) \Rightarrow b \in Y$

$A \subseteq B$
Fie $a \in A \Rightarrow .. \Rightarrow a \in B$

! $M \subseteq A$

$f(M) = \{ f(x) \mid x \in M \}$.

Dacă $b \in f(M) \Rightarrow \exists\, a \in M$ ai $f(a) = b$.



$f(\{a_1, a_2\}) = \{b_1\}$.

$f(a_1) = b_1$

$f^{-1}(\{b_1\}) = \{a_1, a_2\}$.

$f^{-1}(\{b_3\}) = \emptyset$

1.3.48 Fie A, B mulțimi finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se determine cardinalul mulțimii $|B^A|$. $|B^A| = m^n$

Teorie:

$$\boxed{B^A = \{ f \mid f : A \to B \text{ funcții} \}.}$$

I. $|B| = m \Rightarrow B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$,

$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

$f(a) \in B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \to m$ posibilități

$f(a_2) \in \{b_1, \dots, b_m\} \to m$ posib.

. . . . .

$f(a_n) \in \{b_1, \dots, b_m\} \to m$ pos

Total $\underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{n \text{ ori}} = m^n$ funcții

Var II

x	a_1	a_2	$\dots$	a_n
$f_1(x)$	b_1	b_1	$\dots$	b_1
$f_2(x)$	b_2	b_1	$\dots$	b_1
$f_3(x)$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
$\vdots$				
$f_m(x)$	b_m	b_1	$\dots$	b_1
	b_1	b_2	$b_1 \dots$	b_1
	b_2	b_2	$b_1 \dots$	b_1
$f_{m^n}(x)$	b_m	b_m	$b_m \dots$	b_m

$f : A' \to B$.

Var III Inducție după $n \in \mathbb{N}^*$

$P(n) : |B^A| = m^n$, unde $n = |A|$

$n = 1$ $A = \{a_1\}$.

$\left.\begin{array}{l} f_i : A \to B \\ f_i(a_1) = b_i \end{array}\right\}$ m funcții

$|B^A| = m = m^1$

Pp $p(k) : |B^A| = m^k$, unde $k = |A|$

Dem $p(k+1)$

$|A'| = k+1$
$\Downarrow$ vrem $|B^{A'}| = m^{k+1}$

$A' = A \cup \{a_{k+1}\} = \{a_1, \dots, a_{k+1}\}$.

$f: A' \to B$

$f|_A : A \to B \rightsquigarrow m^k$ posibilități

$f(a_{k+1}) \in \{b_1, \dots, b_m\} \to m$ pos

Total $|B^{A'}| = m^k \cdot m = m^{k+1}$.

(1.3.49) Fie A și B mulțimi finite cu $|A| = n$ și $|B| = m$. Să se determine nr tuturor funcțiilor injective. (R: A_m^n

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

$B = \{b_1, \dots b_m\}$.

$\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\} \subseteq B$

f inj $\Rightarrow f(a_1), \dots, f(a_n)$ distincte 2 câte 2 $\Rightarrow$

Obs: Trebuie să avem $n \leq m$. ($\operatorname{Im} f \subset B$) $\Rightarrow |\operatorname{nr} f| = n$

Altfel dacă $n > m$, vor exista 0 funcții injective : $A \to B$

PP $n \leq m$

$f(a_1) \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \to m$ pos

$f(a_2) \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \setminus \{f(a_1)\} \to m-1$

$f(a_3) \in \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \setminus \{f(a_1), f(a_2)\} \Rightarrow m-2$ pos

Total $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{(m-n)(m-n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$

(1.3.50) $|A| = n$. nr fct bij $f: A \to A$.

$f(a_1) = \{a_2, a_3, \dots, a_n\} \to n$ valori.

$f(a_2) = \{a_3, a_4, \dots, a_n\} \to n-1$ valori.

$f(a_3) = \{a_4, a_5, \dots, a_n\} \to n-2$ valori

$\dots$

$f(a_n) = 1$ valoare $\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$

• Im $f = A \Rightarrow f$ surj $\Rightarrow$ funcțiile numărate sunt bijective

Obs: Dacă $f: A \to B$ este o funcție inj (r surj) și $|A| = |B| \in \mathbb{N}^*$ (finite) $\Rightarrow f$ bijectivă.

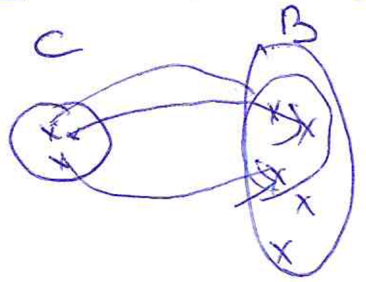
1.3.51 Fie B o mulțime finită cu $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor submulțimilor lui cu n elemente.

$$|R = \binom{m}{n} = C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

$$C \subseteq B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

$$C = \{c_1, \dots, c_n\}.$$

$$C \subseteq B \Longleftrightarrow \exists\, i: C \to B,\ i(x) = x.$$



clar i este injectivă

• Nr-ul tuturor funcțiilor injective ale lui C la B este $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$

$\Rightarrow$ Nr funcțiilor i este $\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$

1.3.52 $\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m$

I. submulțimi (deja)

II. inducție după m.

$C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m = 2^m$

nr submulțimilor de elemente i

$C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 + \dots + C_{m+1}^{m+1} = 2^{m+1}$

$C_{m+1}^k = C_m^k + C_m^{k-1}$ (dată)