SUBIECTUL E

1. Justificați cu definiția valoarea limitei:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n}{n^3+1} = 1$

limita FINITĂ de demonstrat

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a. î. $\forall n \geq n_0 \ |x_n - 1| < \varepsilon$

$\frac{n^3-n}{n^3+1} - 1 < \varepsilon$

$\frac{+n+1}{n^3+1} < \varepsilon$

majorez (cresc sus și scad jos)

$\frac{n+n}{n^3} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2n}{n^{3}} < \varepsilon \Leftrightarrow 2 \cdot n^{-2} < \varepsilon \ /:2$

$n^{-2} < \frac{\varepsilon}{2} \ /()^{-\frac{1}{2}}$

$n > \frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}} \Rightarrow$ alegem $n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}}\right] + 1$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{n^3+1} = 0$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ a. î. $\forall n \geq n_0 \ |x_n - 0| < \varepsilon$

$\frac{n^2-n}{n^3+1} < \varepsilon$ n-pozitiv

$< \frac{n^2-n+n}{n^3+1-1} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \varepsilon^{-1} \Rightarrow$ alegem $n_0 = [\varepsilon^{-1}] + 1$

2. Studiați convergența și absolut convergența seriei:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

absolut convergența $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} \sim \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} > \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ nu este absolut conv.

divergentă

$\frac{1}{1+\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ și $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ - divergentă ($p=1$)

$1+\sqrt{n} < n \ \forall n \geq 4$

studiem convergența

$a_m = \frac{1}{1+\sqrt{m}}$ - descrescător și $\lim_{m\to\infty} a_m = 0 \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot a_m$ - semiconvergentă

$\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{\sqrt{m+1}+1}{\sqrt{m}+1} > 1 \Rightarrow a_m > a_{m+1} \Rightarrow a_m$ - descrescător

b) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{1+m\sqrt{m}}$

studiem absolut convergența

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+m\sqrt{m}}$ comparăm cu $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ serie conv.

$\frac{1}{1+m\sqrt{m}} < \frac{1}{m\sqrt{m}}$ și $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m\sqrt{m}}$ - conv. $\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{1+m\sqrt{m}}$ - conv.

3. Determinați valorile extreme ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și verificați dacă se ating:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1 - \frac{x^3}{3}$ combinație de funcții elem. $\Rightarrow$ derivabilă pe $\mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x^2 = 0 \;/ : x \neq 0$

I $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = x \Rightarrow x\sqrt{x^2+1} = 1 \;/ ()^2$

$x^2(x^2+1) = 1$

$x^4 + x^2 - 1 = 0$

not $x^2 = t \Rightarrow x = \pm\sqrt{t}$

$t^2 + t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

$t_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$

II $x = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ prea mult de lucru $\Rightarrow$ met II et II :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - 1 - \frac{x^3}{3} = (\infty - \infty) = \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} - x^3\cdot\frac{1}{x^3} - x^3\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}\cdot x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - 1 - \frac{x^3}{3} = \infty - (-\infty) = \infty$$

=> valorile extreme ale funcției sunt ∞ și $-\infty$, iar ele nu se ating

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} - \frac{\sqrt{x^2+8} + x\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2+8}}}{x^2+8} =$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^2+8-x^2}{\sqrt{x^2+8}\,(x^2+8)} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{8}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2+8)\sqrt{x^2+8} = 8(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \quad /()^2$ - avem doar nr. poz.

$8^2 = 4^3 = 64$

$$(x^2+8)^3 = [4(x^2+1)]^3$$

$$x^2+8 = 4(x^2+1)$$

$$x^2+8 = 4x^2+4$$

$$3x^2-4=0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		∞
f'		- - - -	0	+ + +	0	- - -	
f	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

$f'(0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\underbrace{\frac{8}{x^2}}_{\to 0}}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

=> punctele de extrem ale funcției sunt $f(-\frac{2\sqrt{3}}{3})$ și $f(\frac{2\sqrt{3}}{3})$, iar ele se ating