

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/301770450>

Xử lý tín hiệu số (Digital Signal Processing)

Book · January 2012

CITATION

1

READS

55,575

3 authors:



Nguyen Linh-Trung

Vietnam National University, Hanoi

65 PUBLICATIONS 839 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Duc-Tan Tran

Phenikaa University

228 PUBLICATIONS 592 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Tue Huynh

International University, VNU-HCM, Vietnam

136 PUBLICATIONS 543 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



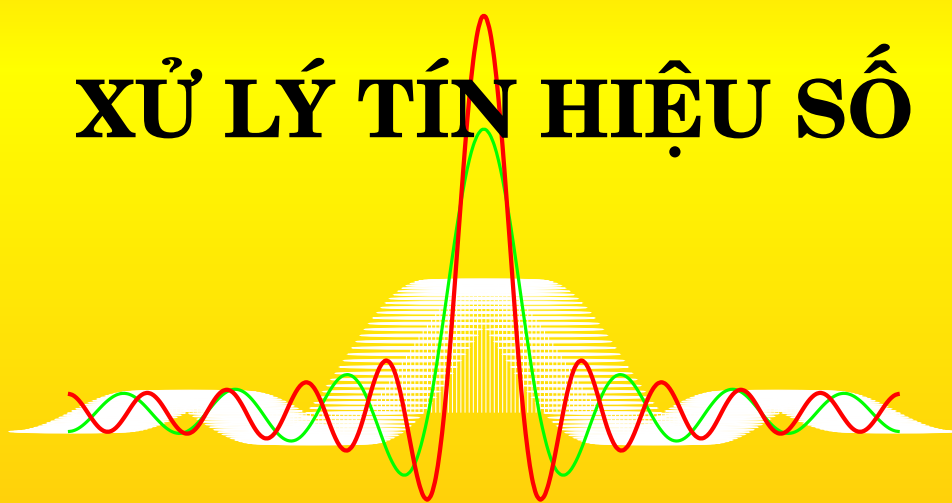
3-DOF Accelerometer [View project](#)



Quantum Computing [View project](#)

NGUYỄN LINH TRUNG, TRẦN ĐỨC TÂN, HUỖNH HỮU TUỆ

XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ

Trường Đại học Công nghệ

Đại học Quốc gia Hà Nội

Mục lục

Danh sách hình vẽ	iv
Danh sách bảng	xii
Lời nói đầu	xv
1 GIỚI THIỆU VỀ XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ	1
1.1 Tín hiệu là gì?	1
1.2 Hệ thống là gì?	4
1.3 Xử lý tín hiệu	4
1.4 Ứng dụng của xử lý tín hiệu số	5
1.5 Công nghệ xử lý tín hiệu số	9
2 SỐ HÓA TÍN HIỆU TƯƠNG TỰ	11
2.1 Mở đầu	11
2.2 Phương pháp lấy mẫu	13
2.3 Lấy mẫu thực tiễn	19
2.4 Lượng tử hóa	20
2.5 Mã hóa và biểu diễn nhị phân	21
2.6 Kết luận	23

Bài tập chương 2	24
3 TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC	27
3.1 Mở đầu	27
3.2 Tín hiệu rời rạc	29
3.2.1 Một số tín hiệu quan trọng	30
3.2.2 Phân loại tín hiệu	34
3.2.3 Một số tính toán đơn giản trên tín hiệu	37
3.3 Hệ thống rời rạc	40
3.3.1 Mô hình hệ thống	41
3.3.2 Phân loại hệ thống	42
3.3.3 Kết nối các hệ thống	45
3.4 Hệ thống tuyến tính bất biến	46
3.4.1 Ý nghĩa của đáp ứng xung và tích chập	49
3.4.2 Đáp ứng xung của hệ thống nối tiếp	51
3.4.3 Hệ thống tuyến tính ổn định	52
3.5 Biến đổi Z và áp dụng vào hệ thống tuyến tính bất biến	53
3.5.1 Biến đổi Z	54
3.5.2 Biến đổi Z ngược	59
3.5.3 Biến đổi Z và hệ thống tuyến tính bất biến	62
3.6 Biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc	66
3.6.1 Định nghĩa biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc	66
3.6.2 Áp dụng biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc vào hệ thống tuyến tính bất biến	67
3.6.3 Liên hệ giữa biến đổi Z và biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc	68
3.7 Kết luận	68
Bài tập chương 3	69
4 CẤU TRÚC CÁC BỘ LỌC SỐ	71

4.1	Hệ thống ARMA	71
4.2	Sơ đồ khối của hệ thống	73
4.3	Dạng trực tiếp của hệ thống ARMA	75
4.3.1	Dạng trực tiếp I	75
4.3.2	Dạng trực tiếp II	76
4.4	Dạng nối tiếp và song song của hệ thống ARMA	77
4.4.1	Dạng nối tiếp	77
4.4.2	Dạng song song	78
4.5	Dạng chéo của hệ thống MA có hệ số đối xứng	81
4.6	Ảnh hưởng của lượng tử hóa thông số	84
	Bài tập chương 4	86
5	THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ IIR	89
5.1	Lọc tương tự	90
5.1.1	Các phương pháp xấp xỉ Butterworth và Cheby- chev	98
5.1.2	Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông dải	106
5.1.3	Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc triệt dải	110
5.1.4	Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông cao	113
5.1.5	Đáp ứng tần số của bộ lọc theo bậc	116
5.2	Phương pháp đáp ứng bất biến	122
5.2.1	Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến	123
5.2.2	Thiết kế theo đáp ứng bậc thang bất biến	127
5.3	Phương pháp biến đổi song tuyến tính	132
5.3.1	Biến đổi song tuyến tính	133
5.3.2	Thiết kế theo biến đổi song tuyến tính	135
5.4	Thiết kế bộ lọc số thông dải	146

5.5	Thiết kế bộ lọc số triệt dải	153
5.6	Thiết kế bộ lọc số thông cao	155
	Bài tập chương 5	158
6	THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ FIR	161
6.1	Phương pháp cửa sổ	162
6.1.1	Bộ lọc lý tưởng	162
6.1.2	Phương pháp thiết kế cửa sổ	165
6.1.3	Thiết kế bộ lọc thông cao	183
6.1.4	Thiết kế bộ lọc thông dải	188
6.2	Phương pháp lấy mẫu trên miền tần số	192
6.3	Phương pháp thiết kế Parks-McClellan	195
6.3.1	Tiêu chí sai số minmax	202
6.3.2	Phương pháp thiết kế	204
	Bài tập chương 6	212
7	THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ ĐA VẬN TỐC	215
7.1	Hạ tốc	215
7.1.1	Những kết quả cơ bản	215
7.1.2	Phổ của tín hiệu hạ tốc	220
7.2	Tăng tốc	225
7.3	Thay đổi vận tốc theo một hệ số hữu tỷ	229
7.4	Biểu diễn đa pha	235
7.5	Kết luận	239
	Bài tập chương 7	241
	Tài liệu tham khảo	243
	Chỉ mục	245

Danh sách hình vẽ

1.1	Biểu diễn tín hiệu liên tục bằng hàm toán học.	2
1.2	Biểu diễn tín hiệu rời rạc.	2
1.3	Các loại tín hiệu tuần hoàn, năng lượng và ngẫu nhiên.	3
1.4	Hệ thống.	4
1.5	Lọc tương tự và lọc số.	6
1.6	Tiền xử lý tín hiệu điện não EEG dùng lọc.	8
1.7	Một số bộ DS μ P thông dụng của các hãng Texax Instruments, Analog Devices và Microchip.	10
2.1	Quá trình số hóa tín hiệu liên tục thành chuỗi bit.	12
2.2	Xung Dirac và chuỗi xung Dirac.	15
2.3	Phổ tuần hoàn theo Ω với chu kỳ Ω_0 (a) và phần phổ mong muốn (b).	17
2.4	Lọc sử dụng bộ lọc lý tưởng	18
2.5	Lấy mẫu thực tế.	20
2.6	Các kiểu lượng tử hóa.	22
3.1	Biểu diễn tín hiệu rời rạc bằng đồ thị.	30
3.2	Xung Kronecker $\delta(n)$	31
3.3	Tín hiệu thang đơn vị $u(n)$	32

3.4	Tín hiệu dốc đơn vị $u_r(n)$.	32
3.5	Tín hiệu mũ rời rạc.	33
3.6	Tín hiệu đối xứng và phản đối xứng.	36
3.7	Minh họa tín hiệu trễ và tín hiệu lùi.	38
3.8	Đổi chiều thời gian.	38
3.9	Sơ đồ khối hệ thống rời rạc.	41
3.10	Sơ đồ mô tả hệ thống thực thi bởi các bộ cộng, bộ khuếch đại và bộ dịch trễ đơn vị.	42
3.11	Kết nối nối tiếp.	46
3.12	Kết nối song song.	46
3.13	Tích chập.	52
3.14	Vùng hội tụ của tín hiệu nhân quả nằm ngoài vòng tròn có bán kính $ a $ của mặt phẳng z .	56
3.15	Vùng hội tụ của tín hiệu phản nhân quả nằm trong vòng tròn có bán kính $ b $ của mặt phẳng z .	57
3.16	Vùng hội tụ của tín hiệu không nhân quả nằm trong vành $ a < z < b $ trên mặt phẳng z .	58
3.17	Sơ đồ khối hệ thống biểu diễn bằng hàm truyền hệ thống $H(z)$.	64
4.1	Hình minh họa các bộ dịch trễ đơn vị, bộ khuếch đại và bộ cộng được sử dụng trong sơ đồ khối hệ thống.	74
4.2	Hình minh họa các bộ dịch trễ đơn vị, bộ khuếch đại và bộ cộng trong sơ đồ dòng chảy tín hiệu.	75
4.3	Biểu diễn mắc chồng tầng của hệ thống ARMA.	76
4.4	Thực thi cấu trúc hệ thống mắc chồng tầng.	77
4.5	Cấu trúc trực tiếp I.	78
4.6	Hoán vị hai cấu trúc $H_1(z)$ và $H_2(z)$.	79
4.7	Cấu trúc trực tiếp II (cấu trúc trực tiếp chuyển vị).	80
4.8	Cấu trúc nối tiếp.	80
4.9	Thực thi cấu trúc trực tiếp.	81

4.10 Ghép nối song song	81
4.11 Cấu trúc khối thang chéo.	82
4.12 Cấu trúc thang chéo trong trường hợp M lẻ.	83
4.13 Cấu trúc thang chéo [Ví dụ 4.1].	84
4.14 Cấu trúc thang chéo [Ví dụ 4.2].	84
4.15 Sơ đồ hệ thống [Bài tập 4.1].	86
4.16 Sơ đồ hệ thống [Bài tập 4.5].	87
4.17 Giảm đồ nghiệm cực – nghiệm không [Bài tập 4.6].	88
5.1 Đầu vào và đầu ra của một hệ thống không làm méo.	92
5.2 Đáp ứng tần số biên độ và đáp ứng tần số pha của bộ lọc lý tưởng.	94
5.3 Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc thực tiễn.	95
5.4 Độ trễ pha và độ trễ nhóm.	96
5.5 Minh họa nghiệm không và nghiệm cực trong mặt phẳng s	97
5.6 Nghiệm không và nghiệm cực của $H(s)H(-s)$ [Phương trình (5.17)].	98
5.7 Đáp ứng tần số của họ bộ lọc Butterworth với các bậc khác nhau, và có cùng tần số cắt chuẩn hóa $\Omega_c = 1$ rad/s.	99
5.8 Giảm đồ điểm cực điểm không	100
5.9 Gợn sóng dải triệt	103
5.10 Gợn sóng dải thông	104
5.11 Biến đổi thông thấp thành thông dải.	107
5.12 Đáp ứng tần số biên độ của lọc thông thấp và bộ lọc thông dải tương ứng.	108
5.13 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc thông thấp và bộ lọc triệt dải tương ứng.	111
5.14 Biến đổi thông thấp thành triệt dải.	112
5.15 Biến đổi thông thấp thành thông cao.	114

5.16 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc thông thấp và bộ lọc thông cao tương ứng.	115
5.17 Bộ lọc Butterworth với n nghiệm cực.	116
5.18 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 0.1 và 0.5 dB.	117
5.19 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 1 và 1.5 dB.	118
5.20 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 2.5 và 3 dB.	119
5.21 Định nghĩa B và B_x	121
5.22 Mô tả lấy mẫu $f_a(t)$	122
5.23 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.8].	126
5.24 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.9].	128
5.25 Bộ lọc tương tự và số có đáp ứng bậc thang giống nhau.	129
5.26 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.10].	131
5.27 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.11].	132
5.28 Phân tích tích phân Hình thang.	134
5.29 Mối liên hệ giữa p và z qua phép biến đổi song tuyến tính.	136
5.30 Mối liên hệ giữa Ω và ω	137
5.31 Mối liên hệ giữa $ G(j\Omega) $ và $ H(e^{j\omega}) $	137
5.32 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.12].	139
5.33 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.13].	141
5.34 Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.14].	142

5.35	Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải bậc 4 [Ví dụ 5.17].	151
5.36	Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc triệt dải [Ví dụ 5.19].	155
5.37	Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc số thông cao [Ví dụ 5.20].	157
5.38	Hệ thống cần xác định hàm truyền tương đương.	160
6.1	Bộ lọc lý tưởng.	163
6.2	Đáp ứng tần số của hệ thống xấp xỉ.	164
6.3	Hàm chữ nhật $\text{rect}(t)$ và cửa sổ chữ nhật $w_{\text{cn}}(n)$.	167
6.4	Đáp ứng tần số $W_{\text{cn}}(e^{j\omega})$ của cửa sổ chữ nhật $w_{\text{tg}}(n)$.	168
6.5	Hàm tam giác $\text{tri}(t)$ và cửa sổ tam giác $w_{\text{tg}}(n)$.	169
6.6	Đáp ứng tần số $W_{\text{tg}}(e^{j\omega})$ của cửa sổ tam giác $w_{\text{tg}}(n)$ với các chiều dài khác nhau.	171
6.7	So sánh đáp ứng tần số của cửa sổ chữ nhật và tam giác.	172
6.8	So sánh đáp ứng tần số của bộ lọc thiết kế dùng cửa sổ chữ nhật và cửa sổ tam giác, với tần số cắt $\nu_c = 0,25$.	173
6.9	Các tham số tần số góc thiết kế.	173
6.10	So sánh đáp ứng tần số các cửa sổ.	175
6.11	Minh họa đáp ứng tần số của một bộ lọc thông thấp.	176
6.12	Minh họa chiều dài bộ lọc phụ thuộc vào tần số cắt và bề rộng của dải chuyển tiếp.	177
6.13	Ảnh hưởng của các cửa sổ, với chiều dài $L = 21$.	180
6.14	Đáp ứng biên độ bộ lọc số FIR dùng cửa sổ Hanning, có được thông qua hai bước thiết kế: (1) thiết kế lần thứ nhất và (2) điều chỉnh thiết kế.	182
6.15	Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng cửa sổ Blackman.	184
6.16	Thiết kế thông cao.	185
6.17	Thiết kế bộ lọc thông cao sử dụng cửa sổ Hanning theo hai cách, với $L = 33$ và $\nu_c = 0,15$.	187
6.18	Thiết kế thông dải.	188

6.19 Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp tương ứng với cửa sổ Hamming, dùng để thiết kế bộ lọc thông dải theo yêu cầu.	191
6.20 Thiết kế bộ lọc FIR thông dải, $L = 27$, $\nu_c = 0,956$	192
6.21 Minh họa phương pháp thiết kế bằng lấy mẫu tần số.	194
6.22 So sánh đáp ứng tần số biên độ.	195
6.23 Đáp ứng tần số lý tưởng của bộ lọc thông dải được lấy mẫu.	196
6.24 So sánh đáp ứng tần số biên độ khi có điểm bất liên tục (nét liền) và khi có sự giảm bớt bất liên tục (nét đứt).	196
6.25 Mặt nạ biên độ của $A(e^{j\omega})$	201
6.26 Đáp ứng tần số có gợn sóng đều, với $\nu_p = 0,2$, $\nu_s = 0,3$. Có bốn tần số tối ưu trong dải thông và bốn trong dải triệt.	205
6.27 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp [Ví dụ 6.8].	207
6.28 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp trong dải thông và dải triệt [Ví dụ 6.8].	207
6.29 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp và dải thông trong dải triệt sau khi nâng bậc bộ lọc [Ví dụ 6.8].	208
6.30 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải [Ví dụ 6.9].	208
6.31 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải trong dải thông và dải triệt [Ví dụ 6.9].	209
6.32 Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải trong dải thông và dải triệt sau khi nâng bậc bộ lọc [Ví dụ 6.9].	209
6.33 Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc vi phân.	210
6.34 Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc Hilbert.	211
6.35 Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vi phân [Bài tập 6.8].	214
7.1 Sơ đồ khối của phép hạ tốc.	216
7.2 Phổ tín hiệu trước và sau khi hạ tốc M lần.	217
7.3 Áp dụng lọc thông thấp để tránh gập phổ.	218

7.4	Đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp [Ví dụ 7.1].	219
7.5	Mối liên hệ giữa $x(n)$, $x_e(n)$ và $x_{ M}(n)$, với $M = 2$	222
7.6	Minh họa phổ tín hiệu hạ tốc $M = 2$ lần.	223
7.7	Minh họa phổ tín hiệu hạ tốc $M = 3$ lần.	224
7.8	Đẳng thức Noble trong trường hợp hạ tốc: (a) và (b) là tương đương.	225
7.9	Mở rộng đẳng thức Noble trong trường hợp hạ tốc: (a) và (b) là tương đương.	225
7.10	Mối liên hệ giữa $x(n)$ và $x_{ N}(n)$ với $N = 3$	226
7.11	Sơ đồ biểu diễn phép tăng tốc.	226
7.12	Bộ lọc tăng tốc.	227
7.13	Minh họa phổ tín hiệu tăng tốc.	227
7.14	Lọc thông thấp để loại ảnh phổ trong bộ tăng tốc.	228
7.15	Bộ lọc nội suy có tần số cắt 0,125.	229
7.16	Thay đổi vận tốc theo hệ số hữu tỷ M/N	230
7.17	Kết hợp hai bộ lọc. Tần số cắt của bộ lọc kết hợp là giá trị nhỏ nhất của các tần số cắt của các bộ lọc thành phần: $\nu_c = \min\left\{\frac{0,5}{N}, \frac{0,5}{M}\right\}$	230
7.18	Đẳng thức Noble trong trường hợp tăng tốc: (a) và (b) là tương đương.	231
7.19	Mở rộng đẳng thức Noble trong trường hợp tăng tốc: (a) và (b) là tương đương.	231
7.20	Hệ thống chuyển đổi tín hiệu từ CD sang DAT [Ví dụ 7.3].	232
7.21	Đáp ứng bộ lọc đa vận tốc kết nối CD với DAT [Ví dụ 7.3].	233
7.22	Hệ thống chuyển đổi tín hiệu từ CD sang DAT trong thực tiễn. Các vận tốc hữu tỷ là 3/4, 7/4 và 7/10.	234
7.23	Ghép nối bộ sớm pha và bộ hạ tốc.	236
7.24	Phân tích thành M thành phần pha.	236
7.25	Sơ đồ khối bộ lọc đa pha: (a) và (b) là tương đương.	237

7.26 Áp dụng biểu diễn đa pha vào một hệ thống có chiều dài lớn. Hệ thống (a) được phân tích đa pha thành hai hệ thống tương đương (b) và (c).	238
7.27 Áp dụng biểu diễn đa pha vào một hệ thống có chiều dài lớn: thực hiện về mặt điện tử.	239
7.28 Phổ tín hiệu trước khi hạ tốc [Bài tập 7.3].	241

Giáo trình
Xử lý tín hiệu số
Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội
2012

Danh sách bảng

3.1	Một số biến đổi Z thông dụng.	59
3.2	Tính chất của biến đổi Z	60
5.1	Đa thức Butterworth chuẩn hóa	101
5.2	Đa thức Chebychev	102
6.1	Các hàm cửa sổ thông dụng	174
6.2	Bảng tra giá trị của các cửa sổ thông dụng	178
6.3	Tập hợp các dải tần có đặc tả	203
7.1	Hệ số của bộ lọc thông thấp [Ví dụ 7.1].	220

Giáo trình
Xử lý tín hiệu số
Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội
2012

Lời nói đầu

Giáo trình “Xử lý tín hiệu số” mà bạn đang cầm trong tay được xây dựng theo chuỗi các môn học về lĩnh vực xử lý tín hiệu, được giảng dạy thông dụng ở các trường đại học trên thế giới cũng như Việt Nam ở bậc đại học và sau đại học, bao gồm: Tín hiệu và hệ thống, Xử lý tín hiệu số, Xử lý tín hiệu nâng cao, Xử lý tín hiệu ngẫu nhiên, v.v.

“Tín hiệu và hệ thống” thường đề cập đến các khái niệm về tín hiệu theo thời gian liên tục và theo thời gian rời rạc, phổ tần số của chúng, về hệ thống và các đặc trưng cơ bản của một hệ thống như tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

Với kiến thức cơ bản về tín hiệu và hệ thống, giáo trình “Xử lý tín hiệu số” này sẽ tập trung phân tích vai trò “lọc” của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian rời rạc và tìm hiểu các phương pháp thiết kế các bộ lọc tuyến tính bất biến để đáp ứng yêu cầu mà bộ lọc cần thỏa mãn trong miền tần số.

Phương pháp trình bày của giáo trình tương đối khác những giáo trình quen thuộc bằng tiếng Việt hay tiếng nước ngoài. Phần chủ đạo là ý nghĩa vật lý của các phương pháp được trình bày. Trước khi thảo luận về lọc, các khái niệm và ý nghĩa quan trọng về tín hiệu và hệ thống được trình bày khá chặt chẽ. Từ đó, các phương pháp cơ bản về thiết kế các bộ lọc số được giới thiệu và khai triển một cách tự nhiên. Ngoài ra, giáo trình cũng sử dụng các ví dụ với nhiều khía cạnh thực tế để giúp người học hiểu rõ hơn ý nghĩa và tính thực tiễn của các phương pháp thiết kế.

Đây là một giáo trình với tất cả ràng buộc của nó, không phải là một cuốn sách dành cho tham khảo. Vì vậy, các đề tài được chọn lựa khá kỹ lưỡng, nhằm có thể trình bày những khái niệm cơ bản thành một thể thống nhất, giúp người học hiểu rõ những lý do và ý nghĩa của những khái niệm cũng như các phương pháp thiết kế. Mục tiêu

của giảng dạy là làm cho người học hiểu rõ ràng phía sau của các công thức, các chương trình tính toán. Được như vậy, thì sinh viên có thể sử dụng dễ dàng những công cụ đã được tiếp cận trong giai đoạn đào tạo tại đại học cho công việc thực tế của mình.

Hy vọng giáo trình này đáp ứng được nhu cầu học tập của sinh viên và quan điểm sư phạm của giáo trình có cơ hội giúp sinh viên hiểu rõ hơn phương pháp tư duy mà một kỹ sư cần nắm vững. Rất mong nhận được ý kiến đóng góp của độc giả để nhóm tác giả hoàn thiện giáo trình này cho những lần tái bản sau. Mọi phản hồi xin liên hệ về linhtrung@vnu.edu.vn.

Cuối cùng, nhóm tác giả xin trân trọng cảm ơn tập thể thành viên của Phòng thí nghiệm Xử lý tín hiệu của Trường Đại học Công nghệ đã góp những ý kiến quý báu trong quá trình biên soạn và chỉnh sửa giáo trình, và đặc biệt là sự miệt mài và cẩn mẫn của ThS. Trương Minh Chính trong chế bản toàn bộ giáo trình bằng \LaTeX để có được phiên bản đẹp và rõ ràng như các bạn đang cầm trong tay. Bên cạnh, các ý kiến đóng góp quý báu của các hội đồng nghiệm thu, và đặc biệt là của các phản biện – PGS.TS. Bạch Gia Dương và TS. Nguyễn Quốc Tuấn trong Khoa Điện tử Viễn thông của Trường Đại học Công nghệ, PGS.TS. Trần Xuân Nam từ Học viện Kỹ thuật Quân sự, PGS.TS. Đỗ Ngọc Minh từ Đại học Illinois–, góp phần làm cho nội dung giáo trình phong phú hơn. Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn Trường Đại học Công nghệ đã hỗ trợ kinh phí để nhóm tác giả có điều kiện thực hiện biên soạn giáo trình này.

Nguyễn Linh Trung

Trần Đức Tân

Trường Đại học Công nghệ

Đại học Quốc gia Hà Nội

Huỳnh Hữu Tuệ

Trường Đại học Quốc tế

Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh

Chương 1

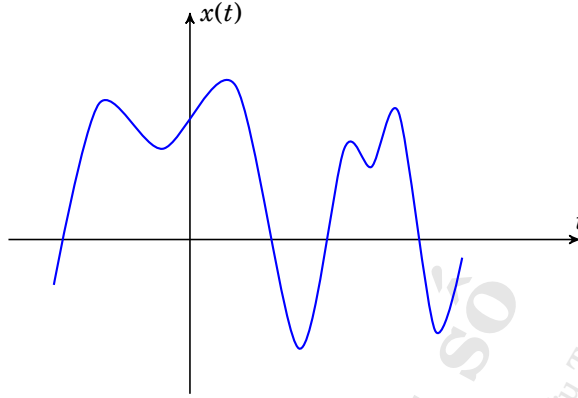
GIỚI THIỆU VỀ XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Giáo trình này phân tích vai trò **lọc** của một hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian rời rạc và nghiên cứu các phương pháp thiết kế các bộ lọc tuyến tính bất biến để đáp ứng yêu cầu mà bộ lọc cần thỏa mãn trong miền tần số. Để hiểu rõ hơn nội dung chính của giáo trình, trong chương giới thiệu này chúng tôi trình bày những khái niệm cơ bản nói trên một cách ngắn gọn và nhấn mạnh đặc biệt vai trò của xử lý tín hiệu số trong thời đại mà các hệ vi xử lý phát triển mạnh mẽ.

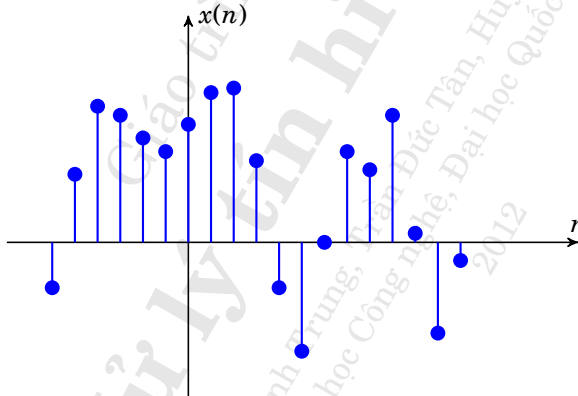
1.1 Tín hiệu là gì?

Khi nghiên cứu một hiện tượng vật lý nào đó, người ta thường quan sát những đại lượng vật lý đặc trưng của hiện tượng này. Phương pháp quan sát chính thường dùng là đo lường. Các đại lượng vật lý được chuyển thành những dòng điện hay hiệu điện thế, được gọi là tín hiệu mà các máy đo có thể thu nhận được. Như vậy, thông tin đặc trưng của các đại lượng vật lý đang được quan tâm sẽ hoàn toàn được chứa đựng trong các tín hiệu này.

Hình 1.1 biểu diễn một tín hiệu bằng một hàm toán học $x(t)$ biến thiên theo biến độc lập t . Thông thường, t chỉ định thời gian, tuy nhiên tổng quan hơn t có thể có bất cứ dạng nào, và là một biến vô hướng hoặc là nhiều biến vô hướng độc lập (theo dạng véc-tơ).



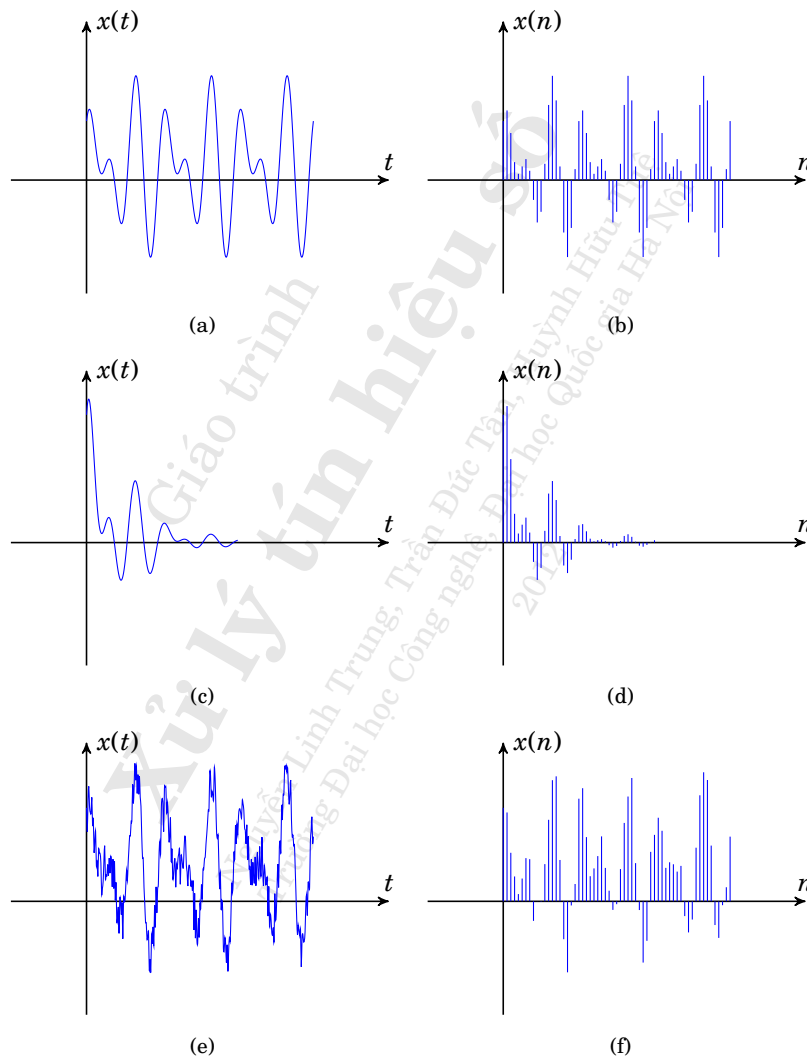
Hình 1.1: Biểu diễn tín hiệu liên tục bằng hàm toán học.



Hình 1.2: Biểu diễn tín hiệu rời rạc.

Trong giáo trình này, trường hợp t là một biến vô hướng sẽ được quan tâm giải quyết. Nếu miền xác định của t là đường thẳng thực \mathbb{R} thì $x(t)$ được gọi là **tín hiệu thời gian liên tục** hay là **tín hiệu tương tự**. Còn nếu miền này là tập các số nguyên \mathbb{Z} thì $x(t)$ được gọi là **tín hiệu theo thời gian rời rạc** và thường được viết là $x(n)$ với n là biến nguyên. Trong trường hợp này, tín hiệu thời gian rời rạc là một chuỗi các giá trị $\{\dots, x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$. Hình 1.2 biểu diễn một tín hiệu rời rạc $x(n)$.

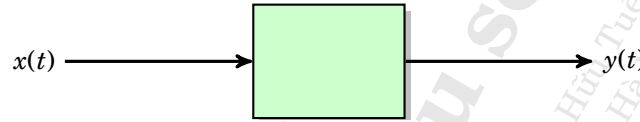
Các tín hiệu quan trọng thường gặp được phân thành ba loại: tín hiệu tuần hoàn, tín hiệu năng lượng và tín hiệu ngẫu nhiên. Dạng liên tục và dạng rời rạc của các loại tín hiệu này được minh họa ở hình 1.3.



Hình 1.3: Các loại tín hiệu tuần hoàn, năng lượng và ngẫu nhiên.

1.2 Hệ thống là gì?

Các tín hiệu thường chạy xuyên qua các mạch điện, các hệ cơ điện tử hoặc một hệ vật lý bất kỳ nào đó để cho một tín hiệu khác ký hiệu là $y(t)$. Khái niệm này được minh họa ở hình 1.4, trong đó $x(t)$ được gọi là tín hiệu đầu vào hoặc tín hiệu vào, $y(t)$ được gọi là tín hiệu đầu ra hay tín hiệu ra. Ta cũng gọi $x(t)$ là tín hiệu kích thích và $y(t)$ là tín hiệu đáp ứng. Hình 1.4 thường được dùng để mô tả một



Hình 1.4: Hệ thống.

cách tổng quát tất cả các hệ thống mà chúng ta quan tâm, tức là hệ thống này có thể là một hệ thống vật lý có sẵn, một hệ thống cơ điện tử có sẵn, một dây chuyền sản xuất, một phản ứng hóa học, v.v. Mô tả mối liên hệ bằng một phương trình toán học nối kết đầu ra $y(t)$ và đầu vào $x(t)$ được gọi là mô hình của hệ thống. Mô hình này chứa đựng tất cả các đặc trưng của hệ thống vật lý, chẳng hạn như tuyến tính, bất biến, ổn định, nhân quả.

1.3 Xử lý tín hiệu

Trong giáo trình này, ta đặc biệt quan tâm đến các hệ thống do chính chúng ta thiết kế. Thiết kế một hệ thống để thu thập thông tin ta quan tâm chứa trong tín hiệu đầu vào $x(t)$ được gọi là xử lý tín hiệu. Như thế, nói một cách rất tổng quát, xử lý tín hiệu bao gồm tất cả những áp dụng mà chúng ta có thể hình dung, cần sử dụng tất cả các phương pháp luận hiện hữu trong điện tử, lọc tín hiệu, xử lý thông tin, lý thuyết nhận dạng, v.v. Tóm lại, xử lý tín hiệu là tất cả những gì liên quan đến xử lý thông tin ngày hôm nay.

Giáo trình này chỉ giới hạn vào một lĩnh vực và rất cơ bản có tên là lọc. Lọc một tín hiệu tức loại ra khỏi tín hiệu những thành phần

được xem là nhiều. Khái niệm lọc này xuất hiện từ đầu thế kỷ 20 và chủ yếu được triển khai mạnh mẽ trước, trong và sau thế chiến thứ hai, có tên là thiết kế các bộ lọc tương tự.

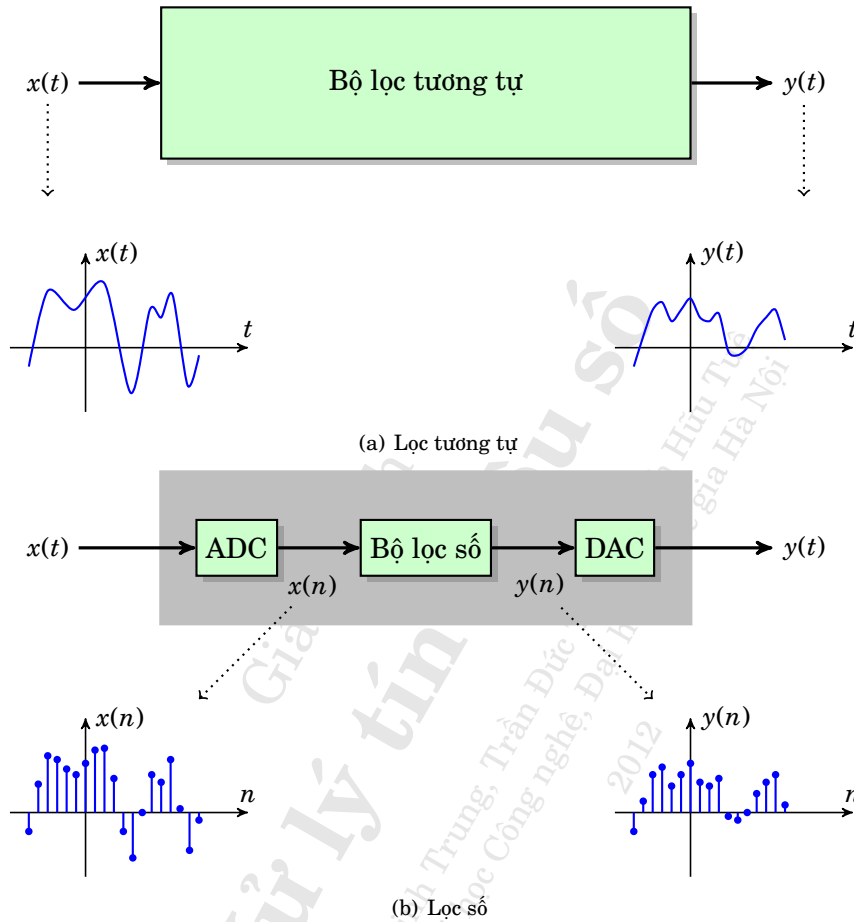
Những năm 60 của thế kỷ trước, khi máy tính được đưa vào sử dụng thì các nhà nghiên cứu tìm cách chuyển hóa tác động các bộ lọc tương tự thành các thuật toán mà máy tính có thể thực hiện được. Các thuật toán này được mang tên là **bộ lọc số**. Trong giáo trình này, xử lý tín hiệu số tương ứng với chuyển hóa các hệ thống liên tục thành các hệ thống rời rạc, xây dựng các thuật toán để lọc các tín hiệu rời rạc. Nếu cần thiết, tín hiệu rời rạc sau khi lọc được chuyển hóa thành tín hiệu theo thời gian liên tục.

Trong hình 1.5, tín hiệu tương tự $x(t)$ sẽ được số hóa để cho ta một tín hiệu $x(n)$ và được bộ lọc số xử lý cho đầu ra là $y(n)$. Hình này minh họa kết quả là tất cả các bộ lọc tương tự đều có thể thực hiện bằng máy tính.

1.4 Ứng dụng của xử lý tín hiệu số

Xử lý tín hiệu số được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực. Sau đây chúng tôi liệt kê một số ứng dụng truyền thống:

- *Không gian*: nén ảnh, nâng cao chất lượng ảnh, phân tích cảm biến thông minh bằng các máy thăm dò;
- *Y học*: tạo ảnh chẩn đoán (CT, MRI, siêu âm, v.v.), phân tích điện não, điện tim, v.v., lưu trữ và truy vấn ảnh y học.
- *Thương mại*: nén ảnh và âm thanh, hiệu ứng đặc biệt trong phim ảnh, hội nghị qua video;
- *Thoại*: nén tiếng nói và dữ liệu, giảm độ vọng, hợp kênh tín hiệu, lọc;
- *Quân sự*: radar, sonar, dẫn đường, truyền thông bảo mật;
- *Công nghiệp*: thăm dò khoáng sản, giám sát và điều khiển quá trình, kiểm tra sản phẩm, công cụ thiết kế CAD.



Hình 1.5: Lọc tương tự và lọc số.

- **Khoa học:** đo đạc và phân tích động đất, thu thập dữ liệu, phân tích phổ, mô hình hóa và mô phỏng.

Như đã nói trên đây, giáo trình này tập trung giải quyết về lọc tín hiệu thông qua các bộ lọc số. Để có thể thấy được tác dụng của lọc trong thực tiễn, ta xem xét một ví dụ xử lý tín hiệu điện não (EEG) thô để từ đó các bác sĩ thần kinh có thể phân tích điện não của người bệnh.

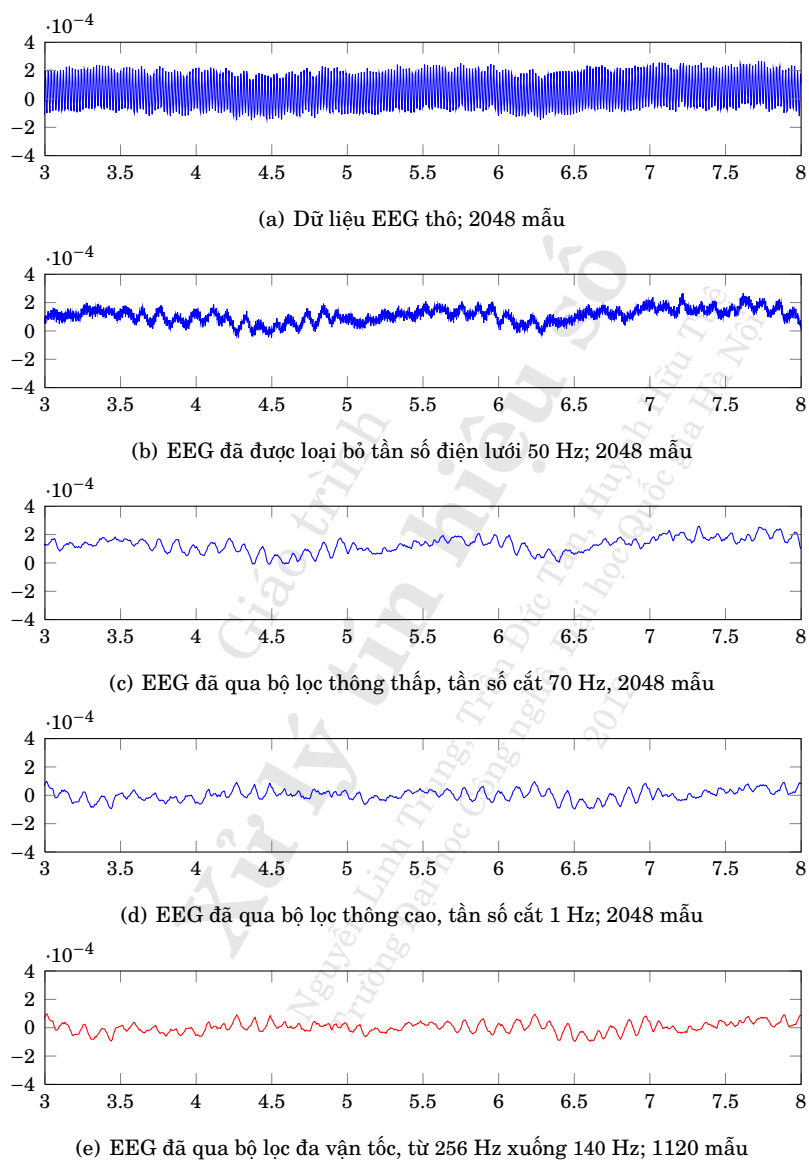
Hình 1.6 biểu diễn biên độ (Volt) của một đoạn tín hiệu điện não của một người bệnh được đo trong khoảng thời gian 5 giây. Hình 1.6(a) là tín hiệu EEG thô, được trích từ máy đo. Tín hiệu này được đo với vận tốc lấy mẫu 256 Hz và số mẫu ta đang quan sát là 2048. Rõ ràng, ta không thấy rõ tín hiệu này chứa đựng thông tin gì, vì nó bị tác động bởi tần số của điện lưới (50 Hz). Tần số này được loại đi bằng cách sử dụng một bộ lọc triệt tần số 50 Hz, để có kết quả lọc như trên hình 1.6(b).

Tiếp đến, thực tế trong đọc điện não, dải tần liên quan đến các hoạt động của não mà bác sĩ không quan tâm nằm trong khu vực lớn hơn 70 Hz, vì thế ta có thể loại bỏ những tần số cao này bằng cách cho tín hiệu đi qua một bộ lọc thông thấp có tần số cắt là 70 Hz, kết quả lọc như trên hình 1.6(c).

Bên cạnh, các xu hướng chứa đựng trong tín hiệu điện não (như đi lên, đi xuống, dịch lên cao, dịch xuống thấp, ...) thường là có tần số thấp và được loại bỏ bằng cách cho qua một bộ lọc thông cao có tần số cắt 1 Hz, kết quả lọc như trên hình 1.6(d). Ta thấy rằng biên độ tín hiệu đã được dịch chuyển về xung quanh giá trị 0, thay vì 2 như trên hình 1.6(c). Đến đây, bác sĩ đã có thể dùng tín hiệu ở hình 1.6(d) để phân tích.

Tuy nhiên, nếu một kỹ sư muốn dùng các công cụ xử lý tín hiệu tiên tiến để giúp bác sĩ tìm kiếm các thông tin liên quan đến bệnh (như gai động kinh của bệnh nhân động kinh), họ có thể thực hiện một xử lý tiếp theo là thay đổi vận tốc lấy mẫu. Quả thực, tín hiệu thô đã được đo với vận tốc lấy mẫu là 256 Hz nhưng tần số cần quan sát tối đa là 70 Hz (vì đã lọc thông thấp trên đây). Như vậy ta có thể thay đổi lại tần số lấy mẫu (bằng xử lý số) thành 140 Hz. Kết quả có được như trong hình 1.6(e). Nhìn qua thì hình dạng giống hệt như hình 1.6(d), tuy nhiên tín hiệu saucó số mẫu ít hơn nhiều so với tín hiệu trước (1120 mẫu so với 2048). Điều này rất có lợi cho ứng dụng các xử lý tiếp theo số mẫu cần xử lý là ít hơn.

Các loại bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải, triệt dải được được tập trung tìm hiểu trong các chương 5 và 6. Việc thay đổi vận tốc lấy mẫu được đề cập đến trong chương 7.



Hình 1.6: Tiền xử lý tín hiệu điện não EEG dùng lọc.

1.5 Công nghệ xử lý tín hiệu số

Hiện nay, người ta đã thiết kế những máy tính nhỏ đặc biệt để sử dụng cho xử lý tín hiệu có chất lượng tốt hơn rất nhiều và giá rẻ hơn rất nhiều so với các máy tính phổ cập. Những máy tính xử lý tín hiệu số này có tên là **bộ vi xử lý tín hiệu (DS μ P)***.

Bộ vi xử lý tín hiệu DS μ P là một bộ vi xử lý đặc biệt có cấu trúc được thiết kế một cách tối ưu để thực hiện nhanh chóng một số khối lượng tính toán lớn và phức tạp cần thiết cho các thuật toán xử lý tín hiệu số. Trong các thuật toán xử lý tín hiệu, phép tính cơ bản nhất là **nhân rồi cộng và lưu giữ kết quả[†]**. Phép tính này sau đây sẽ được gọi là toán tử cơ bản. Ngoài hoạt động tính toán, DS μ P cũng cần thường xuyên đọc dữ liệu đầu vào và viết dữ liệu đầu ra thật nhanh, vì hầu hết các áp dụng thực tế đều theo thời gian thực. Như thế nếu ta muốn bộ DS μ P có chất lượng cao, nó cần có một cấu trúc thích hợp, khác với một bộ vi xử lý bình thường.

Phần lớn, các DS μ P đều sử dụng tính toán với dấu chấm cố định[‡], bởi vì một mạch điện tử nhân[§] có cấu trúc đơn giản và nhanh hơn rất nhiều so với dấu chấm động[¶]. Hơn nữa, phép tính với dấu chấm cố định có độ chính xác hoàn toàn chấp nhận được đối với hầu hết các áp dụng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số. Tất nhiên là, trong một số trường hợp đặc biệt đòi hỏi độ chính xác tính toán cao, lúc đó ta phải sử dụng một DS μ P có dấu chấm động như bộ vi xử lý số TMS320C67x do hãng Texas Instruments sản xuất.

Trong một thiết bị có sử dụng DS μ P như các modem, điện thoại di động, TV chất lượng cao, vận tốc xử lý là yếu tố quan trọng hàng đầu. Thông thường là chạy các chương trình chỉ vài trăm hàng, có chứa vòng lặp. Để bảo đảm chất lượng của hệ thống, nhiều nhà lập trình sử dụng ngôn ngữ Assembly và phân tích chi ly hoạt động của hệ thống lúc chạy chương trình này, nhằm điều chỉnh chương trình

*DS μ P: Digital Signal Microprocessor.

†Multiply-Accumulate

‡Fixed point.

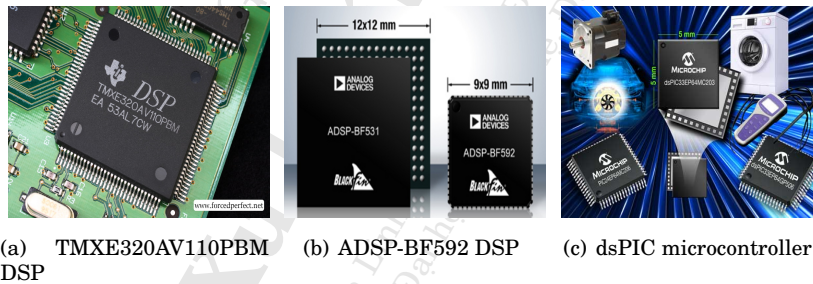
§Multiplier.

¶Floating point.

thể nào để có kết quả tốt nhất. Tuy nhiên, nếu $DS\mu P$ có cấu trúc phức tạp, thì khó có thể tối ưu hóa chương trình một cách thủ công như vậy. Trong trường hợp này, ta có thể sử dụng ngôn ngữ C để lập trình và hy vọng trình biên dịch* sẽ cho ta kết quả tốt. Tuy nhiên, ta vẫn có thể theo dõi hoạt động của hệ thống và vẫn có thể điều chỉnh mã lệnh để có thể đạt kết quả có chất lượng cao hơn. Ngoài ra, trong MATLAB có một số chương trình cho phép lập trình trên $DS\mu P$.

Sự chọn lựa giữa các ngôn ngữ phụ thuộc vào một số yếu tố như độ phức tạp của chương trình, vận tốc xử lý ta muốn có, giá cả của thành phẩm, các công cụ phát triển hệ thống của công ty sản xuất $DS\mu P$.

Hiện nay, có khá nhiều công ty đưa ra trên thị trường một số $DS\mu P$ có cấu trúc khác nhau, tích hợp hay không tích hợp hai bộ phận ADC và DAC[†] (xem hình 1.5), và với nhiều giá cả khác nhau, từ vài đến vài trăm đô-la, đặc biệt là ba công ty Microchip, Analog Devices và Texas Instruments. Hình 1.7 minh họa ví dụ về một số bộ $DS\mu P$ của các công ty này.



Hình 1.7: Một số bộ $DS\mu P$ thông dụng của các hãng Texas Instruments, Analog Devices và Microchip.

* Compiler.

[†] ADC: Analog-to-Digital Converter. DAC: Digital-to-Analog Converter.

Chương 2

SỐ HÓA TÍN HIỆU TƯƠNG TỰ

2.1 Mở đầu

Như đã biết, một đại lượng vật lý được biểu diễn bởi một hàm biến thiên theo thời gian liên tục, còn gọi là một tín hiệu theo thời gian liên tục. Để xử lý tín hiệu theo thời gian liên tục này bằng máy tính, trước hết cần số hóa nó, tức là biểu diễn nó bằng một chuỗi số mà máy tính có thể đọc và xử lý được. Quá trình số hóa gồm ba bước theo thứ tự sau: **lấy mẫu**^{*}, **lượng tử hóa**[†] và **mã hóa**[‡].

Lấy mẫu là lấy các giá trị của tín hiệu tại các thời điểm rời rạc. Do đó, lấy mẫu còn gọi là rời rạc hóa. Lượng tử hóa là làm gần đúng giá trị của tín hiệu tại thời điểm lấy mẫu với các mức lượng tử (giá trị rời rạc). Lượng tử hóa được xác định bởi độ chính xác của máy tính. Mã hóa là biểu diễn một số theo hệ thống nhị phân mà máy tính có thể đọc được. Do đó, đây là hoạt động quan trọng nhất trong quá trình số hóa. Ba thao tác trên được kết hợp thực hiện trong **bộ biến đổi tương tự – số**, viết tắt là ADC[§].

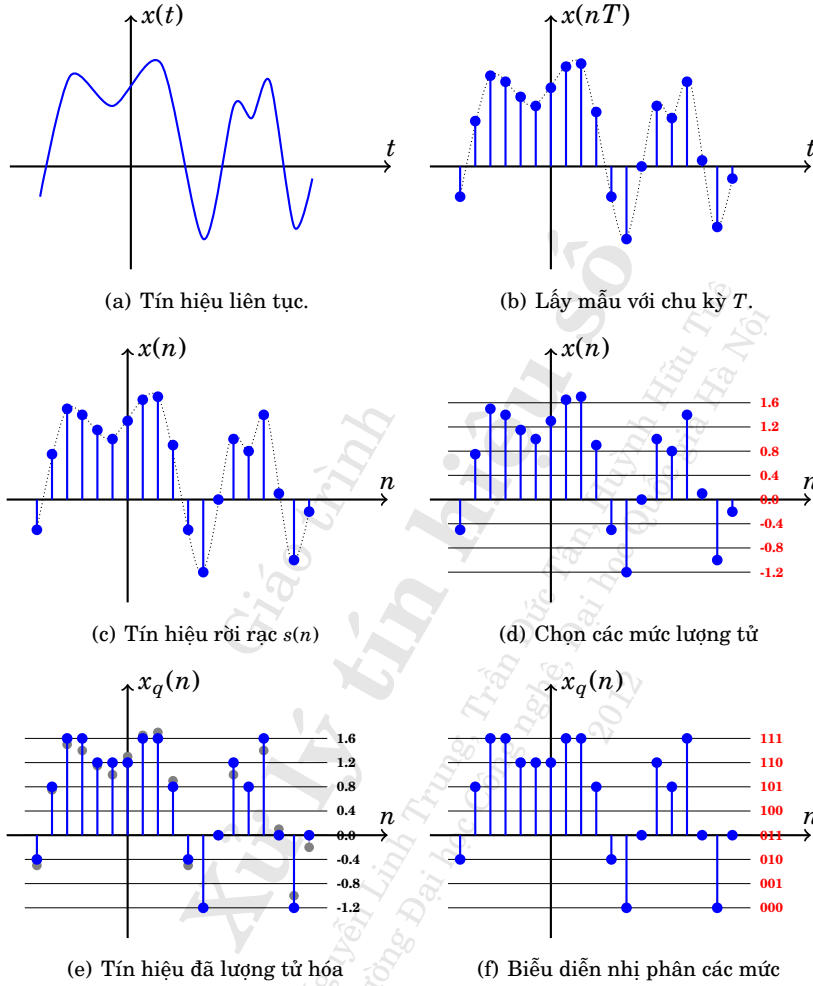
Hình 2.1 mô tả quá trình số hóa tín hiệu theo ba bước trên đây. Cho tín hiệu tương tự $x(t)$ như trong hình 2.1(a). Lấy mẫu $x(t)$ tại

^{*}Sampling.

[†]Quantization.

[‡]Coding.

[§]ADC: Analog-to-Digital Converter.



$\mathbf{x} =$ 010 101 111 111 110 110 110 111 111 101 010 000 011 110 101 111 011 000 011

(g) Chuỗi bit số nhị phân \mathbf{x}

Hình 2.1: Quá trình số hóa tín hiệu liên tục thành chuỗi bit.

các thời điểm cách đều nhau T giây để được tín hiệu $x(nT)$ như trong hình 2.1(b), với n là số nguyên. Thông số T được gọi là **chu kỳ lấy mẫu**. Phương pháp này gọi là lấy mẫu đều (uniform sampling). Thay vì dùng $x(nT)$ theo thời gian nT cho tín hiệu đã được lấy mẫu, ta có thể ký hiệu $x(n)$ theo mẫu n và gọi nó là tín hiệu rời rạc, như mô tả trong hình 2.1(c).

Vì $x(n)$ có thể có vô số giá trị khác nhau, không thể lưu trữ trong một bộ nhớ số điện tử hữu hạn, cho nên cần xấp xỉ $x(n)$ với một số hữu hạn các mức giá được gọi là mức lượng tử. Chẳng hạn, chọn tám mức $\{-1, 2; -0, 8; \dots; 1, 6\}$, như trong hình 2.1(d). Sau đó làm tròn $x(n)$ để được tín hiệu đã lượng tử hóa $\tilde{x}(n)$ như trong hình 2.1(e). Bước làm tròn này tạo ra sai số, gọi là sai số lượng tử.

Với tám mức lượng tử đã lựa chọn, ta có thể dùng ba bit nhị phân để biểu diễn chúng, như trong hình 2.1(f). Như vậy, tín hiệu lượng tử $\tilde{x}(n)$ được biểu diễn thành chuỗi nhị phân $\mathbf{x} = \{010101\dots\}$, như trong hình 2.1(g). Ta thấy rằng, để giảm sai số lượng tử, ta có thể dùng nhiều mức lượng tử hơn. Tuy nhiên, điều đó có nghĩa cần dùng bit nhị phân để biểu diễn các mức này và vì vậy dung lượng lưu trữ chuỗi số sẽ tăng lên.

Các phần tiếp theo trong chương này trình bày khái quát cả ba bước lấy mẫu, lượng tử hóa và số hóa. Tuy vậy, trong các chương tiếp theo thì ta chỉ quan tâm đến phần lấy mẫu mà thôi vì đây là hoạt động cơ bản nhất.

2.2 Phương pháp lấy mẫu

Có nhiều phương pháp lấy mẫu, tùy thuộc vào tính chất của tín hiệu hay là thông tin mà ta cần lấy. Tuy nhiên, giáo trình này chỉ đề cập đến phương pháp đơn giản nhưng căn bản nhất, đó chính là lấy mẫu đều. Lấy mẫu đều (sau đây gọi tắt là lấy mẫu) một tín hiệu liên tục $x(t)$ tức là ghi lại chuỗi giá trị của tín hiệu này tại các thời điểm $t = nT$, trong đó n là một số nguyên biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$, T là một hằng số có đơn vị là giây (s) và được gọi là chu kỳ lấy mẫu. Rời rạc hóa tín hiệu $x(t)$ để có chuỗi $x(nT)$ chỉ có giá trị khi từ chuỗi

này có thể xây dựng lại $x(t)$ một cách hoàn hảo. Những điều kiện để đảm bảo tính hoàn hảo này được gọi là những điều kiện lấy mẫu tín hiệu. Để hiểu rõ những điều kiện lấy mẫu này, cần phải xét phổ của tín hiệu được lấy mẫu. Gọi $X(\Omega)$ là phổ của $x(t)$, sử dụng định nghĩa $X(\Omega)$ thông qua biến đổi Fourier của $x(t)$ như sau:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (2.1)$$

Chú ý rằng, trong định nghĩa này Ω (đọc là “ô-mê-ga lớn”) có đơn vị là (radians/giây). Trước đây, trong các giáo trình khác, người ta thường dùng ω (đọc là “ô-mê-ga nhỏ”) để chỉ định biến số này. Trong giáo trình này, ω được dùng để chỉ định một thông số khác của lĩnh vực xử lý số sẽ được đề cập trong những phần tiếp theo.

Để xác định điều kiện lấy mẫu, trước hết xét tín hiệu toán học sau đây

$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.2)$$

trong đó $\delta(t)$ là xung Dirac, biểu diễn như trong Hình 2.2. Tín hiệu $\Delta(t)$ là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ T , gồm các xung Dirac xuất hiện tại các thời điểm nT .

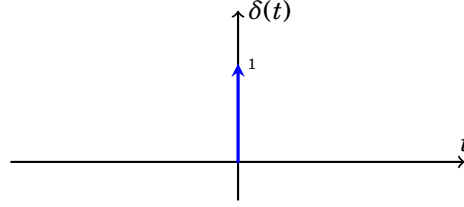
Triển khai $\Delta(t)$ thành chuỗi Fourier ta có:

$$\Delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\Omega_0 t}. \quad (2.3)$$

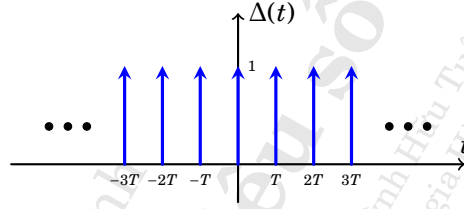
trong đó $\Omega_0 = 2\pi/T$ và

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T \Delta(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt. \quad (2.4)$$

Tích phân trên T là tích phân lấy trên bất kỳ chu kỳ nào của tín hiệu $\Delta(t)$, thông thường ta lấy trong khoảng từ $-T/2$ đến $T/2$. Sử



(a) Xung Dirac



(b) Chuỗi xung Dirac

Hình 2.2: Xung Dirac và chuỗi xung Dirac.

dùng chuỗi Fourier trong biểu thức (2.3) dẫn đến

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Delta(t) e^{-jn\Omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] e^{-jn\Omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t - kT) e^{-jn\Omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-j0\Omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{T}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Thay kết quả (2.5) vào (2.3) cho ta

$$\Delta(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_0 t}. \tag{2.6}$$

Tiếp đến, dùng tín hiệu $\Delta(t)$ để lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ bằng cách

xét tín hiệu sau:

$$x_{\Delta}(t) = x(t)\Delta(t). \quad (2.7)$$

Tín hiệu này được xem như là lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ với chu kỳ T bởi các xung Dirac. Trong miền thời gian, $\Delta(t)$ có thể được biểu diễn bằng hai cách khác nhau: bằng chuỗi tuần hoàn các xung Dirac theo (2.2) hoặc bằng chuỗi Fourier theo (2.5). Như thế, phương trình (2.7) cho thấy $x_{\Delta}(t)$ cũng có thể được biểu diễn trong miền thời gian bởi hai biểu thức toán học khác nhau. Cách thứ nhất cho ra

$$\begin{aligned} x_{\Delta}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT), \end{aligned} \quad (2.8)$$

và cách thứ hai cho ra

$$x_{\Delta}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_0 t} x(t). \quad (2.9)$$

Phổ $X_{\Delta}(\Omega)$ của $x_{\Delta}(t)$ chính là biến đổi Fourier của $x_{\Delta}(t)$

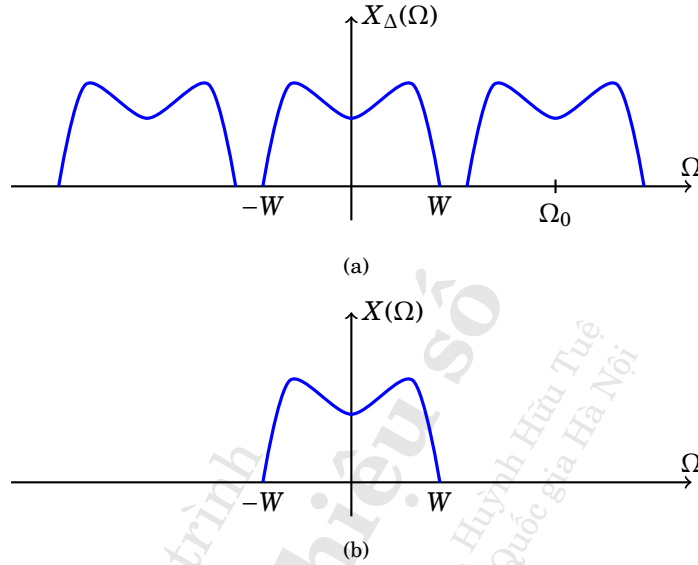
$$X_{\Delta}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\Delta}(t)e^{-j\Omega t} dt \quad (2.10)$$

Với hai biểu diễn khác nhau của $x_{\Delta}(t)$, có thể suy ra hai cách biểu diễn khác nhau cho phổ $X_{\Delta}(\Omega)$ như sau:

$$X_{\Delta}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T} \quad (2.11)$$

và

$$\begin{aligned} X_{\Delta}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_0 t} x(t) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\Omega - n\Omega_0)t} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\Omega - n\Omega_0) \end{aligned} \quad (2.12)$$



Hình 2.3: Phổ tuần hoàn theo Ω với chu kỳ Ω_0 (a) và phần phổ mong muốn (b).

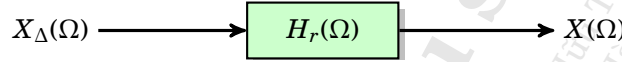
Hai biểu thức (2.11) và (2.12) cho thấy phổ $X_{\Delta}(\Omega)$ có thể được biểu diễn trực tiếp theo các mẫu $x(nT)$ hoặc theo phổ $X(\Omega)$ của tín hiệu tương tự. Và cũng vì thế cho thấy mối liên hệ giữa phổ $X(\Omega)$ và tín hiệu lấy mẫu $x(nT)$. Dưới đây, chỉ quan tâm tới cách biểu diễn (2.12), còn kết quả (2.11) sẽ được biểu diễn trong chương tiếp theo.

Phương trình (2.12) cho thấy từ $X_{\Delta}(\Omega)$ ta có thể suy ra $X(\Omega)$ với độ chính xác hoàn hảo nếu các thành phần $X(\Omega + \Omega_0)$, $X(\Omega)$, $X(\Omega - \Omega_0)$ hoàn toàn không chồng nhau, như trên hình 2.3. Điều kiện này được gọi là không có **hiện tượng gập phổ***. Để thỏa mãn, có thể thấy phổ $X(\Omega)$ của tín hiệu gốc $x(t)$ phải có bề rộng hữu hạn. Bề rộng này được gọi là bề rộng phổ của tín hiệu và được ký hiệu là W . Ngoài ra, để $X(\Omega + \Omega_0)$, $X(\Omega)$, $X(\Omega - \Omega_0)$ không chồng nhau, phải có thêm một điều kiện khác là $\Omega_0 > 2W$. Hai điều kiện này được gọi là **định lý lấy mẫu Nyquist** và được tóm lại như sau: *Tín hiệu $x(t)$ và tín*

*Frequency aliasing.

hiệu mẫu $x(nT)$ là hoàn toàn tương đương nếu phổ của tín hiệu gốc $x(t)$ có bề rộng hữu hạn W và vận tốc lấy mẫu phải lớn hơn hai lần của bề rộng phổ tín hiệu.

Kết quả này cho thấy, xử lý một tín hiệu tương tự hay tín hiệu số tương đương đều cho cùng một kết quả nếu hai điều kiện lấy mẫu được thỏa mãn. Đúng vậy, nếu hai điều kiện này được thỏa mãn thì về mặt toán học, từ phổ $X_{\Delta}(\Omega)$ chỉ cần lọc nó với một bộ lọc lý tưởng $H_r(\Omega)$ để có được đầu ra $X(\Omega)$ như được mô tả trên trong hình 2.4. $H_r(\Omega)$ được xác định như sau:



Hình 2.4: Lọc sử dụng bộ lọc lý tưởng

$$H_r(\Omega) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } |\Omega| \leq W_0 \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (2.13)$$

trong đó W_0 phải thỏa $W < W_0 < \Omega_0 - W$. Thông thường, người ta hay chọn $W_0 = \Omega_0/2$. Tần số $B_0 = (\Omega_0/2)/2\pi$ tính theo đơn vị Hz được gọi là **tần số Nyquist**.

Kết quả trên được biểu diễn trong miền thời gian như sau:

$$x(t) = h_r(t) \star X_{\Delta}(t), \quad (2.14)$$

trong đó $h_r(t)$ là đáp ứng xung của bộ lọc $H_r(\Omega)$, mà ta vừa sử dụng để tách thành phần $X(\Omega)$ từ $X_{\Delta}(\Omega)$, và \star là tích chập. Đáp ứng xung $h_r(t)$ này là biến đổi Fourier ngược của $H_r(\Omega)$ và được cho bởi

$$h_r(t) = 2\pi B_0 \text{sinc}(Bt), \quad (2.15)$$

với $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$. Phương trình (2.14) cho ta

$$x(t) = 2\pi B_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \text{sinc} B(t - nT). \quad (2.16)$$

Ta thấy rằng, khi các điều kiện lấy mẫu được thỏa mãn, phương trình (2.16) khẳng định là $x(t)$ sẽ được tái tạo một cách hoàn hảo từ

các mẫu $x(nT)$ của nó. Công thức (2.16) thường được gọi là công thức nội suy của tín hiệu $x(t)$. Công thức này được Shannon sử dụng trong lý thuyết toán học về thông tin xuất bản năm 1947, do đó định lý lấy mẫu Nyquist cũng thường được gọi là định lý lấy mẫu Shannon*.

Đối với máy tính thì các mẫu $x(n)$ vẫn là một số thực cần được biểu diễn với độ chính xác tốt nhất của máy tính. Để thực hiện quá trình biểu diễn này, các mẫu $x(n)$ cần được lượng tử hóa với số mức xác định bởi độ chính xác của máy tính.

Số mức lượng tử là một hàm mũ của 2. Cấu trúc này cho phép mã hóa mỗi mức bằng một chuỗi bit. Như vậy, thông qua quá trình lấy mẫu, lượng tử hóa và mã hóa, có thể thấy ngay một tín hiệu tương tự được máy tính đọc như một chuỗi bit nhị phân.

2.3 Lấy mẫu thực tiễn

Trong phần trước, tín hiệu toán học $\Delta(t)$ được sử dụng để lấy mẫu tín hiệu. Quá trình này chứa đựng xung Dirac nên không thể xây dựng được một mạch thực tiễn để thực hiện thao tác này. Để minh họa khái niệm này, có thể thay thế tín hiệu $\Delta(t)$ bằng tín hiệu $p(t)$ được định nghĩa như sau:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w(t - nT), \quad (2.17)$$

trong đó T là chu kỳ lấy mẫu và

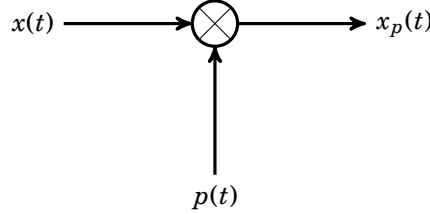
$$w(t) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases} \quad (2.18)$$

Dùng tín hiệu $p(t)$ để lấy mẫu $x(t)$ theo sơ đồ 2.5.

Như vậy

$$x_p(t) = x(t)p(t). \quad (2.19)$$

*Thực ra, công thức nội suy này đã được chứng minh hồi đầu thế kỷ 20 bởi nhà toán học người Anh Whitaker.



Hình 2.5: Lấy mẫu thực tế.

Tín hiệu $p(t)$ là một tín hiệu tuần hoàn, có chu kỳ là T . Ta có thể khai triển chuỗi Fourier để có

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (2.20)$$

trong đó

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{T_0}{T} \text{sinc}\left(n \frac{T_0}{T}\right). \quad (2.21)$$

Với chuỗi Fourier này, $x_p(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} x(t). \quad (2.22)$$

Lấy biến đổi Fourier hai vế của phương trình (2.22), ta được

$$X_p(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(\Omega - n\Omega_0). \quad (2.23)$$

Kết quả này cho thấy rằng phổ $X(\Omega)$ có thể suy ra từ phổ $X_p(\Omega)$ nếu hai điều kiện lấy mẫu được thỏa mãn.

Trong thực tiễn, để đơn giản hóa thiết kế mạch điện tử cho việc lấy mẫu, người ta chọn $T_0 = T$, trong trường hợp này, cách lấy mẫu này được gọi là **lấy và giữ mẫu***.

2.4 Lượng tử hóa

Sau khi lấy mẫu, bước tiếp theo của thao tác số hóa là lượng tử hóa các mẫu. Lúc lấy mẫu, giá trị mỗi mẫu có thể biến đổi liên tục

*Sample-and-Hold.

từ mức thấp nhất đến mức cao nhất của tín hiệu. Do đó, biểu diễn nhị phân tương ứng phải cần một chiều dài vô hạn mới có độ chính xác tuyệt đối.

Trong thực tiễn, các máy tính chỉ có độ chính xác nhất định, bắt buộc phải chấp nhận xấp xỉ các mẫu với một số mức được xác định bởi độ chính xác của máy tính. Bề dày của mỗi mức được gọi là **mức lượng tử** và thiết bị xấp xỉ này được gọi là **bộ lượng tử**.

Các mức của cùng một bộ lượng tử có thể khác nhau để có thể hoạt động cho nhiều tình huống khác nhau mà luôn luôn bảo đảm chất lượng của hệ thống. Trong trường hợp các mức cách đều nhau thì bộ lượng tử được gọi là bộ lượng tử đều, như được biểu diễn trên hình 2.6. Phép xấp xỉ này có thể được thực hiện bằng cách làm tròn hoặc cắt đuôi. Như vậy, lượng tử hóa xấp xỉ một tín hiệu với một sai số

$$x(n) = x_q(n) + e_q(n). \quad (2.24)$$

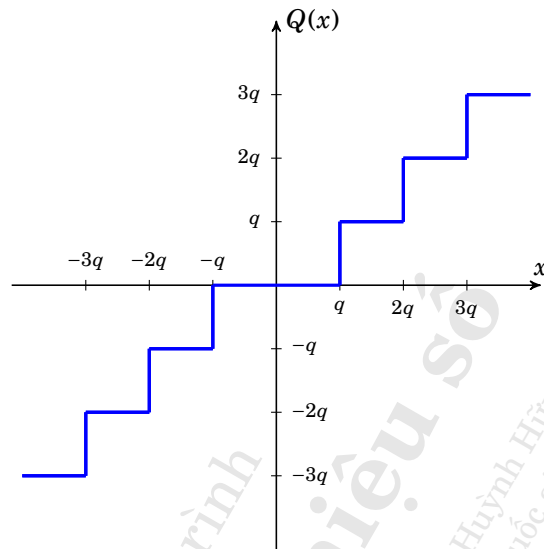
Sai số $e_q(n)$ có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn $q/2$, trong đó q là mức lượng tử.

Ta thấy, lượng tử hóa và lấy mẫu có thể hoán vị với nhau mà không thay đổi kết quả. Thông thường thì lấy mẫu được thực hiện trước khi lượng tử hóa. Tuy nhiên, nếu lấy mẫu được thực hiện sau lượng tử hóa thì vận tốc lấy mẫu phải cao hơn vận tốc lấy mẫu Nyquist của tín hiệu gốc. Bởi vì trong trường hợp này, cũng có thể lấy mẫu tín hiệu sai số, mà tín hiệu sai số này có thể có phổ với bề rộng lớn hơn phổ của tín hiệu gốc. Như vậy, nếu không cẩn thận, tín hiệu sau khi lấy mẫu có thể bị ảnh hưởng bởi hiện tượng gập phổ.

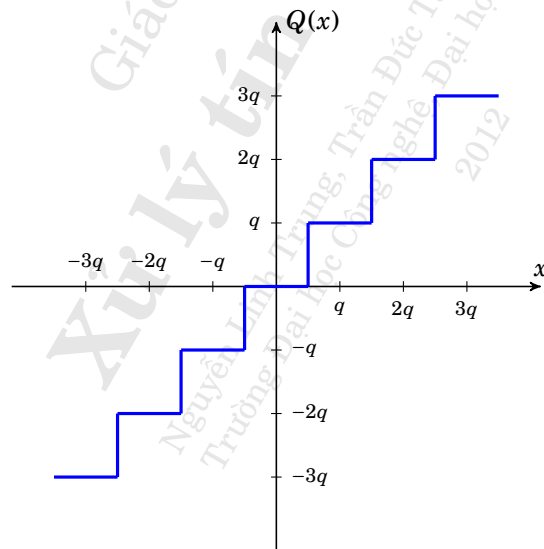
2.5 Mã hóa và biểu diễn nhị phân

Sau khi lượng tử hóa, để có mẫu $x_q(n)$ cần biểu diễn $x_q(n)$ sao cho máy tính có thể hiểu được; máy tính ngày nay sử dụng tính toán nhị phân. Như vậy, chỉ cần biểu diễn $x_q(n)$ theo hệ thống nhị phân. Tuy nhiên, cần chú ý phân biệt giữa biểu diễn dấu phẩy thập phân* và dấu

*Fixed-point presentation.



(a) Cắt đuôi



(b) Làm tròn

Hình 2.6: Các kiểu lượng tử hóa.

phẩy động*, bởi vì hai phương pháp này tương ứng với sự lựa chọn độ chính xác khác nhau.

Đối với tính toán dấu phẩy tĩnh thì phép nhân luôn dẫn đến sai số làm tròn trong khi phép cộng thì không tạo ra sai số. Trong khi, tính toán với dấu phẩy động thì cả phép nhân lẫn phép cộng đều tạo ra các sai số loại này. Ngoài ra, tính toán với dấu phẩy tĩnh có thể làm nảy sinh hiện tượng vượt tràn khả năng máy tính. Ngược lại thì hiện tượng vượt tràn khả năng máy tính không xuất hiện với các phương pháp tính toán dấu phẩy động.

2.6 Kết luận

Trong chương này, ta vừa trình bày ngắn gọn thao tác số hóa các tín hiệu tương tự. Các thao tác này được thực hiện bởi các bộ biến đổi ADC với giá khá rẻ. Tuy nhiên, lúc sử dụng bộ biến đổi ADC ta cần chú ý phải sử dụng một bộ lọc ở đầu vào để giới hạn hiện tượng gập phổ. Bộ lọc này thường được gọi là bộ lọc đầu vào[†]. Đối với các bộ biến đổi ADC đắt tiền thì bộ lọc đầu vào này thường được thiết kế như một bộ phận của thiết bị.

Trong khá nhiều áp dụng thực tiễn, tín hiệu đầu vào cũng như tín hiệu đầu ra của hệ thống đều là tương tự, do đó ta phải biến đổi các tín hiệu số thành các tín hiệu tương tự. Thao tác này được thực hiện bởi bộ biến đổi DAC. Cấu trúc của bộ biến đổi này nói chung cũng khá đơn giản.

*Floating-point presentation.

[†]Prefilter.

Bài tập chương 2

2.1. Cho một tín hiệu tương tự như sau:

$$x(t) = 10\cos(20\pi t) + 3\sin(40\pi t) - 5\cos(60\pi t + 0,5\pi).$$

Hãy xác định tần số Nyquist khi lấy mẫu tín hiệu này.

2.2. Cho một tín hiệu tương tự như sau:

$$x(t) = \sin(40\pi t) - 2\cos(60\pi t + 0,5\pi).$$

- Hãy xác định tần số Nyquist khi lấy mẫu tín hiệu này.
- Hãy xác định biểu thức của tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau khi lấy mẫu với tần số $F_S = 120$ Hz.

2.3. Cho một tín hiệu tương tự có tần số cực đại là 5 kHz.

- Xác định tần số lấy mẫu tối thiểu cần thiết để có thể khôi phục chính xác tín hiệu tương tự ban đầu.
- Nếu lấy mẫu tín hiệu trên với tần số lấy mẫu $F_S = 4$ kHz thì hiện tượng gì sẽ xảy ra với thành phần tần số 3 KHz.

2.4. Cho một tín hiệu tương tự như sau:

$$x(t) = \cos(50\pi t) + 3\sin(40\pi t) - \cos(60\pi t + 0,5\pi).$$

Lấy mẫu tín hiệu trên với tần số lấy mẫu $F_S = 100$ Hz, hãy xác định các thành phần tần số có mặt trong tín hiệu thu được.

2.5. Cho một tín hiệu tương tự như sau:

$$x(t) = e^{j60\pi t} + 3\sin(50\pi t) - \cos(60\pi t + 0,6\pi).$$

Lấy mẫu tín hiệu trên với tần số lấy mẫu $F_S = 200$ Hz, hãy xác định các thành phần tần số có mặt trong tín hiệu thu được.

2.6. Cho một tín hiệu tương tự

$$x(t) = \cos(100\pi t) + 3\sin(250\pi t)$$

đi qua một bộ biến đổi tương tự – số (ADC) có chu kì lấy mẫu $T = 5$ ms, tiếp đó qua một bộ biến đổi số – tương tự (DAC) hoạt động ở tần số $F'_S = 1$ kHz và cuối cùng qua một bộ lọc thông thấp (bộ lọc làm trơn hay bộ lọc nội suy) có tác dụng loại bỏ tất cả các tần số lớn hơn 100 Hz. Hãy xác định tín hiệu $y(t)$ khôi phục được.

2.7. Tín hiệu $x(n) = 3\delta(n+1) + 2\delta(n) + 4\delta(n-1)$. Hãy xác định

- a) $x(n-1)$
- b) $x(n+1)$
- c) $x(-n)$
- d) $x(-n+1)$
- e) $x(-n-1)$
- f) $x(-n+1)x(n)$
- g) $x(n) - x(n-1)$

2.8. Tín hiệu $x(n) = u(n+3) - u(n-4)$. Hãy xác định

- a) $x(n-2)$
- b) $x(n+2)$
- c) $x(-n)$
- d) $x(-n+2)$
- e) $x(-n-2)$
- f) $x(-n+2)x(n)$
- g) $x(n) - x(n-2)$

2.9. Biểu diễn tín hiệu $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$ theo hàm nhảy bậc đơn vị.

2.10. Biểu diễn tín hiệu $x(n) = r(n)u(4-n)$ bằng phương pháp liệt

kê.

2.11. Biểu diễn tín hiệu $x(n) = r(n) - r(n-3) - 3u(n-3)$ bằng hình vẽ.

2.12. Cho một tín hiệu rời rạc $x(n) = 3\sin(0,1\pi n)$ được lượng tử hóa với độ phân giải $\Delta = 0,1$. Có bao nhiêu bit cần sử dụng trong bộ mã hóa của ADC trong trường hợp này?

2.13. Xác định tốc độ bit và độ phân giải khi lấy mẫu tín hiệu có độ thay đổi 1 V nếu tần số lấy mẫu $F_S = 40$ mẫu/giây và sử dụng ADC 8 bit.

2.14. Xác định tốc độ bit và độ phân giải khi lấy mẫu tín hiệu có độ thay đổi từ 0 đến 5 V nếu tần số lấy mẫu $F_S = 100$ mẫu/giây và sử dụng ADC 12 bit.

2.15. Trong 1 bộ ADC sử dụng 8 bit để mã hóa thì có thể phân biệt bao nhiêu giá trị điện thế khác nhau?

2.16. Trong 1 bộ ADC sử dụng 12 bit để mã hóa thì có thể phân biệt bao nhiêu giá trị điện thế khác nhau?

2.17. Một bộ DAC 4-bit thì bit có trọng số nhỏ nhất sẽ chiếm bao nhiêu phần trăm giá trị toàn dải.

2.18. Một bộ DAC 12-bit thì bit có trọng số nhỏ nhất sẽ chiếm bao nhiêu phần trăm giá trị toàn dải.

Chương 3

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

3.1 Mở đầu

Để hiểu rõ các phương pháp thiết kế các bộ lọc số, trước hết cần nắm vững những khái niệm cơ bản về tín hiệu và hệ thống rời rạc. Lý thuyết hệ thống rời rạc bắt nguồn từ lý thuyết điều khiển hệ thống rời rạc* được xây dựng vào những năm 50 của thế kỷ 20. Những công cụ này được đưa vào lĩnh vực xử lý tín hiệu số những năm sau đó và trở thành những công cụ cơ bản đối với các kỹ sư điện tử, viễn thông, điều khiển, v.v.

Như đã trình bày trong chương 2, khi lấy mẫu một tín hiệu liên tục $x(t)$ bằng chuỗi các xung Dirac lý tưởng, ta được tín hiệu mẫu

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT), \quad (3.1)$$

trong đó T là chu kỳ lấy mẫu. Như vậy, tín hiệu mẫu $x_{\Delta}(t)$ là một tín hiệu tương tự, theo định nghĩa, vì biến độc lập của tín hiệu là thời gian liên tục t . Mặt khác, theo (3.1), $x_{\Delta}(t)$ hoàn toàn phụ thuộc vào mẫu $x(nT)$ của tín hiệu $x(t)$. Xét tín hiệu rời rạc $x_d(n)$ được tạo bởi

$$x_d(n) = x(nT). \quad (3.2)$$

*Sampled-data control system.

Như vậy, mối liên hệ giữa tín hiệu tương tự $x_{\Delta}(t)$ và tín hiệu rời rạc $x_d(n)$ được xác định bởi biểu thức sau:

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\delta(t-nT). \quad (3.3)$$

Từ (3.3) có thể thấy, có $x_{\Delta}(t)$ ta suy ra ngay $x_d(n)$ và ngược lại có $x_d(n)$ ta suy ra được $x_{\Delta}(t)$. Điều hiển nhiên này cho thấy rằng xử lý tín hiệu rời rạc $x_d(n)$ hay xử lý tín hiệu tương tự $x_{\Delta}(t)$ là hoàn toàn tương đương.

Một cách liên hệ khác giữa lĩnh vực tương tự và lĩnh vực rời rạc được thể hiện bởi biến đổi Laplace. Lấy biến đổi Laplace hai chiều của tín hiệu tương tự $x_{\Delta}(t)$ như xác định trong (3.3) cho ta

$$\begin{aligned} x_{\Delta}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\Delta}(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)\delta(t-nT) \right] e^{-st} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st} dt \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

và cuối cùng là

$$x_{\Delta}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-nsT}, \quad (3.5)$$

Biểu thức (3.5) đóng vai trò quan trọng lúc ta chuyển đổi từ lĩnh vực tương tự sang lĩnh vực rời rạc và ngược lại.

Bây giờ, đặt

$$z = e^{sT}. \quad (3.6)$$

Như thế, biểu thức (3.5) trở thành

$$x_{\Delta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)z^{-n}. \quad (3.7)$$

Có thể nhận thấy rằng, lúc ta không quan tâm đến chu kỳ T (hoặc vận tốc lấy mẫu tương ứng) thì z là một biến độc lập. Tuy nhiên, ý nghĩa của z lúc thảo luận đến hệ thống lấy mẫu thì chính là mối liên

hệ được định nghĩa bởi (3.6). Biểu thức (3.7) được gọi là biến đổi Z của tín hiệu rời rạc $x_d(n)$ và sẽ được đề cập chi tiết trong Mục 3.5.

Thực ra, quan hệ giữa các biến phức độc lập z và s trong (3.6) không đóng vai trò quan trọng để hiểu xử lý tín hiệu số. Tuy nhiên, điều này giúp hiểu rõ mối liên hệ giữa lĩnh vực xử lý tín hiệu liên tục và lĩnh vực xử lý tín hiệu số. Từ đó, giúp đưa ra cái nhìn tổng quát về hệ thống và tín hiệu mà không cảm thấy ngần ngại trước bản chất tương tự hay rời rạc của dữ liệu mà ta phải xử lý. Do vậy, sau đây, khi đề cập đến tín hiệu rời rạc thì vận tốc lấy mẫu sẽ không được xem xét và vì thế biến đổi Z được sử dụng cho các tín hiệu rời rạc và các hệ thống rời rạc bất kỳ.

3.2 Tín hiệu rời rạc

Như đã nêu ở phần trước, tín hiệu rời rạc thực chất là một chuỗi số $x(n)$ với n là biến số thời gian độc lập rời rạc, có giá trị biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$. Biến n chỉ định số thứ tự của các mẫu tín hiệu và như vậy $x(n)$ là mẫu thứ n của tín hiệu.

Tín hiệu $x(n)$ có thể tự thân là một chuỗi rời rạc chẳng hạn như số tiền lời hàng tháng trong tài khoản ngân hàng. Hay nó cũng có thể là chuỗi mẫu lúc ta lấy mẫu một tín hiệu tương tự. Như vậy, khi đề cập đến một tín hiệu rời rạc $x(n)$, không cần quan tâm đến vận tốc lấy mẫu. Một tín hiệu rời rạc có thể được biểu diễn bằng hàm số toán học, đồ thị hoặc một chuỗi số, như trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.1 (Biểu diễn tín hiệu rời rạc)

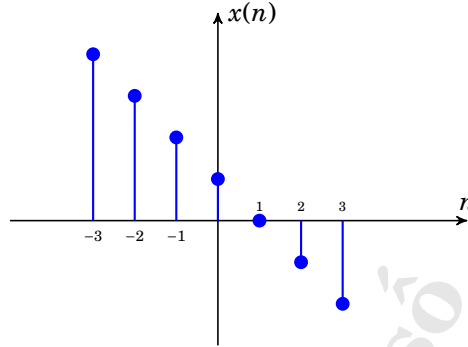
Cho tín hiệu rời rạc được định nghĩa bằng hàm toán học như sau:

$$x(n) = \begin{cases} -n + 1, & \text{với } -3 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{với } n \text{ khác} \end{cases}$$

Tín hiệu này cũng có thể được biểu diễn bằng chuỗi số

$$x(n) = \{4; 3; 2; \underset{\uparrow}{1}; -1; -2\},$$

trong đó \uparrow chỉ điểm gốc thời gian, hoặc bằng đồ thị như hình 3.1.



Hình 3.1: Biểu diễn tín hiệu rời rạc bằng đồ thị.

Lúc biểu diễn bằng chuỗi số, cần phải xác định điểm gốc thời gian, $n = 0$, của chuỗi một cách tường minh. Trong trường hợp tín hiệu có giá trị triệt tiêu tại các thời điểm âm thì có thể xem như điểm gốc thời gian là mẫu đầu tiên của chuỗi và không cần dùng \uparrow để chỉ điểm gốc thời gian. Xét các chuỗi tín hiệu sau

$$x_1(n) = \{\dots; 0,25; 0,5; \underset{\uparrow}{1}; 0,5; 0,25; \dots\}$$

$$x_2(n) = \{1, 2; -3; \dots\}$$

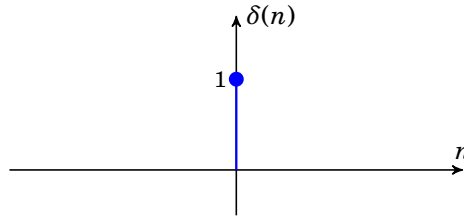
$$x_3(n) = \{1; -1; 3; 5; 0; 4; 1\}$$

$$x_4(n) = \{1, 5; 0; 7\}$$

Theo thứ tự, các chuỗi $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$ và $x_4(n)$ có giá trị tại gốc thời gian là 1, 1, 5, và 1. Các chuỗi $x_1(n)$ và $x_3(n)$ có số mẫu là vô hạn, các chuỗi $x_2(n)$ và $x_4(n)$ có số mẫu là hữu hạn, các chuỗi $x_1(n)$ và $x_3(n)$ triệt tiêu tại các thời điểm âm. \square

3.2.1 Một số tín hiệu quan trọng

Trong lĩnh vực rời rạc, có một số tín hiệu đóng vai trò quan trọng trong triển khai lý thuyết hệ thống rời rạc. Sau đây là những dạng tín hiệu quan trọng nhất thường gặp trong giáo trình này.

Hình 3.2: Xung Kronecker $\delta(n)$.

Xung Kronecker

Trong lý thuyết hệ thống liên tục, ta đã gặp xung Dirac, thường được ký hiệu là $\delta(t)$. Xung $\delta(t)$ triệt tiêu với mọi $t \neq 0$, tiến đến $+\infty$ khi t tiến đến 0 sao cho $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. Trong lĩnh vực rời rạc, có một tín hiệu có vai trò tương tự là **xung Kronecker**, được ký hiệu là $\delta(n)$ và được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & \text{với } n \neq 0 \\ 1, & \text{với } n = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

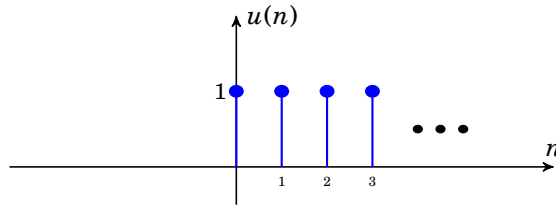
Chú ý rằng, khác với xung Dirac, xung Kronecker có giá trị đơn vị tại điểm gốc thời gian $n = 0$. Hình 3.2 minh họa xung Kronecker.

Tín hiệu bậc thang đơn vị

Tín hiệu bậc thang đơn vị thường được ký hiệu là $u(n)$ và được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{với } n \geq 0 \\ 0, & \text{với } n < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Hình 3.3 minh họa $u(n)$.



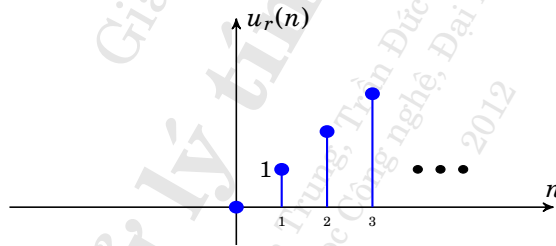
Hình 3.3: Tín hiệu thang đơn vị $u(n]$.

Tín hiệu dốc đơn vị

Tín hiệu dốc đơn vị, thường được ký hiệu là $u_r(n)$, được định nghĩa như sau:

$$u_r(n) = \begin{cases} n, & \text{với } n \geq 0 \\ 0, & \text{với } n < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

và được minh họa như trên hình 3.4.



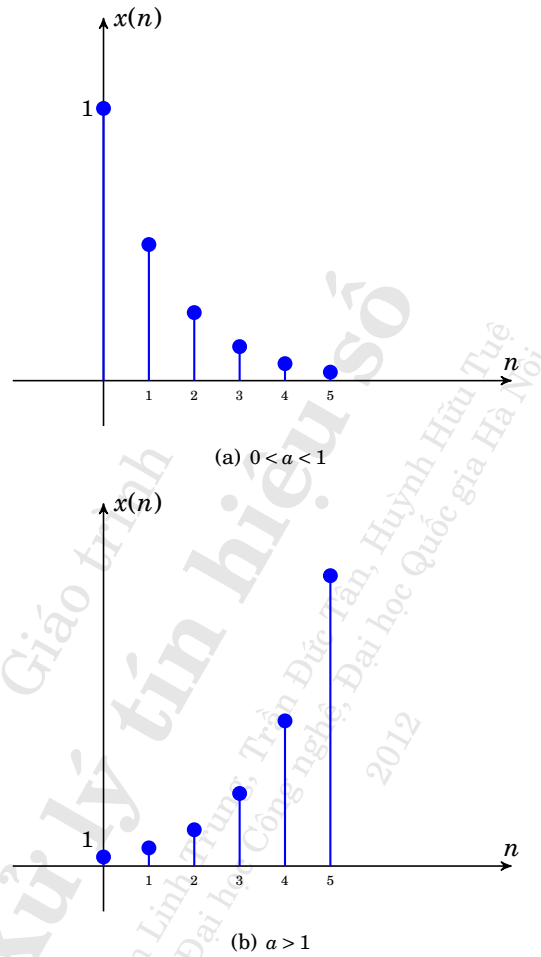
Hình 3.4: Tín hiệu dốc đơn vị $u_r(n)$.

Tín hiệu mũ rời rạc

Tín hiệu mũ rời rạc được định nghĩa như sau:

$$x(n) = a^n, \quad (3.11)$$

trong đó a là một hằng số. Nếu a là một số thực thì $x(n)$ là một tín hiệu thực. Hình 3.5 minh họa dạng tín hiệu mũ rời rạc với $0 < a < 1$ và với $a > 1$.



Hình 3.5: Tín hiệu mũ rời rạc.

Nếu a là một số phức được biểu diễn bởi $a = re^{j\theta}$, ta có $x(n) = r^n [\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)]$. Trong trường hợp này $x(n)$ là tín hiệu phức. Phần thực $x_R(n) = r^n \cos(n\theta)$ và phần ảo $x_I(n) = r^n \sin(n\theta)$ của nó được biểu diễn bằng các đồ thị riêng biệt.

3.2.2 Phân loại tín hiệu

Tùy thuộc vào tính chất của tín hiệu, có thể áp dụng các phương pháp xử lý khác nhau. Có thể phân loại các tín hiệu rời rạc theo những tính chất đặc trưng của nó.

Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

Năng lượng của một tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa là

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2. \quad (3.12)$$

Trong định nghĩa (3.12), E_s có thể hữu hạn hay vô hạn. Trong trường hợp E_s hữu hạn, $x(n)$ được gọi là **tín hiệu năng lượng**. Trong trường hợp tín hiệu có năng lượng vô hạn, công suất trung bình của nó có thể hữu hạn hoặc vô hạn. Công suất trung bình của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa là

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2. \quad (3.13)$$

Trong trường hợp P_s hữu hạn, $x(n)$ được gọi là **tín hiệu công suất**.

Tín hiệu tuần hoàn

Tín hiệu $x(n)$ được gọi là **tín hiệu tuần hoàn** với chu kỳ N , trong đó N là số nguyên dương, nếu và chỉ nếu

$$x(n+N) = x(n), \quad (3.14)$$

với mọi n . Chu kỳ nhỏ nhất của một tín hiệu tuần hoàn được gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

Lưu ý rằng, một tín hiệu liên tục luôn tuần hoàn nhưng tín hiệu rời rạc tương ứng chưa chắc đã như vậy. Điều này sẽ được làm rõ trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.2 (Tín hiệu rời rạc tuần hoàn)

Xét tín hiệu rời rạc

$$x(n) = \cos(2\pi f_0 n),$$

trong đó f_0 là một hằng số dương. Ta biết rằng, $\cos(t)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π , tức là $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$. Tuy nhiên, muốn biết $x(n)$ có tuần hoàn hay không, ta phải tìm xem có hiện hữu một số nguyên dương N lớn thỏa mãn điều kiện (3.14) hay không, tức là ta phải có

$$\cos(2\pi f_0 n + 2\pi f_0 N) = \cos(2\pi f_0 n).$$

Điều kiện trên chỉ được thỏa mãn nếu $f_0 N$ là một số nguyên dương. Từ điều kiện này, ta suy ra f_0 phải là một số hữu tỉ p/q , lúc đó ta chỉ cần chọn $N = kq$ thì điều kiện tuần hoàn được thỏa mãn. \square

Một cách tổng quát, khi lấy mẫu một tín hiệu liên tục tuần hoàn, nếu vận tốc lấy mẫu không có mối liên hệ hữu tỉ với chu kỳ của tín hiệu liên tục thì chắc chắn tín hiệu rời rạc sẽ không bao giờ được lặp lại, có nghĩa là tín hiệu rời rạc không tuần hoàn. Đối với một tín hiệu rời rạc tuần hoàn có chu kỳ N thì công suất trung bình của nó là:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (3.15)$$

Nếu tín hiệu tuần hoàn không có mẫu có giá trị vô cực thì công suất trung bình của nó luôn luôn hữu hạn.

Tín hiệu chẵn và tín hiệu lẻ

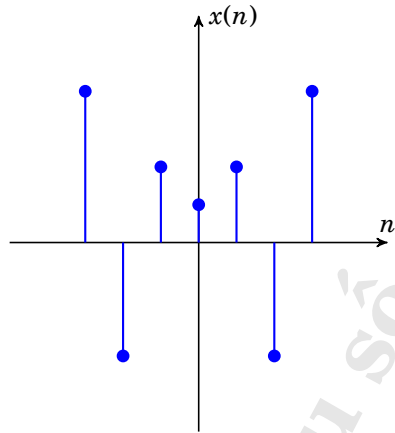
Một tín hiệu thực $x(n)$ được gọi là **tín hiệu chẵn** nếu

$$x(-n) = x(n), \quad (3.16)$$

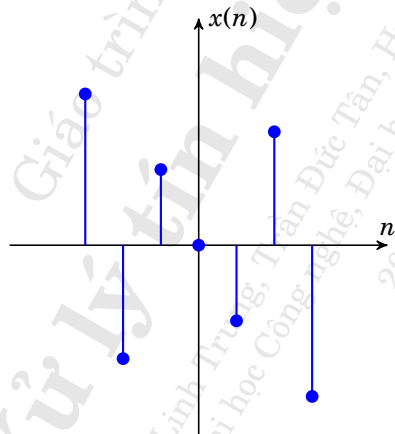
với mọi n . Tín hiệu chẵn cũng được gọi là tín hiệu đối xứng, được minh họa trên hình 3.6(a). Một tín hiệu thực $x(n)$ được gọi là **tín hiệu lẻ** nếu

$$x(-n) = -x(n), \quad (3.17)$$

với mọi n . Tín hiệu lẻ được gọi là tín hiệu phản đối xứng, được minh họa trên hình 3.6(b). Chú ý là đối với tín hiệu lẻ, $x(0)$ phải triệt tiêu.



(a) Đối xứng



(b) Phản đối xứng

Hình 3.6: Tín hiệu đối xứng và phản đối xứng.

Một tín hiệu $x(n)$ bất kỳ nào cũng đều có thể phân tích thành hai thành phần chẵn và lẻ. Thật vậy, đặt

$$x_e(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(-n)] \quad (3.18)$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(-n)] \quad (3.19)$$

Rõ ràng, $x_e(n)$ là một tín hiệu chẵn và $x_o(n)$ là một tín hiệu lẻ, đồng thời $x(n)$ được phân tích thành

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n). \quad (3.20)$$

3.2.3 Một số tính toán đơn giản trên tín hiệu

Trong lý thuyết tín hiệu và hệ thống rời rạc, một số thao tác biến đổi thời gian và biến đổi biên độ được sử dụng phổ biến.

Dịch gốc thời gian

Thao tác biến đổi thời gian thứ nhất là **dịch gốc thời gian**, thay thế biến độc lập n bởi $n - n_0$ trong đó n_0 là một hằng số nguyên, có thể âm hay dương. Thao tác này được biểu diễn toán học bằng toán tử dịch trễ thời gian $\mathcal{D}_{n_0}\{\cdot\}$:

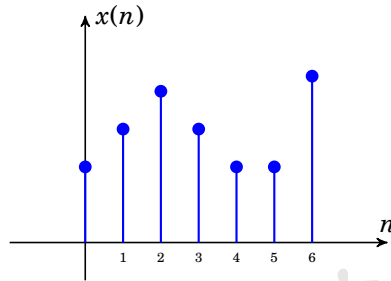
$$\mathcal{D}_{n_0}\{x(n)\} = x(n - n_0). \quad (3.21)$$

Nếu $n_0 > 0$ thì thao tác này dịch trễ tín hiệu n_0 bước và nếu $n_0 < 0$ thì nó làm sớm (kéo lùi) tín hiệu $|n_0|$ bước. Hình 3.7 minh họa dịch trễ và kéo lùi tín hiệu. Đối với tín hiệu liên tục, thực thi toán tử dịch trễ thời gian rất phức tạp còn toán tử kéo lùi thời gian là bất khả thi. Ngược lại đối với tín hiệu rời rạc, $x(n)$ được ghi lại trong bộ nhớ cho nên dịch trễ thời gian hay kéo lùi thời gian của $x(n)$ trở nên rất đơn giản.

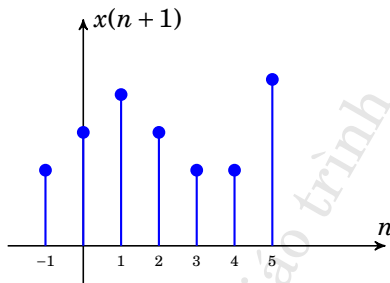
Đổi chiều thời gian

Thao tác thứ hai của biến đổi thời gian là **đổi chiều thời gian**, thay thế biến độc lập n bằng $-n$, như được minh họa trên hình 3.8. Thao tác này được biểu diễn toán học bằng toán tử đổi chiều thời gian $\mathcal{I}\{\cdot\}$:

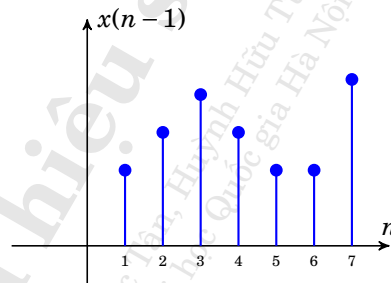
$$\mathcal{I}\{x(n)\} = x(-n). \quad (3.22)$$



(a) Tín hiệu ban đầu

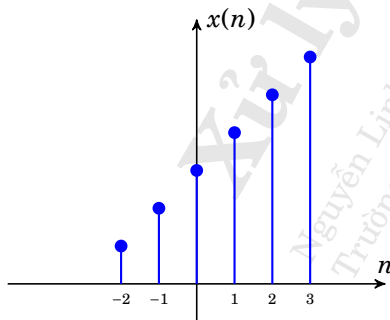


(b) Tín hiệu lùi 1 bước

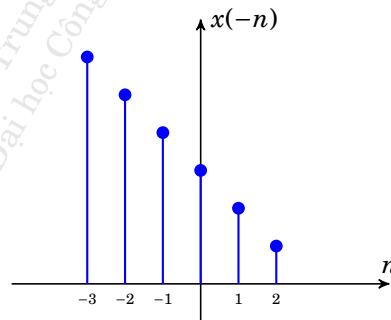


(c) Tín hiệu trễ 1 bước

Hình 3.7: Minh họa tín hiệu trễ và tín hiệu lùi.



(a) Tín hiệu gốc



(b) Tín hiệu đảo

Hình 3.8: Đối chiều thời gian.

Lưu lý là dịch gốc thời gian và đổi chiều thời gian không có tính khả hoán. Thật vậy, nếu thực hiện đổi chiều thời gian của $x(n)$ trước rồi sau đó dịch gốc nó đi n_0 bước, kết quả là

$$\mathcal{D}_{n_0} \{ \mathcal{J} \{ x(n) \} \} = \mathcal{D}_{n_0} \{ x(-n) \} = x(-n - n_0). \quad (3.23)$$

Trong khi đó, nếu dịch gốc đi n_0 bước trước rồi mới đổi chiều, kết quả là

$$\mathcal{J} \{ \mathcal{D}_{n_0} \{ x(n) \} \} = \mathcal{J} \{ x(n - n_0) \} = x(-n + n_0). \quad (3.24)$$

Rõ ràng, hai kết quả trên là hoàn toàn khác biệt.

Đổi thang thời gian

Thao tác biến đổi thời gian thứ ba là **đổi thang thời gian**, thay thế n bằng αn trong đó α là một hằng số nguyên dương. Toán tử đổi thang thời gian được ký hiệu là $\downarrow_\alpha \{ \cdot \}$:

$$\downarrow_\alpha \{ x(n) \} = x(\alpha n) \quad (3.25)$$

Thao tác đổi thang thời gian còn được gọi là giảm tốc độ lấy mẫu, như lý giải trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.3 (Giảm tốc lấy mẫu và đổi thang thời gian)

Thật vậy, xét tín hiệu liên tục $x_a(t)$. Ta có thể lấy mẫu $x_a(t)$ với hai chu kỳ lấy mẫu khác nhau T_1 và T_2 để có hai tín hiệu rời rạc khác nhau. Giả sử, chu kỳ lấy mẫu thứ nhất là $T_1 = T$ và thứ hai là $T_2 = 2T$. Gọi $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là hai tín hiệu rời rạc có được do hai quá trình lấy mẫu này, $x_1(n)$ và $x_2(n)$ được xác định như sau:

$$x_1(n) = x_a(nT) \quad (3.26)$$

$$x_2(n) = x_a(n2T) \quad (3.27)$$

Có thể thấy ngay $x_2(n) = x_1(2n)$. Đây chính là kết quả đổi thang thời gian với $\alpha = 2$, tức là $x_2(n) = \downarrow_2 \{ x_1(n) \}$. \square

Khuếch đại tín hiệu

Đối với biến đổi biên độ của tín hiệu, một thao tác quan trọng là **khuếch đại tín hiệu**, nhân tất cả các mẫu của một tín hiệu với cùng một hằng số a

$$y(n) = ax(n), \quad (3.28)$$

với mọi n .

Cộng tín hiệu

Đối với tính toán trên nhiều tín hiệu, ta có thao tác **cộng tín hiệu**. Tổng của hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là một tín hiệu $y(n)$ có mẫu tại mỗi thời điểm n được xác định bởi tổng của hai mẫu của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ tại cùng thời điểm đó:

$$y(n) = x_1(n) + x_2(n), \quad (3.29)$$

với mọi n .

Nhân tín hiệu

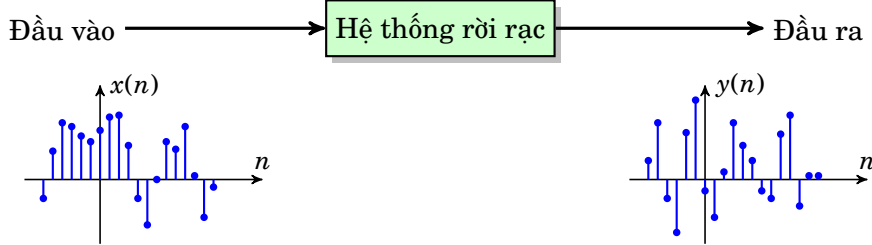
Tương tự, một thao tác biến đổi biên độ khác là **nhân tín hiệu**. Tích của hai tín hiệu $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là một tín hiệu $y(n)$ có mẫu tại mỗi thời điểm n được xác định bởi tích của hai mẫu của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ tại cùng thời điểm đó:

$$y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n) \quad (3.30)$$

với mọi n .

3.3 Hệ thống rời rạc

Trong rất nhiều áp dụng thực tiễn, cần thiết kế một thiết bị hoặc một thuật toán để thực hiện những thao tác trên các tín hiệu rời rạc. Thiết bị hay thuật toán này được gọi là một hệ thống rời rạc. Một cách tổng quát bằng toán học, một hệ thống rời rạc là một toán



Hình 3.9: Sơ đồ khối hệ thống rời rạc.

tử, thường ký hiệu là $\mathcal{T}\{\cdot\}$, biến đổi một tín hiệu rời rạc được gọi là **tín hiệu đầu vào** thành một tín hiệu rời rạc khác được gọi là **tín hiệu đầu ra**. Tín hiệu đầu vào còn được gọi là tín hiệu kích thích và tín hiệu đầu ra là tín hiệu đáp ứng. Gọi $x(n)$ là tín hiệu đầu vào và $y(n)$ là tín hiệu đầu ra, ta có mối quan hệ

$$y(n) = \mathcal{T}\{x(n)\}. \quad (3.31)$$

Quan hệ này được minh họa bằng sơ đồ khối như trên hình 3.9.

3.3.1 Mô hình hệ thống

Trong giáo trình này, vấn đề quan tâm là một họ hệ thống được biểu diễn bởi các phương trình sai phân tuyến tính có hệ số là hằng số. Mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra của họ hệ thống này là một phương trình sai phân tuyến tính có dạng:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad (3.32)$$

trong đó a_k và b_k là các hệ số có thể phụ thuộc vào n nhưng hoàn toàn độc lập với mọi $x(n)$ và mọi $y(n)$. N và M là hai hằng số nguyên dương. Chính vì N và M hữu hạn nên họ hệ thống được biểu diễn bởi (3.32) còn được gọi là **hệ thống bậc hữu hạn**.

Có thể đặc tả phương trình sai phân (3.32) bằng một **sơ đồ hệ thống** được xác định bởi ba toán tử cơ bản là cộng tín hiệu, khuếch đại biên độ và dịch trễ thời gian. Để minh họa tính hữu ích của sơ đồ, xét ví dụ đơn giản sau đây.

Ví dụ 3.4 (Sơ đồ hệ thống)

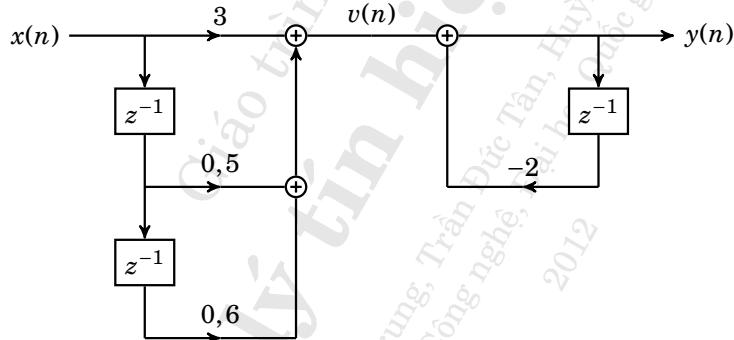
Xét phương trình sai phân

$$y(n] + 2y(n - 1) = 3x(n) + 0,5x(n - 1) + 0,6x(n - 2).$$

Để xây dựng sơ đồ mô tả hệ thống được biểu diễn bởi phương trình trên, ta viết lại nó dưới dạng biểu diễn mẫu đầu ra $y(n)$ tại thời điểm hiện tại n theo các mẫu đầu vào tại các thời điểm hiện tại và quá khứ và các mẫu đầu ra tại các thời điểm quá khứ như sau:

$$\begin{aligned} y(n] &= -2y(n - 1) + 3x(n) + 0,5x(n - 1) + 0,6x(n - 2) \\ &= -2y(n - 1) + v(n) \end{aligned}$$

Kết quả trên giúp mô tả hệ thống bằng một sơ đồ như trên hình 3.10. □



Hình 3.10: Sơ đồ mô tả hệ thống thực thi bởi các bộ cộng, bộ khuếch đại và bộ dịch trễ đơn vị.

Trong chương 4, ta sẽ trình bày kỹ lưỡng hơn cách chọn sơ đồ hệ thống một cách thích hợp cho từng áp dụng và cách giản lược một sơ đồ.

3.3.2 Phân loại hệ thống

Trong quá trình phân tích và thiết kế các hệ thống rời rạc, tính chất đặc trưng của hệ thống đóng một vai trò rất quan trọng. Các hệ thống được phân loại theo các tính chất đặc trưng này.

Hệ thống tĩnh và hệ thống động

Một hệ thống rời rạc được gọi là **hệ thống tĩnh** hay hệ thống không nhớ nếu mẫu ở đầu ra $y(n)$ tại thời điểm n chỉ phụ thuộc mẫu ở đầu vào $x(n)$ tại cùng một thời điểm n .

Ngược lại, nếu mẫu đầu ra $y(n)$ tại thời điểm n phụ thuộc vào nhiều mẫu tại các thời điểm khác nhau của đầu vào $x(n)$ thì hệ thống được gọi là **hệ thống động** hoặc có nhớ.

Ví dụ 3.5 (Hệ thống tĩnh và hệ thống động)

Xét các hệ thống cho bởi các phương trình sai phân sau:

$$y(n) = 10nx(n) \quad (3.33)$$

$$y(n) = -7x(n) + 0,2x^3(n) \quad (3.34)$$

$$y(n) = 2x(n) - 0,5x(n-1) \quad (3.35)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \quad (3.36)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \quad (3.37)$$

Các hệ thống mô tả bởi các phương trình (3.33) và (3.34) là tĩnh và bởi các phương trình (3.35), (3.36) và (3.37) là động. Các hệ thống trong (3.35) và (3.36) có bộ nhớ hữu hạn và trong (3.37) có bộ nhớ vô hạn. \square

Hệ thống bất biến

Về mặt vật lý, hệ thống thường gặp được gọi là **bất biến** nếu việc quan sát hệ thống tại các thời điểm khác nhau đều cho ra kết quả giống nhau. Có nghĩa là nếu dùng cùng một tín hiệu kích thích nhưng tại các thời điểm khác nhau thì các đáp ứng của hệ thống đó là giống nhau. Xét một hệ thống \mathcal{T} được kích thích bởi $x(n)$ và có đáp ứng

$$y(n) = \mathcal{T}\{x(n)\}. \quad (3.38)$$

Giả sử kích thích lại hệ thống bởi chính tín hiệu đó nhưng đã được dịch trễ n_0 bước bất kỳ thì có đáp ứng là

$$z(n) = \mathcal{T}\{x(n - n_0)\}. \quad (3.39)$$

Hệ thống này bất biến nếu $z(n)$ chính là đáp ứng $y(n)$ nhưng được dịch trễ đúng n_0 bước

$$z(n) = y(n - n_0). \quad (3.40)$$

Hệ thống tuyến tính

Giáo trình này quan tâm đến một loại hệ thống có đặc tính là **tuyến tính**. Loại hệ thống này thỏa mãn hai tính chất vật lý quan trọng. Thứ nhất là, nếu đầu vào của hệ thống được khuếch đại a lần thì đầu ra của hệ thống cũng được khuếch đại a lần. Thứ hai là, nếu đầu vào là tổng của hai tín hiệu thì đầu ra là tổng của hai tín hiệu đầu ra tương ứng.

Khái niệm tuyến tính này cho thấy là nếu đầu vào của hệ thống tuyến tính là một tổ hợp của nhiều tín hiệu thì đầu ra của nó là tổ hợp của các đầu ra tương ứng

$$\mathcal{T}\left\{\sum_k a_k x_k(n)\right\} = \sum_k a_k \mathcal{T}\{x_k(n)\}. \quad (3.41)$$

Tính chất tuyến tính đóng vai trò cực kỳ quan trọng khi xây dựng mô hình các hệ thống. Giáo trình này quan tâm đến họ các hệ thống vừa tuyến tính vừa bất biến. Các hệ thống loại này có thể được thiết kế bởi các mạch điện tử tương tự hay rời rạc phổ cập.

Hệ thống nhân quả

Một hệ thống được gọi là **nhân quả** khi tín hiệu đầu ra xuất hiện sau khi đầu vào xuất hiện. Khái niệm nhân quả trong vật lý vừa có tính trực giác, vừa có tính cơ bản.

Cho tín hiệu đầu vào $x(n)$ thỏa mãn

$$x(n) = 0 \quad \text{với mọi } n < n_0. \quad (3.42)$$

Nếu hệ thống là nhân quả thì đầu ra $y(n)$ cũng thỏa mãn

$$y(n) = 0 \quad \text{với mọi } n < n_0. \quad (3.43)$$

Điều này cho thấy, tại thời điểm quan sát hiện tại n , đầu ra $y(n)$ chỉ phụ thuộc vào hiện tại và quá khứ của đầu vào, tức là $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ... Hay nói cách khác, nếu $y(n)$ phụ thuộc vào tương lai của $x(n)$, tức là $x(n+1)$, $x(n+2)$, ..., thì hệ thống không còn là nhân quả.

Hệ thống ổn định

Đặc tính quan trọng nhất trong các đặc tính của hệ thống là **ổn định**, đã được Lyapunov định nghĩa bằng toán học dựa trên những quan sát vật lý. Tại thời điểm này, vẫn chưa có sự thống nhất về khái niệm, tuy nhiên có thể khái quát hóa như sau: Một hệ thống được gọi là ổn định nếu ta kéo nó rời khỏi quỹ đạo hoạt động bình thường thì sau đó một thời gian nó sẽ quay trở lại quỹ đạo bình thường của nó. Như thế ta hình dung được ngay, nếu hệ thống là ổn định lúc ta kích thích nó với những tín hiệu có biên độ hữu hạn thì đầu ra cũng sẽ có biên độ hữu hạn.

Khái niệm ổn định này được mang tên là BIBO*. Nếu tồn tại một số nguyên dương M_x sao cho đầu vào $x(n)$ của một hệ thống ổn định thỏa mãn

$$|x(n)| < M_x < \infty, \quad (3.44)$$

với mọi n , thì tồn tại một số nguyên dương M_y sao cho đầu ra $y(n)$ thỏa mãn

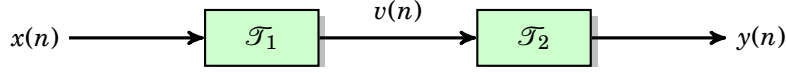
$$|y(n)| < M_y < \infty, \quad (3.45)$$

với mọi n .

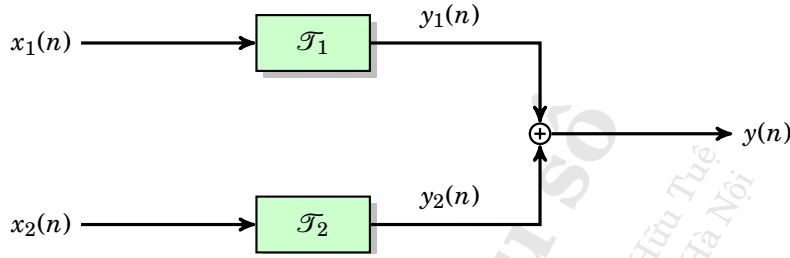
3.3.3 Kết nối các hệ thống

Các hệ thống rời rạc thường được kết nối với nhau để tạo nên một hệ thống lớn hơn. Có hai cách kết nối đơn giản và cơ bản nhất là **kết nối nối tiếp** và **kết nối song song**.

*BIBO: Bounded Input – Bounded Output.



Hình 3.11: Kết nối nối tiếp.



Hình 3.12: Kết nối song song.

Hình 3.11 mô tả mô hình kết nối nối tiếp của hai hệ thống \mathcal{T}_1 và \mathcal{T}_2 . Theo đó, tín hiệu đầu ra $y(n)$ được tính là

$$y(n) = \mathcal{T}_2\{v(n)\} = \mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1\{x(n)\}\}. \quad (3.46)$$

Trong quá trình kết nối nối tiếp, vị trí của hệ thống rất quan trọng bởi vì một cách tổng quát

$$\mathcal{T}_2\{\mathcal{T}_1\{x(n)\}\} \neq \mathcal{T}_1\{\mathcal{T}_2\{x(n)\}\}. \quad (3.47)$$

Tuy nhiên, nếu \mathcal{T}_1 và \mathcal{T}_2 là tuyến tính và bất biến thì ta có thể hoán đổi vị trí của chúng mà đầu ra của hệ thống nối tiếp không thay đổi. Kết luận này sẽ được khẳng định sau khi chúng ta nghiên cứu sâu hơn về hệ thống tuyến tính bất biến ngay trong phần tiếp theo.

Hình 3.12 mô tả mô hình kết nối song song của hai hệ thống \mathcal{T}_1 và \mathcal{T}_2 . Tín hiệu đầu ra là

$$y(n) = y_1(n) + y_2(n) = \mathcal{T}_1\{x_1(n)\} + \mathcal{T}_2\{x_2(n)\}. \quad (3.48)$$

3.4 Hệ thống tuyến tính bất biến

Xét một hệ thống tuyến tính bất biến \mathcal{T} . Gọi $h(n)$ là đáp ứng của hệ thống lúc được kích thích nó bởi một xung Kronecker $\delta(n)$.

Lúc đó, $h(n)$ được gọi là **đáp ứng xung** của hệ thống. Nếu chiều dài của chuỗi $h(n)$ là hữu hạn thì hệ thống được gọi là **hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn** (FIR). Trong trường hợp ngược lại, ta gọi là **hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn** (IIR).

Ví dụ 3.6 (Hệ thống FIR và hệ thống IIR)

Cho các hệ thống có đáp ứng xung được mô tả bằng các chuỗi số như sau:

$$h_1(n) = \{\dots; 0, 25; 0, 5; 1; 0, 5; 0, 25; \dots\}$$

$$h_2(n) = \{1, 2; -3; \dots\}$$

$$h_3(n) = \{1; -1; 3; 5; 0; 4; 1\}$$

$$h_4(n) = \{1, 5; 0; 7\}$$

Như vậy, các hệ thống có đáp ứng xung $h_1(n)$ và $h_2(n)$ có số mẫu là vô hạn, nên chúng là hệ thống IIR. Các hệ thống $h_3(n)$ và $h_4(n)$ là FIR. \square

Xét một tín hiệu đầu vào bất kỳ $x(n)$ thay vì xung Kronecker. Tại thời điểm k , mẫu của tín hiệu $x(k)$. Mẫu này cũng có thể xem như một xung Kronecker xuất hiện tại thời điểm k , tức là $\delta(n - k)$, với biên độ có giá trị bằng mẫu $x(k)$. Ta thấy ngay $x(n)$ có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các xung Kronecker như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n - k). \quad (3.49)$$

Nhờ phân tích (3.49) mà ta sẽ thấy là một **hệ thống tuyến tính bất biến**, thường được viết tắt là hệ thống LTI*, hoàn toàn được xác định bởi đáp ứng xung $h(n)$ của nó. Hay nói cách khác, ta có thể dùng $h(n)$ để tính đầu ra của hệ thống lúc được kích thích bởi bất kỳ tín hiệu nào.

Thật vậy, nếu hệ thống được kích thích bởi $x(n)$, thì có nghĩa là nó được kích thích bởi một tổ hợp tuyến tính các xung Kronecker,

*LTI: Linear-Time Invariant.

theo (3.49). Nếu hệ thống là tuyến tính thì, theo định nghĩa, đầu ra $y(n)$ là tổ hợp tuyến tính của các đầu ra có được lúc kích thích bởi các xung $\delta(n-k)$ với mọi k , được viết như sau

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \mathcal{T} \{ \delta(n-k) \}. \quad (3.50)$$

Hơn nữa, nếu hệ thống trên cũng là bất biến thì, theo định nghĩa, đáp ứng của hệ thống được kích thích bởi một xung Kronecker xuất hiện tại thời điểm k , tức là $\delta(n-k)$, sẽ là $h(n-k)$. Như vậy, có thể biểu diễn tiếp đầu ra bằng

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k). \quad (3.51)$$

Kết quả này cho thấy đối với một hệ thống tuyến tính bất biến thì mối liên hệ giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào được biểu diễn một cách tường minh với phương trình (3.51), là một biểu thức hoàn toàn được xác định bởi đáp ứng xung $h(n)$. Như thế, ta có thể kết luận rằng, một hệ thống tuyến tính bất biến hoàn toàn được đặc trưng hóa bởi đáp ứng xung của nó.

Phương trình (3.51) thường được ký hiệu như sau:

$$y(n) = h(n) \star x(n), \quad (3.52)$$

trong đó phép toán \star được gọi là **tích chập***. Như vậy, đầu ra $y(n)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến bằng tích chập giữa đáp ứng xung $h(n)$ và tín hiệu đầu vào $x(n)$.

Bằng cách đổi biến số $m = n - k$, phương trình (3.51) có thể được viết lại dưới dạng sau đây:

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) x(n-m). \quad (3.53)$$

Chú ý trong phương trình này, nếu ta thay chỉ số cầm m bằng chỉ số k mà kết quả hoàn toàn không thay đổi, nghĩa là

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k). \quad (3.54)$$

* Convolution product, còn được gọi tắt là Convolution.

So sánh (3.51) và (3.54) ta thấy tích chập là khả hoán, nghĩa là

$$h(n) \star x(n) = x(n) \star h(n). \quad (3.55)$$

3.4.1 Ý nghĩa của đáp ứng xung và tích chập

Một hệ thống tuyến tính bất biến có thể là nhân quả hoặc không. Nếu hệ thống là nhân quả thì đáp ứng xung của nó chỉ xuất hiện lúc được kích thích bởi xung Kronecker $\delta(n)$ ở đầu vào, tức là $h(n) = 0$ nếu $n < 0$. Nếu đáp ứng xung $h(n)$ không thỏa mãn điều kiện này thì hệ thống không nhân quả. Đặc biệt, nếu $h(n) = 0$ lúc $n \geq 0$ thì hệ thống được gọi là phản nhân quả. Trong trường hợp hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả, tích chập (3.54) trở thành:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (3.56)$$

Đối với đầu ra của một hệ thống tuyến tính bất biến bất kỳ, phương trình (3.51) cho thấy đầu ra tại thời điểm n_0 là

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0-k). \quad (3.57)$$

Trong (3.57) ta thấy chỉ số của tổng là k . Như thế $x(k)$ và $h(n_0-k)$ là phụ thuộc vào biến số k , hai chuỗi này nhân với nhau để có một chuỗi tích phụ thuộc vào k . Cuối cùng, đầu ra $y(n_0)$ chỉ là tổng của tất cả các thành phần của chuỗi tích này. Chuỗi $h(n_0-k)$ có được bằng đổi chiều thời gian k để có $h(-k)$ và sau đó dịch $h(-k)$ đi n_0 bước. Các bước tính tích chập được mô tả trong Phương pháp 3.1. Để hiểu rõ hơn cách tính tích chập, ta xét ví dụ sau đây.

Phương pháp 3.1 – Tính tích chập.

1. Đảo chiều thời gian của chuỗi $h(k)$ để có $h(-k)$.
2. Chọn một giá trị n_0 sao cho sau khi dịch gốc thời gian của chuỗi $h(-k)$ đi n_0 bước để có $h(n_0 - k)$ thì $h(n_0 - k)$ bắt đầu chồng lên $x(k)$ từ phía bên trái (tại thời điểm k_0 nhỏ nhất mà cả mẫu $x(k_0)$ và $h(n_0 - k_0)$ đều khác 0).
3. Nhân hai chuỗi $x(k)$ và $h(n_0 - k)$ để có chuỗi tích $v_{n_0}(k)$.
4. Lấy tổng tất cả các mẫu của $v_{n_0}(k)$ để có giá mẫu đầu ra $y(n_0)$ tại thời điểm n_0 .
5. Dịch gốc thời gian của $h(n_0 - k)$ dần sang phía phải (tăng dần n_0) và thực hiện các bước 3 và 4 đối với tất cả n_0 mà $x(k)$ và $h(n_0 - k)$ còn chồng lên nhau, để có tất cả các giá trị các mẫu còn lại của $y(n)$.

Ví dụ 3.7 (Tính tích chập)

Xét hệ thống có đáp ứng xung là

$$h(n) = \{1; -1\}$$

và tín hiệu đầu vào là

$$x(n) = \{1; 3; 2\}.$$

Thực hiện bước 1, ta có chuỗi $h(-k) = \{-1; 1\}$, như trên hình 3.13(b).

Thực hiện bước 2, ta chọn $n_0 = 0$ để có chuỗi $h(0 - k)$ (hình 3.13(e)) bắt đầu chồng lên chuỗi $x(k)$ (hình 3.13(a)).

Thực hiện bước 3 để tính

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(0 - k) = (1)(1) = 1.$$

Thực hiện bước 4 bằng cách tăng dần n_0 từ 0 đến 3 để có các chuỗi $h(1 - k)$, $h(2 - k)$ và $h(3 - k)$ chồng lên $x(k)$, như các hình 3.13(f,g,h),

và tính các giá trị mẫu đầu ra tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} y(1) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = (1)(-1) + (3)(1) = 2, \\ y(2) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(2-k) = (3)(-1) + (2)(1) = -1, \\ y(3) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(3-k) = (2)(-1) = -2. \end{aligned}$$

Với các giá trị n_0 không thuộc $\{0, 1, 2, 3\}$, các chuỗi $x(k)$ và $h(n_0 - k)$ không chồng lên nhau, nên tích của chúng triệt tiêu, kéo theo tổng các mẫu của chuỗi tích cũng triệt tiêu, vì thế $y(n_0)$ triệt tiêu. Cuối cùng, ta có chuỗi đầu ra của hệ thống $h(n)$ là

$$y(n) = x(n) \star h(n) = \{1; 2; -1; -2\},$$

như mô tả trong hình 3.13(d).

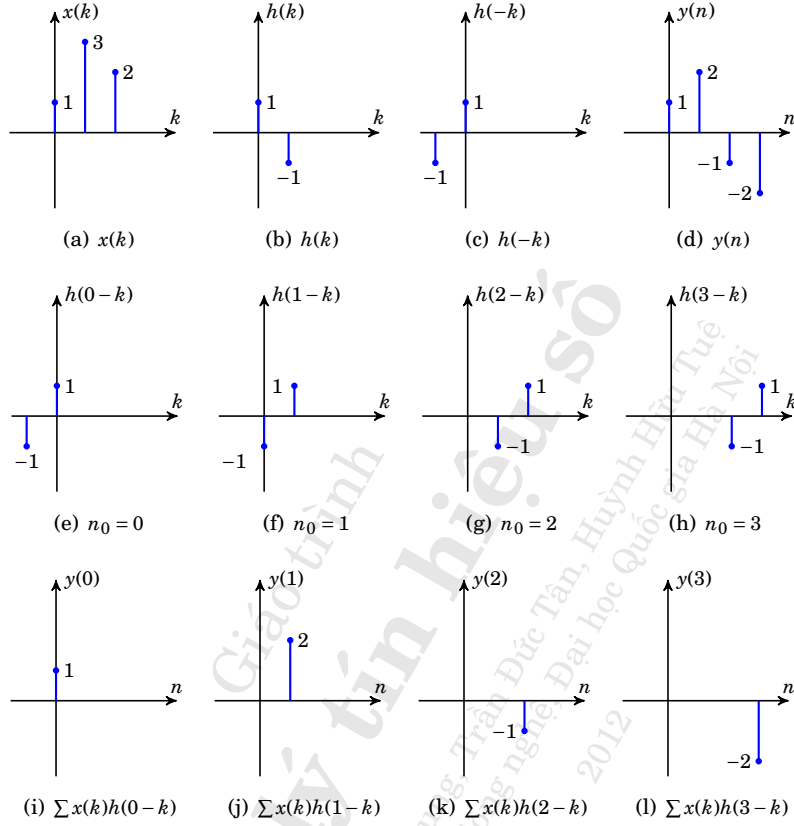
Hãy đưa ra công thức tổng quát của chiều dài của chuỗi đầu ra $y(n)$ so với chiều dài của chuỗi đầu vào $x(n)$ và của đáp ứng xung $h(n)$? \square

3.4.2 Đáp ứng xung của hệ thống nối tiếp

Xét hai hệ thống tuyến tính bất biến mắc nối tiếp hai hệ thống \mathcal{T}_1 và \mathcal{T}_2 với các đáp ứng xung tương ứng là $h_1(n)$ và $h_2(n)$. Bởi vì cả \mathcal{T}_1 và \mathcal{T}_2 đều tuyến tính, nên hệ thống nối tiếp này là tuyến tính. Gọi $h(n)$ là đáp ứng xung của nó, ta có:

$$\begin{aligned} h(n) &= \mathcal{T}_2 \{ \mathcal{T}_1 \{ \delta(n) \} \} \\ &= \mathcal{T}_2 \{ h_1(n) \} \\ &= h_2(n) \star h_1(n). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Kết quả (3.58) cho thấy đáp ứng xung của hệ thống nối tiếp là tích chập của hai đáp ứng xung thành phần; vì tích chập là khả hoán, do đó đối với cấu trúc nối tiếp, có thể hoán vị vị trí hai hệ thống mà cấu trúc không thay đổi.



Hình 3.13: Tích chập.

3.4.3 Hệ thống tuyến tính ổn định

Khái niệm ổn định đã được đề cập trong phần 3.3.2. Để áp dụng khái niệm ổn định BIBO vào hệ thống tuyến tính bất biến, trước tiên ta xét mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra thông qua đáp ứng xung $h(n)$, theo (3.51), như sau:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k). \quad (3.59)$$

Suy ra

$$y(n) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)|. \quad (3.60)$$

Xét trường hợp đầu vào có biên độ hữu hạn, tức tồn tại một số thực dương M_x sao cho

$$|x(n)| \leq M_x, \quad -\infty < n < \infty.$$

Theo tính ổn định BIBO của hệ thống, nếu đầu vào $x(n)$ có biên độ hữu hạn thì đầu ra $y(n)$ cũng có biên độ hữu hạn. Nếu tồn tại một số nguyên dương M hữu hạn chặn trên của vế phải của (3.60), ta có

$$y(n) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| |x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| M_x < M. \quad (3.61)$$

Vế hai của bất đẳng thức (3.61) cho ta

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \frac{M}{M_x} < \infty. \quad (3.62)$$

Vậy, điều kiện đủ để hệ thống tuyến tính bất biến ổn định là

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty. \quad (3.63)$$

Cũng có thể chứng minh dễ dàng rằng bất đẳng thức (3.63) là điều kiện cần cho tính ổn định của hệ thống.

3.5 Biến đổi Z và áp dụng vào hệ thống tuyến tính bất biến

Đối với tín hiệu và hệ thống theo thời gian liên tục, biến đổi Laplace cho phép biến đổi và phân tích hệ thống một cách đơn giản, tránh những tính toán phức tạp trong miền thời gian. Tương tự, đối với một tín hiệu rời rạc, ta sẽ sử dụng biến đổi Z để phân tích và biểu diễn các tín hiệu cũng như các hệ thống rời rạc. Giáo trình tập trung vào tổng hợp và thiết kế các bộ lọc rời rạc, bộ lọc số do đó ta không quan tâm đến phân tích và xử lý trong miền thời gian liên tục.

3.5.1 Biến đổi Z

Cho một tín hiệu rời rạc $x(n)$, **biến đổi Z** của tín hiệu này, ký hiệu là $S(z)$ hoặc $\mathcal{Z}\{x(n)\}$ hoặc viết tắt là ZT^* , được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}. \quad (3.64)$$

Biến đổi Z là một chuỗi theo biến độc lập phức z . Hệ số của mỗi z^{-n} tại thời điểm n là mẫu của tín hiệu $x(n)$ tại thời điểm n . Chuỗi này có thể được xem là một chuỗi hình thức cho phép ta xác định các mẫu $x(n)$ của tín hiệu. Tuy nhiên, khi tính toán, để có những kết quả giải tích buộc phải có điều kiện hội tụ cho chuỗi, tức là tổng vô hạn trong (3.64) có giá trị hữu hạn. Vùng chứa các điểm z để $X(z)$ hội tụ gọi là **vùng hội tụ**, thường ký hiệu là ROC^\dagger .

Để hiểu rõ nội dung các khái niệm này, xét một số ví dụ sau đây. Trước hết xem xét tính hội tụ của một tín hiệu có chiều dài hữu hạn.

Ví dụ 3.8 (Biến đổi Z của một tín hiệu có chiều dài hữu hạn)

Xét tín hiệu rời rạc sau

$$x(n) = \{1, -1, 0, 3, 5, 7\}.$$

Biến đổi Z của $x(n)$ là

$$\begin{aligned} X(z) &= z^3 - z^2 + 0 \cdot z + 3z^0 + 5z^{-1} + 7z^{-2} \\ &= z^3 - z^2 + 3 + 5z^{-1} + 7z^{-2}. \end{aligned}$$

□

Như vậy, biến đổi Z của một tín hiệu có chiều dài hữu hạn là luôn luôn hội tụ.

Do tín hiệu Kronecker là quan trọng trong lĩnh vực xử lý tín hiệu số, ta xác định biến đổi Z của nó như trong ví dụ tiếp theo.

*ZT: Z transform.

†ROC: Region of Convergence.

Ví dụ 3.9 (Biến đổi Z của xung Kronecker)

Xét tín hiệu xung Kronecker: $x(n) = \delta(n)$. Biến đổi Z của nó là

$$X(z) = 1.$$

□

Sau đây ta xem xét biến đổi Z của một tín hiệu nhân quả, là một tín hiệu triệt tiêu tại các thời điểm âm như ta đã biết.

Ví dụ 3.10 (Biến đổi Z của tín hiệu nhân quả)

Xét tín hiệu mũ sau

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{nếu } n \geq 0 \\ 0, & \text{nếu } n < 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Như vậy, $x(n)$ là tín hiệu nhân quả. Biến đổi Z của nó là

$$\begin{aligned} S(z) &= 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n. \end{aligned}$$

Chuỗi hình thức của $X(z)$ có thể được đơn giản hóa trong vùng chuỗi hội tụ. Ta biết rằng

$$\sum_{n=0}^{\infty} d^n = \frac{1}{1-d}, \quad \text{với } |d| < 1.$$

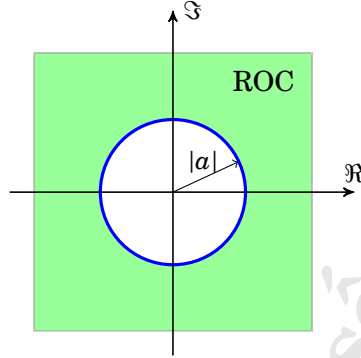
Áp dụng kết quả này ta có

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad \text{với } |z| > |a|,$$

Nhận thấy, chuỗi hình thức của $X(z)$ hội tụ trong vùng xác định bởi $|z| > |a|$, tức là vùng nằm ngoài vòng tròn có bán kính $|a|$ như được minh họa ở hình 3.14.

□

Như vậy, vùng hội tụ của tín hiệu nhân quả nằm ngoài vòng tròn. Kết quả này rất tổng quát và dùng tính chất của hàm phức có



Hình 3.14: Vùng hội tụ của tín hiệu nhân quả nằm ngoài vòng tròn có bán kính $|a|$ của mặt phẳng z .

thể chứng minh được dễ dàng là các tín hiệu nhân quả có vùng hội tụ nằm ngoài một vòng tròn nào đó.

Chú ý rằng, khi $a = 1$ thì $x(n]$ trong ví dụ trên biến thành tín hiệu bậc thang đơn vị $u(n]$ và do đó biến đổi Z của tín hiệu bậc thang đơn vị là

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{với } |z| > 1,$$

Vùng hội tụ của biến đổi Z của tín hiệu bậc thang đơn vị này là vùng nằm ngoài vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 3.11 (Biến đổi Z của tín hiệu phản nhân quả)

Xét tín hiệu mũ được định nghĩa như sau:

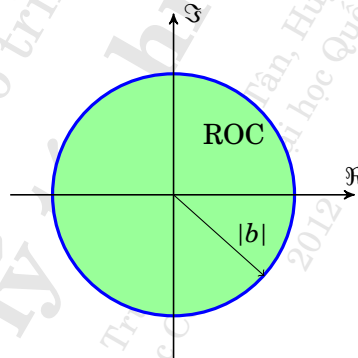
$$x(n) = \begin{cases} b^n, & \text{nếu } n < 0 \\ 0, & \text{nếu } n \geq 0 \end{cases}$$

Tín hiệu này triệt tiêu tại các thời điểm không âm nên được gọi là **phản nhân quả**.

Biến đổi Z của nó là

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n - 1 \\ &= -\frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad \text{với } |z| < |b|. \end{aligned}$$

Ta thấy chuỗi hình thức của $X(z)$ hội tụ trong vòng tròn có bán kính là $|b|$, minh họa như trên hình 3.15. \square



Hình 3.15: Vùng hội tụ của tín hiệu phản nhân quả nằm trong vòng tròn có bán kính $|b|$ của mặt phẳng z .

Như vậy, vùng hội tụ của tín hiệu phản nhân quả nằm trong vòng tròn có bán kính $|b|$ của mặt phẳng z . Kết quả này rất tổng quát trong nghĩa các tín hiệu phản nhân quả đều có vùng hội tụ nằm trong một vòng tròn nào đó.

Ví dụ 3.12 (Biến đổi Z của tín hiệu không nhân quả)

Một tín hiệu không nhân quả là một tín hiệu hiện hữu tại cả thời

điểm tương lai lẫn quá khứ. Xét tín hiệu không nhân quả sau đây:

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & \text{với } n \geq 0 \\ b^n, & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

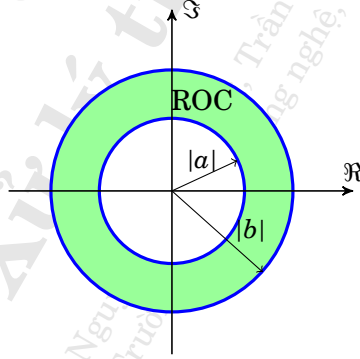
Biến đổi Z của $x(n)$ được biểu diễn bởi chuỗi hình thức sau đây:

$$\begin{aligned} X(z) &= \cdots + b^2 z^2 + b z + 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}. \end{aligned}$$

Chuỗi hình thức này có thể tách thành hai chuỗi nhân quả và phản nhân quả như sau

$$X(z) = -\frac{1}{1-bz^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad \text{với } |z| < |b|, |z| > |a|.$$

Điều kiện hội tụ của chuỗi hình thức này chỉ hiện hữu khi $|a| < |b|$ và như thế vùng hội tụ của một tín hiệu không nhân quả là một vành, như trên hình 3.16).



Hình 3.16: Vùng hội tụ của tín hiệu không nhân quả nằm trong vành $|a| < |z| < |b|$ trên mặt phẳng z .

□

Một số biến đổi Z phổ cập được trình bày trong bảng 3.1 và một số tính chất quan trọng của biến đổi Z được trình bày trong bảng 3.2.

Bảng 3.1: Một số biến đổi Z thông dụng.

$x(n)$	$S(z)$
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$, ROC: $ z > 1$
$anu(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, ROC: $ z > 1$
$e^{-na}u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$, ROC: $ z > e^{-a} $
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $ z > a $
$a^n [1-u(n)]$	$-\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $ z < a $
$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^2}$
$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^2}$

Ba tính chất quan trọng nhất của biến đổi Z liên quan đến giáo trình này là tính chất tuyến tính, dịch trễ và tích chập. Những tính chất này đã được phân tích và chứng minh trong giáo trình tín hiệu và hệ thống.

3.5.2 Biến đổi Z ngược

Thao tác từ tín hiệu $x(n)$ suy ra $X(z)$ là biến đổi Z. Ngược lại, thao tác từ $X(z)$ suy ra $x(n)$ được gọi là **biến đổi Z ngược*** và được ký hiệu toán tử là $\mathcal{Z}^{-1}\{\cdot\}$:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}. \quad (3.66)$$

*Inverse Z transform.

Bảng 3.2: Tính chất của biến đổi Z.

$x(n)$	$S(z)$
$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1x_1(z) + a_2x_2(z)$
$s(n - n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
$e^{-na}x(n)$	$S(e^a z)$
$\alpha^{-n}x(n)$	$S(\alpha z)$
$h(n) \star x(n)$	$H(z)X(z)$

Nếu biến đổi Z được biểu diễn bởi chuỗi hình thức theo (3.64) thì hiển nhiên biến đổi Z ngược là hoàn toàn xác định bởi các hệ số của chuỗi hình thức này. Tuy nhiên, trong quá trình tính toán, trong các vùng hội tụ thì chuỗi này được biểu diễn bởi các hàm tường minh như được minh họa bởi các ví dụ trước đây. Trong trường hợp các biểu thức tường minh này ta có thể dùng công thức biến đổi ngược dựa trên định lý Cauchy trong lĩnh vực hàm phức, cụ thể như sau:

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)z^{-n}dz. \quad (3.67)$$

Tuy nhiên, trong giáo trình này, các hàm tường minh của biến đổi Z có dạng hữu tỷ theo z^{-1} . Trong trường hợp đó, không cần dùng công thức (3.67) để tính biến đổi ngược mà dùng trực tiếp các kết biến đổi Z hữu dụng, như đã cho trong bảng 3.1. Khi tính biến đổi ngược theo phương pháp này, cần chú ý đến vùng hội tụ của chuỗi, tức là vùng trong vùng đó biểu thức tường minh của biến đổi Z mới có giá trị.

Ví dụ 3.13 (Tìm biến đổi Z ngược từ bảng)

Tìm $x(n)$ từ $X(z)$ cho sau đây bằng cách tính biến đổi Z ngược của $X(z)$.

$$X(z) = \frac{3z}{z - 0,5}, \quad |z| > 0,5.$$

Từ đề bài, biết rằng vùng hội tụ của $X(z)$ là vùng nằm ngoài

vòng tròn có bán kính 0,5 và như thế $x(n)$ là một tín hiệu nhân quả. Đồng thời có thể biểu diễn

$$X(z) = \frac{3z}{z-0,5} = 3 \times \frac{1}{1-0,5z^{-1}}.$$

Với hai thông tin này, đối chiếu với các kết quả biến đổi Z hữu dụng trong bảng 3.1 có thể thấy cặp sau đây là phù hợp

$$a^n u(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

Suy ra

$$\frac{1}{1-0,5z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} (0,5)^n u(n).$$

Cuối cùng, áp dụng tính chất tuyến tính của biến đổi Z trong bảng 3.2 để có

$$x(n) = 3(0,5)^n u(n).$$

□

Chú ý rằng

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}.$$

Vì vậy, khi phân tích một hàm hữu tỷ thành tổng các thành phần đơn, thay vì dùng trực tiếp $X(z)$, phân tích $X(z)/z$ thành các phần đơn có dạng $1/(z-a)$, từ đó suy ra dễ dàng kết quả như sẽ được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.14 (Tính biến đổi Z ngược bằng phân tích thành phần đơn)
Tìm biến đổi Z ngược của $X(z)$ cho bởi

$$X(z) = \frac{z(z-4)}{(z-1)(z-2)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

Có thể thấy vùng hội tụ là một vành, nên tín hiệu $x(n)$ không nhân quả. Vì vậy, để tính biến đổi ngược, cần phân tích nó thành hai thành phần nhân quả và phản nhân quả. Để có thể dùng bảng biến

đối phổ cập, trước tiên ta phân tích $X(z)/z$ thành các phân tử đơn, trong trường hợp này sẽ có

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z-4}{(z-1)(z-2)} = \frac{3}{z-1} - \frac{2}{z-2}.$$

Suy ra

$$X(z) = 3\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-2} = 3\frac{1}{1-z^{-1}} - 2\frac{1}{1-2z^{-1}}.$$

Biết rằng, vùng hội tụ của $X(z)$ là $1 < |z| < 2$ nhận thấy thành phần $1/(1-z^{-1})$ có biến đổi ngược là nhân quả và thành phần $1/(1-2z^{-1})$ là phản nhân quả. Do đó, đối chiếu với bảng 3.1, ta có

$$x(n) = 3u(n) + 2 \cdot 2^n (1 - u(n)).$$

Trong kết quả trên, $1 - u(n) = 1$ lúc n âm và triệt tiêu lúc $n \geq 0$. \square

3.5.3 Biến đổi Z và hệ thống tuyến tính bất biến

Biến đổi Z rất hữu ích lúc nghiên cứu tín hiệu rời rạc và hệ thống rời rạc, đặc biệt là đối với các hệ thống tuyến tính bất biến bậc hữu hạn. Đối với loại hệ thống này, như ta đã biết ở phương trình (3.32), đầu vào và đầu ra của hệ thống được nối kết bởi một phương trình sai phân tuyến tính có hệ số là hằng số như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k). \quad (3.68)$$

Đáp án của phương trình này, tức là $y(n)$, có thể biểu diễn dưới hai dạng khác nhau.

Dạng thứ nhất

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n). \quad (3.69)$$

Trong (3.74), $y_p(n)$ là một nghiệm bất kỳ thỏa mãn phương trình sai phân (3.74). Nghiệm này thường được gọi là nghiệm riêng hay

ng nghiệm đặc biệt của phương trình sai phân. Còn $y_h(n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k y_h(n-k) = 0. \quad (3.70)$$

Do vậy, $y_h(n)$ có dạng

$$y_h(n) = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + \dots + A_N r_N^n, \quad (3.71)$$

trong đó A_1, A_2, \dots, A_N là hằng số và r_1, r_2, \dots, r_N là N nghiệm của phương trình sau:

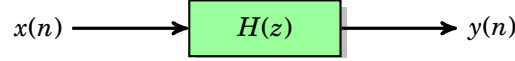
$$a_0 r^N + a_1 r^{N-1} + \dots + a_{N-1} r + a_N = 0. \quad (3.72)$$

Phương trình (3.72) được gọi là **phương trình đặc trưng**. Chú ý kết quả tổng quát trong (3.71) chỉ đúng khi N nghiệm của phương trình đặc trưng là khác nhau. Tuy nhiên, trong trường hợp nghiệm kép thì r_k^n vẫn xuất hiện trong đáp án của hệ thống. Các thông số A_1, A_2, \dots, A_N được xác định bởi các điều kiện ban đầu $y(-N), y(1-N), \dots, y(-1)$ của phương trình sai phân. Đáp án của hệ thống, tức nghiệm của phương trình sai phân (3.74) có thể được trình bày dưới một dạng có nhiều ý nghĩa vật lý hơn, như tiếp theo.

Dạng thứ hai

$$y(n) = y_{z.s}(n) + y_{z.i}(n). \quad (3.73)$$

Trong (3.73), $y_{z.s}(n)$ là nghiệm của phương trình sai phân với N điều kiện ban đầu triệt tiêu; ký hiệu zs là viết tắt của “zero-state” có nghĩa là **hệ thống khởi động từ gốc**. Còn $y_{z.i}(n)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất được xác định với N điều kiện ban đầu của phương trình sai phân. Theo cách trình bày này thì (3.73) là hoàn toàn tương đương với phương trình (3.69), nhưng ý nghĩa vật lý thì rõ ràng hơn rất nhiều. Ngoài ra, với phân tích này, cũng thấy ngay rằng $y_{z.s}(n)$ có tính chất tuyến tính. Nghĩa là nếu hệ thống được kích thích bởi một tổ hợp tuyến tính các tín hiệu đầu vào thì $y_{z.s}(n)$ sẽ là



Hình 3.17: Sơ đồ khối hệ thống biểu diễn bằng hàm truyền hệ thống $H(z)$.

một tổ hợp tuyến tính của các đáp ứng tương ứng với các kích thích đầu vào. Kết quả toán học này cho thấy phương trình sai phân (3.74) định nghĩa cho ta một hệ thống là tuyến tính nếu các điều kiện ban đầu là triệt tiêu. Trong tinh thần này, từ nay về sau, ta chỉ xét hệ thống tuyến tính bất biến được định nghĩa bởi một **phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng số**, viết tắt là LCCDE*.

Lấy biến đổi Z hai vế của phương trình sai phân (3.74) với điều kiện ban đầu triệt tiêu và áp dụng tính chất tuyến tính và dịch trễ của biến đổi Z, ta có

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z), \quad (3.74)$$

trong đó $X(z)$ và $Y(z)$ là biến đổi Z của đầu vào và đầu ra. Đặt

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.75)$$

và gọi $H(z)$ là **hàm truyền hệ thống**. Như vậy, ta có

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.76)$$

và mối liên hệ giữa $Y(z)$ và $X(z)$ được cho bởi

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (3.77)$$

Như vậy, cũng có thể biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối như trên hình 3.17. Nếu hệ thống được kích thích bởi một xung Kronecker $x(n) = \delta(n)$, tức là $X(z) = 1$, ta sẽ có đầu ra là $Y(z) = H(z)$. Kết quả này cho thấy hàm truyền của hệ thống là biến đổi Z của đáp ứng xung của hệ thống đó, tức là

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}. \quad (3.78)$$

*LCCDE: Linear Constant Coefficient Difference Equation.

Tùy tính chất nhân quả, phản nhân quả hay không nhân quả mà ta có các điều kiện hội tụ khác nhau cho hàm $H(z)$. Như thế, $H(z)$ vẫn có thể biểu diễn cho hai hệ thống khác nhau, như trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.15 (Hai hệ thống khác nhau nhưng có cùng biến đổi Z)

Xét hệ thống có hàm truyền sau:

$$H(z) = \frac{z}{1 - 0,5z^{-1}}.$$

Nếu hệ thống là nhân quả thì vùng hội tụ là ngoài vòng tròn có bán kính 0,5. Nếu hệ thống là phản nhân quả thì vùng hội tụ nằm trong vòng tròn bán kính 0,5. Như vậy, trong trường hợp là nhân quả ta có

$$h(n) = 3(0,5)^n u(n),$$

và trong trường hợp phản nhân quả ta có

$$h(n) = -3(0,5)^n [1 - u(n)].$$

□

Ngoài ra, phương trình (3.71) và phương trình (3.73) cho thấy hệ thống nhân quả chỉ ổn định khi tất cả các nghiệm r_k của hệ thống đều có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1. Ngược lại, nếu hệ thống là phản nhân quả thì giá trị tuyệt đối này phải lớn hơn 1. Trong thực tế, mặc dù vẫn quan tâm đến các hệ thống không nhân quả, nhưng đáp ứng của hệ thống thường bắt đầu tại một thời điểm hữu hạn $-n_0$ nào đó. Bằng cách dịch trễ n_0 bước, hệ thống dịch trễ trở thành nhân quả, do đó giáo trình này chỉ quan tâm đến hệ thống nhân quả và ổn định mà thôi.

Với hàm truyền $H(z)$ cho bởi (3.76), nghiệm của đa thức ở tử số gọi là **ng nghiệm không** của hàm truyền và nghiệm của đa thức ở mẫu số gọi là **ng nghiệm cực** của hàm truyền. Ngoài ra, nghiệm cực là nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống (3.72). Do đó, tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào nghiệm cực của hệ thống, hệ thống là ổn định khi các nghiệm cực của $H(z)$ nằm trong vòng tròn đơn vị.

3.6 Biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc

3.6.1 Định nghĩa biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc

Phổ của một tín hiệu theo thời gian liên tục $x(t)$ là **biến đổi Fourier** của $x(t)$, viết tắt là FT*, được định nghĩa bằng toán học như sau

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt.$$

Ý nghĩa vật lý của $X(\Omega)$ đã được phân tích kỹ lưỡng trong giáo trình tín hiệu và hệ thống. Lúc $x(t)$ được lấy mẫu bởi chuỗi xung Dirac vô hạn $\Delta(t)$ (xem (2.2)) với chu kỳ lấy mẫu T , ta có tín hiệu được lấy mẫu

$$x_{\Delta}(t) = x(t)\Delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT).$$

Lấy biến đổi Fourier của $x_{\Delta}(t)$, ta được

$$X_{\Delta}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)e^{-jk\Omega T}.$$

Nếu ta đặt $\omega = \Omega T$ thì ω có đơn vị là radian. Gọi $x_d(n) = x(nT)$ và đặt

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)e^{-jn\omega}. \quad (3.79)$$

Biểu thức xác định bởi phương trình (3.79) được gọi là **biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc**, viết tắt là DTFT†, của tín hiệu rời rạc $x_d(n)$. Nếu không xét tới vận tốc lấy mẫu thì ω là một biến độc lập, có thể phân tích biến đổi Fourier này mà không cần quan tâm đến quá trình lấy mẫu, tức là định nghĩa biến đổi Fourier này áp dụng cho bất cứ tín hiệu rời rạc nào. Nhận thấy $X_d(\omega)$ là một hàm có chu kỳ 2π , do $e^{-jn\omega} = e^{-jn(\omega+2\pi)}$. Và vì vậy khi phân tích $X_d(\omega)$ chỉ cần nhìn vào một chu kỳ của nó mà thôi, có thể là từ 0 đến 2π hoặc từ $-\pi$ đến π . Đại lượng ω được gọi là **tần số số**, có đơn vị là radian.

*FT: Fourier transform.

†DTFT: Discrete-time Fourier transform.

Trong trường hợp $x_d(n)$ là một tín hiệu thực, ta có tính chất sau

$$X_d(-\omega) = X_d^*(\omega). \quad (3.80)$$

Kết quả này cho thấy biên độ của $X_d(\omega)$ là một hàm chẵn và pha của nó là một hàm lẻ. Kết quả này hàm ý, tất cả mọi thông tin của phổ đều chứa trong vùng tần số dương. Như vậy, đối với một tín hiệu $x_d(n)$ thực, khi phân tích phổ của nó chỉ cần xét từ 0 đến π là đủ. Cuối cùng, nếu tính được $X_d(\omega)$ có thể suy ra $X_\Delta(\Omega)$ và từ đó có thể suy ra phổ của tín hiệu $x(t)$, nếu các điều kiện lấy mẫu Nyquist là thỏa mãn (như đã trình bày trong chương 2).

3.6.2 Áp dụng biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc vào hệ thống tuyến tính bất biến

Biến đổi Fourier đóng một vai trò rất quan trọng trong lý thuyết hệ thống tuyến tính bất biến. Thật vậy, xét hệ thống rời rạc tuyến tính bất biến có đáp ứng xung là $h(n)$. Khi kích thích hệ thống này với tín hiệu điều hòa phức $x(n) = e^{jn\omega_0}$, tín hiệu đầu ra của hệ thống là tích chập của đầu vào và đáp ứng xung của nó, tức là

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k).$$

Biết rằng $x(n-k) = e^{j(n-k)\omega_0}$, ta có

$$y(n) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega_0} \right] e^{jn\omega_0}.$$

Biểu thức trong dấu ngoặc vuông chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung $h(n)$ tính tại $\omega = \omega_0$, $H(\omega_0)$. Vì thế

$$y(n) = H(\omega_0)e^{jn\omega_0}. \quad (3.81)$$

Kết quả (3.81) cho thấy, lúc ta kích thích một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc với một tín hiệu điều hòa phức từ $n = -\infty$ thì đầu ra sẽ có cùng dạng tín hiệu điều hòa $e^{jn\omega_0}$ nhưng biên độ được khuếch đại bởi hệ số $H(\omega_0)$, vì thế $H(\omega_0)$ được gọi là độ khuếch đại phức của

hệ thống. Kết quả này chỉ có ý nghĩa khi $H(\omega_0)$ hiện hữu. Điều này chỉ có được nếu hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc là ổn định.

Tóm lại, $H(\omega)$ là độ khuếch đại phức của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc. Lúc hệ thống được kích thích bởi một tín hiệu điều hòa với tần số góc ω thì tín hiệu này sẽ được khuếch đại bởi $H(\omega)$, độ khuếch đại này thay đổi với tần số góc ω vì vậy $H(\omega)$ cũng được gọi là **đáp ứng tần số của hệ thống**.

3.6.3 Liên hệ giữa biến đổi Z và biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc

So sánh biến đổi Z , được định nghĩa bởi (3.64), và biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc, được định nghĩa bởi (3.79), của một tín hiệu rời rạc $x(n)$, ta thấy rằng nếu thay thế z của biến đổi Z bằng $e^{j\omega}$ thì

$$X(\omega) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (3.82)$$

Biểu thức (3.82) thể hiện mối liên hệ chặt chẽ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Z . Biến đổi Fourier chỉ hiện hữu nếu vòng hội tụ của $X(z)$ chứa vòng đơn vị. Đối với một hệ thống nhân quả ổn định thì điều kiện này luôn luôn được thỏa mãn.

3.7 Kết luận

Chương này trình bày tóm tắt những khái niệm và công cụ cơ bản áp dụng vào lĩnh vực xử lý tín hiệu số. Những khái niệm quan trọng nhất là dịch trễ tín hiệu, tính ổn định, tính nhân quả của hệ thống tuyến tính bất biến. Từ những khái niệm này, ta xây dựng khái niệm hàm truyền hệ thống rời rạc $H(z)$ có mối liên hệ sâu sắc với đáp ứng xung hệ thống rời rạc $h(n)$. Khái niệm cơ bản cuối cùng là đáp ứng tần số $H(\omega)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc. Ta thấy có mối liên hệ chặt chẽ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Z thông qua biến đổi $z = e^{j\omega}$. Thiết kế một hệ thống theo tinh thần của giáo trình này là tìm một hệ thống $H(z)$ sao cho đáp ứng tần số $H(\omega)$ của nó thỏa mãn các điều kiện đặc tả của hệ thống cần thiết kế.

Bài tập chương 3

3.1. Cho tín hiệu rời rạc $x(n) = u(n-2) - u(n-3)$. Hãy biểu diễn tín hiệu trên theo hàm $\delta(n)$. Đây có phải tín hiệu năng lượng hay không?

3.2. Cho tín hiệu rời rạc $x(n) = A \cos(\omega_0 n)$. Tín hiệu này là tín hiệu công suất hay năng lượng?

3.3. Hãy xác định năng lượng và công suất trung bình của tín hiệu nhảy bậc đơn vị.

3.4. Hãy xác định chu kỳ cơ sở của các tín hiệu sau:

a) $x(n) = 2 \cos(0,1\pi n)$

b) $x(n) = \cos(0,3\pi n)$

c) $x(n) = \sin(0,2\pi n + 0,25\pi)$

d) $x(n) = e^{0,35\pi n + 0,2\pi}$

3.5. Hãy xác định tính chất tuyến tính và bất biến của các hệ thống sau:

a) $y(n) = nx(n)$

b) $y(n) = x^3(n)$

3.6. Hãy xác định tính chất nhân quả của các hệ thống sau:

a) $y(n) = x(n^4)$

b) $y(n) = x(-2n)$

c) $y(n) = x(n) - 2x(n-2)$

d) $y(n) = x(n) - 2x(n+2)$

3.7. Tìm biến đổi Z của các tín hiệu sau:

a) $x(n) = \delta(n-2)$

b) $x(n) = u(n) - u(n-4)$

c) $x(n) = (0,5)^n u(n)$

d) $x(n) = (0,5)^n u(n) + (0,25)^{n-1} u(n)$

3.8. Hãy tính phép tích chập $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$ với $x_1(n) = \delta(n-1)$ và $x_2(n) = \delta(n-1) + \delta(n-2)$

3.9. Cho một hệ thống tuyến tính bất biến mô tả bởi phương trình $y(n) = x(n) - 0.5x(n-1)$. Xác định $y(n)$ nếu kích thích đầu vào $x(n) = \delta(n-1)$. Các điều kiện đầu bằng 0.

3.10. Đầu ra của một hệ thống tuyến tính bất biến có dạng $y(n) = (0.5^n + 0.01)u(n)$ sẽ ổn định quanh giá trị nào?

3.11. Hệ thống có đáp ứng xung $h(n) = 2n[u(n) - u(n-2012)]$ có phải là hệ thống ổn định không? Tại sao?

3.12. Cho một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có hàm truyền

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0,4z^{-1}}.$$

Hãy xác định đầu ra $y(n)$ nếu đầu vào là $x(n) = 0,2^{n-1}u(n)$.

3.13. Hãy xác định biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc của tín hiệu $x(n) = 0,5^{|n|}$.

3.14. Hãy xác định phổ biên độ của tín hiệu $x(n) = u(n) - u(n-3)$.

3.15. Xác định tín hiệu $x(n)$ biết phổ của nó là

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{với } |\omega| \leq |\omega_c| \\ 0, & \text{với } |\omega| > |\omega_c| \end{cases}$$

Chương 4

CẤU TRÚC CÁC BỘ LỌC SỐ

Như đã giới thiệu trong phần 3.3.1 của chương 3, giáo trình này tập trung vào một họ hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc mà được mô tả bằng một phương trình sai phân tuyến tính có hệ số là hằng số. Chương này sẽ tìm hiểu cấu trúc của các bộ lọc số của họ hệ thống này, nhằm chọn được cấu trúc phù hợp để vừa tiết kiệm được nguồn tài nguyên linh kiện điện tử (số bộ dịch trễ, bộ cộng, bộ khuếch đại) cũng như nâng cao chất lượng khi thực thi (giảm các hiện tượng sai số). Các chương kế tiếp sẽ tìm hiểu các phương pháp thiết kế những bộ lọc này.

4.1 Hệ thống ARMA

Nhắc lại rằng, theo biểu thức (3.32), phương trình này biểu diễn quan hệ giữa đầu vào $x(n)$ và đầu ra $y(n)$ như sau:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k). \quad (4.1)$$

Và ta cũng đã biết rằng, theo (3.76), với điều kiện ban đầu triệt tiêu, phương trình (4.1) mô tả một hệ thống bất biến tuyến tính có hàm truyền $H(z)$ được xác định bởi

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}. \quad (4.2)$$

Người ta thường phân loại hàm truyền tổng quát (4.2) thành ba dạng phổ biến và quan trọng sau đây. Dạng đơn giản nhất của $H(z)$ là

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}. \quad (4.3)$$

Đáp ứng xung tương ứng là $h(n) = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_M\}$. Như vậy, đây là một hệ thống FIR và hệ thống này là nhân quả. Mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra của hệ thống FIR là

$$y(n) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots + b_M x(n-M). \quad (4.4)$$

Tại thời điểm n , $y(n)$ là một tổ hợp tuyến tính của M mẫu của đầu vào, vì vậy hệ thống FIR cũng được gọi là **hệ thống trung bình động**, hay còn gọi là **hệ thống MA***. Hệ thống FIR có M nghiệm không và một nghiệm cực bậc M tại gốc. Nghiệm cực tại gốc chỉ đóng vai trò dịch trễ nên không có tác động đến hoạt động của hệ thống, do đó người ta không đề cập đến. Vì thế, người ta còn gọi hệ thống FIR là một **hệ thống toàn không†**.

Dạng quan trọng tiếp theo của $H(z)$ là

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}. \quad (4.5)$$

Đáp ứng xung của hệ thống này có chiều dài vô hạn nên đây là hệ thống IIR. Hệ thống này có N nghiệm cực và một nghiệm không bậc N tại gốc. Nghiệm không tại gốc chỉ có tác động dịch lùi tín hiệu mà không ảnh hưởng gì đến hoạt động của hệ thống, vì vậy hệ thống này cũng được gọi là **hệ thống toàn cực‡**. Mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra của hệ thống này là

$$y(n) = -[a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N)] + b_0 x(n). \quad (4.6)$$

Nhận thấy, tại thời điểm n , $y(n)$ là tổ hợp tuyến tính của N mẫu trước đó của nó. Vì vậy, hệ thống này cũng có tên là **hệ thống tự hồi quy** hay còn gọi là **hệ thống AR§**.

*Moving Average (MA) system.

†All-zero system.

‡All-pole system.

§Autoregressive (AR) system.

Dạng tổng quát nhất của $H(z)$ là một phân thức, như được biểu diễn trong biểu thức (4.2). Hệ thống này vừa có cấu trúc AR, vừa có cấu trúc MA cho nên nó còn được gọi là **hệ thống ARMA**. Hệ thống này có M nghiệm không và N nghiệm cực.

Do những ràng buộc kỹ thuật, các hệ thống bậc hai thường được thiết kế tương đối chính xác so với các hệ thống bậc cao hơn theo nghĩa là tránh được nhiều hiện tượng sai số tính toán làm giảm chất lượng của hệ thống toàn cục (sẽ được thảo luận ở phần 4.6). Do đó, trong thiết kế các bộ lọc số, người ta hay phân tích hàm $H(z)$ thành tích của các hệ thống con như sau

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_L(z), \quad (4.7)$$

trong đó các hệ thống $H_i(z)$ có bậc tối đa là hai.

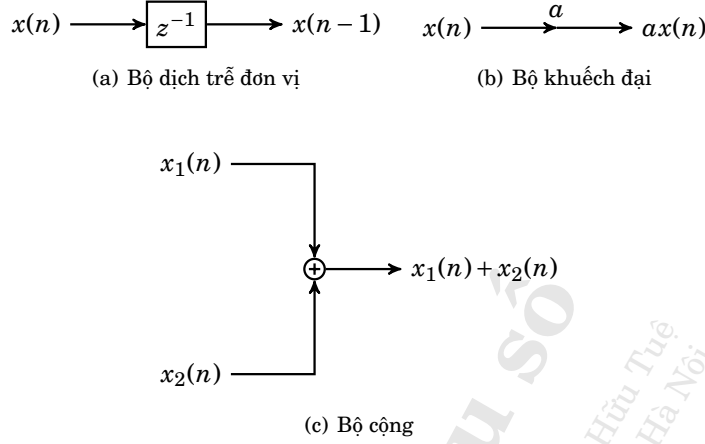
4.2 Sơ đồ khối của hệ thống

Sơ đồ khối là dùng các khối và các liên kết để biểu diễn cấu trúc của hệ thống. Trong hình 3.10 của chương 3, ta đã thấy sơ đồ khối của một hệ thống trong đó các đường dẫn kết nối các hệ thống con đơn giản mà ta gọi là **bộ dịch trễ đơn vị**, **bộ khuếch đại** và **bộ cộng**. Các bộ này dùng để thực thi các phép tính trong hàm truyền hệ thống $H(z)$, chẳng hạn, trong hệ thống MA, để tính các đại lượng z^{-k} , nhân chúng với các hệ số b_k để được $b_k z^{-k}$ và cuối cùng là cộng các kết quả này với nhau để được $b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}$. Phép chia, như trong hệ thống AR hay ARMA, sẽ được thực hiện gián tiếp từ cách tạo các đường dẫn đệ quy (recursive/feedback) trong sơ đồ hệ thống.

Bộ dịch trễ đơn vị dùng để thực thi thao tác dịch gốc thời gian tín hiệu $x(n)$ trễ đi $n_0 = 1$ một bước để được tín hiệu $x(n-1)$, theo công thức (3.21). Nếu $X(z)$ là biến đổi Z của $s(n)$, theo tính chất của biến đổi Z trong bảng (3.2), ta có biến đổi Z của $s(n-1)$ là

$$\mathcal{Z}\{x(n-1)\} = z^{-1}X(z). \quad (4.8)$$

Hệ thống được mô tả bằng z^{-1} chính là bộ dịch trễ đơn vị và được biểu diễn như trên hình 4.1(a). Trong thực tế thiết kế, nếu một tín



Hình 4.1: Hình minh họa các bộ dịch trễ đơn vị, bộ khuếch đại và bộ cộng được sử dụng trong sơ đồ khối hệ thống.

hiệu được dịch đi n_0 bước, tức là mô tả bởi z^{-n_0} , thì người ta sử dụng n_0 bộ dịch trễ đơn vị được ghép nối tiếp với nhau.

Bộ khuếch đại thực thi thao tác khuếch đại tín hiệu theo công thức (3.28). Theo tính chất tuyến tính, biến đổi Z của $ax(n)$, trong đó hệ số a là một hằng số, là

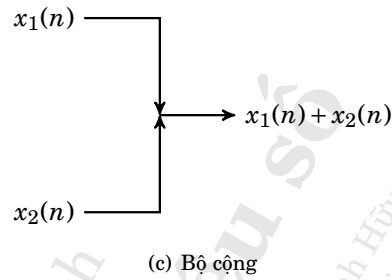
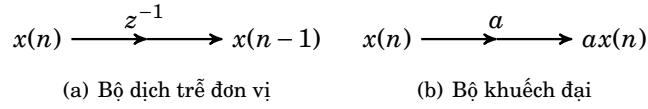
$$\mathcal{Z}\{ax(n)\} = aX(z). \quad (4.9)$$

Thông thường, để đơn giản hóa sơ đồ hệ thống, bộ khuếch đại được trực tiếp ký hiệu trên đường dẫn, như trên hình 4.1(b).

Bộ cộng thực thi thao tác cộng các tín hiệu với nhau, như theo công thức (3.29). Do biến đổi Z cũng có tính tuyến tính nên bộ và được mô tả như trên hình 4.1(c).

Sơ đồ hệ thống có thể đơn giản hơn nữa nếu ta hình dung sơ đồ hệ thống được dùng để biểu diễn hàm truyền bằng cách thay thế các bộ dịch trễ đơn vị, bộ khuếch đại và bộ cộng như trên hình 4.1 bởi các đồ thị được minh họa trên hình 4.2. Đồ thị loại này có tên là **đồ thị dòng chảy***.

*Flow graph.



Hình 4.2: Hình minh họa các bộ dịch trễ đơn vị, bộ khuếch đại và bộ cộng trong sơ đồ dòng chảy tín hiệu.

Phần tiếp theo sẽ trình bày chi tiết cách xây dựng các cấu trúc hệ thống thông dụng. Một ví dụ hàm truyền của một hệ thống ARMA sau đây sẽ được dùng để minh họa tất cả các khái niệm về cấu trúc của hệ thống các phần tiếp theo:

$$H(z) = \frac{0,0095 + 0,0380z^{-1} + 0,0570z^{-2} + 0,0380z^{-3} + 0,0095z^{-4}}{1 - 2,2870z^{-1} + 2,5479z^{-2} - 1,4656z^{-3} + 0,3696z^{-4}}. \quad (4.10)$$

4.3 Dạng trực tiếp của hệ thống ARMA

4.3.1 Dạng trực tiếp I

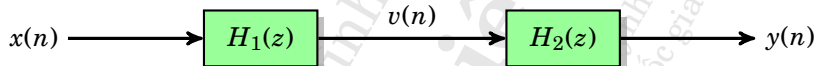
Đặt

$$\begin{aligned} v(n) = & 0,0095x(n) + 0,0380x(n-1) + \\ & 0,0570x(n-2) + 0,0380x(n-3) + 0,0095x(n-4). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Có thể viết lại đầu ra $y(n)$ của hàm truyền hệ thống ARMA cho bởi (4.10) như sau:

$$y(n) = 2,2870y(n-1) - 2,5479y(n-2) + 1,4656y(n-3) - 0,3696y(n-4) + v(n), \quad (4.12)$$

Gọi $H_1(z)$ là hệ thống được biểu diễn bởi phương trình sai phân (4.11) với đầu vào $x(n)$ và đầu ra $v(n)$. Gọi $H_2(z)$ là hệ thống được biểu diễn bởi (4.12) với đầu vào $v(n)$ và đầu ra $y(n)$. Như vậy, đáp ứng của hệ thống hệ thống toàn cục $H(z)$ chính là mắc chồng tầng (kết nối nối tiếp) của $H_1(z)$ và $H_2(z)$, như mô tả trên hình 4.3.



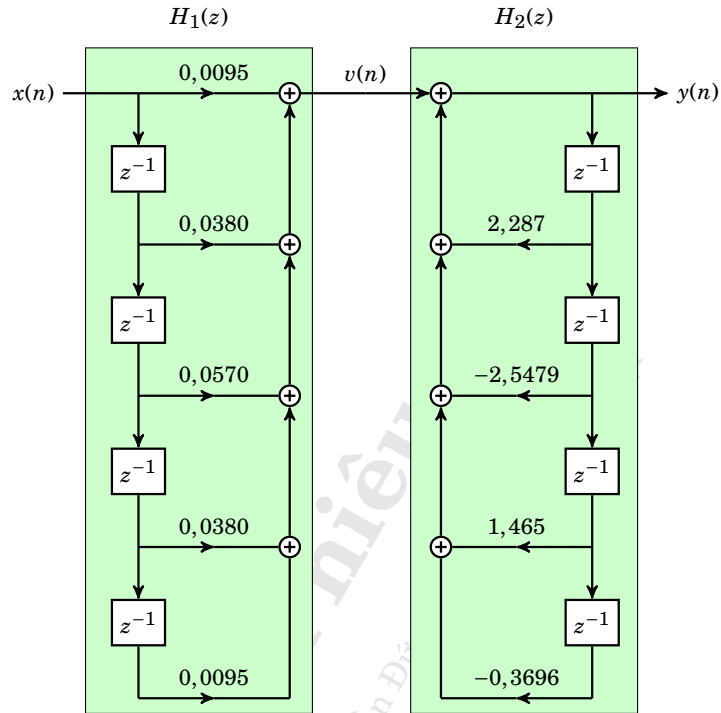
Hình 4.3: Biểu diễn mắc chồng tầng của hệ thống ARMA.

Dùng các bộ dịch trễ đơn vị, khuếch đại và bộ cộng, có thể xây dựng sơ đồ hệ thống của $H_1(z)$, $H_2(z)$ và ghép nối chúng để được $H(z)$ như trên hình 4.4.

Do tính chất cộng của sơ đồ dòng chảy, có thể tích hợp hai cấu trúc thực thi $H_1(z)$ và $H_2(z)$ thành một cấu trúc chung như ở hình 4.5. Cấu trúc này được gọi là **cấu trúc dạng trực tiếp I**. Tên cấu trúc trực tiếp I suy ra từ cách ghép hai cấu trúc ở hình 4.4 một cách trực tiếp.

4.3.2 Dạng trực tiếp II

Xét hình 4.4, do $H_1(z)$ và $H_2(z)$ là hai hệ thống tuyến tính bất biến nên ta có thể hoán vị chúng mà mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra không thay đổi, tức là $H(z)$ không thay đổi, như ở hình 4.6. Ghép chung cấu trúc $H_2(z)$ và $H_1(z)$ sau khi hoán vị cho kết quả được minh họa ở hình 4.7. Cấu trúc này được gọi là dạng trực tiếp II hay dạng trực tiếp chuyển vị.



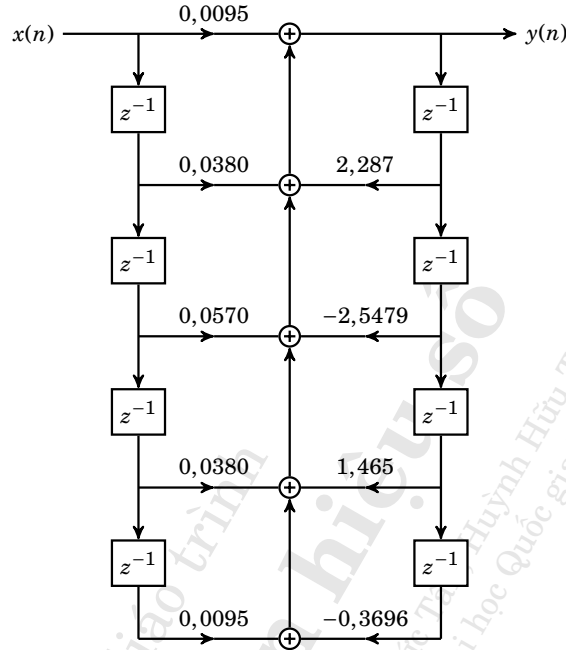
Hình 4.4: Thực thi cấu trúc hệ thống mắc chồng tầng.

4.4 Dạng nối tiếp và song song của hệ thống ARMA

4.4.1 Dạng nối tiếp

Hàm truyền $H(z)$ để xây dựng cấu trúc nối tiếp cần được phân tích thành tích của nhiều thành phần đơn (bậc một hoặc bậc hai). Với hàm truyền như đã cho trong phương trình (4.10), có thể dễ dàng thấy

$$H(z) = 0,0095H_3(z)H_4(z) \quad (4.13)$$



Hình 4.5: Cấu trúc trực tiếp I.

với

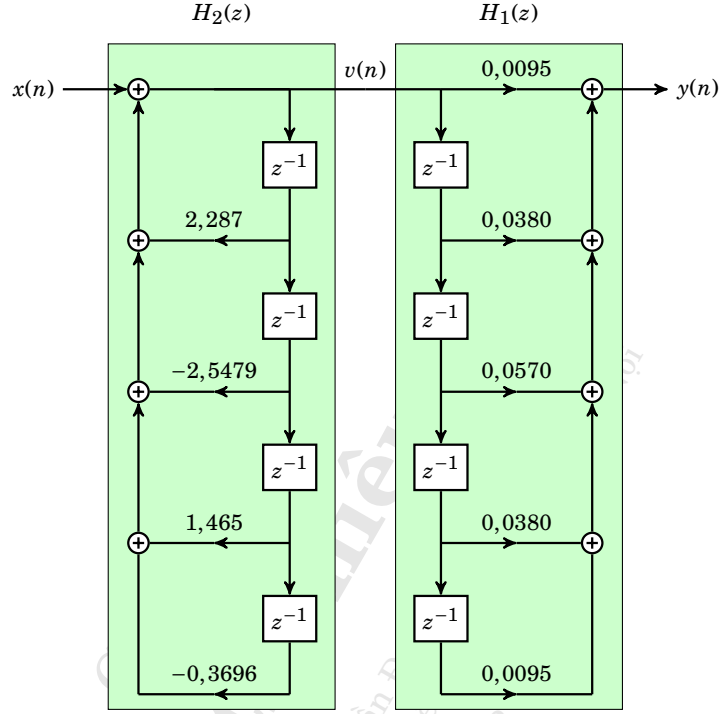
$$H_3(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,0328z^{-1} + 0,7766z^{-2}} \quad (4.14)$$

$$H_4(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,2542z^{-1} + 0,4759z^{-2}} \quad (4.15)$$

Cấu trúc nối tiếp để thực hiện hệ thống này được minh họa như hình 4.8. Để đơn giản hóa cấu trúc thực thi ở hình 4.8, cũng có thể dùng cấu trúc dạng trực tiếp I và II cho H_3 và H_4 như đã mô tả ở hình 4.5 và hình 4.7.

4.4.2 Dạng song song

Để xây dựng sơ đồ song song, cần phân tích hàm truyền thành tổng của các thành phần đơn. Với hàm truyền như đã cho trong



Hình 4.6: Hoán vị hai cấu trúc $H_1(z)$ và $H_2(z)$.

phương trình (4.10), sử dụng phương pháp phân tích thành phần đơn để có

$$H(z) = k + H_5(z) + H_6(z) \quad (4.16)$$

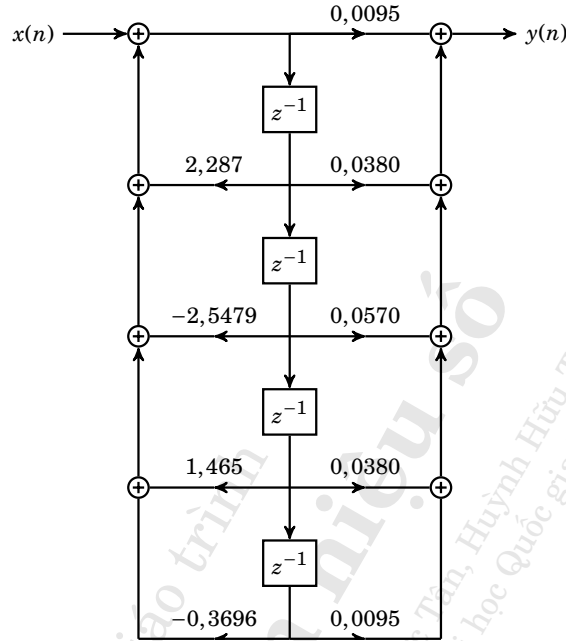
với

$$k = 0,0257 \quad (4.17)$$

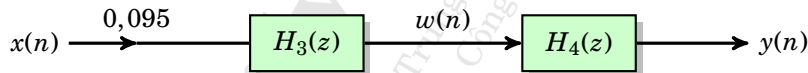
$$H_5(z) = \frac{-0,1171 - 0,1118z^{-1}}{1 - 1,0328z^{-1} + 0,7767z^{-2}} \quad (4.18)$$

$$H_6(z) = \frac{0,1009 + 0,1059z^{-1}}{1 - 1,2542z^{-1} + 0,4759z^{-2}}. \quad (4.19)$$

Cấu trúc song song được mô tả như ở hình 4.10. Trong đó, ta có thể sử dụng cấu trúc trực tiếp dạng I hoặc dạng II để xây dựng $H_5(z)$



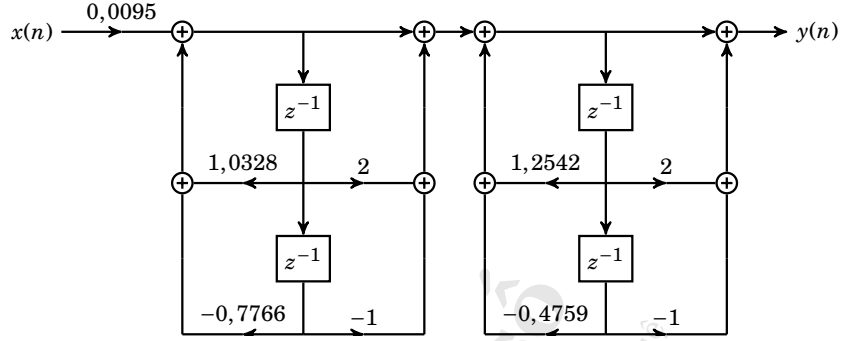
Hình 4.7: Cấu trúc trực tiếp II (cấu trúc trực tiếp chuyển vị).



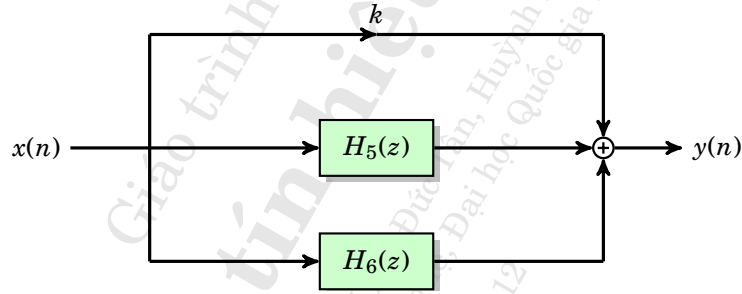
Hình 4.8: Cấu trúc nối tiếp.

và $H_6(z)$. Chú ý rằng, trong các phương trình (4.18) và (4.19), tử số của hai hàm $H_5(z)$ và $H_6(z)$ có bậc nhỏ hơn mẫu số. Phân tích theo phương trình (4.16) cho ta đáp án duy nhất. Tuy nhiên, nếu ta muốn sử dụng các hàm truyền bậc hai có tử số cũng là bậc hai thì phân tích này cho ta vô số nghiệm. Thật vậy, ta chỉ cần chia k làm hai thành phần bất kỳ để gán vào $H_5(z)$ và $H_6(z)$ để có kết quả như vừa đề cập.

Dạng nối tiếp và song song có thể kết hợp trong một cấu trúc chung, cấu trúc kết hợp này được gọi là cấu trúc hỗn hợp.



Hình 4.9: Thực thi cấu trúc trực tiếp.



Hình 4.10: Ghép nối song song

4.5 Dạng chéo của hệ thống MA có hệ số đối xứng

Như đã trình bày trong phần 4.1, hệ thống MA có đáp ứng xung hữu hạn được mô tả bởi phương trình nối kết đầu vào và đầu ra có dạng sau:

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + \dots + b_Mx(n-M). \quad (4.20)$$

Hàm truyền $H(z)$ của hệ thống này là

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M}. \quad (4.21)$$

Đáp ứng xung $h(n)$ tương ứng là

$$h(k) = \begin{cases} b_k, & \text{nếu } 0 \leq k \leq M \\ 0, & \text{nếu } k \text{ khác} \end{cases} \quad (4.22)$$

Đối với hàm truyền này, có thể dùng sơ đồ khối dạng nối tiếp để biểu diễn nó mà không có sơ đồ song song tương ứng. Tuy nhiên, trong trường hợp đặc biệt khi đáp ứng xung $h(n)$ có tính đối xứng được định nghĩa như sau

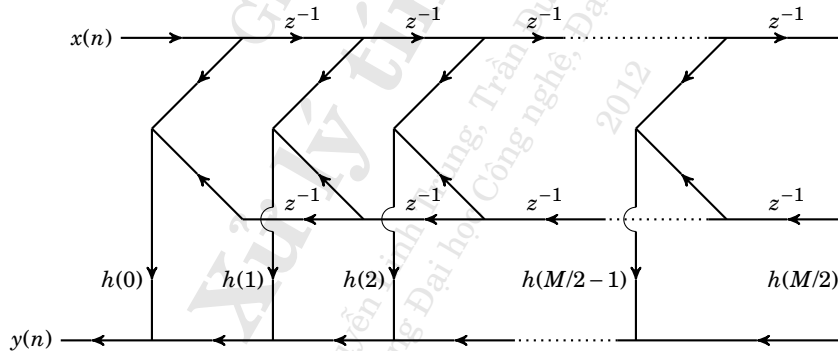
$$h(k) = h(M - k), \quad k = 0, \dots, M, \quad (4.23)$$

ta có thể sử dụng những cấu trúc thang chéo đặc biệt.

Trong trường hợp M chẵn, ta có

$$h\left(\frac{M}{2} - k\right) = h\left(\frac{M}{2} + k\right), \quad k = 0, \dots, \frac{M}{2}. \quad (4.24)$$

Sơ đồ khối thang chéo tương ứng được minh họa ở hình 4.11.

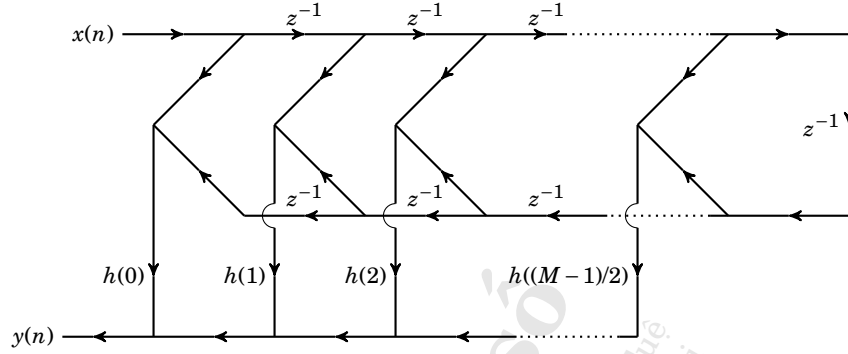


Hình 4.11: Cấu trúc khối thang chéo.

Trong trường hợp M lẻ, tính đối xứng của đáp ứng xung được biểu diễn như sau:

$$h\left(\frac{M-1}{2} - k\right) = h\left(\frac{M+1}{2} + k\right), \quad k = 0, \dots, \frac{M-1}{2}. \quad (4.25)$$

Cấu trúc thang chéo tương ứng được minh họa ở hình 4.12.



Hình 4.12: Cấu trúc thang chéo trong trường hợp M lẻ.

Ví dụ 4.1 (Hệ thống MA có hệ số đối xứng và bậc chẵn)

Xét một hệ thống MA có hàm truyền như sau:

$$H(z) = 4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4}.$$

Đây là một hàm truyền thuộc loại FIR bậc 4 có các hệ số đối xứng

$$h(0) = h(4) = 4$$

$$h(1) = h(3) = 3$$

$$h(2) = 2$$

Do đó, có thể mô tả hệ thống bằng sơ đồ thang chéo, như trên hình 4.13.

□

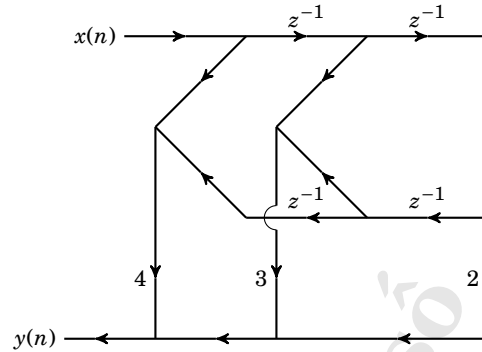
Ví dụ 4.2 (Hệ thống MA có hệ số đối xứng và bậc lẻ)

Xét hệ thống được cho bởi hàm truyền $H(z)$

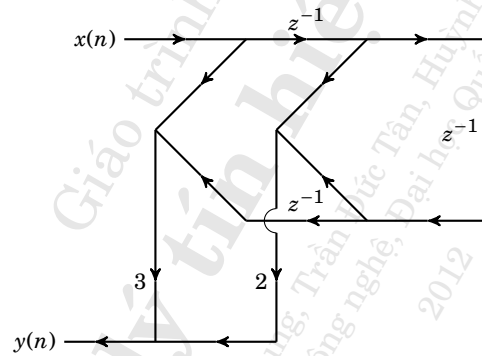
$$H(z) = 3 + 2z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}.$$

Rõ ràng, hệ thống này là đối xứng và có bậc lẻ. Do đó, ta có cấu trúc thang chéo tương ứng được minh họa ở hình 4.14.

□



Hình 4.13: Cấu trúc thang chéo [Ví dụ 4.1].



Hình 4.14: Cấu trúc thang chéo [Ví dụ 4.2].

4.6 Ảnh hưởng của lượng tử hóa thông số

Để sử dụng các thiết bị xử lý tín hiệu số, cần lượng tử hóa tất cả các số liệu, gồm các mẫu tín hiệu cũng như các hệ số của bộ lọc. Thao tác lượng tử hóa này là nguồn gốc của ba loại sai số khác nhau.

Loại thứ nhất là sai số do xấp xỉ trong quá trình lượng tử hóa các mẫu của tín hiệu. Sai số này thường được gọi là **sai số lượng tử***.

*Quantization error.

Loại thứ hai xuất hiện khi ghi các hệ số của bộ lọc vào các thanh ghi có chiều dài hữu hạn của thiết bị số hóa (có thể là một bộ vi xử lý hay một máy tính PC). Hai loại sai số này có cùng bản chất là sai số làm tròn, được tích lũy bởi các tính toán thực hiện thông qua bộ toán tử số học*. Ảnh hưởng của sai số này tăng nhanh theo vận tốc lấy mẫu và bậc của hàm truyền, tức là bậc của phương trình sai phân.

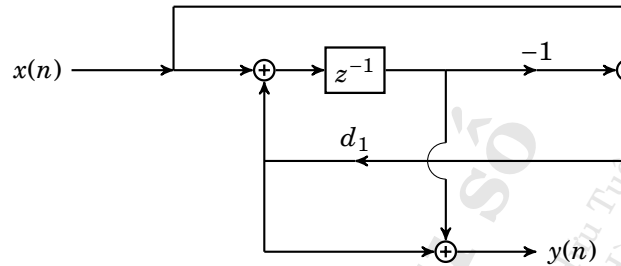
Loại thứ ba là **sai số tích lũy**, xuất hiện sau các phép cộng và phép nhân lúc kết quả vượt qua số bit của thanh ghi do số bit sử dụng được nhỏ hơn số bit cần thiết. Có một số ảnh hưởng hơi bất thường có thể xuất hiện vì loại sai số làm tròn này như lúc bộ lọc được kích thích bởi một đầu vào hằng số và đầu ra sẽ bị khóa vào một mức cố định, hoặc đầu ra có dao động nhỏ xung quanh giá trị của nó.

Trong khá nhiều trường hợp thì sai số lượng tử hoàn toàn được xác định trong quá trình thiết kế. Đối với sai số làm tròn, người ta đã chứng minh rằng, nếu hệ thống bậc cao được biểu diễn bởi các hệ thống bậc thấp hơn, dưới dạng nối tiếp hoặc song song, thì ảnh hưởng của nó được tối thiểu hóa một cách đáng ngạc nhiên. Kết quả này cho thấy, ta phải rất cẩn thận lúc sử dụng dạng trực tiếp I hoặc trực tiếp II vì đối với các hệ thống bậc cao hơn hai, cần phân tích kỹ lưỡng ảnh hưởng của thao tác lượng tử hóa các hệ số các bộ lọc của hệ thống.

*Arithmetic unit.

Bài tập chương 4

4.1. Hãy xác định hàm truyền $H(z)$ của hệ thống được thực thi như trên hình 4.15.



Hình 4.15: Sơ đồ hệ thống [Bài tập 4.1].

4.2. Cho một hệ thống nhân quả có phương trình sai phân như sau:

$$y(n] = 0,7y[n-1] - 0,1y[n-2] + x[n] + 0,25x[n-1].$$

- Hãy xác định cấu trúc thực thi trực tiếp I và II của hệ thống này.
- Hãy phác họa đáp ứng biên độ tần số của hệ thống.

4.3. Cho một hệ thống nhân quả có hàm truyền như sau:

$$H(z) = \frac{3 + 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{2 + 3,5z^{-1} + 2,5z^{-2} + 4z^{-4}}.$$

- Hãy xác định cấu trúc thực thi trực tiếp I và II của hệ thống này.
- Hệ thống trên có ổn định không? Vì sao?

4.4. Cho một hệ thống LTI nhân quả có đầu vào là

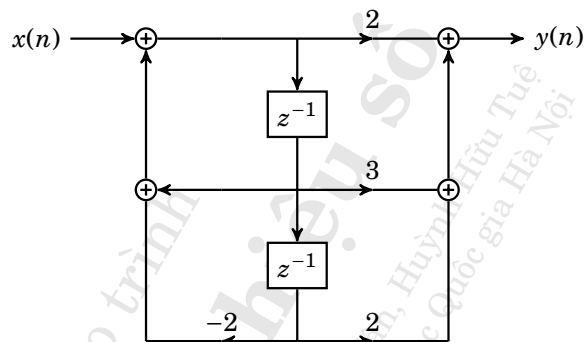
$$x[n] = (0,25)^n u[n] + (0,25)^{n+1} u[n-1]$$

và đầu ra là

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

- Hãy xác định cấu trúc thực thi trực tiếp I và II của hệ thống này.
- Hãy xác định đáp ứng tần số biên độ và đáp ứng tần số pha của bộ lọc này.

4.5. Cho một hệ thống có cấu trúc thực thi trực tiếp II như trên hình 4.16.



Hình 4.16: Sơ đồ hệ thống [Bài tập 4.5].

- Hãy xác định hàm truyền $H(z)$ của hệ thống.
- Hãy xác định đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống.
- Biểu diễn hệ thống theo cấu trúc song song và nối tiếp.

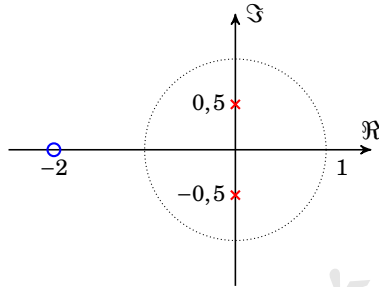
4.6. Cho một hệ thống LTI có giản đồ nghiệm cực – nghiệm không như trên hình 4.17.

- Hãy xác định hàm truyền của hệ thống này.
- Hãy xác định cấu trúc thực thi trực tiếp I và II của hệ thống.
- Tìm đáp ứng xung của hệ thống.

4.7. Cho một hệ thống nhân quả có hàm truyền như sau:

$$H(z) = \frac{3 + 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + 9z^{-2} + 16z^{-4}}.$$

- Hãy xác định cấu trúc thực thi kiểu song song và nối tiếp của hệ



Hình 4.17: Giải đồ nghiệm cực – nghiệm không [Bài tập 4.6].

thống này.

- b) Hệ thống trên có ổn định không? Vì sao?
- c) Vẽ giải đồ điểm cực điểm không của hệ thống trên.
- d) Xác định đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.

4.8. Cho một hệ thống nhân quả có hàm truyền như sau:

$$y(n) + 0,5y(n-1) + 2y(n-2) = 2x(n) + 3x(n-1) + 2x(n-2)$$

- a) Hãy xác định cấu trúc thực thi kiểu nối tiếp và song song của hệ thống này.
- b) Hệ thống trên có ổn định không? Vì sao?
- c) Vẽ giải đồ điểm cực điểm không của hệ thống trên
- d) Xác định đáp ứng xung đơn vị của hệ thống.

4.9. Cho một hệ thống FIR có hàm truyền

$$H(z) = 4 + 3z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4}.$$

- a) Hãy xác định cấu trúc thực thi trực tiếp và thang chéo của hệ thống này.
- b) Hãy xác định đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc này. Đây là bộ lọc loại gì (thông thấp, thông cao,...)?
- c) Vẽ đáp ứng tần số pha của bộ lọc này.

Chương 5

THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ IIR

Thiết kế một bộ lọc số là xây dựng một hàm truyền của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc thể nào để nó đáp ứng những điều kiện của bài toán thiết kế đặt ra. Hàm truyền này phải là nhân quả và ổn định, tức là các nghiệm cực của hàm truyền phải nằm trong vòng tròn đơn vị và đáp ứng xung của nó phải khởi đầu từ một thời điểm hữu hạn*.

Trong quá trình thiết kế các bộ lọc số IIR, người ta sử dụng các bộ lọc tương tự đã biết để thiết kế các bộ lọc số có đặc tả cần thiết kế là tương đương. Việc áp dụng kiến thức lọc tương tự là do lọc tương tự được nghiên cứu rất kỹ lưỡng trước đây. Mục 5.1 trình bày phương pháp thiết kế bộ lọc tương tự để phục vụ cho thiết kế các bộ lọc số IIR trong các mục tiếp theo. Giáo trình này chỉ đề cập đến hai họ bộ lọc tương tự phổ cập là Butterworth và Chebyshev.

Có hai phương pháp thiết kế bộ lọc số dựa trên bộ lọc tương tự. Phương pháp thứ nhất thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng hệ thống (đáp ứng xung hoặc đáp ứng bậc thang đơn vị) giống với đáp ứng của bộ lọc tương tự tương ứng. Cụ thể: lấy mẫu đáp ứng xung hoặc đáp ứng bậc thang đơn vị của bộ lọc tương tự và từ đó suy

*Ta đã biết rằng hệ thống là nhân quả nếu đáp ứng xung $h(n)$ của nó triệt tiêu tại các thời điểm $n < 0$. Tuy nhiên, trong thiết kế lọc số, nếu $h(n)$ triệt tiêu tại các điểm $n < -n_0$, với n_0 là một số hữu hạn dương, thì ta dễ dàng thiết kế bộ dịch trễ n_0 bước để dịch $h(n)$ thành $h(n - n_0)$ và lúc đó $h(n - n_0)$ là nhân quả. Vì thế, điều kiện $h(n)$ khởi đầu tại một điểm hữu hạn là đủ.

ra hàm truyền của bộ lọc số. Nội dung của phương pháp này được trình bày trong Mục 5.2.

Phương pháp thứ hai thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng tần số của hệ thống giống với đáp ứng tần số của hệ thống tương tự tương ứng. Để làm điều này, cần tìm một phép biến đổi từ miền biến đổi Laplace sang miền biến đổi Z thế nào để tính chất của đáp ứng tần số được bảo toàn. Phương pháp này sẽ được trình bày trong Mục 5.3.

Hai phương pháp thiết kế nêu trên đều cho thấy hàm truyền của bộ lọc số có chứa thành phần được mô tả theo mô hình hệ thống ARMA (xem Mục 4.1) sau

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}, \quad (5.1)$$

tức là dạng hữu tỷ trong đó mẫu số có bậc $N \geq 1$ và $N > M$. Do đó, các bộ lọc số này có chiều dài là vô hạn. Vì vậy, các phương pháp thiết kế trong chương này được gọi chung là thiết kế bộ lọc số IIR.

Nói chung, phương pháp thiết kế theo hướng dùng bộ lọc tương tự thường bắt đầu bởi những bộ lọc thông thấp và từ đó dùng các phép biến đổi để có các bộ lọc thông dải, triệt tần và thông cao. Các phương pháp thiết kế các bộ lọc thông dải, triệt dải và thông cao được trình bày trong Mục 5.4, Mục 5.5 và Mục 5.6.

5.1 Lọc tương tự

Mục này giới thiệu một cách cô đọng khái niệm bộ lọc tương tự và hai loại bộ lọc phổ cập, Butterworth và Chebyshev, đã được nghiên cứu kỹ lưỡng suốt thế kỷ hai mươi.

Cho một hệ thống tương tự tuyến tính bất biến nhân quả có đầu vào là $x(t)$ và đầu ra là $y(t)$. Gọi $X(s)$ và $Y(s)$ là **biến đổi Laplace***

*Biến đổi Laplace của hàm $f(t)$ được định nghĩa là:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt,$$

trong đó s là biến phức. Mặt phẳng phức s còn được gọi là miền Laplace.

của $x(t)$ và $y(t)$. Gọi $h(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống này, và $H(s)$ là biến đổi Laplace của $h(t)$. $H(s)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống tương tự. Vì $h(t)$ là nhân quả nên ta có

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

Đầu vào và đầu ra của hệ thống liên hệ với nhau trong miền thời gian thông qua tích chập

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad (5.2)$$

hay trong miền Laplace thông qua tích trực tiếp

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (5.3)$$

Tất cả các tính chất quan trọng của hệ thống như bất biến, nhân quả và ổn định đều được chứa đựng trong $H(s)$. Trong thực tế, hệ thống phải ổn định. Khi đó, theo biểu thức (5.2), kích thích hệ thống bởi tín hiệu điều hòa $e^{j\Omega t}$ sẽ cho đầu ra

$$y(t) = H(\Omega)e^{j\Omega t}, \quad (5.4)$$

trong đó

$$H(\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega}. \quad (5.5)$$

Phương trình (5.5) cho thấy $H(\Omega)$ là biến đổi Fourier của $h(t)$ (xem định nghĩa trong công thức (2.1)) và lúc hệ thống ổn định ta có thể suy được $H(\Omega)$ từ hàm truyền $H(s)$ bằng cách thế s bằng $j\Omega$. Phương trình (5.4) cho thấy lúc hệ thống được kích thích bởi một tín hiệu điều hòa ($e^{j\Omega t}$) thì hệ thống ứng xử như một bộ khuếch đại với hệ số khuếch đại là $H(\Omega)$, vì thế $H(\Omega)$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống.

Tổng quát hơn thế, lấy biến đổi Fourier hai vế của tích chập (5.2), ta có

$$Y(\Omega) = H(\Omega)X(\Omega). \quad (5.6)$$

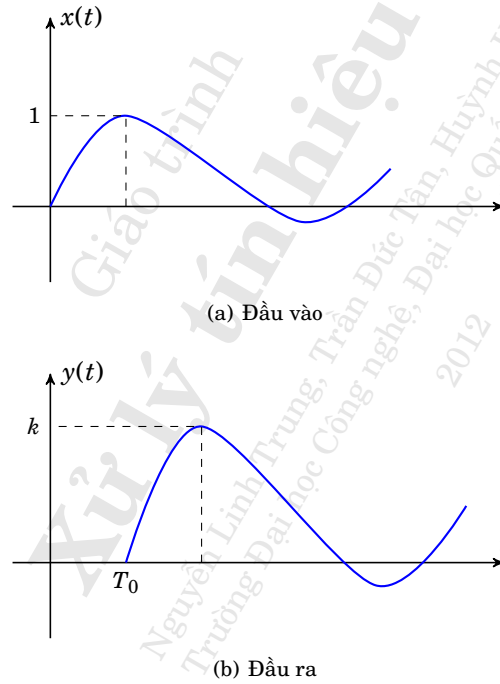
Phương trình (5.6) cho thấy đáp ứng tần số là độ khuếch đại trong miền tần số của hệ thống. Phổ đầu ra $Y(\Omega)$ bằng phổ đầu vào $X(\Omega)$

khuếch đại bởi $H(\Omega)$. Gọi $|H(\Omega)|$ và $\Phi(\Omega)$ là biên độ và pha của $H(\Omega)$. Như thế, tại tần số Ω , biên $X(\Omega)$ được khuếch đại bởi $|H(\Omega)|$ và lệch pha đi $\Phi(\Omega)$. Như vậy, nếu hệ thống là một bộ lọc thì $|H(\Omega)|$ làm méo biên độ của phổ và $\Phi(\Omega)$ làm méo pha của phổ tín hiệu đầu vào $X(\Omega)$.

Một bộ lọc không làm méo tín hiệu nếu đầu vào và đầu ra liên quan với nhau theo biểu thức sau đây:

$$y(t) = kx(t - T_0), \quad (5.7)$$

với T_0 là một giá trị thời gian làm trễ nào đó. Hình 5.1 mô tả tín hiệu đầu vào và đầu ra của một bộ lọc không làm méo. Tức là tín



Hình 5.1: Đầu vào và đầu ra của một hệ thống không làm méo.

hiệu được khuếch đại bởi một hằng số k và dịch trễ bởi hằng số T_0 . Trong miền tần số, mối liên hệ giữa phổ đầu vào và phổ đầu ra được cho bởi

$$Y(\Omega) = k e^{-j\Omega T_0} X(\Omega). \quad (5.8)$$

So sánh (5.6) và (5.8) cho ta hàm truyền cho bộ lọc không làm méo này

$$H(\Omega) = k e^{-j\Omega T_0}.$$

Do đó, biên độ và pha của hàm truyền là

$$|H(\Omega)| = k \quad (5.9)$$

$$\Phi(\Omega) = -\Omega T_0 \quad (5.10)$$

Một bộ lọc không làm méo tín hiệu được gọi là **bộ lọc lý tưởng**. Như vậy, theo (5.9) và (5.10), một bộ lọc lý tưởng có biên độ đáp ứng tần số là hằng số và có pha tuyến tính, như mô tả ở hình 5.2.

Khi thiết kế bộ lọc, đáp ứng tần số biên độ không đổi và đáp ứng tần số pha tuyến tính là những đặc tính mà chúng ta cố gắng đạt được trong **dải thông tần**^{*}, hay gọi tắt là dải thông, của tín hiệu. Ngoài ra, trong **dải triệt tần**[†], hay gọi tắt là dải triệt, đáp ứng tần số của bộ lọc rất nhỏ cho nên ta không cần quan tâm đến những đặc tính lý tưởng này. Trong thực tiễn, lúc thiết kế bộ lọc, miền tần số được phân chia thành nhiều dải khác nhau. Để có thể thiết kế được những bộ lọc điện tử, thông thường ta cần chấp nhận một **dải tần chuyển tiếp**[‡], còn gọi tắt là dải chuyển tiếp, để nối kết dải thông và dải triệt. Hình 5.3 mô tả đáp ứng tần số biên độ và đáp ứng tần số pha của một bộ lọc thực tiễn, với các dải tần khác nhau.

Hai thông số tương đối quan trọng lúc cần phân tích độ méo của bộ lọc là **độ trễ pha**[§] $T_p(\Omega)$ và **độ trễ nhóm**[¶] $T_g(\Omega)$ (còn gọi là độ trễ bao^{||}), được định nghĩa như sau:

$$T_p(\Omega) = \frac{\Phi(\Omega)}{\Omega} \quad (5.11)$$

$$T_g(\Omega) = -\frac{d\Phi(\Omega)}{d\Omega} \quad (5.12)$$

Ý nghĩa của hai độ trễ này được minh họa trên hình 5.4. Khái niệm

^{*}Passband.

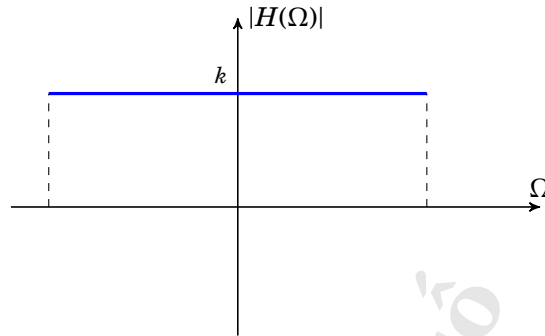
[†]Stopband.

[‡]Transition band.

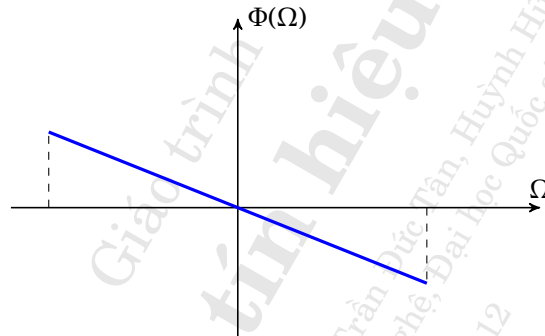
[§]Phase delay.

[¶]Group delay.

^{||}Envelop delay.



(a) Đáp ứng tần số biên độ



(b) Đáp ứng tần số pha

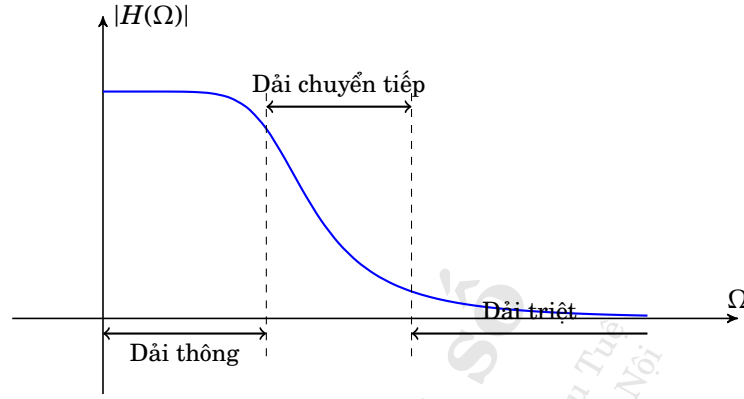
Hình 5.2: Đáp ứng tần số biên độ và đáp ứng tần số pha của bộ lọc lý tưởng.

độ trễ nhóm đóng vai trò quan trọng lúc một tín hiệu có dải thông hẹp được truyền qua một hệ thống thông dải. Độ trễ nhóm thể hiện độ méo mà hệ thống tác động lên tín hiệu.

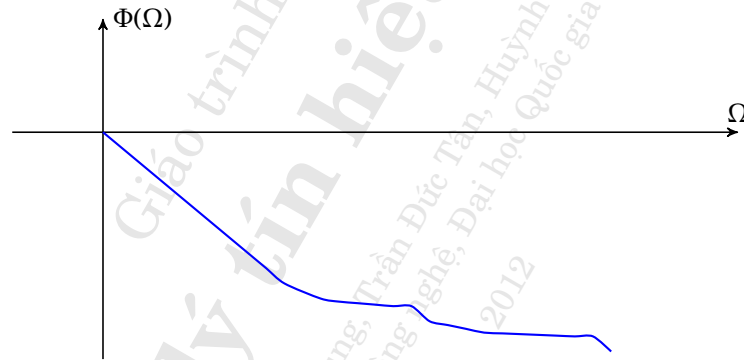
Trong bài toán thiết kế, đặc tả của hệ thống thông qua một phép xấp xỉ nào đó sẽ được diễn tả bởi phương trình

$$A^2(\Omega) = |H(\Omega)|^2. \quad (5.13)$$

Giả sử đã tìm được hàm $A^2(\Omega)$, vấn đề tiếp theo là phải xác định



(a) Đáp ứng tần số biên độ



(b) Đáp ứng tần số pha

Hình 5.3: Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc thực tiến.

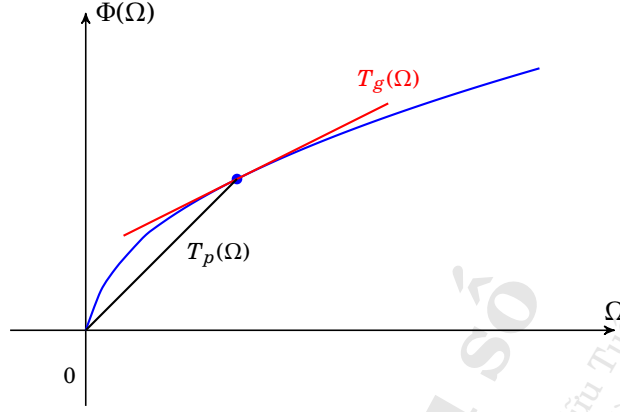
được hàm truyền $H(s)$ thỏa mãn (5.13), tức là tìm $H(s)$ thế nào để có

$$H(s)H(-s)|_{s=j\Omega} = A^2(\Omega). \quad (5.14)$$

Giáo trình này tập trung chủ yếu vào các hệ thống có hàm truyền là một hàm hữu tỷ. Vì $H(\Omega)$ là một hàm hữu tỷ theo Ω , cho nên

$$A^2(\Omega) = H(\Omega)H^*(\Omega). \quad (5.15)$$

Như vậy, $A^2(\Omega)$ có thể xem là một hàm có biến độc lập Ω^2 . Do đó



Hình 5.4: Độ trễ pha và độ trễ nhóm.

phương trình (5.14) có thể được đặt dưới dạng

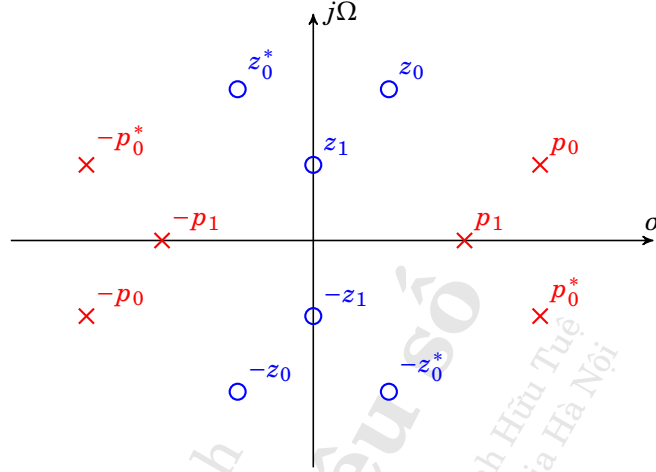
$$H(s)H(-s) = A^2(\Omega)|_{\Omega^2 = -s^2}. \quad (5.16)$$

Hàm hữu tỉ $A^2(-s^2)$ chứa các hệ số thực cho nên nếu có một nghiệm không* z_0 không nằm trên trục ảo hay trục thực thì cũng sẽ có ba nghiệm không khác tương ứng với nó là z_0^* , $-z_0$ và $-z_0^*$. Nếu có nghiệm không z_1 nằm trên trục thực hoặc trục ảo thì chỉ có thêm $-z_1$ là nghiệm không. Nghiệm cực† cũng có tính chất này. Hình 5.5 minh họa các nghiệm không z_0 , z_1 và các nghiệm cực p_0 , p_1 , cùng với các nghiệm tương ứng với chúng. Sau khi tính các nghiệm không và nghiệm cực của $A^2(-s^2)$, ta thấy ngay phải chọn $H(s)$ sao cho nghiệm không và nghiệm cực của nó ở nửa bên trái của mặt phẳng s , tức là $\Re\{s\} < 0$, để hệ thống này là ổn định và có **pha tối thiểu**‡.

*Zero.

†Pole.

‡Một hệ thống có biên độ cho trước có thể có nhiều pha khác nhau. Hệ thống tương ứng với pha tối thiểu được gọi là hệ thống pha tối thiểu (minimum phase systems). Điều khiển một hệ thống có pha tối thiểu dễ hơn rất nhiều so với hệ thống không có pha tối thiểu.



Hình 5.5: Minh họa nghiệm không và nghiệm cực trong mặt phẳng s .

Ví dụ 5.1 Cho

$$A^2(\Omega) = \frac{25(4 - \Omega^2)^2}{(9 + \Omega^2)(16 + \Omega^2)}.$$

Tìm $H(s)$ sao cho $|H(j\Omega)|^2 = A^2(\Omega)$.

Theo phân tích trên đây, ta có

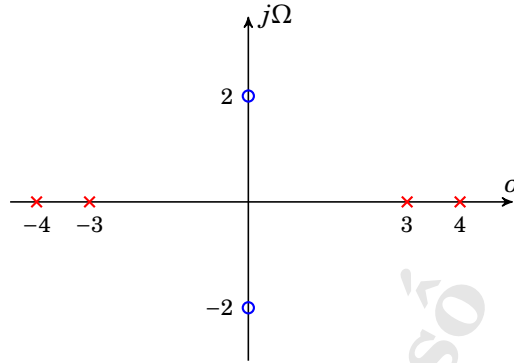
$$H(s)H(-s) = \frac{25(4 + s^2)^2}{(9 - s^2)(16 - s^2)} \quad (5.17)$$

Hàm này có hai nghiệm không kép ở $2j$ và $-2j$ và bốn nghiệm cực ở ± 3 và ± 4 , như mô tả trên hình 5.6.

Như đã chỉ ra rằng để hệ thống là ổn định, $H(s)$ cần có nghiệm không và nghiệm cực ở nửa trái của mặt phẳng s . Do đó ta có

$$H(s) = \frac{5(s - 2j)(s + 2j)}{(s + 3)(s + 4)} = \frac{5(s^2 + 4)}{(s + 3)(s + 4)}.$$

□



Hình 5.6: Nghiệm không và nghiệm cực của $H(s)H(-s)$ [Phương trình (5.17)].

5.1.1 Các phương pháp xấp xỉ Butterworth và Chebychev

Có một số loại bộ lọc tương tự quan trọng nhưng giáo trình này chỉ quan tâm tới hai loại phổ cập nhất, đó là Butterworth và Chebychev.

Họ bộ lọc Butterworth

Loại bộ lọc thông thấp phổ biến nhất là **bộ lọc Butterworth**, cũng gọi là **bộ lọc phẳng tối đa**^{*}. Loại bộ lọc này có $A^2(-s^2)$ được xấp xỉ bởi biểu thức

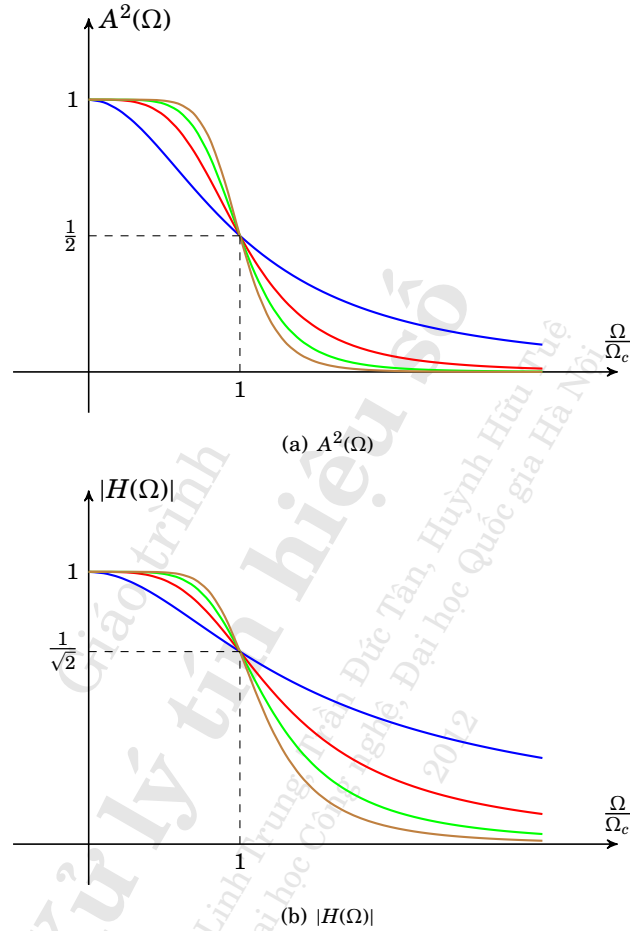
$$A^2(\Omega) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}}, \quad (5.18)$$

trong đó n là bậc của bộ lọc và Ω_c là **tần số cắt**[†] (rads/s) của bộ lọc. Tại $\Omega = \Omega_c$, đáp ứng tần số có biên độ thấp hơn 3 dB so với biên độ cực đại $H(0)$, được xác định bởi $A(0)$. Khi $\Omega_c = 1$, ta gọi là **tần số cắt chuẩn hóa**[‡] và ký hiệu là Ω_r .

^{*}Maximally flat filter.

[†]Cutoff frequency

[‡]Normalized cutoff frequency.



Hình 5.7: Đáp ứng tần số của họ bộ lọc Butterworth với các bậc khác nhau, và có cùng tần số cắt chuẩn hóa $\Omega_r = 1$ rad/s.

Hình 5.7 mô tả $A(\Omega)$ và đáp ứng tần số biên độ hệ thống $|H(\Omega)|$ tương ứng cho họ bộ lọc Butterworth với các bậc khác nhau và cùng có tần số cắt chuẩn hóa $\Omega_r = 1$ rad/s. Đáp ứng tần số là một hàm suy giảm đều, có trị cực đại tại $\Omega = 0$ và lúc số bậc càng tăng thì đáp ứng tần số càng trở nên phẳng. Đồng thời độ suy giảm ở trong miền tần số lớn hơn tần số cắt là $6n$ dB/octave.

Ví dụ 5.2 Xác định hàm truyền của bộ lọc Butterworth bậc 3 có tần số cắt $\Omega_c = 1$ rad/s.

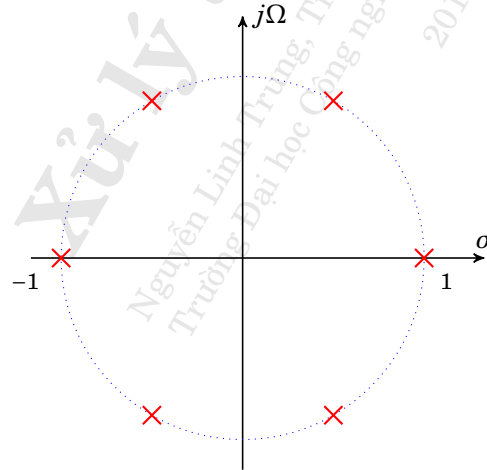
Áp dụng biểu thức (5.18) với bậc $n = 3$ và tần số cắt $\Omega_c = 1$, ta có

$$\begin{aligned} A^2(\Omega) &= \frac{1}{1 + (\Omega)^6} \\ &= \frac{1}{1 + (\Omega^2)^3} \end{aligned}$$

và như thế

$$\begin{aligned} A^2(\Omega) &= H(s)H(-s) \\ &= \frac{1}{1 + (-s^2)^3} \\ &= \frac{1}{1 - s^6}. \end{aligned}$$

Biểu thức trên đây là một hàm hữu tỷ chứa 6 nghiệm cực $s = e^{\frac{-j2\pi k}{6}}$ với $k = 0, 1, \dots, 5$, được biểu diễn như trên hình 5.8. Ta chọn các nghiệm



Hình 5.8: Giải đồ điểm cực điểm không

Bảng 5.1: Đa thức Butterworth chuẩn hóa

n	1/H(s)
1	$s + 1$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 1.9319s + 1)$

cực ở nửa trái mặt phẳng s cho $H(s)$, tức là các nghiệm

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{j\frac{2\pi}{6}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_2 &= e^{j\frac{2\pi}{3}} = -1, \\ z_3 &= e^{j\frac{2\pi}{2}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

□

Bảng 5.1 bao gồm đa thức Butterworth chuẩn hóa cho các bậc từ 1 đến 6.

Họ bộ lọc Chebychev

Bộ lọc Chebychev là một bộ lọc mà đáp ứng tần số có độ gợn sóng đều trong dải thông. Phép xấp xỉ này được xây dựng dựa trên các đa thức Chebychev $C_n(x)$ được xác định như sau:

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(x)) & |x| < 1, \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh}(x)) & |x| > 1, \end{cases} \quad (5.19)$$

trong đó n là bậc của đa thức. Đây là một họ các đa thức trực giao trên khoảng $(-1, 1)$, trong đó nó có độ gợn sóng đều, có giá trị cực đại

Bảng 5.2: Đa thức Chebychev

n	$C_n(x)$
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

là 1 và giá trị cực tiểu là -1 . $C_n(x)$ biến thiên cực nhanh lúc $x > 1$. Bảng 5.2 cho ta các đa thức Chebychev được minh họa trên hình 5.9. Ta thấy, $C_n(x)$ là một hàm chẵn lúc n chẵn và lẻ lúc n lẻ.

Bộ lọc thông thấp Chebychev bậc n có bình phương của đáp ứng tần số biên độ có dạng:

$$A^2(\Omega) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}, \quad (5.20)$$

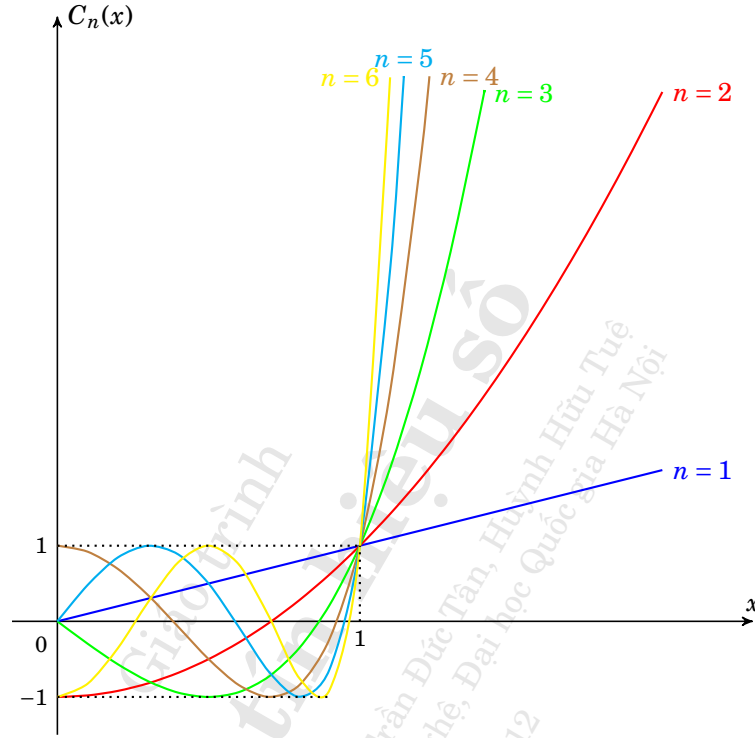
trong đó ϵ^2 là một thông số được chọn để có độ gợn sóng thích hợp, α là một hằng số được chọn để thỏa mãn độ khuếch đại cho tín hiệu d.c. và Ω_c là tần số cắt. Đáp ứng tần số biên độ cho $n = 3$ (n lẻ) và có độ gợn sóng 2 dB được minh họa ở hình 5.10(a). Đáp ứng tần số biên độ với $n = 4$ (n chẵn) và độ gợn sóng 2 dB được minh họa ở hình 5.10(b).

Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebychev có một số tính chất quan trọng như sau. Dải thông được định nghĩa là khoảng tần số trong đó độ gợn sóng dao động giữa hai giới hạn tức là từ 0 đến Ω_c . Tần số cắt Ω_c là tần số cao nhất của đáp ứng tần số mà giới hạn của độ gợn sóng được thỏa mãn. Vượt qua Ω_c , ta có dải chuyển tiếp.

Độ gợn sóng dải thông*, ký hiệu là r và có đơn vị là dB, được định nghĩa như sau:

$$r = 10 \log_{10} \frac{A_{\max}^2}{A_{\min}^2} = 20 \log_{10} \frac{A_{\max}}{A_{\min}}, \quad (5.21)$$

*Passband ripple.



Hình 5.9: Gợn sóng dải triệt

trong đó A_{\max} và A_{\min} là giới hạn cực đại và cực tiểu của độ gợn sóng trong dải thông. Phương trình (5.20) cho ta

$$A_{\max} = \alpha, \quad (5.22)$$

$$A_{\min} = \frac{\alpha}{1 + \epsilon^2}. \quad (5.23)$$

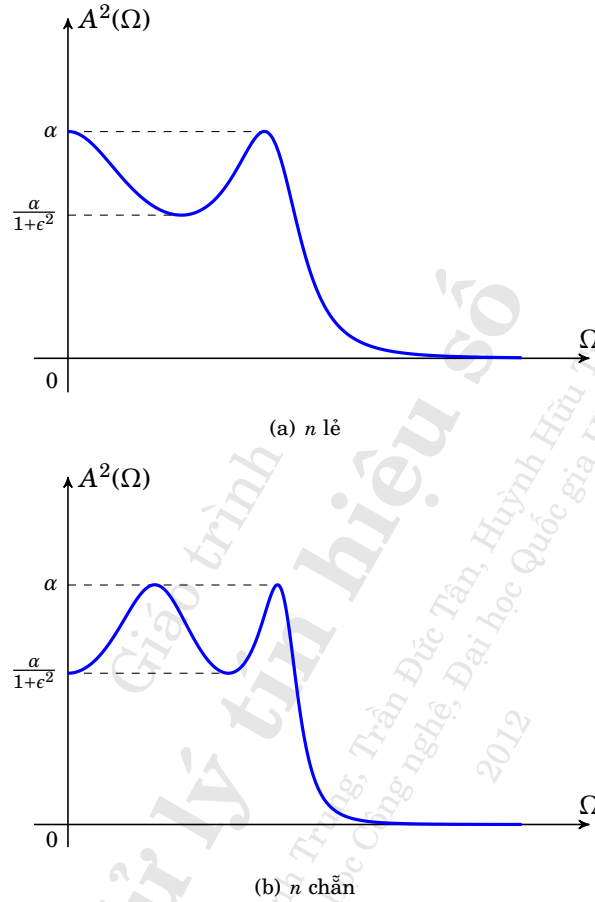
Từ đó ta suy ra

$$r = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \quad (5.24)$$

và

$$\epsilon^2 = 10^{r/10} - 1. \quad (5.25)$$

Độ triệt tại một tần số trong dải triệt sẽ tăng nếu ta tăng độ gợn sóng. Như thế, khi chọn bộ lọc Chebychev thì hiện tượng này là điều



Hình 5.10: Gọn sóng dải thông

kiện trao đổi giữa chất lượng lọc trong dải triệt và độ méo trong dải thông.

Số cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) trong dải thông bằng bậc của bộ lọc. Tại $\Omega = 0$, $A(\Omega)$ đạt cực đại nếu n lẻ và cực tiểu nếu n chẵn. Nếu ta muốn có độ khuếch đại d.c. là đơn vị thì đối với bộ lọc bậc lẻ chọn $\alpha = 1$ và đối với bộ lọc bậc chẵn chọn $\alpha = 1 + \epsilon^2$. Nếu ta muốn chọn $A_{\max} = 1$ thì chọn $\alpha = 1$.

Tần số cắt Ω_c của bộ lọc Chebychev không có cùng tính chất như đối với bộ lọc Butterworth. Trong trường hợp bộ lọc Butterworth Ω_c là tần số cắt ở 3 dB, còn trong trường hợp Chebychev Ω_c là tần số lớn nhất thỏa mãn điều kiện gợn sóng của dải thông. Đặc tính này rất quan trọng lúc thiết kế bộ lọc Chebychev.

Ví dụ 5.3 Xác định hàm truyền của bộ lọc Chebychev bậc 2 có độ gợn sóng trong dải thông là 1 dB, tần số cắt là $\Omega_c = 1$ rad/s và độ khuếch đại tại d.c. là đơn vị.

Theo công thức (5.25) ta có

$$\epsilon = \sqrt{10^{r/10} - 1} = 0,25892541.$$

Từ bảng 5.2 và phương trình (5.20) ta có

$$A^2(\Omega) = \frac{1,2589254}{1,0357016\Omega^4 - 1,0357016\Omega^2 + 1,2589254}.$$

và viết theo s là

$$A^2(s) = \frac{1,2589254}{1,0357016s^4 + 1,0357016s^2 + 1,2589254}$$

Như vậy, $H(s)H(-s)$ có 4 nghiệm cực sau:

$$s_1 = -0,54886717336682 + 0,89512857959049i,$$

$$s_2 = -0,54886717336682 - 0,89512857959049i,$$

$$s_3 = 0,54886717336682 + 0,89512857959049i,$$

$$s_4 = 0,54886717336682 - 0,89512857959049i.$$

Ta chọn 2 cực ổn định là s_1 và s_2 để xây dựng $H(s)$. Cuối cùng, ta tìm được

$$H(s) = \frac{1,1025103}{s^2 + 1,0977343s + 1,1025103}.$$

□

Dựa trên bộ lọc thông thấp, có một số biến đổi cho phép ta thiết kế những bộ lọc thông dải, triệt dải và thông cao. Các biến đổi này sẽ được trình bày ngắn gọn trong các phần tiếp theo.

5.1.2 Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông dải

Một phương pháp rất phổ cập để thiết kế các bộ lọc thông dải là sử dụng một bộ lọc thông thấp và một phép biến đổi để chuyển hàm chuyển thành thông dải. Để phân biệt bộ lọc thông thấp và bộ lọc thông dải, ta sử dụng các định nghĩa sau đây:

- p : Biến Laplace cho bộ lọc thông thấp.
- s : Biến Laplace cho bộ lọc thông dải.
- λ : Biến tần số tương ứng với p ($p = j\lambda$).
- Ω : Biến tần số tương ứng với s ($s = j\Omega$).
- $h_{lp}(p)$: Hàm truyền thông thấp.
- $h_{bp}(s)$: Hàm truyền của bộ lọc thông dải.
- λ_r (rads/s): Một tần số đặc biệt nào đó của bộ lọc thông thấp (thường là tần số cắt λ_c).
- F_r (Hz): Tần số tương ứng với λ_r và tính theo đơn vị Hz ($F_r = \lambda_r/2\pi$).
- Ω_1 : Tần số cắt dưới của bộ lọc thông dải tương ứng với $-\lambda_r$ của bộ lọc thông thấp.
- Ω_3 : Tần số cắt trên của bộ lọc thông dải tương ứng với λ_r của bộ lọc thông thấp.
- Ω_2 : Tần số góc trung bình hình học của dải thông.
- F_1, F_2, F_3 (Hz): Tần số của dải thông tương ứng với $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Phép biến đổi chuyển bộ lọc thông thấp sang bộ lọc thông dải là

$$p = \frac{s^2 + \Omega_2^2}{s}. \quad (5.26)$$

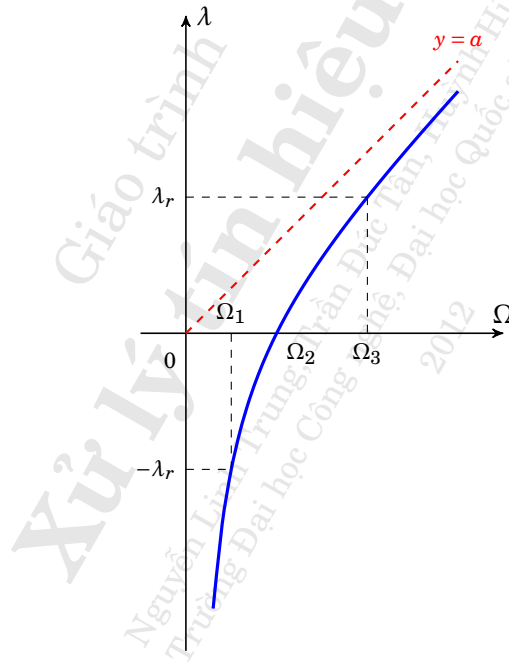
Mối liên hệ trong miền tần số là

$$\lambda = \frac{\Omega^2 - \Omega_2^2}{\Omega}, \quad (5.27)$$

hay là

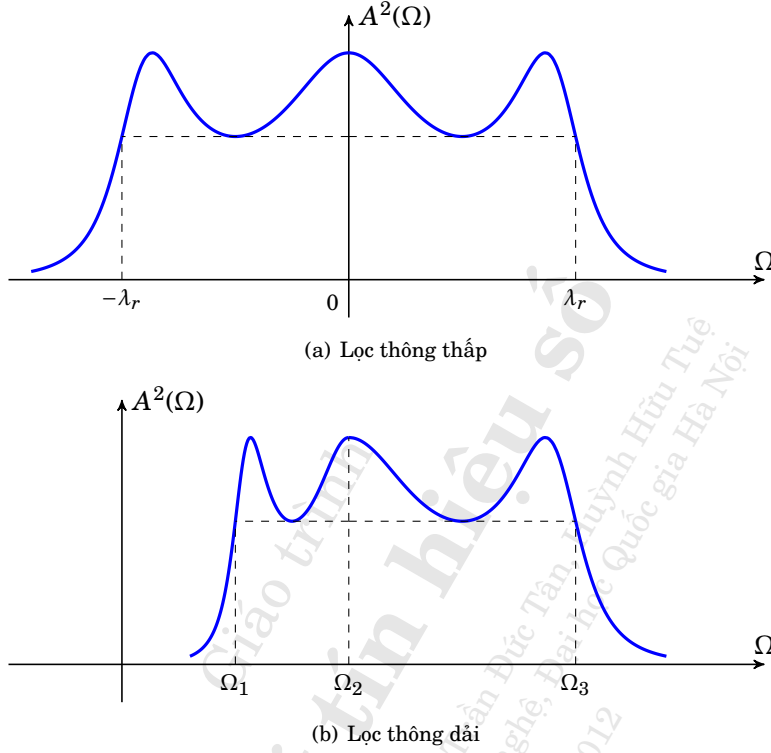
$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{F^2 - F_2^2}{F}. \quad (5.28)$$

Biến đổi thông thấp thành thông dải được minh họa như trên hình 5.11.



Hình 5.11: Biến đổi thông thấp thành thông dải.

Đồ thị này cho thấy, qua biến đổi (5.26), dải thông thấp $[-\lambda_r, \lambda_r]$ sẽ thành dải thông dải $[\Omega_1, \Omega_3]$. Như vậy bộ lọc thông thấp trở thành bộ lọc thông dải thông qua phép biến đổi này và được minh họa ở hình 5.12.



Hình 5.12: Đáp ứng tần số biên độ của lọc thông thấp và bộ lọc thông dải tương ứng.

Mối liên hệ các thông số được suy ra như sau

$$F_r = \frac{F_3^2 - F_2^2}{F_3} \quad (5.29)$$

$$-F_r = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_1} \quad (5.30)$$

$$F_2 = \sqrt{F_1 F_3} \quad (5.31)$$

$$B = F_3 - F_1 \quad (5.32)$$

Thông số B là dải thông của bộ lọc thông dải, là một thông số quan trọng trong quá trình thiết kế. Như vậy, muốn thiết kế một bộ lọc thông dải thông qua một bộ lọc thông thấp, phải chọn các thông số

của bộ lọc thông thấp tương ứng với các thông số của bộ lọc thông dải cần phải thiết kế. Các bước thiết kế được mô tả trong phương pháp (5.1).

Phương pháp 5.1 – Thiết kế bộ lọc thông dải.

1. Các thông số đặc trưng của dải thông là các tần số cắt F_1 và F_3 . Từ đó ta suy ra dải thông $B = F_3 - F_2$ và tần số trung bình hình học $F_2 = \sqrt{F_1 F_3}$.
2. Chọn bộ lọc thông thấp có những đặc tả mong muốn và đặc biệt là có tần số cắt $F_r = B$.
3. Từ hàm truyền $H_{lp}(p)$ của bộ lọc thông thấp, thế p theo (5.26), ta suy ra hàm truyền của bộ lọc thông dải tương ứng $H_{bp}(s)$.

Thông thường, nếu bộ lọc thông thấp có bậc n thì bộ lọc thông dải tương ứng có bậc là $2n$ gồm $2n$ nghiệm cực hữu hạn.

Ví dụ 5.4 Thiết kế một bộ lọc thông dải loại Butterworth có 4 nghiệm cực với tần số trung bình hình học là 1 KHz và dải thông 3 dB là 200 Hz.

Bởi vì bộ lọc thông dải là bậc 4, bộ lọc thông thấp sẽ có bậc là 2 và hàm truyền chuẩn hóa ($\lambda_r = 1$) là

$$H_{lp}(p) = \frac{1}{p^2 + 1,4142136p + 1}.$$

Biết bộ lọc thông thấp có tần số cắt là 200 Hz, hàm truyền của nó có thể suy ra từ $H_{lp}(p)$ bằng cách thế $p = p/2\pi \times 200$ để có

$$H_{lp}(p) = \frac{1,5791367 \times 10^6}{p^2 + 1,7771532 \times 10^3 p + 1,5791367 \times 10^6}.$$

Biết rằng $\Omega_2 = 2\pi \times 10^3$, phép biến đổi thông thấp thành thông dải là

$$p = \frac{s^2 + 3,9478418 \times 10^7}{s}$$

và hàm truyền của bộ lọc thông dải là

$$H_{bp}(s) = \frac{1,5791367 \times 10^6 s^2}{B(s)},$$

với

$$B(s) = s^4 + 1,7771532s^3 + 8,535973 \times 10^7 s^2 + 7,0159197 \times 10^{10} s + 1,5585455 \times 10^{15}.$$

□

5.1.3 Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc triệt dải

Phép biến đổi mà ta tìm cách xây dựng phải biến đáp ứng thông thấp thành thông dải như được minh họa ở hình 5.13. Dựa theo quan sát của phép biến đổi từ thông thấp sang thông dải, ta thấy phép biến đổi từ thông thấp sang triệt dải phải có dạng

$$p = \frac{\Omega_2^2 s}{s^2 + \Omega_2^2}. \quad (5.33)$$

Thế $s = j\Omega$ và $p = j\lambda$ trong phương trình (5.33), ta suy ra

$$\lambda = \frac{\Omega_2^2 \Omega}{\Omega_2^2 - \Omega^2} \quad (5.34)$$

hoặc

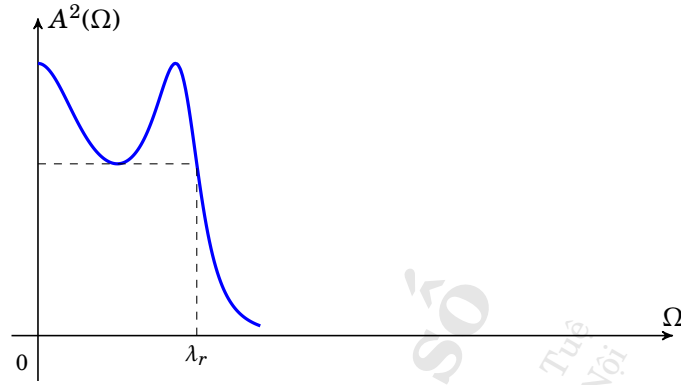
$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{F_2^2 F}{F_2^2 - \Omega^2}. \quad (5.35)$$

Hệ thức (5.34) được minh họa trên hình 5.14. Điểm $\lambda = 0$ được biến đổi thành $\Omega = 0$ và $\Omega = \infty$ và điểm $\lambda = \pm\infty$ được biến đổi thành $\Omega = \Omega_2$, λ_r và $-\lambda_r$ được biến đổi thành Ω_1 và Ω_3 . Ta có thể suy ra

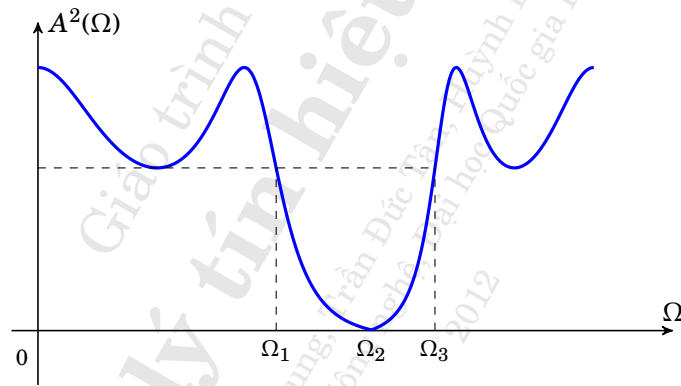
$$F_2 = \sqrt{F_1 F_3} \quad (5.36)$$

hoặc

$$B = F_3 - F_1 = \frac{F_2^2}{F_r} = \frac{F_1 F_3}{F_r}. \quad (5.37)$$



(a) Lọc thông thấp

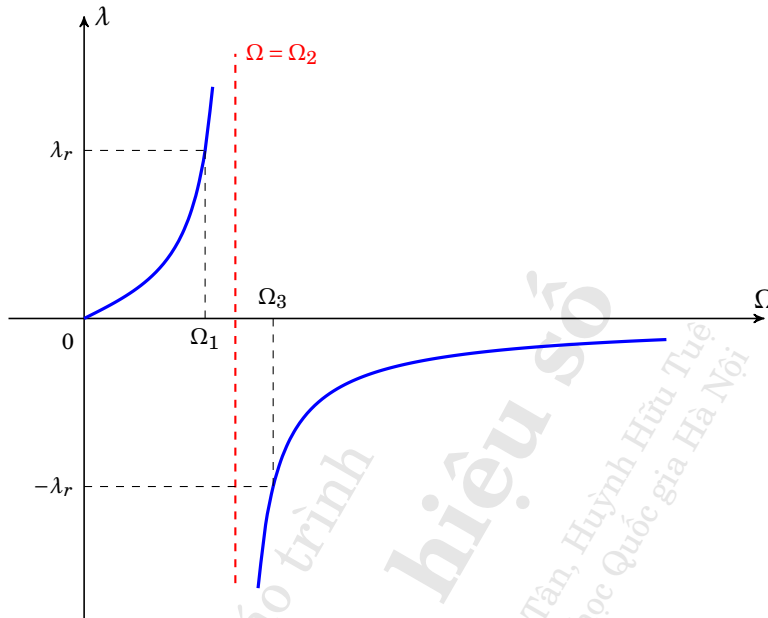


(b) Lọc triệt dải tương ứng

Hình 5.13: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc thông thấp và bộ lọc triệt dải tương ứng.

Ta thấy, biểu thức (5.36) hoàn toàn giống như phép biến đổi từ thông thấp sang thông dải, nhưng khác ở chỗ dải triệt B lại tỷ lệ nghịch với F_r .

Do vậy, thiết kế bộ lọc triệt dải được tóm tắt như trong phương pháp 5.2.



Hình 5.14: Biến đổi thông thấp thành triệt dải.

Phương pháp 5.2 – Thiết kế bộ lọc triệt dải.

1. Xác định hàm truyền của bộ lọc thông thấp $H_{lp}(p)$ trong đó dải thông F_r là tỉ lệ nghịch với dải thông B của bộ lọc triệt dải ta muốn thiết kế (xem phương trình (5.37)). Lúc chọn thông số, ta phải cẩn thận vì hầu hết các từ điển bộ lọc thường tương ứng với các thông số đã được chuẩn hóa.
2. Xây dựng hàm truyền của bộ lọc triệt dải $H_{bl}(s)$ bằng cách thế p của bộ lọc thông thấp bởi phương trình (5.33). Thông thường, nếu bộ lọc thông thấp có bậc k thì bộ lọc triệt dải sẽ có bậc là $2k$. Nếu những nghiệm 0 của bộ lọc thông thấp đều nằm ở ∞ thì bộ lọc triệt dải sẽ có $2k$ nghiệm 0 trên trục $j\Omega$ tương ứng với k cặp nghiệm thuần ảo liên hợp.

Sau đây là ví dụ minh họa phương pháp thiết kế bộ lọc thông dải.

Ví dụ 5.5 Xác định hàm truyền của một bộ lọc triệt dải có các đặc tả sau đây: 4 nghiệm cực, dạng Butterworth, tần số trung tâm hình học của dải triệt là 1 KHz và dải triệt 3 dB là 200 Hz.

Bộ lọc thông thấp tương ứng là bộ lọc Butterworth bậc 2 của ví dụ 5.4. Phương trình (5.36) và (5.37) cho ta

$$F_r = \frac{F_1 F_3}{B} = \frac{(10^3)^2}{200} = 5 \times 10^3.$$

Như vậy, hàm truyền của bộ lọc thông thấp phải được điều chỉnh thông số thế nào để tần số cắt 3 dB là 5×10^3 Hz. Để thực hiện điều kiện này, ta chỉ cần thế p bởi $p/(2\pi \times 5 \times 10^3)$. Hàm truyền của bộ lọc thông thấp sẽ là

$$H_{lp}(p) = \frac{9,8696044 \times 10^8}{p^2 + 4,4428829 \times 10^4 p + 9,8696044 \times 10^8}$$

Với phép biến đổi

$$p = \frac{3,9478418 \times 10^7 s}{s^2 + 3,9478418 \times 10^7},$$

ta suy ra hàm truyền của bộ lọc triệt dải là

$$H_{bs}(s) = \frac{(s^2 + 3,9478418 \times 10^7)^2}{B(s)}$$

trong đó

$$B(s) = s^4 + 1,7771532 \times 10^3 s^3 + 8,0535973 \times 10^7 s^2 + 7,0159196 \times 10^{10} s + 1,5585455 \times 10^{15}.$$

□

5.1.4 Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông cao

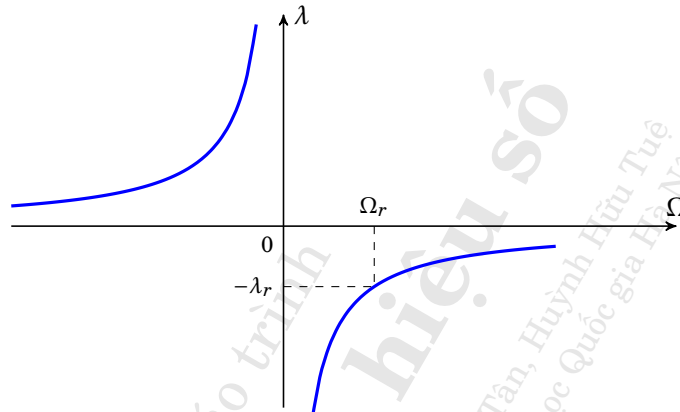
Phép biến đổi này đơn giản hơn, nó biến đổi điểm $\lambda = 0$ thành $\Omega = \infty$ và điểm $\lambda = \infty$ thành $\Omega = 0$. Như thế, phép biến đổi sẽ là

$$p = \frac{\lambda_r \Omega_r}{s}. \quad (5.38)$$

Trong miền tần số ta có

$$\frac{\lambda}{2\pi} = -\frac{\Omega_r}{\Omega}. \quad (5.39)$$

Phép biến đổi này được minh họa ở hình 5.15. Nó biến đáp ứng tần



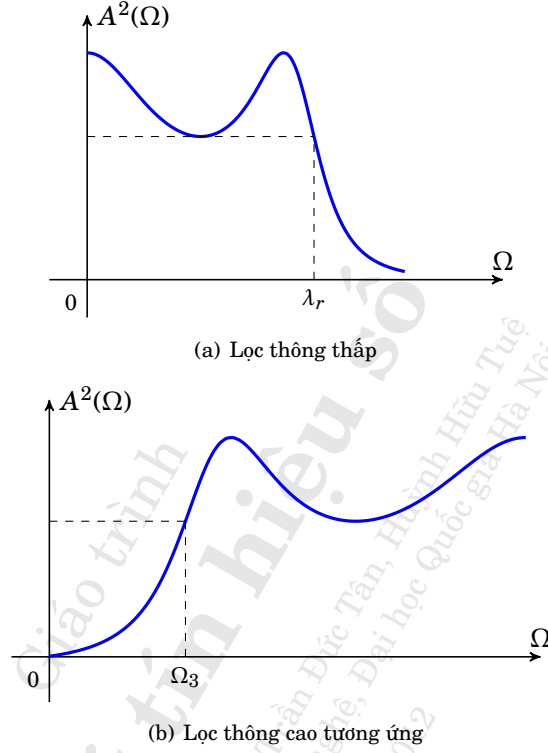
Hình 5.15: Biến đổi thông thấp thành thông cao.

số thông thấp thành đáp ứng tần số thông cao như được minh họa ở hình 5.16.

Các bước thiết kế bộ lọc thông cao được mô tả trong phương pháp 5.3.

Phương pháp 5.3 – Thiết kế bộ lọc thông cao.

1. Xác định hàm truyền của bộ lọc thông thấp $H_{lp}(p)$ và chỉ định tần số cắt thông thấp λ_r tương ứng với tần số cắt thông cao Ω_r .
2. Dùng phép biến đổi (5.38) để suy ra hàm truyền $H_{hp}(s)$ của bộ lọc thông cao. Thông thường, $H_{hp}(s)$ có cùng bậc với $H_{lp}(p)$ tương ứng. Nếu tất cả nghiệm 0 của $H_{lp}(p)$ đều nằm ở ∞ thì tất cả nghiệm 0 của $H_{hp}(s)$ nằm ở gốc. Như thế, ở vùng tần số thấp, độ dốc của đáp ứng tần số biên độ là vào khoảng $6n$ dB/octave.



Hình 5.16: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc thông thấp và bộ lọc thông cao tương ứng.

Ví dụ 5.6 Xác định hàm truyền của một bộ lọc thông cao loại Butterworth có 3 nghiệm cực và có tần số cắt 3 dB là 100 Hz.

Theo bảng 5.1, bộ lọc thông thấp Butterworth bậc 3 có hàm truyền là

$$H_{lp}(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}. \quad (5.40)$$

Tần số cắt chuẩn hóa của bộ lọc thông thấp là $\lambda_r = 1$ rad/s phải được biến đổi thành $\Omega_r = 2\pi \times 100$ rad/s. Như thế, phép biến đổi là

$$p = \frac{200\pi}{s}. \quad (5.41)$$

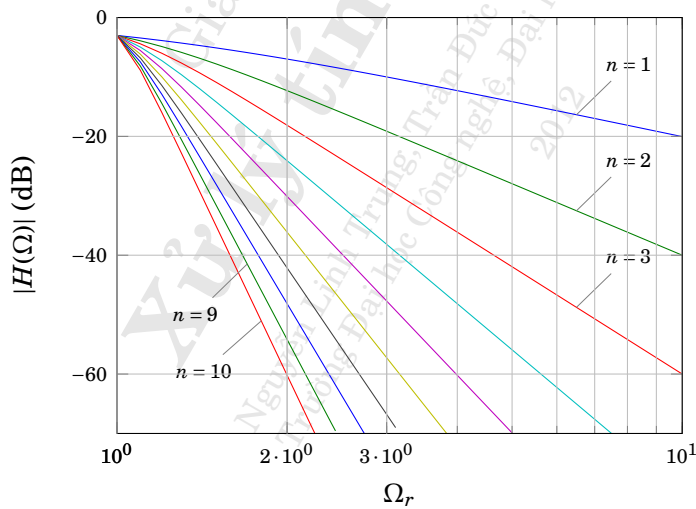
Thế (5.41) vào (5.40), suy ra hàm truyền của bộ lọc thông cao là

$$H_{hp}(s) = \frac{s^3}{s^3 + 1.2566371 \times 10^3 s^2 + 7.8956835 \times 10^5 s + 2.4805021 \times 10^8}.$$

□

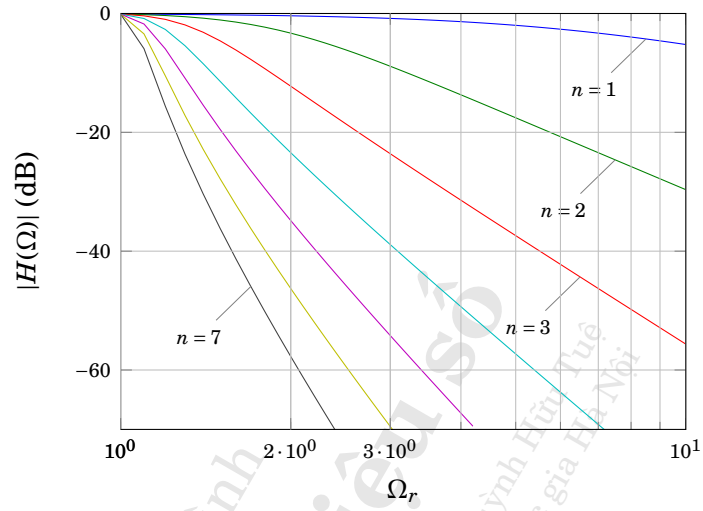
5.1.5 Đáp ứng tần số của bộ lọc theo bậc

Trong phương pháp thiết kế bộ lọc, trong một số trường hợp độ suy giảm phải bảo đảm mục tiêu tại một tần số nào đó. Như thế để thỏa mãn điều kiện này, cần phải biết cách chọn bậc của bộ lọc thích ứng để có thể xác định nhanh chóng thông số các bộ lọc là biểu diễn đáp ứng tần số biên độ trong miền triệt dãi của các họ bộ lọc ta quan tâm. Thông thường ta quan tâm họ bộ lọc Butterworth hoặc họ bộ lọc Chebyshev với các độ gợn sóng 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 và 3 dB. Các đáp ứng tần số này được trình bày tại các hình 5.17, 5.18, 5.19 và 5.20.

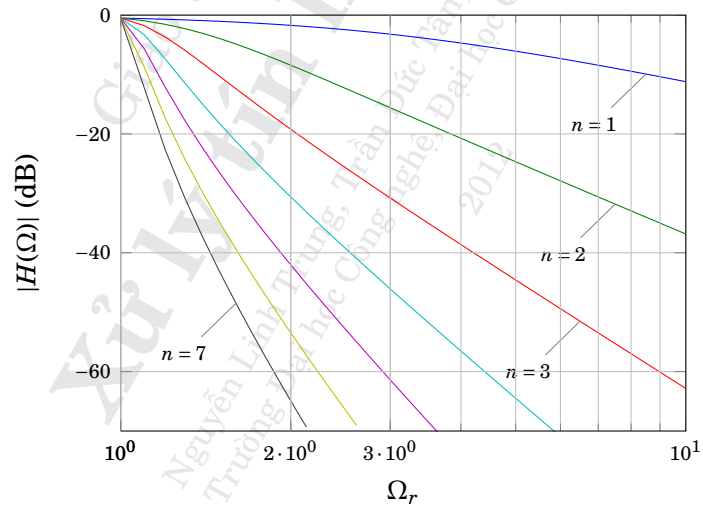


Hình 5.17: Bộ lọc Butterworth với n nghiệm cực.

Những đồ thị này cho thấy độ suy giảm của đáp ứng tần số biên độ trong dải triệt tức là từ tần số cắt chuẩn hóa bằng 1 trở đi. Số

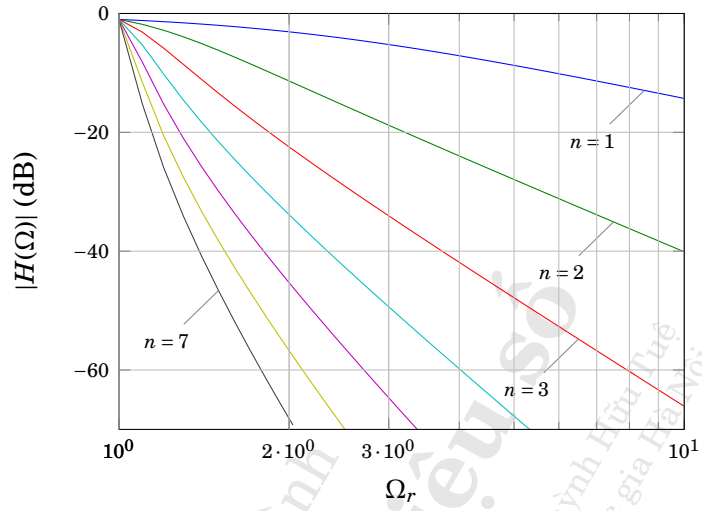


(a) Gợn sóng 0.1 dB

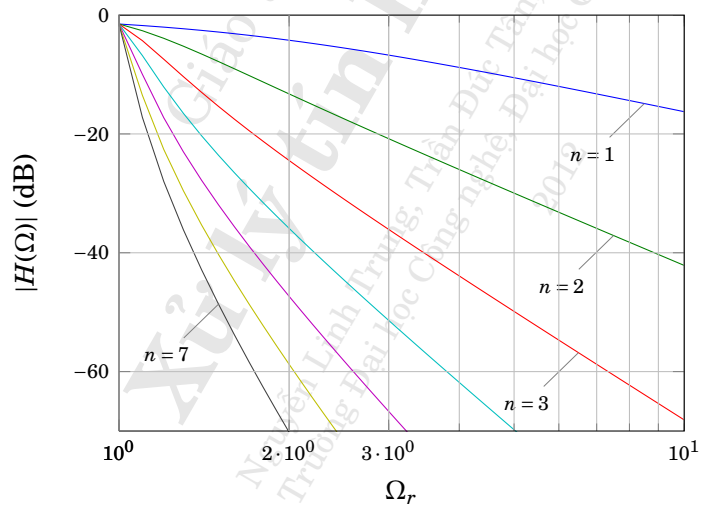


(b) Gợn sóng 0.5 dB

Hình 5.18: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 0.1 và 0.5 dB.

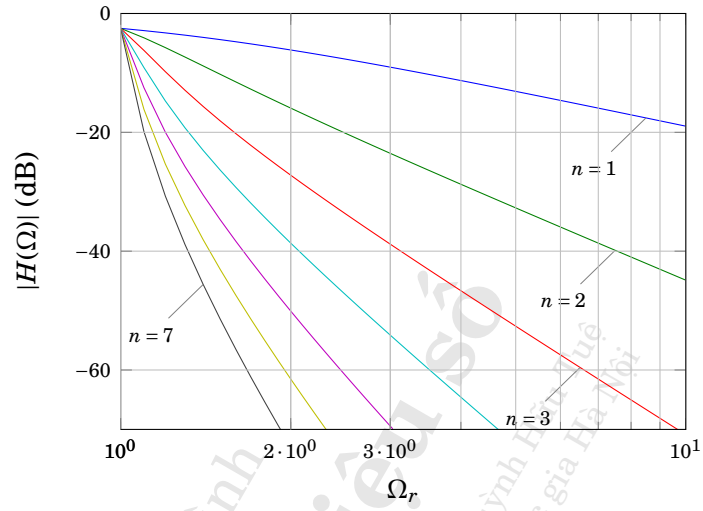


(a) gợn sóng 1 dB

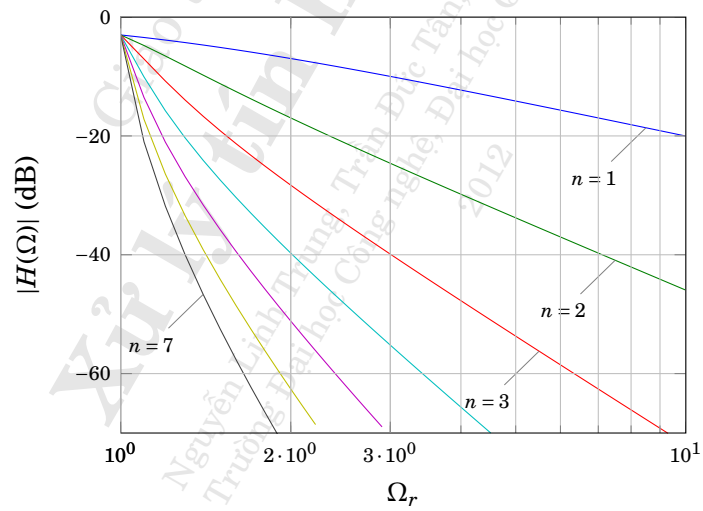


(b) gợn sóng 1.5 dB

Hình 5.19: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 1 và 1.5 dB.



(a) gợn sóng 2.5 dB



(b) gợn sóng 3 dB

Hình 5.20: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc Chebyshev với độ gợn sóng 2.5 và 3 dB.

trị cực tương ứng với bậc của bộ lọc thông thấp mà ta sử dụng cho quá trình thiết kế. Như thế các đồ thị tương ứng với Butterworth và Chebyshev có gợn sóng 3 dB sẽ bắt đầu ở 3 dB thấp hơn trị cực đại của đáp ứng tần số ở tần số chuẩn hóa 1. Trục hoành của các đồ thị từ hình 5.17 đến 5.20 có tên là tần số chuẩn hóa có thể được cắt nghĩa theo các cách khác nhau phụ thuộc vào bộ lọc ta chọn lựa. Xét hình 5.21, gọi B là thông số của độ thông dải được định nghĩa cho từng loại bộ lọc, gọi B_x là một dải thông nào đó mà ta muốn có độ suy giảm chọn trước. Tần số chuẩn hóa được định nghĩa là

$$NF = \frac{B_x}{B} \quad (5.42)$$

cho trường hợp lọc thông thấp và lọc thông dải hoặc

$$NF = \frac{B}{B_x} \quad (5.43)$$

với trường hợp lọc thông cao và lọc triệt dải. Chú ý là đáp ứng tần số tính theo dB theo mọi tình huống là so sánh với giá trị cực đại của đáp ứng tần số.

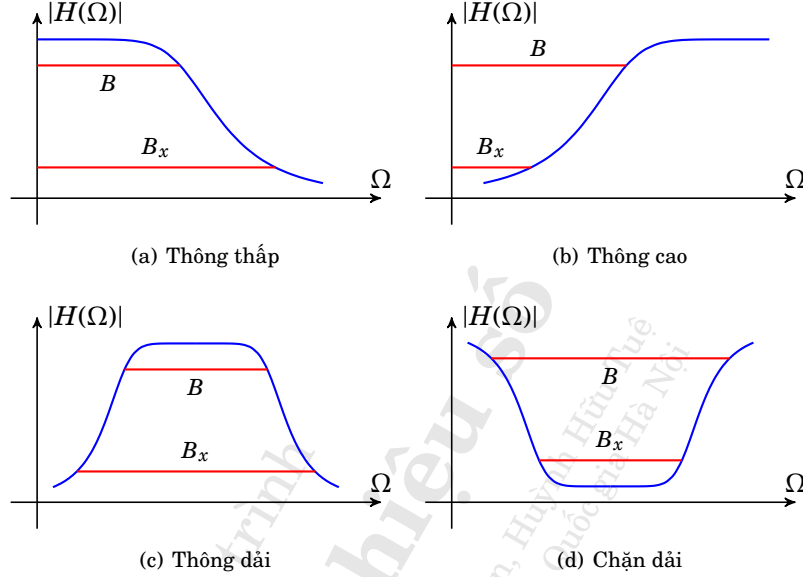
Nếu họ Butterworth và Chebyshev có bậc lẻ, ta sẽ không gặp khó khăn gì vì trị cực đại xuất hiện ở tần số d.c. Mặt khác họ Chebyshev bậc chẵn thì trị cực đại của đáp ứng tần số biên độ không xuất hiện ở tần số d.c. Và trong trường hợp này thì đơn vị dB là so sánh với trị ở tần số cực đại chứ không phải trị ở tần số d.c. Vì vậy ta cần chú ý lúc thiết kế nếu ta chọn đáp ứng tần số ở d.c. là 0 dB thì trong một số tình huống ngay trong dải thông đáp ứng tần số cao hơn 0 dB.

Ví dụ 5.7 Một bộ lọc thông thấp có các đặc trưng sau

- a) Đáp ứng tần số biên độ không được biến thiên quá 3 dB từ 0 đến 5 kHz.
- b) Độ suy giảm lớn hơn 23 dB với những tần số lớn hơn 10 kHz.

Chúng ta xác định số nghiệm cực tối thiểu nếu ta chọn bộ lọc Butterworth hoặc chọn bộ lọc Chebyshev.

Ta có thể trực tiếp dùng công thức để tính kết quả nhưng thuận tiện nhất là sử dụng các hình từ 5.17 đến 5.20. Đối với bộ lọc Butter-



Hình 5.21: Định nghĩa B và B_x .

worth thì tần số cắt là tương ứng với 3 dB và tần số chuẩn hóa mà độ suy giảm phải lớn hơn 23 dB sẽ là

$$NF = \frac{10 \text{ kHz}}{5 \text{ kHz}} = 2.$$

Từ hình 5.17 ta suy ra bậc tối thiểu là 4. Thật vậy tại tần số chuẩn hóa 2, độ suy giảm là 24 dB tức là có 1 dB tốt hơn yêu cầu tối thiểu.

Đối với bộ lọc Chebyshev, có thể chọn loại bộ lọc có độ gợn sóng 3 dB. Từ đồ thị 5.20 ta thấy tại tần số chuẩn hóa $NF = 2$ thì bộ lọc bậc 3 có độ suy giảm lớn hơn 28 dB, tức 5 dB lớn hơn cần thiết. Đối với ví dụ này, ta thấy có thể một bộ lọc Butterworth bậc 4 hoặc một bộ lọc Chebyshev bậc 3 có gợn sóng 3 dB sẽ thỏa mãn điều kiện thiết kế. Trong cả hai trường hợp thì độ suy giảm trong dải triệt đều lớn hơn cần thiết nếu tần số cắt 3 dB là 10 kHz. Chú ý là độ suy giảm của bộ lọc Chebyshev ở đây vượt qua khá nhiều yêu cầu thiết kế. Có thể sử dụng Chebyshev bậc 3 với độ gợn sóng nhỏ hơn 3 dB mà vẫn có thể thỏa các đặc tả. \square

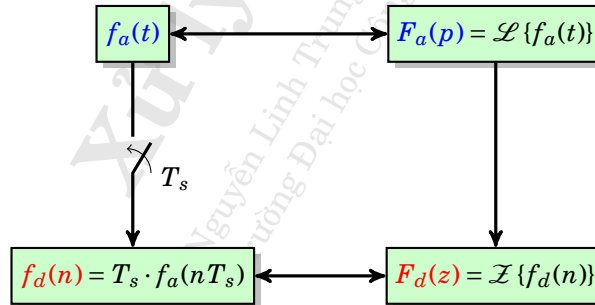
Phần này đã trình bày về hai loại bộ lọc tương tự truyền thống là bộ lọc Butterworth và bộ lọc Chebyshev. Trong các phần tiếp theo của chương, họ bộ lọc Butterworth và Chebyshev sẽ được áp dụng để thiết kế các bộ lọc số IIR.

5.2 Phương pháp đáp ứng bất biến

Phương pháp đáp ứng bất biến trong miền thời gian dựa trên mối liên hệ giữa biến đổi Laplace của một tín hiệu tương tự và biến đổi Z của tín hiệu rời rạc tương ứng.

Cho tín hiệu tương tự $f_a(t)$. Ta rời rạc hóa tín hiệu này với chu kỳ lấy mẫu T_s để được tín hiệu rời rạc $f_d(n) = T_s f_a(nT_s)$. Hệ số nhân T_s trong định nghĩa của $f_d(n)$ nhằm bảo đảm phổ của tín hiệu liên tục và phổ của tín hiệu rời rạc giống nhau trong dải tần ta quan tâm. Hình 5.22 mô tả lấy mẫu $f_a(t)$ và các động tác minh họa trong hình này được cô đọng trong biểu thức sau:

$$\mathcal{Z}\{f_d(n)\} = \mathcal{Z}_{T_s}\{\mathcal{L}^{-1}[f_a(t)]\}. \quad (5.44)$$



Hình 5.22: Mô tả lấy mẫu $f_a(t)$.

Giả sử $f_a(t)$ là một tín hiệu hàm mũ, được cho bởi

$$f_a(t) = e^{\alpha t} u(t). \quad (5.45)$$

Biến đổi Laplace của $f_a(t)$ cho ta

$$F_a(p) = \frac{1}{p - \alpha}. \quad (5.46)$$

Như vậy, $F_a(p)$ có bậc 1 và có một nghiệm cực đơn là α . Ta lấy mẫu $f_a(t)$ để có tín hiệu rời rạc

$$f_d(n) = T_s e^{\alpha n T_s} u(n), \quad (5.47)$$

từ đó có biến đổi \mathcal{Z} của $f_d(n)$ là

$$F_d(z) = \frac{T_s}{1 - e^{\alpha T_s} z^{-1}}. \quad (5.48)$$

Thông thường, các tín hiệu $f_a(t)$ mà ta quan tâm ở đây đều là tín hiệu thực. Vì thế trong trường hợp $F_a(p)$ có một nghiệm cực phức là α thì nó còn có thêm một nghiệm cực phức liên hợp là α^* . Hai thành phần đơn tương ứng với α và α^* cho ta một thành phần bậc 2 với các hệ số thực. Do đó, $F_a(p)$ sẽ có dạng

$$F_a(p) = \frac{ap + b}{p^2 + cp + d}. \quad (5.49)$$

Đặt $\sigma = c/2$ và $\Omega_0 = \sqrt{d - c^2/4}$, ta suy ra

$$F_d(z) = T_s \frac{a - e^{-\sigma T_s} \left[a \cos(\Omega_0 T_s) + \frac{a\sigma - b}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 T_s) \right] z^{-1}}{1 - 2e^{-\sigma T_s} \cos(\Omega_0 T_s) z^{-1} + e^{-2\sigma T_s} z^{-2}}. \quad (5.50)$$

Trong thực tiễn, dạng tổng quát nhất của $f_a(t)$ là hàm mũ hoặc hàm dao động với suy hao mũ, như thế $F_a(p)$ có thể phân tích thành các phân tử đơn bậc 1 hoặc bậc 2 như đã thảo luận ở trên. Ta thấy ngay các công thức (5.46) và (5.49) trong lĩnh vực tương tự trở thành các công thức (5.48) và (5.50) trong lĩnh vực rời rạc. Các công thức này là công cụ chính cho phương pháp thiết kế bất biến trong miền thời gian.

5.2.1 Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến

Gọi $G(p)$ là hàm truyền của bộ lọc tương tự đã được lựa chọn và $H(z)$ là hàm truyền của bộ lọc số ta phải thiết kế. Gọi $g(t)$ và $h(n)$ tương ứng là đáp ứng xung của bộ lọc tương tự và của bộ lọc số.

Xét hàm truyền $G(p)$ bậc 1

$$G(p) = \frac{1}{p - a}. \quad (5.51)$$

Đáp ứng xung tương ứng với $G(p)$ là

$$g(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{at}, & \text{với } t \geq 0 \\ 0, & \text{với } t < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

Lấy mẫu $g(t)$ với chu kỳ T_s thì đáp ứng xung của bộ lọc số tương ứng sẽ là:

$$h(n) = T_s e^{anT_s} \cdot u(n). \quad (5.53)$$

Từ đó, hàm truyền $H(z)$ của bộ lọc số là

$$H(z) = \frac{T_s}{1 - e^{aT_s}z^{-1}}. \quad (5.54)$$

Kết quả này cho thấy tính nhân quả của $G(p)$ sẽ dẫn đến tính nhân quả của $H(z)$. Điều này là hiển nhiên vì đáp ứng xung của bộ lọc số chính là đáp ứng xung của bộ lọc tương tự sau khi được lấy mẫu. Quan trọng hơn nữa, tính ổn định của $G(p)$, có nghĩa là $\Re\{p\} < 0$, sẽ dẫn đến tính ổn định của $H(z)$, có nghĩa là $|e^{aT_s}| < 1$.

Trong trường hợp hàm truyền $G(p)$ có cặp nghiệm cực phức liên hợp a và a^* thì, theo (5.49), chúng tạo nên một thành phần đơn bậc 2 của $G(p)$ có dạng như sau

$$G(p) = \frac{ap + b}{p^2 + cp + d}. \quad (5.55)$$

Ta sử dụng công thức (5.50) để suy ra $H(z)$ là

$$H(z) = T_s \frac{a - e^{-\sigma T_s} \left[a \cos(\Omega_0 T_s) + \frac{a\sigma - b}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 T_s) \right] z^{-1}}{1 - 2e^{-\sigma T_s} \cos(\Omega_0 T_s) z^{-1} + e^{-2\sigma T_s} z^{-2}}. \quad (5.56)$$

Từ các phân tích trên, có thể thấy rằng sau khi đã chọn $G(p)$ bất kỳ ta có thể sử dụng các biểu diễn (5.54) và (5.56) để thiết kế $H(z)$. Như thế, phương pháp thiết kế gồm những bước như trong Phương pháp 5.4.

Sau đây là một số ví dụ về thiết kế bộ lọc IIR bằng phương pháp đáp ứng xung bất biến trong miền thời gian.

Phương pháp 5.4 – Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến.

1. Chọn hàm truyền tương tự $G(p)$ và phân tích nó thành tổng các phần đơn bậc 1 (nghiệm thực) và bậc 2 (cặp nghiệm phức liên hợp).
2. Xác định hàm truyền rời rạc $H(z)$ tương ứng:
 - a) Đối với nghiệm thực, thế $\frac{1}{p-a}$ bằng vế phải của (5.54);
 - b) Đối với cặp nghiệm phức liên hợp, thế $\frac{ap+b}{p^2+cp+d}$ bằng vế phải của (5.56).

Ví dụ 5.8 (Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến với thành phần đơn)
Xác định một hàm truyền nhân quả $H(z)$ có đáp ứng xung giống như đáp ứng xung của một hệ thống tương tự có hàm truyền $G(p)$ được cho bởi

$$G(p) = \frac{1}{(p+5)(p+12)}.$$

với chu kỳ lấy mẫu là $T_s = 0,05$ giây.

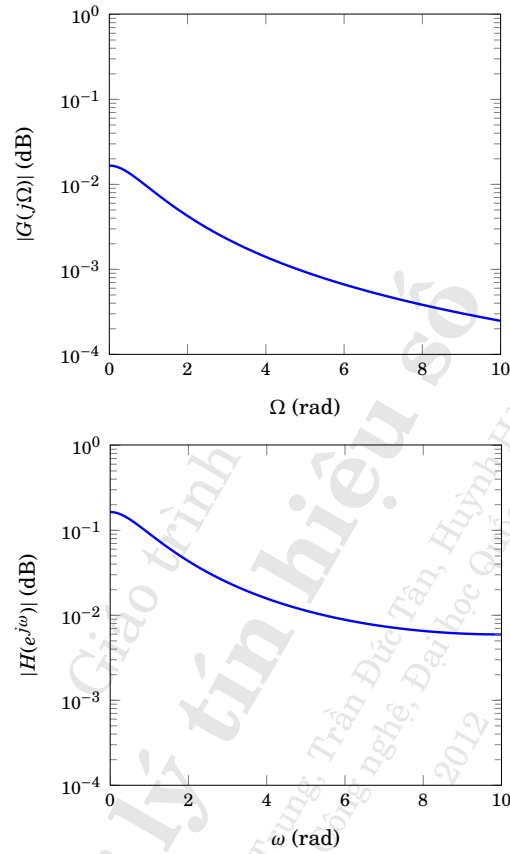
Trước tiên, ta thấy rằng $G(p)$ có hai nghiệm đơn là $a_1 = -5$ và $a_2 = -12$. Theo Bước 1 của phương pháp thiết kế (Phương pháp 5.4), ta phân tích hàm truyền $G(p)$ theo các hàm đơn và có được

$$G(p) = \frac{1/7}{p+5} - \frac{1/7}{p+12}.$$

Theo Bước 2 của phương pháp thiết kế, ta áp dụng công thức (5.54) và suy ra

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{0,05}{7} \left[\frac{1}{1 - e^{(-5)(0,05)} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{(-12)(0,05)} z^{-1}} \right] \\ &= \frac{0,0164}{1 - 1,3276z^{-1} + 0,4274z^{-2}}. \end{aligned}$$

Từ kết quả hàm truyền $H(z)$, ta thấy ngay bộ lọc số này là IIR. Hình 5.23 biểu diễn đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc tương tự $G(p)$ và bộ lọc số $H(z)$. □



Hình 5.23: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.8].

Trong ví dụ tiếp theo, ta sẽ xét đến thiết kế với thành phần liên hợp phức.

Ví dụ 5.9 (Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến với thành phần liên hợp phức)

Thiết kế một bộ lọc số thông thấp tương ứng với một bộ lọc tương tự Butterworth bậc 2 có tần số cắt 3 dB là 50 Hz và vận tốc lấy mẫu là 500 Hz.

Theo bảng 5.1, ta có hàm truyền Butterworth bậc 2 có tần số

cắt được chuẩn hóa ($\lambda_r = 1$ rad/s) là

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}p + p^2}. \quad (5.57)$$

Tần số cắt chuẩn hóa $\lambda_r = 1$ rad/s của $G_1(p)$ chính là tần số cắt $F_r = 50$ Hz của bộ lọc tương tự $G(p)$ cần dùng để chuyển đổi thành bộ lọc số. Do đó, ta suy ra hàm truyền của $G(p)$ như sau:

$$G(p) = G_1\left(\frac{p}{2\pi \times 50}\right) = \frac{9,8696044 \times 10^4}{p^2 + 444,28829p + 9,8696044 \times 10^4}. \quad (5.58)$$

Lấy biến đổi Laplace ngược của $G(p)$ cho ta đáp ứng xung của bộ lọc tương tự là

$$g(t) = 444,28829e^{-222,14415t} \sin(222,14415t).$$

Lấy mẫu đáp ứng xung $g(t)$ với vận tốc lấy mẫu $F_s = 500$ Hz, tức với chu kỳ lấy mẫu

$$T_s = \frac{1}{500} = 0.002,$$

ta sẽ có đáp ứng xung của bộ lọc số tương ứng

$$h(n) = T_s g(nT_s).$$

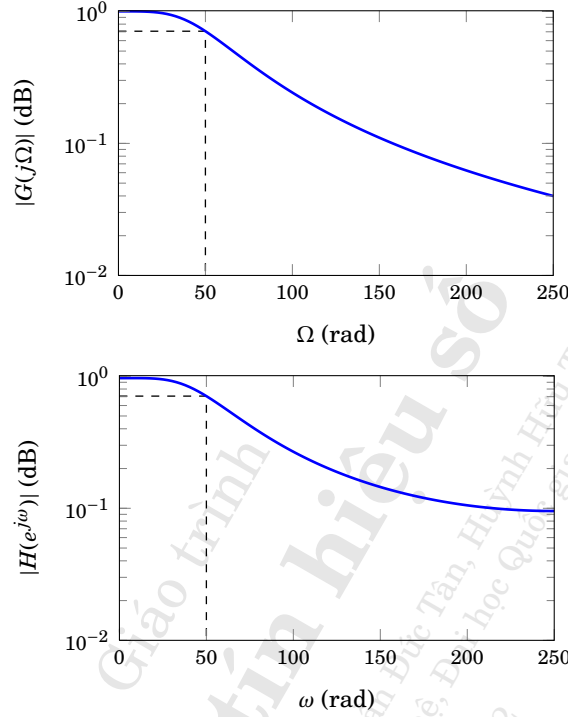
Biến đổi \mathcal{Z} của $h(n)$ cho ta hàm truyền $H(z)$ như sau:

$$H(z) = \frac{0,2449203z^{-1}}{1 - 1,1580459z^{-1} + 0,41124070z^{-2}}. \quad (5.59)$$

Chú ý rằng, ta có thể có kết quả (5.59) trực tiếp bằng cách sử dụng Bước 2 của phương pháp thiết kế 5.4 và hàm truyền trong công thức (5.58). Hình 5.24 biểu diễn đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc tương tự $G(p)$ và bộ lọc số $H(z)$. \square

5.2.2 Thiết kế theo đáp ứng bậc thang bất biến

Cũng giống như trường hợp đáp ứng xung bất biến, cần thiết kế một bộ lọc số dựa trên bộ lọc tương tự sao cho cả hai có đáp ứng bậc thang giống nhau. Khái niệm này được minh họa ở hình 5.25.



Hình 5.24: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.9].

Gọi $h_{st}(n)$ và $g_{st}(t)$ tương ứng là đáp ứng bậc thang của bộ lọc số và bộ lọc tương tự. Để có $h_{st}(n)$ tương tự như $g_{st}(t)$ ta làm tương tự như phương pháp đáp ứng xung bất biến, bằng cách lấy mẫu $g_{st}(t)$ với chu kỳ lấy mẫu T_s để được:

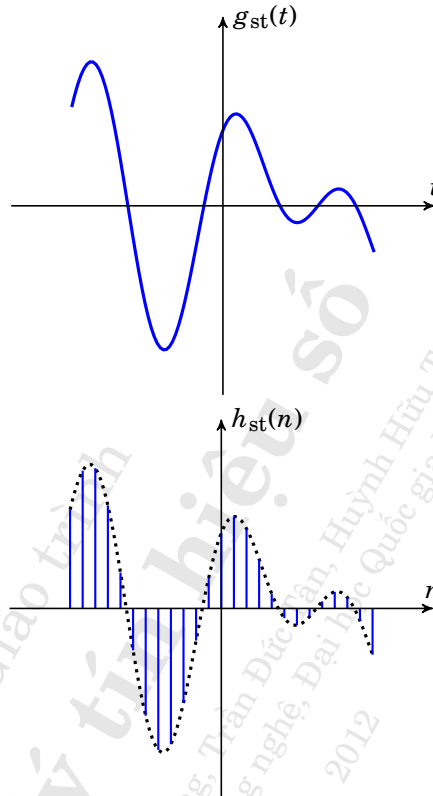
$$h_{st}(n) = g_{st}(t)|_{t=nT_s}. \quad (5.60)$$

Do đó, mối liên hệ giữa hàm truyền của $h_{st}(n)$ trong miền biến đổi \mathcal{Z} và hàm truyền của $g_{st}(t)$ trong miền Laplace là

$$H_{st}(z) = \mathcal{Z}_{T_s} \{ \mathcal{L}^{-1} [G_{st}(p)] \}. \quad (5.61)$$

Gọi $H(z)$ là hàm truyền của bộ lọc số, ta có

$$H_{st}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} H(z). \quad (5.62)$$



Hình 5.25: Bộ lọc tương tự và số có đáp ứng bậc thang giống nhau.

Do vậy,

$$H(z) = (1 - z^{-1})H_{st}(z). \quad (5.63)$$

Các biểu thức (5.61), (5.62) và (5.63) có một ý nghĩa vật lý tương đối quan trọng. Cho một hệ thống có đáp ứng bậc thang là $g_{st}(t)$. Hàm truyền $G(p)$ chính là $pG_{st}(p)$. Mặt khác cho một tín hiệu rời rạc $x(n)$ kích thích một mạch lưu bậc không*, đầu ra của hệ thống là một tín hiệu nhiều bậc thang có chiều cao tương ứng tại từng thời điểm là $x(n)$. Tín hiệu này kích thích hệ thống có hàm truyền $G(p)$ và đầu ra được lấy mẫu với chu kỳ T_s thì tín hiệu rời rạc này chính là tín

*Zeroth order holding circuit.

hiệu có được lúc kích thích hệ thống có hàm truyền $H(z)$ với tín hiệu $x(n)$. Vì lý do này mà bộ lọc thiết kế bằng phương pháp bất biến bậc thang thường còn được gọi là **bộ lọc lưu bậc không**.

Ví dụ 5.10 (Thiết kế đáp ứng bậc thang bất biến)

Ta sử dụng phương pháp đáp ứng bậc thang bất biến để thiết kế một bộ lọc số thông thấp tương ứng với đặc tả của Ví dụ 5.9.

Trong ví dụ 5.9, hàm truyền $G(p)$ được cho bởi công thức (5.58), nên hàm truyền tương ứng với đáp ứng xung $g_{st}(t)$ là

$$G_{st}(p) = \frac{G(p)}{p}.$$

Do đó, lấy biến đổi Laplace ngược của $G_{st}(p)$ sẽ cho đáp ứng bậc thang $g_{st}(t)$ của bộ lọc

$$g_{st}(t) = 1 - e^{222,14415t}[\sin(222,144415t) + \cos(222,144415t)], \quad t > 0.$$

Lấy mẫu $g_{st}(t)$ với chu kỳ $T_s = 0,002$ s để có $h_{st}(n)$ và lấy biến đổi Z của nó để được

$$H_{st}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - 0,30339071z^{-1}}{1 - 1,1580459z^{-1} + 0,41124070z^{-2}}.$$

Cuối cùng, hàm truyền của bộ lọc số tương ứng là

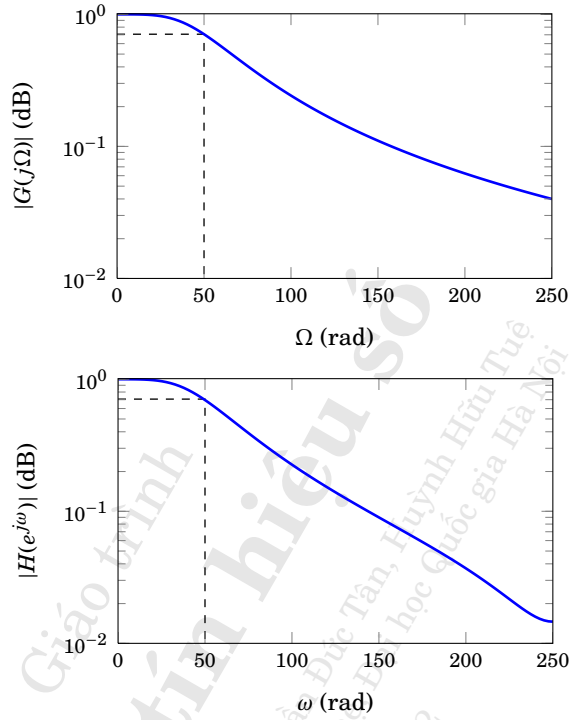
$$H(z) = (1 - z^{-1})H_{st}(z) = \frac{0,14534481z^{-1} + 0,10784999z^{-2}}{1 - 1,1580459z^{-1} + 0,41124070z^{-2}}.$$

Hình 5.26 biểu diễn đáp ứng tần số biên độ của $G(p)$ và $H(z)$. □

Ví dụ 5.11 Một hệ thống tương tự có hàm truyền

$$G(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

Hệ thống này được điều khiển bởi một máy tính với vận tốc lấy mẫu là 10 Hz. Ta dùng phương pháp đáp ứng bậc thang bất biến để xác định hàm truyền $H(z)$ tương ứng.



Hình 5.26: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.10].

Đáp ứng bậc thang của hệ thống đã cho là

$$g_{st}(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}.$$

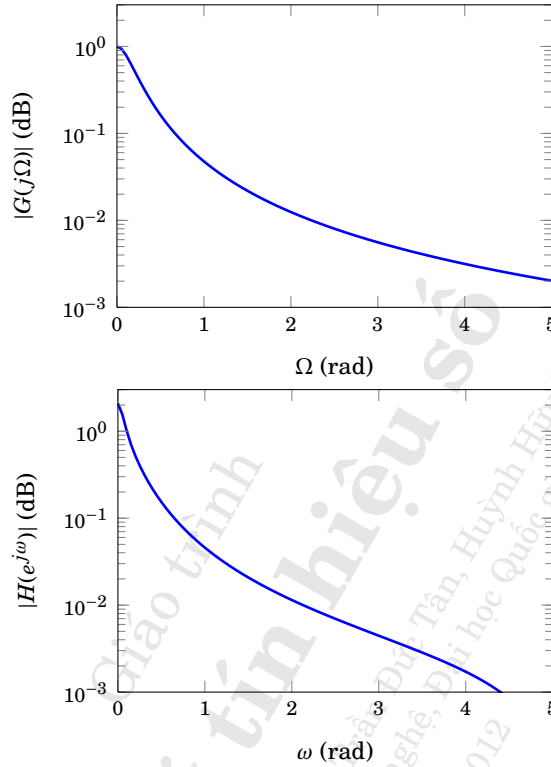
Với chu kỳ lấy mẫu là 0,1 s, rời rạc hóa $g_{st}(t)$ để có $h_{st}(n)$ và lấy biến đổi \mathcal{Z} của $h_{st}(n)$ ta được

$$H_{st}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-0,1}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-0,2}z^{-1}}.$$

Suy ra

$$H(z) = \frac{9,055917 \times 10^{-3} z^{-1} (1 + 0,90483747 z^{-1})}{1 - 1,7325682 z^{-1} + 0,74081822 z^{-2}}.$$

Hình 5.27 biểu diễn đáp ứng tần số biên độ của $G(p)$ và $H(z)$. □



Hình 5.27: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.11].

5.3 Phương pháp biến đổi song tuyến tính

Mục 5.2 đã trình bày phương pháp bất biến trong miền thời gian để thiết kế bộ lọc số IIR thông qua khái niệm tương ứng giữa miền tương tự và miền rời rạc của đáp ứng xung hoặc đáp ứng bậc thang. Từ đó, thay hệ thống tương tự được biểu diễn bởi biến p trong biến đổi Laplace bởi một hệ thống rời rạc tương ứng biểu diễn bởi biến z trong biến đổi \mathcal{Z} .

Mục này trình bày một cách nhìn khác trong thiết kế bộ lọc IIR thông qua thiết lập sự tương quan giữa phương trình vi phân mô

hình hóa hệ thống liên tục và phương trình sai phân mô hình hóa hệ thống rời rạc. Cụ thể là tìm cách thay thế đạo hàm d/dt (tức là p trong miền biến đổi Laplace) trên miền liên tục bởi một biểu thức tương đương trong miền rời rạc. Phương pháp thiết kế được xây dựng trên cách nhìn này gọi là phương pháp **biến đổi song tuyến tính**.

5.3.1 Biến đổi song tuyến tính

Trước hết, xét phương trình vi phân đơn giản sau:

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t). \quad (5.64)$$

Lấy tích phân 2 vế của (5.64) cho kết quả

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t x(u) du. \quad (5.65)$$

Rời rạc hóa $y(t)$ với chu kỳ T_s và sử dụng phương pháp tính tích phân hình thang mô tả như trong Hình 5.28 để được

$$y(n) = y(n-1) + 0,5T_s[x(n) + x(n-1)]. \quad (5.66)$$

Lấy biến đổi \mathcal{Z} của $y(n)$, ta được

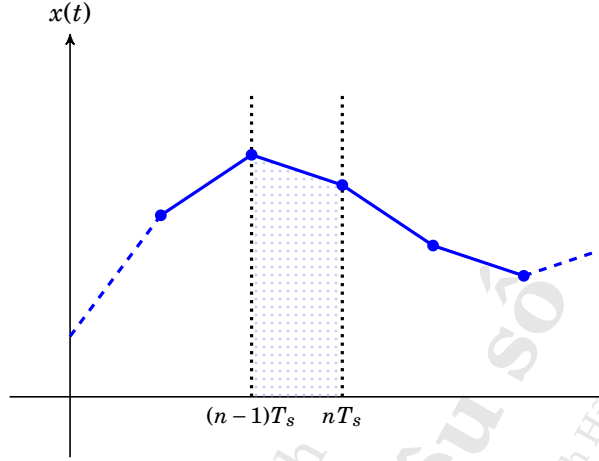
$$Y(z) = \frac{T_s}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} X(z). \quad (5.67)$$

Kết quả (5.67) cho thấy toán tử tích phân trong miền biến đổi Laplace $1/p$ tương ứng với $0,5T_s(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$ trong miền z . Như vậy, từ một hàm truyền tương tự $G(p)$, ta xác định được hàm truyền rời rạc $H(z)$ bởi

$$H(z) = G(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_s} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Chú ý rằng có thể thế $2/T_s$ bằng bất cứ hệ số nào khác thì kết quả vẫn tương ứng với phương pháp tính tích phân hình thang, tất nhiên với các trọng số khác. Đây là cơ sở của phương pháp biến đổi song tuyến tính.

Về cơ bản phương pháp thiết kế bộ lọc số bằng phép biến đổi song tuyến tính giống như các phương pháp thiết kế bất biến trong



Hình 5.28: Phân tích tích phân Hình thang.

miền thời gian. Điểm chính yếu là xác định cho được hàm truyền $G(p)$ trong miền tương tự có các tính chất đáp ứng các đặc tả của bài toán thiết kế. Từ đó chỉ cần thế p bằng một biểu thức tương đương theo z để suy ra hàm truyền của bộ lọc số mà ta muốn thiết kế.

Như đã nói trên, biểu thức toán học tương đương giữa p và z là

$$p = C \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (5.68)$$

Phép biến đổi này nhằm chuyển hóa những gì xảy ra trong mặt phẳng p thành những chuyển động tương đương trong mặt phẳng z . Đặt

$$p = \sigma + j\Omega \quad (5.69)$$

$$z = re^{j\omega} \quad (5.70)$$

Thế các biểu thức này vào trong phương trình (5.68), suy ra

$$\sigma = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 2r \cos \omega + 1} \quad (5.71)$$

$$\Omega = C \frac{2r \sin \omega}{r^2 + 2r \cos \omega + 1}. \quad (5.72)$$

Sự tương ứng giữa mặt phẳng p và mặt phẳng z theo mỗi quan hệ (5.71) và (5.72) được mô tả trên Hình 5.29, trong đó các điểm a, b, c, d và e trong mặt phẳng p tương ứng với các điểm a', b', c', d' và e' trong mặt phẳng z . Ta thấy, $\sigma > 0$ tương ứng với $r > 1$, $\sigma = 0$ với $r = 1$ và $\sigma < 0$ với $r < 1$. Kết quả này cho thấy rằng, nếu hàm truyền $G(p)$ là ổn định và nhân quả thì phép biến đổi song tuyến tính sẽ cho ta hàm truyền $H(z)$ cũng ổn định và nhân quả.

Ngoài ra, mối liên hệ giữa các đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự, $G(j\Omega)$, và của bộ lọc số, $H(e^{j\omega})$, được xác định bởi mối liên hệ sau giữa Ω và ω :

$$\Omega = C \frac{\sin \omega}{1 + \cos \omega} = C \tan \frac{\omega}{2}. \quad (5.73)$$

Như vậy, ta có

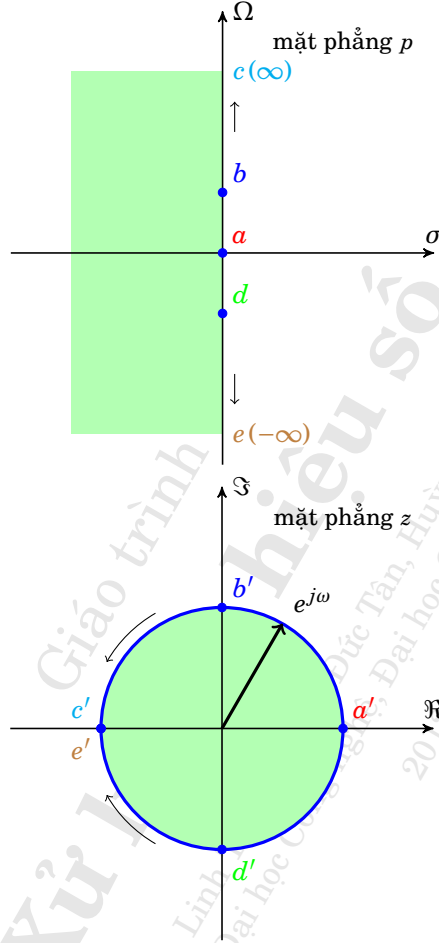
$$|G(j\Omega)|_{\Omega=C \tan \frac{\omega}{2}} = |H(e^{j\omega})| \quad (5.74)$$

Mối liên hệ giữa Ω và ω được minh họa ở Hình 5.30. Bởi vì $H(e^{j\omega})$ có chu kỳ là 2π và $|H(e^{j\omega})|$ đối xứng qua trục tung, nên ta chỉ xét biến thiên theo ω trên khoảng $[0; \pi]$. Từ Hình 5.30, ta thấy ngay, trong vùng ω nhỏ, ta có $\Omega \approx \frac{C}{2} \omega$, tức là có quan hệ gần như tuyến tính. Như vậy, trong dải thông thấp, những đặc tính ở dải thông thấp của bộ lọc tương tự $G(j\Omega)$ cũng là những đặc tính của bộ lọc số tương ứng $H(e^{j\omega})$. Tuy nhiên, trong dải thông cao, thì mối liên hệ giữa Ω và ω là phi tuyến, nên sẽ tạo ra những độ méo mà ta cần chú ý lúc thiết kế. Hình 5.31 mô tả sự khác nhau giữa $G(j\Omega)$ và $H(e^{j\omega})$, tức mối liên hệ tuyến tính hay phi tuyến giữa $G(j\Omega)$ và $H(e^{j\omega})$ theo từng dải tần khác nhau. Lưu ý là trong hình này, miền xác định của Ω là $[0; \infty]$, tuy nhiên để tiện so sánh với ω , ta chỉ xem xét trong khoảng $[0; \pi]$.

5.3.2 Thiết kế theo biến đổi song tuyến tính

Thiết kế $H(z)$ bằng phương pháp biến đổi song tuyến tính tức là chọn các thông số C và T_s thế nào để chuyển được những tính chất của hàm đáp ứng tần số tương tự $G(j\Omega)$ vào hàm đáp ứng tần số số $H(e^{j\omega})$.

Phương pháp thứ nhất là áp đặt giá trị của đáp ứng tần số của bộ lọc số tại một tần số cho trước. Thông thường, đối với các bộ lọc

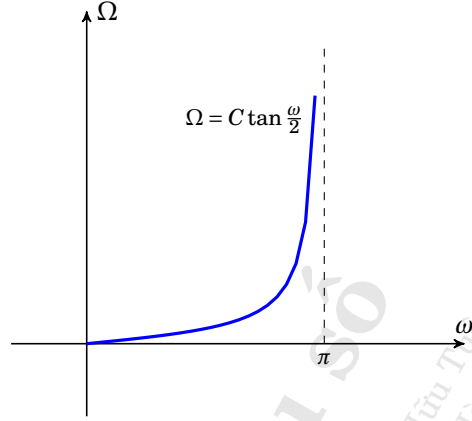


Hình 5.29: Mối liên hệ giữa p và z qua phép biến đổi song tuyến tính.

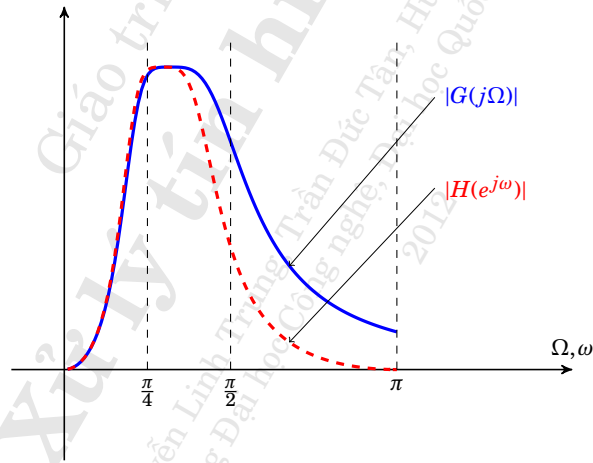
thông thấp và thông cao, tần số đặc biệt này thường được chọn là tần số cắt. Giả sử ta muốn có đáp ứng tần số tương tự và đáp ứng tần số số bằng nhau tại Ω_r và ω_r . Thông số C sẽ được xác định bởi:

$$C = \Omega_r \cot \left[\frac{\omega_r}{2} \right] = \Omega_r \cot \left[\pi \frac{F_r}{F_s} \right] = \Omega_r \cot \left[\frac{\pi}{2} \frac{F_r}{F_N} \right], \quad (5.75)$$

trong đó F_r (Hz) là tần số vật lý của bộ lọc tương tự ($F_r = \Omega_r/2\pi$) và F_N



Hình 5.30: Mối liên hệ giữa Ω và ω .



Hình 5.31: Mối liên hệ giữa $|G(j\Omega)|$ và $|H(e^{j\omega})|$.

là tần số Nyquist ($F_N = F_2/2$). Phương pháp này không đòi hỏi phải thay đổi thang tần số để có khoảng tần số tương ứng bởi vì thang tần số đã được tự thay đổi bởi giá trị của C vừa được tính xong. Phương pháp này tương đối thuận lợi vì không cần phải điều chỉnh nhiều. Phương pháp thứ hai là thế C bằng $T_s/2$ trong (5.73), trong khi vẫn bảo toàn được những tính chất trong dải thông thấp nhưng không

thể chọn một ràng buộc như được mô tả trong phương pháp thứ nhất. Phương pháp này hơi bất tiện về mặt định lượng vì ta không có mối liên hệ chặt chẽ giữa tần số tương tự và tần số số.

Sau đây là một số ví dụ về phương pháp thiết kế song tuyến tính. Cần nhớ rằng thiết kế bộ lọc số nhằm sử dụng vào những áp dụng cụ thể, tức là bộ lọc hoạt động trong một môi trường mà phần lớn các tín hiệu là tương tự. Vì vậy, khái niệm tần số tương tự $F = \Omega/2\pi$, khái niệm tần số lấy mẫu $F_s = 1/T_s$, tần số Nyquist $F_N = F_s/2$ (còn gọi là tần số gấp phẩy), góc số $\omega = \Omega T_s$ và tần số số $\nu = F/F_N = \omega/\pi$.

Lưu ý rằng, về mặt lý thuyết, tần số số được định nghĩa là F/F_s , có nghĩa là, chỉ quan sát biến thiên tần số số trong khoảng $[0; 0,5]$. Tuy nhiên, trong thực tiễn tính toán (như khi sử dụng MATLAB), người ta đổi thang quan sát thành $[0; 1]$. Vì vậy, trong giáo trình này, tần số số ν được định nghĩa là tần số vật lý được chuẩn hóa theo F_N , tức là $\nu = F/F_N = \omega/\pi$.

Ví dụ 5.12 Dùng phương pháp biến đổi song tuyến tính để thiết kế một bộ lọc số thông thấp dựa trên một bộ lọc Butterworth tương tự bậc 2 có tần số cắt 3 dB là 50 Hz, biết rằng tần số lấy mẫu là 500 Hz.

Bộ lọc tương tự Butterworth bậc 2 chuẩn hóa có hàm truyền là

$$G(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}p + p^2}.$$

Tần số chuẩn hóa là $\Omega_r = 1$ rad/s, tương ứng với tần số $F_r = 50$ Hz của bộ lọc số. Lúc thiết kế ta phải chú ý đến điểm này. Tần số gấp phẩy là

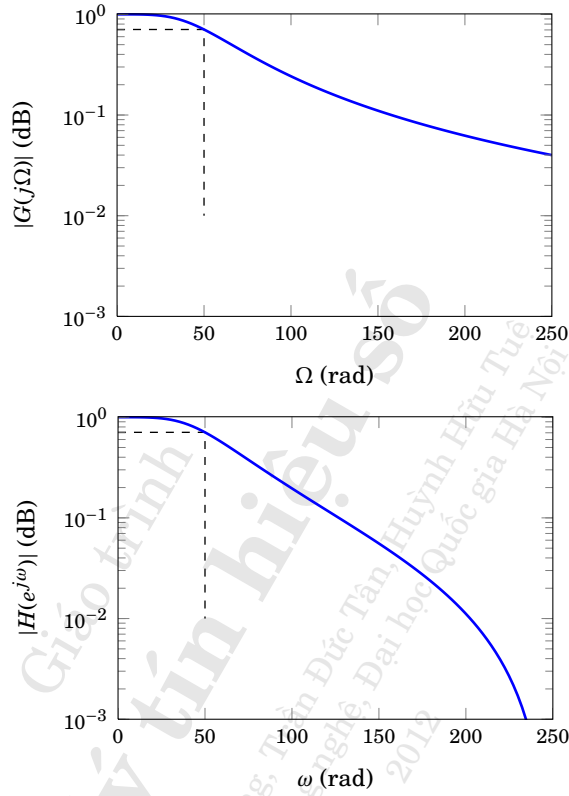
$$F_N = \frac{500}{2} = 250 \text{ Hz}.$$

Công thức (5.75) cho kết quả

$$C = 1 \times \cot \left[\frac{\pi}{2} \frac{50}{250} \right] = 3,0776835.$$

Biến đổi song tuyến tính tương ứng sẽ là

$$p = 3,0776835 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$



Hình 5.32: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.12].

Sử dụng kết quả trên để biến đổi hàm $G(p)$, ta có hàm truyền của bộ lọc số tương ứng như sau.

$$H(z) = \frac{0,0674553(1 + 2z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,14298z^{-1} + 0,412802z^{-2}}.$$

Kết quả mô phỏng của ví dụ này được trình bày trong hình 5.32. \square

Ví dụ 5.13 Một hệ thống xử lý tín hiệu số hoạt động với tần số lấy mẫu là 2000 Hz. Ta muốn thiết kế một bộ lọc số là một bộ phận của

hệ thống này, có hoạt động giống như một bộ lọc thông thấp bậc 1 có tần số cắt 3 dB nằm chung quanh 400 Hz. Tiêu chí quan trọng nhất là đáp ứng tần số ở dải thông thấp trông giống như đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự tương ứng.

Để giải quyết bài toán này, ta nên sử dụng phương pháp biến đổi song tuyến tính mà trong đó hằng số C đã được xác định là $2/T_s$. Hàm truyền của bộ lọc bậc 1 thông thấp là

$$G_1(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Tần số cắt 3 dB của bộ lọc này là 400 Hz, do đó bộ lọc tương ứng có hàm truyền là

$$G(p) = G_1\left(\frac{p}{800\pi}\right) = \frac{800\pi}{p+800\pi}.$$

Với

$$C = 2 \times 2000 = 4000,$$

phép biến đổi song tuyến tính được xác định bởi

$$p = 4000 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}.$$

Suy ra hàm truyền của bộ lọc số là

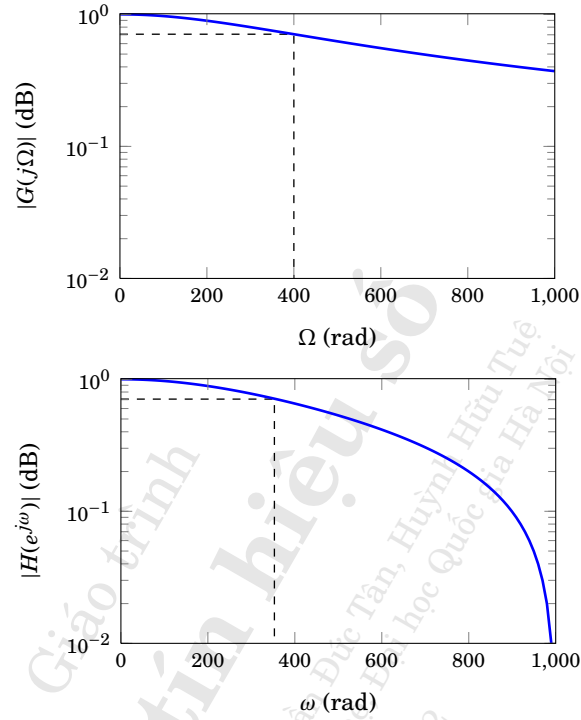
$$H(z) = \frac{0,385870(1+z^{-1})}{1-0,228261z^{-1}}.$$

Có thể kiểm chứng là bộ lọc số này có tần số cắt 3 dB tương ứng vào khoảng 357 Hz bằng cách sử dụng mối liên hệ của Ω_r và F_r theo công thức (5.75). Kết quả mô phỏng của ví dụ này được trình bày trong hình 5.33. \square

Ví dụ 5.14 Hàm truyền của một thiết bị phục vụ một hệ thống điều khiển tương tự có dạng như sau

$$G(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}.$$

Ta sẽ xác định hàm truyền $H(z)$ của hệ thống biết rằng vận tốc lấy mẫu là 10 Hz.



Hình 5.33: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.13].

Ta thấy hệ thống này là một hệ thống thông thấp, vậy ta có thể sử dụng phương pháp biến đổi song tuyến tính để có hàm truyền số tương ứng, với

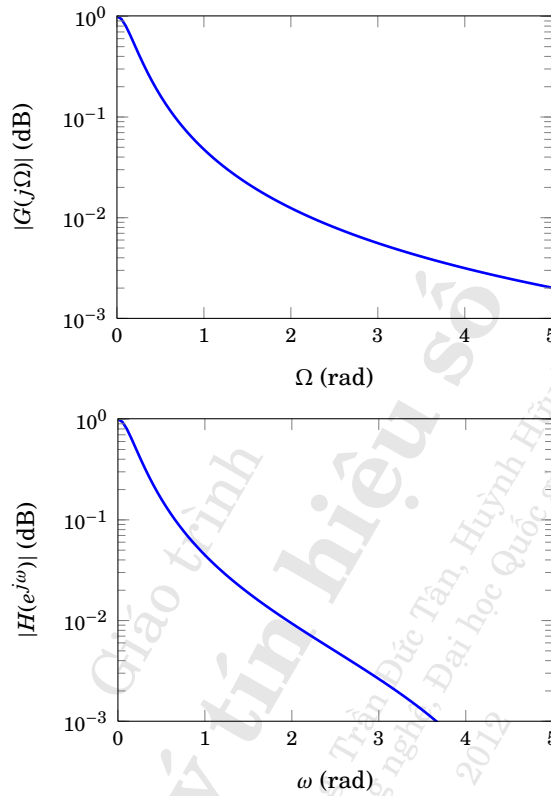
$$C = \frac{2}{T_s} = 20 \text{ Hz.}$$

Phép biến đổi song tuyến tính là

$$p = 20 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Suy ra hàm truyền hệ thống số là

$$H(z) = 0,0043290043 \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - 1,7229437z^{-1} + 0,74025974z^{-2}}.$$



Hình 5.34: Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự và bộ lọc số [Ví dụ 5.14].

Kết quả mô phỏng của ví dụ này được trình bày trong hình 5.34. \square

Ví dụ 5.15 Thiết kế một bộ lọc thông thấp và có cấu trúc nối tiếp với các thành phần có bậc không vượt quá hai, thỏa các thông số đặc tả sau đây:

- Sử dụng phương pháp thiết kế biến đổi song tuyến tính áp dụng vào bộ lọc Butterworth.
- Độ suy giảm nhỏ hơn hoặc bằng 3 dB trong khoảng tần số $0 < F < 25$ Hz. Độ suy giảm lớn hơn 38 dB cho $F \geq 50$ Hz.

c) Tần số lấy mẫu là 200 Hz.

Trước tiên phải xác định bậc của bộ lọc Butterworth tương tự ta cần sử dụng. Tần số Nyquist là

$$F_N = \frac{200}{2} = 100 \text{ Hz}$$

và tần số chuẩn hóa là

$$\nu_r = \frac{F_r}{F_N} = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Hằng số C của phép biến đổi song tuyến sẽ được chọn thế nào để ν_r ứng với tần số cắt chuẩn hóa $\Omega_r = 1 \text{ rad/s}$. Như thế, ta có

$$C = \Omega_r \cot\left(\frac{\pi}{2} \nu_r\right) = \cot\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2,4142436.$$

Đặt

$$\nu_a = \frac{50}{100} = 0,5$$

là tần số số thấp nhất của dải triệt, tức là tần số mà độ suy giảm bắt đầu lớn hơn 38 dB. Tần số tương tự Ω_a tương ứng sẽ được xác định bởi

$$\Omega_a = C \tan\left(\frac{\pi}{2} \nu_a\right) = 2,4142136 \times \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,4142136.$$

Kết quả trong phần lọc tương tự cho thấy một bộ lọc Butterworth bậc 5 sẽ có độ suy giảm 38 dB từ tần số 2,41 rad/s. Hàm truyền của bộ lọc Butterworth tương ứng là

$$G(p) = \frac{1}{1 + 3,2360680p + 5,2360680p^2 + 5,2360680p^3 + 3,2360680p^4 + p^5}.$$

Với phép biến đổi song tuyến tính

$$p = 2,4142132 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

ta suy ra hàm truyền của bộ lọc số là

$$H(z) = \frac{1 + 5z^{-1} + 10z^{-2} + 10z^{-3} + 5z^{-4} + z^{-5}}{B(z)}$$

với

$$B(z) = 1 - 2,4744163z^{-1} + 2,8110065z^{-2} - 1,7037724z^{-3} + 0,5444328z^{-4} - 0,07231569z^{-5}.$$

Tiếp theo, ta xác định cấu trúc của bộ lọc theo yêu cầu sử dụng các thành phần có bậc không vượt quá hai. Trong phần lọc tương tự ta thấy hàm $G(p)$ có thể phân tích thành ba thành phần đơn như sau

$$G(p) = G_1(p)G_2(p)G_3(p),$$

trong đó

$$G_1(p) = \frac{1}{1+p},$$

$$G_2(p) = \frac{1}{1 + 0,6180340p + p^2},$$

$$G_3(p) = \frac{1}{1 + 1,6180340p + p^2}.$$

Áp dụng phép biến đổi song tuyến tính cho từng thành phần ta sẽ có

$$H(z) = a_0 H_1(z) H_2(z) H_3(z),$$

trong đó

$$a_0 = 3,279216 \times 10^{-3},$$

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0,4142136z^{-1}},$$

$$H_2(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,1606108z^{-1} + 0,6413515z^{-2}},$$

$$H_3(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,8995918z^{-1} + 0,2722149z^{-2}}.$$

Nhận thấy dạng nối tiếp này đơn giản hơn rất nhiều so với dạng tổng hợp, cũng gọi là dạng trực tiếp. Như thế, lúc thiết kế dùng dạng nối tiếp sẽ đơn giản hơn rất nhiều và có chất lượng bảo đảm hơn. \square

Ví dụ 5.16 Thiết kế một bộ lọc thông thấp thỏa các điều kiện sau đây:

- a) độ suy giảm nhỏ hơn 1 dB trong dải tần $0 \leq F \leq 0,5$ Hz,
- b) độ suy giảm lớn hơn 40 dB trong dải tần $F > 10$ Hz,

biết rằng vận tốc lấy mẫu 100 Hz. Xác định loại và bậc của bộ lọc đáp ứng đặc tả này.

Tần số Nyquist là

$$F_N = \frac{100}{2} = 50.$$

Với những đặc tả nêu ra ta có thể dùng bộ lọc Chebyshev có độ gợn sóng 1 dB và sẽ sử dụng biến đổi song tuyến tính để thiết kế. Tần số

$$\nu_r = \frac{5}{50} = 0,1$$

là tần số tương ứng với $\Omega_r = 1$ rad/s của bộ lọc tương tự. Đặt

$$\nu_a = \frac{10}{50} = 0,2$$

là tần số tương ứng với độ suy giảm 40 dB và gọi Ω_a là tần số tương ứng của bộ lọc tương tự. Hằng số C của phép biến đổi song tuyến tính là

$$C = \cot\left(\frac{\pi}{2} \times 0,1\right) = 6,3137515.$$

Sử dụng công thức (5.73) ta có tần số Ω_a tương ứng với ν_a là

$$\Omega_a = 6,3137515 \times \tan\left(\frac{\pi}{2} \times 0,2\right) = 2,0514622 \text{ Hz}.$$

Theo kết quả của phần lọc tương tự, bậc thấp nhất có độ suy giảm vượt 40 dB từ tần số 2,05 Hz là 5.

Thật ra độ suy giảm tại tần số này với một bộ lọc Chebyshev bậc 5 vượt 46 dB, và như thế những yêu cầu của đặc tả là hoàn toàn được thỏa mãn. Đào sâu hơn một chút, ta thấy có thể cho độ gợn sóng nhỏ hơn 1 dB mà vẫn thỏa mãn các đặc tả với một bộ lọc Chebyshev bậc 5. Đúng vậy, kết quả trong lọc tương tự cho thấy với độ gợn sóng 0,5 dB của một bộ lọc Chebyshev bậc 5 có độ suy giảm 43 dB ở tần số $\nu_a = 0,2$. Ta có thể chọn một trong hai bộ lọc này tùy theo tình huống và những tiêu chí khác. \square

5.4 Thiết kế bộ lọc số thông dải

Trong Mục này, sẽ xây dựng một phương pháp thiết kế một bộ lọc IIR thông dải dựa trên một bộ lọc thông thấp tương tự với phép biến đổi song tuyến tính. Cách thiết kế trực tiếp nhất là như sau.

Phương pháp 5.5 – Thiết kế bộ lọc số IIR thông dải.

1. Chọn một bộ lọc thông thấp và dùng một phép biến đổi từ thông thấp sang thông dải để có một bộ lọc tương tự thông dải đáp ứng những đặc tả mong muốn.
2. Từ hàm truyền của bộ lọc tương tự thông dải này ta sử dụng phép biến đổi song tuyến tính để suy ra hàm truyền của bộ lọc số tương ứng.

Quá trình thiết kế trên gồm hai bước, vì vậy cần chú ý sử dụng các biến và các thông số cần thiết. Để phân biệt rạch ròi hai phép biến đổi tương ứng với hai bước thiết kế này, các thông số được định nghĩa như sau.

- F_s (Hz): tần số lấy mẫu ($F_s = \Omega_s/2\pi$);
- F_N (Hz): tần số Nyquist ($F_N = F_s/2$);
- p : biến Laplace của bộ lọc tương tự thông thấp;
- λ (rads/s): tần số góc của bộ lọc thông thấp ($p = j\lambda$);
- s : biến Laplace của bộ lọc tương tự thông dải;
- Ω (rads/s): tần số góc của bộ lọc tương tự thông dải ($s = j\Omega$);
- $F = \Omega/2\pi$ (Hz): tần số vật lý của bộ lọc tương tự thông dải;
- λ_r (Hz): một tần số được chọn trước, dựa trên đặc tả thiết kế, của bộ lọc tương tự thông thấp (thông thường là tần số cắt);
- Ω_3 và Ω_1 (rad/s): hai tần số của bộ lọc tương tự thông dải tương ứng với λ_r và $-\lambda_r$ (thông thường là các tần số định nghĩa dải thông);

- Ω_2 (rad/s): tần số trung tâm hình học (geometrical mean) của dải thông ($\Omega_2 = \sqrt{\Omega_1\Omega_3}$);
- ω là tần số góc của bộ lọc số ($\omega = \Omega/F_s$);
- ν : tần số số của bộ lọc số ($\nu = F/F_N$);
- \bar{f} (Hz): tần số vật lý của bộ lọc số ($\bar{f} = \nu F_N$);
- \bar{f}_1, \bar{f}_2 và \bar{f}_3 : các tần số tương ứng với Ω_1, Ω_2 và Ω_3 ;
- ν_1, ν_2 và ν_3 là các tần số tương ứng với \bar{f}_1, \bar{f}_2 và \bar{f}_3 ;
- $B = \bar{f}_3 - \bar{f}_1$ là dải thông vật lý của bộ lọc số;
- b : dải thông số của bộ lọc số ($b = \nu_3 - \nu_1 = (\bar{f}_3 - \bar{f}_1)/F_N$).

Áp dụng bước 1 trong Phương pháp 5.5, ta thể

$$p = s + \frac{\Omega_2^2}{s}. \quad (5.76)$$

Đối với bước 2, ta sử dụng phép biến đổi song tuyến tính là

$$s = C \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (5.77)$$

và suy ra mối liên hệ giữa p và z như sau:

$$p = \frac{C^2 + \Omega_2^2}{C} \times \frac{1 + 2\left(\frac{\Omega_2^2 - C^2}{\Omega_2^2 + C^2}\right)z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}. \quad (5.78)$$

Trước khi suy ra một số kết quả cần thiết, nhắc lại rằng mối liên hệ của phép biến đổi song tuyến tính là

$$\Omega = C \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = C \tan\left(\frac{\pi}{2}\nu\right). \quad (5.79)$$

Biết rằng $\Omega_2^2 = \Omega_1\Omega_3$, ta suy ra

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2}\nu_2\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\nu_1\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{2}\nu_3\right) \quad (5.80)$$

và

$$\tan\left(\frac{\nu_3}{2}\right) - \tan\left(\frac{\nu_1}{2}\right) = \frac{\lambda_r}{C}. \quad (5.81)$$

Hằng số C được chọn sao cho Ω_2 của bộ lọc tương tự thông dải sẽ tương ứng với tần số \tilde{f}_2 của bộ lọc số thông dải. Như vậy

$$C = \Omega_2 \cot\left(\frac{\pi}{4} \nu_2\right). \quad (5.82)$$

Tổng kết lại tất cả các kết quả, để cho ta suy từ một bộ lọc thông thấp tương tự thành một bộ lọc số thông dải, thì phép biến đổi là

$$p = D \times \frac{1 - Ez^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}}, \quad (5.83)$$

trong đó D và E được cho bởi

$$D = \lambda_r \cot\left(\frac{\pi B}{2F_N}\right) = \lambda_r \cot\left(\frac{\pi b}{2}\right),$$

$$E = 2 \cos\left(\frac{\pi F_2}{F_N}\right) = 2 \cos(\pi \nu_2),$$

hay biểu diễn theo các tần số định nghĩa dải thông là

$$D = \lambda_r \cot\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3 - \nu_1)\right), \quad (5.84)$$

$$E = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3 + \nu_1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3 - \nu_1)\right)}. \quad (5.85)$$

Kết quả (5.83) có nghĩa là từ hàm truyền $G(p)$ của bộ lọc thông thấp tương tự ta suy ra hàm truyền $H(z)$ của bộ lọc thông dải bằng phép biến đổi sau đây:

$$H(z) = G(p) \Big|_{p=D \times \frac{1-Ez^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}}. \quad (5.86)$$

Biểu thức (5.86) cho thấy rằng bậc của hệ thống rời rạc gấp đôi bậc của hệ thống tương tự. Hơn thế, mối liên hệ giữa thang tần số tương tự ($p = j\lambda$) và thang tần số số ($z = e^{j\Omega T_s}$) được xác định bởi biểu thức sau đây

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{\cos(\pi \nu_2) - \cos(\pi \nu)}{\sin(\pi \nu)}. \quad (5.87)$$

Biểu thức (5.87) là một công cụ được sử dụng thường xuyên trong bài toán thiết kế bộ lọc số thông dải. Sau đây là một số ví dụ minh họa phương pháp này.

Ví dụ 5.17 Sử dụng loại bộ lọc Butterworth, ta muốn thiết kế một bộ lọc số thông dải có tần số lấy mẫu 2 kHz với những đặc tả như sau:

- a) Bộ lọc có dải thông từ 300 đến 400 Hz và tại hai tần số đầu và cuối của dải thông thì độ suy giảm không được lớn hơn 3 dB.
- b) Độ suy giảm tối thiểu phải là 18 dB tại hai tần số 200 Hz và 500 Hz.

Trước hết, ta xác định tần số Nyquist

$$F_N = \frac{F_s}{2} = 1000 \text{ Hz.}$$

Tiếp đến ta tính các tần số ν_1 , ν_2 và ν_3 . Theo đặc tả (a) của yêu cầu thiết kế, ta chọn được hai tần số vật lý của bộ lọc số là \tilde{f}_1 và \tilde{f}_3 tương ứng với 300 Hz và 400 Hz. Từ đó, suy ra các tần số số tương ứng

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \frac{\tilde{f}_1}{F_N} = 0,3, \\ \nu_3 &= \frac{\tilde{f}_3}{F_N} = 0,4.\end{aligned}$$

Do đó ta có dải thông số

$$b = \nu_3 - \nu_1 = 0,1.$$

Dùng phương trình (5.80), ta xác định được tần số trung tâm hình học

$$\nu_2 = 0,34797502.$$

Các thông số D và E của phép biến đổi song tuyến tính được xác định bởi hai phương trình (5.84) và (5.85). Với tần số cắt chuẩn hóa $\lambda_r = 1 \text{ rad/s}$, ta suy ra

$$\begin{aligned}D &= \lambda_r = \cot(0,05\pi) = 6,31375152, \\ E &= \frac{2 \cos(0,35\pi)}{\cos(0,05\pi)} = 0,91929910.\end{aligned}$$

Thông số cuối cùng ta phải xác định là bậc của bộ lọc Butterworth, tức là số nghiệm cực cần có. Dải thông số $b = 0,1$ liên hệ với

hàm truyền Butterworth chuẩn hóa có $\lambda_r = 1$. Để xác định bậc của bộ lọc, trước tiên ta phải xác định các tần số số tương ứng với dải triệt ν_a và ν_b . Theo đặc tả (b) của yêu cầu thiết kế, ta có các tần số vật lý của bộ lọc số tương ứng với dải triệt là $\bar{f}_a = 200$ Hz và $\bar{f}_b = 500$ Hz. Do đó, ta có

$$\nu_a = \frac{200}{1000} = 0,2,$$

$$\nu_b = \frac{500}{1000} = 0,5.$$

Như vậy, áp dụng công thức (5.87) với ν lấy các giá trị ν_a và ν_b

$$\frac{\lambda_a}{D} = \frac{\cos(0,34797502\pi) - \cos(0,2\pi)}{\sin(0,2\pi)},$$

$$\frac{\lambda_b}{D} = \frac{\cos(0,34797502\pi) - \cos(0,5\pi)}{\sin(0,5\pi)}.$$

Từ đó tính ra được các tần số dải triệt chuẩn hoá của bộ lọc tương tự tương ứng là $\lambda_a = -3,7527638$ và $\lambda_b = 2,9021131$. Ta biết rằng, đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc tương tự có tính đối xứng qua trục tung. Cho nên, giá trị biên độ tại λ_a và $-\lambda_a$ đều giống nhau, dẫn đến ta có thể đổi dấu của kết quả của λ_a thành $\lambda_a = 3,7527638$. Bây giờ, đối với bộ lọc Butterworth, bởi vì $\lambda_b < \lambda_a$ nên nếu chọn biên độ tại λ_b thỏa điều kiện thiết kế (b) thì mặc nhiên thỏa điều kiện tại λ_a . Như thế ta phải chọn bậc bộ lọc Butterworth thế nào để tại tần số chuẩn hóa λ_b độ suy thoái tối thiểu phải là 18 dB. Kết quả trong lọc tương tự cho thấy bộ lọc Butterworth thông thấp tương tự bậc 2 là thích ứng với ràng buộc này tại vì đáp ứng tần số tại $\lambda_a = 3,7527638$ là nhỏ hơn 23 dB.

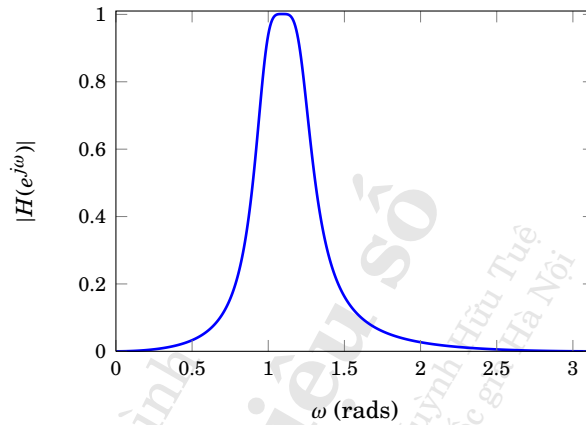
Cuối cùng, với bộ lọc Chebyshev bậc 2 thỏa mãn đặc tả thiết kế, ta có bậc của bộ lọc số tương ứng là 4, và áp dụng phương trình (5.86) cho ta hàm truyền của bộ lọc số thông dải như sau:

$$H(z) = \frac{0,020083366(1 - z^{-2})^2}{B(z)}$$

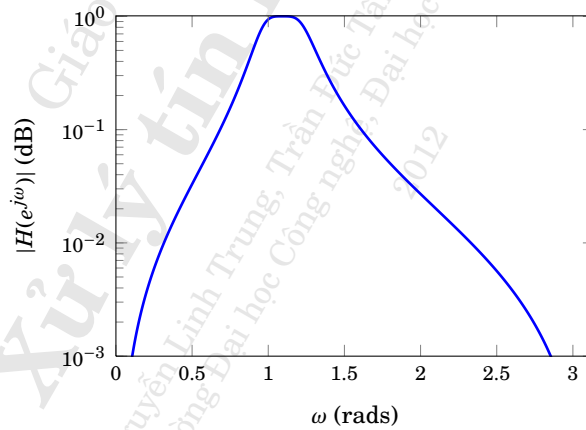
với

$$B(z) = 1 - 1,63682036z^{-1} + 2,2376739z^{-2} - 1,3071151z^{-3} + 0,64135154z^{-4}.$$

Đáp ứng tần số của hàm truyền này được cho trong hình 5.35. □



(a)



(b)

Hình 5.35: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải bậc 4 [Ví dụ 5.17].

Ví dụ 5.18 Xác định loại và bậc của một bộ lọc số thông dải hoạt động ở tần số 200 Hz với các thông số đặc tả sau đây:

a) Độ suy giảm phải nhỏ hơn 1 dB trong khoảng từ 19 Hz tới 21 Hz,

b) Độ suy giảm phải lớn hơn 30 dB với những tần số thấp hơn 18 Hz và cao hơn 22 Hz.

Ta có, tần số Nyquist là

$$F_N = \frac{F_s}{2} = 100.$$

Tại hai tần số của dải thông $F_1 = 19$ Hz và $F_3 = 21$ Hz, các tần số số tương ứng là

$$\nu_1 = \frac{\bar{f}_1}{F_N} = 0,19,$$

$$\nu_3 = \frac{\bar{f}_3}{F_N} = 0,21.$$

Dải thông số là

$$b = \nu_3 - \nu_1 = 0,02.$$

Tần số trung tâm hình học, được xác định bởi phương trình (5.80), là $\nu_2 = 0,19978361$. Với $\lambda_r = 1$ rad/s, và sử dụng phương trình (5.84), ta tính được

$$D = \lambda_r = \cot\left(\frac{0,02\pi}{2}\right) = 31,820516.$$

Tại các tần số cắt 18 Hz và 22 Hz, theo công thức (5.87) ta có

$$\frac{\lambda_a}{D} = \frac{\cos(0,19978361\pi) - \cos(0,18\pi)}{\sin(0,18\pi)},$$

$$\frac{\lambda_b}{D} = \frac{\cos(0,19978361\pi) - \cos(0,22\pi)}{\sin(0,22\pi)}.$$

và suy ra $\lambda_a = -2,0732504$ và $\lambda_b = 1,9420640$.

Cần phải bảo đảm độ suy giảm phải được thỏa tại λ_b . Chọn hàm Chebyshev có độ gợn sóng 1 dB và ta phải xác định bậc thấp nhất thể nào để có độ suy giảm 30 dB tại tần số 1,9420640. Kết quả trong phần lọc tương tự cho thấy bộ lọc Chebyshev bậc 4 hoàn toàn thỏa điều kiện suy giảm (còn thừa thêm 2 dB nữa). Tại tần số $\lambda_a = 2,0732504$, cũng với lập luận như Ví dụ 5.17 tương ứng với tần số cắt của dải triệt, đáp ứng tần số có độ suy giảm lớn hơn 35 dB. Như thế bộ lọc số thông dải có bậc là 8. Hàm truyền $H(z)$ có thể suy ra dễ dàng như trong Ví dụ 5.17. \square

5.5 Thiết kế bộ lọc số triệt dải

Phần này sẽ triển khai phép biến đổi dựa trên các kết quả của phần trước nhằm thiết kế một bộ lọc số IIR triệt dải dựa trên hàm truyền của bộ lọc tương tự thông thấp. Tất cả các thông số được định nghĩa trong Mục 5.4 sẽ được sử dụng ở đây ngoại trừ một số điều chỉnh nhỏ như sau:

- Ω_1 , Ω_2 và Ω_3 (rad/s) tương ứng với dải triệt.
- s là biến Laplace của hàm truyền tương tự triệt dải.

Chi tiết triển khai phép biến đổi là tương tự như phần trước ngoại trừ phép biến đổi thành hàm truyền triệt dải được kết hợp trực tiếp với phép biến đổi song tuyến tính. Kết quả có được cho ra dạng tổng quát của phép biến đổi như sau:

$$p = \frac{D_1(1 - z^{-2})}{1 - E_1 z^{-1} + z^{-2}}. \quad (5.88)$$

Các hằng số D_1 và E_1 trong (5.88) được tính theo dải triệt b và tần số trung bình hình học v_2 như sau:

$$D_1 = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{B}{F_N}\right) = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2} b\right), \quad (5.89)$$

$$E_1 = 2 \cos\left(\pi \frac{F_2}{F_N}\right) = 2 \cos(\pi v_2). \quad (5.90)$$

Cũng có thể biểu diễn D_1 và E_1 theo các tần số cắt của dải triệt như sau:

$$D_1 = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2} (v_3 - v_1)\right), \quad (5.91)$$

$$E_1 = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} (v_3 + v_1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} (v_3 - v_1)\right)}. \quad (5.92)$$

Các tần số v_1 , v_2 và v_3 được nối kết với nhau thông qua biểu thức sau đây:

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2} v_2\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} v_1\right) \tan\left(\frac{\pi}{2} v_3\right). \quad (5.93)$$

Như vậy bậc của bộ lọc số triệt dải sẽ gấp đôi bậc của bộ lọc thông thấp mà ta sử dụng để biến đổi.

Ví dụ 5.19 (Thiết kế bộ lọc số IIR triệt dải)

Một hệ thống xử lý tín hiệu số hoạt động với tần số lấy mẫu 1 kHz. Hệ thống này cần loại bỏ thành phần xung quanh 100 Hz. Ta muốn xây dựng một bộ lọc số để thể hiện mục tiêu này với các đặc tả sau:

- a) Tại tần số 95 Hz và 105 Hz thì độ suy giảm là 3 dB;
- b) Hàm truyền của bộ lọc số có bậc là 2.

Bởi vì hàm truyền bộ lọc số là bậc 2 nên hàm truyền bộ lọc tương tự là bậc 1 và có dạng

$$G(p) = \frac{1}{1+p}.$$

trong đó tần số cắt 3 dB là $\lambda_r = 1$ rad/s. Tần số Nyquist là $F_N = 500$ Hz. Các tần số cắt của bộ lọc số tương ứng với 95 Hz và 105 Hz là

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \frac{95}{500} = 0,19 \\ \nu_3 &= \frac{105}{500} = 0,21. \end{aligned}$$

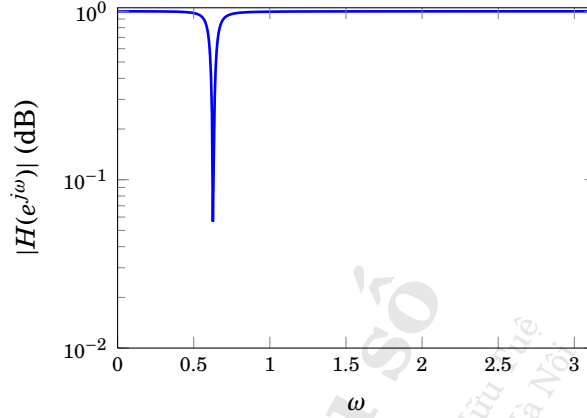
Từ đó tính được D_1 và E_1 như sau:

$$\begin{aligned} D_1 &= \tan\left(\frac{\pi}{2}(0,21 + 0,19)\right) = 0,031426266, \\ E_1 &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}(0,21 + 0,19)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(0,21 - 0,19)\right)} = 1,61883279. \end{aligned}$$

Thế D_1 và E_1 vào (5.88) ta suy ra hàm truyền bộ lọc số triệt dải là

$$H(z) = \frac{0,96953125(1 - 1,6188328z^{-1} + z^{-2})}{1 - 1,5695090z^{-1} + 0,9390625z^{-2}},$$

được biểu diễn như trên hình 5.36. □



Hình 5.36: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc triệt dải [Ví dụ 5.19].

5.6 Thiết kế bộ lọc số thông cao

Theo lập luận của thiết lập bộ lọc thông thấp ta thấy ngay phép biến đổi ngược lại sẽ cho ta bộ lọc thông cao. Như thế phép biến đổi song tuyến tính biến một bộ lọc tương tự thông thấp $G_{lp}(p)$ thành một bộ lọc số thông cao $H_{hp}(z)$ là

$$p = C \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (5.94)$$

Nhắc lại rằng, λ là tần số của $G_{lp}(p)$ và ν là tần số của $H_{hp}(z)$. Mối liên hệ giữa hai biến này là

$$|\lambda| = C \cot\left(\frac{\pi}{2} \frac{F}{F_N}\right) = C \cot\left(\frac{\pi}{2} \nu\right). \quad (5.95)$$

Hằng số biến đổi C được xác định bởi quy tắc là $|G_{lp}(j\lambda)|$ tại tần số $\lambda = \lambda_r$ bằng $|H_{hp}(e^{j\omega})|$ tại tần số $\nu = F_r$. Lưu ý rằng, λ_r là tần số cắt của dải thông thấp của $G_{lp}(p)$ và ngược lại F_r là tần số cắt của dải thông cao của $H_{hp}(z)$. Như vậy

$$C = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{F_r}{F_N}\right) = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2} \nu_r\right). \quad (5.96)$$

Theo những kết quả này, bậc của bộ lọc số $H_{hp}(z)$ bằng bậc của $G_{lp}(p)$ được sử dụng trong quá trình thiết kế.

Ví dụ 5.20 (Thiết kế bộ lọc số IIR thông cao)

Thiết kế bộ lọc số thông cao dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Butterworth bậc 2 có tần số cắt 3 dB là 200 Hz. Tần số lấy mẫu của hệ thống là 500 Hz.

Theo điều kiện thiết kế thì bộ lọc thông thấp Butterworth có hàm truyền là

$$G(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}p + p^2}. \quad (5.97)$$

Tần số cắt tương tự $\lambda_r = 1$ rad/s. Thông qua biến đổi sẽ trở thành $F_r = 200$ Hz. Tần số Nyquist là $F_N = 250$ Hz, cho nên

$$\nu_r = \frac{200}{250} = 0,8.$$

Hằng số C là

$$C = \tan\left(\frac{\pi}{2} 0,8\right) = 3,0776835$$

và phép biến đổi (5.94) trở thành

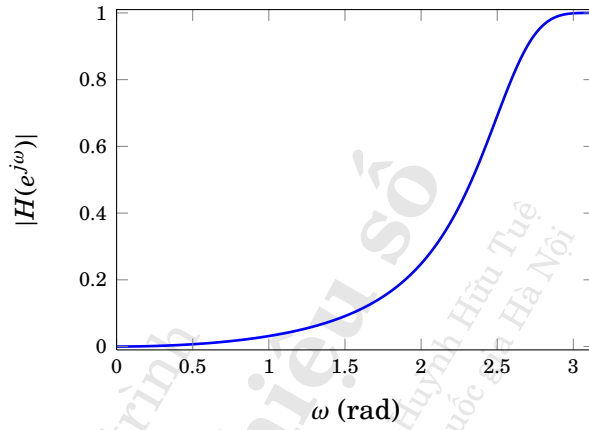
$$p = 3,0776835 \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}. \quad (5.98)$$

Thế (5.98) vào (5.97), ta suy ra hàm truyền của bộ lọc thông cao tương ứng là

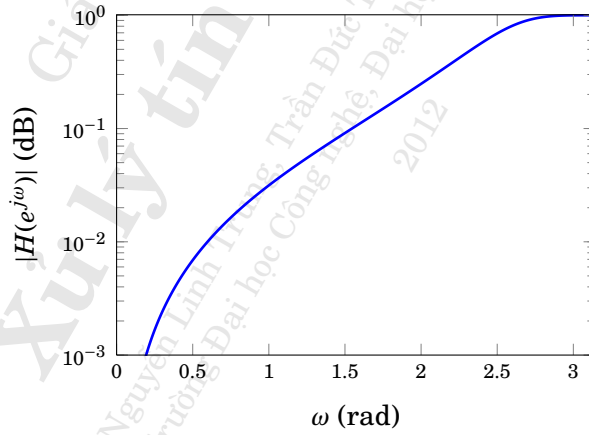
$$H(z) = \frac{0,0674553(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{1 + 1,14298z^{-1} + 0,412802z^{-2}}.$$

Kết quả được mô phỏng như Hình 5.37.

□



(a)



(b)

Hình 5.37: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc số thông cao [Ví dụ 5.20].

Bài tập chương 5

5.1. Một hệ thống rời rạc hoạt động với vận tốc lấy mẫu 100 Hz. Ta muốn lập một chương trình để mô phỏng hệ thống có hàm truyền

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}.$$

Đồng thời, ta muốn hệ thống số và hệ thống tương tự ứng xử giống nhau ở miền tần số thông thấp.

a) Hãy tìm đáp án với các phương pháp khác nhau sau đây: biến đổi song tuyến tính, bất biến đáp ứng xung và bất biến đáp ứng bậc thang.

b) So sánh hiệu quả của ba đáp án này.

5.2. Xác định hàm truyền hệ thống số của bài tập 5.1 thế nào để đáp ứng tần số biên độ của hàm truyền số và hàm truyền tương tự giống nhau ở 400 Hz.

5.3. Một bộ lọc tương tự có hàm truyền

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+16}.$$

a) Hãy thiết kế bộ lọc số từ bộ lọc tương tự này theo phương pháp bất biến đáp ứng xung. Cho chu kỳ lấy mẫu $T = 0,1$ s.

b) Hãy nhận xét tính ổn định của bộ lọc vừa thiết kế. Lý giải lý do.

c) Thực thi bộ lọc dạng song song và dạng nối tiếp.

5.4. Một bộ lọc tương tự có điểm không tại $s = -0,1$ và hai điểm cực tại $-0,1 \pm j3$. Tìm hàm truyền của bộ lọc số IIR thu được bằng phương pháp bất biến đáp ứng bậc thang với giả thiết chu kỳ lấy mẫu $T = 0,1$ s.

5.5. Xác định bậc của bộ lọc số thông thấp hoạt động với tần số lấy mẫu 2 kHz có các thông số đặc tả sau đây:

- a) Thiết kế dùng phương pháp song tuyến tính dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev.
- b) Độ suy giảm nhỏ hơn 2 dB cho dải tần từ 0 đến 250 Hz.
- c) Độ suy giảm lớn hơn 70 dB lúc tần số lớn hơn 500 Hz.

5.6. Xác định bậc của bộ lọc số thông thấp hoạt động với tần số lấy mẫu 1 kHz có các thông số đặc tả sau đây:

- a) Thiết kế dùng phương pháp đáp ứng bất biến xung dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev.
- b) Độ suy giảm nhỏ hơn 2 dB cho dải tần từ 0 đến 120 Hz.
- c) Độ suy giảm lớn hơn 50 dB lúc tần số lớn hơn 250 Hz.

5.7. Xác định bậc của bộ lọc số thông cao hoạt động với tần số lấy mẫu 4 kHz có các thông số đặc tả sau đây:

- a) Thiết kế dùng phương pháp bất biến đáp ứng bậc thang dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev.
- b) Độ suy giảm nhỏ hơn 3 dB cho dải tần từ 1,5 kHz đến 2 kHz.
- c) Độ suy giảm lớn hơn 70 dB lúc tần số nhỏ hơn 1,2 kHz.

5.8. Thiết kế bộ lọc số hoạt động với tần số lấy mẫu 2 kHz có các thông số đặc tả sau đây:

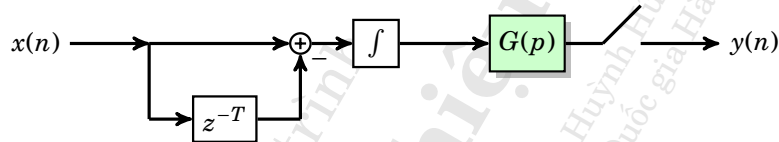
- a) Thiết kế dùng phương pháp song tuyến tính dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev.
- b) Độ suy giảm nhỏ hơn 3 dB cho dải tần từ 790 đến 810 Hz.
- c) Độ suy giảm lớn hơn 16 dB lúc tần số nhỏ hơn 780 Hz và lớn hơn 820 Hz.

5.9. Thiết kế bộ lọc số hoạt động với tần số lấy mẫu 2 kHz có các thông số đặc tả sau đây:

- a) Thiết kế dùng phương pháp bất biến đáp ứng bậc thang dựa trên bộ lọc tương tự thông thấp Chebyshev.

- b) Độ suy giảm nhỏ hơn 3 dB cho dải tần từ 790 đến 810 Hz.
- c) Độ suy giảm lớn hơn 16 dB lúc tần số nhỏ hơn 780 Hz và lớn hơn 820 Hz.

5.10. Xét hệ thống được minh họa ở hình 5.38. Đầu vào là một tín hiệu rời rạc và được chuyển thành một tín hiệu liên tục bởi một bộ lọc lưu bậc 0. Tín hiệu này được áp vào một hệ thống tương tự có hàm truyền $G(p)$ và đầu ra được lấy mẫu cho tín hiệu $y(n)$. Chứng minh rằng hàm truyền $H(z)$ của hệ thống này có dạng giống như kết quả của tiêu chí bất biến bậc thang.



Hình 5.38: Hệ thống cần xác định hàm truyền tương đương.

Chương 6

THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ FIR

Chương 5 trình bày một số phương pháp thiết kế các bộ lọc số thuộc họ IIR dựa trên các bộ lọc tương tự. Hướng thiết kế này không những thừa hưởng nhiều kiến thức và phương pháp thiết kế các bộ lọc tương tự đã được nghiên cứu nhiều trong nửa đầu thế kỷ 20 mà còn cho phép thiết kế các bộ lọc số có đáp ứng biên độ như mong muốn.

Tuy nhiên, khi quan tâm thêm đến đáp ứng pha ta gặp phải trở ngại là họ hệ thống IIR có độ trễ pha phi tuyến theo tần số. Điều này gây trở ngại khi thực hiện lọc số trong những áp dụng đòi hỏi đáp ứng tần số của hệ thống có độ méo pha tối thiểu, như thường gặp trong các hệ thống truyền dẫn dữ liệu. Không những thế, một số hệ thống còn đòi hỏi độ méo pha tuyến tính. Nhu cầu này dẫn đến việc quan tâm đến các bộ lọc họ FIR.

Như sẽ thấy, thiết kế một bộ lọc FIR có pha tuyến tính là tương đối dễ dàng. Một hàm truyền FIR thường có dạng

$$H(z) = b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Nz^{-N}. \quad (6.1)$$

Rõ ràng ta không thể dùng các phương pháp dựa trên các hàm truyền tương tự để thiết kế bộ lọc có hàm truyền như trong 6.1. Thay vì vậy, phương pháp thiết kế các bộ lọc FIR được thực hiện một cách trực tiếp trong miền rời rạc, tức là xác định trực tiếp các hệ số b_0, b_1, \dots, b_N , dựa trên các đặc tả thông số thiết kế.

Chương này trình bày ba phương pháp cơ bản được sử dụng đại trà trong thực tế, đó là phương pháp cửa sổ, phương pháp lấy mẫu trên miền tần số và phương pháp Parks–McClellan. Phương pháp cửa sổ áp đặt các cửa sổ trong miền thời gian rời rạc để xác định các hệ số b_k . Phương pháp này về mặt cơ bản rất dễ hiểu. Hơn nữa, nó có những áp dụng quan trọng liên quan đến phân tích phổ của một tín hiệu. Vì thế, hiểu rõ phương pháp sử dụng cửa sổ giúp ta hiểu rõ hơn các phương pháp phân tích phổ cổ điển. Phương pháp lấy mẫu trên miền tần số thực thi việc lấy mẫu đáp ứng tần số của một bộ lọc lý tưởng ta mong muốn. Phương pháp Parks–McClellan có thể sử dụng cho những tình huống mà độ ràng buộc chặt chẽ hơn phương pháp cửa sổ, như độ gợn sóng trong các dải tần khác nhau. Phương pháp này, chủ yếu sử dụng phương pháp xấp xỉ Chebyshev để áp đặt các gợn sóng này.

6.1 Phương pháp cửa sổ

6.1.1 Bộ lọc lý tưởng

Để hiểu rõ phương pháp cửa sổ, xét bộ lọc FIR lý tưởng có đáp ứng tần số $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ tuần hoàn với chu kỳ 2π và được định nghĩa trong khoảng $[-\pi, \pi]$ như sau

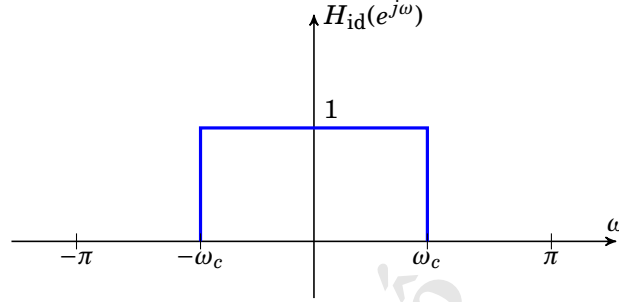
$$H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \end{cases} \quad (6.2)$$

Hình 6.1 mô tả $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$. Do $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ là một hàm tuần hoàn có chu kỳ 2π , khai triển nó thành chuỗi Fourier

$$H_{\text{id}}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{id}}(n)e^{-jn\omega}, \quad (6.3)$$

trong đó

$$h_{\text{id}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{id}}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega. \quad (6.4)$$



Hình 6.1: Bộ lọc lý tưởng.

Thế $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ của bộ lọc lý tưởng được định nghĩa trong biểu thức (6.2) vào biểu thức (6.4) cho ta

$$\begin{aligned} h_{\text{id}}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega} d\omega \\ &= 2\nu_c \text{sinc}(2n\nu_c), \end{aligned} \quad (6.5)$$

trong đó $\nu_c = \omega_c/2\pi$ và

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}. \quad (6.6)$$

Biểu thức (6.3) cho thấy $h_{\text{id}}(n)$ chính là đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng. Như thế, hàm truyền $H_{\text{id}}(z)$ của bộ lọc có dạng

$$H_{\text{id}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\text{id}}(n) z^{-n}. \quad (6.7)$$

Rõ ràng, $H_{\text{id}}(z)$ không nhân quả và có đáp ứng xung vô hạn, vì vậy không thể thực hiện được bộ lọc này về mặt điện tử.

Theo lý thuyết chuỗi Fourier, $h_{\text{id}}(n)$ suy giảm theo n với biên thiên hyperbol. Khi n vượt qua một mức M nào đó, các hệ số $h_{\text{id}}(n)$ có thể xem như không đáng kể về mặt vật lý. Với nhận định này, ta có thể xấp xỉ hàm truyền $H_{\text{id}}(z)$ bởi $H(z)$ như sau mà vẫn chấp nhận được:

$$H(z) = \sum_{n=-M}^M h_{\text{id}}(n) z^{-n} \approx H_{\text{id}}(z). \quad (6.8)$$

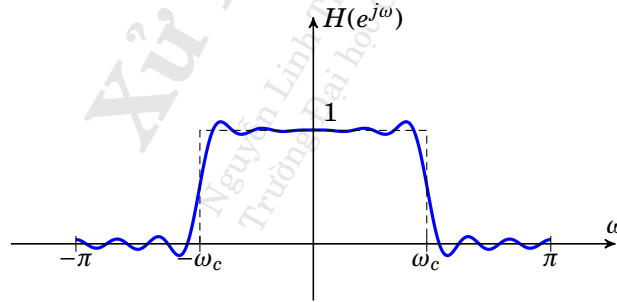
Gọi $h(n)$ là đáp ứng xung của $H(z)$, ta có

$$h(n) = \begin{cases} h_{\text{id}}(n), & |n| \leq M, \\ 0, & |n| > M. \end{cases} \quad (6.9)$$

Tiếp theo, cần tính đáp ứng tần số của bộ lọc $H(z)$. Từ kết quả (6.5), ta suy ra $h_{\text{id}}(n)$ là hàm chẵn (đối xứng qua trục tung), do đó $h(n)$ cũng là hàm chẵn, có nghĩa là $h(n) = h(-n)$. Do đó, ta có đáp ứng tần số của $H(z)$ có dạng

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-M}^M h(n)e^{-jn\omega} \\ &= h_0 + \sum_{n=1}^M h(n)(e^{-jn\omega} + e^{jn\omega}) \\ &= h_0 + 2 \sum_{n=1}^M h(n)\cos(n\omega). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Có thể kết luận rằng, lúc đáp ứng xung của một bộ lọc có tính đối xứng, đáp ứng tần số của bộ lọc này là một hàm thực. Như thế, đáp ứng pha tần số của bộ lọc chỉ có hai trị số: bằng 0 lúc đáp ứng là dương hoặc bằng π lúc đáp ứng là âm. Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ cho bởi (6.10) được mô tả trong hình 6.2.



Hình 6.2: Đáp ứng tần số của hệ thống xấp xỉ.

Ta thấy $H(e^{j\omega})$ có giá trị âm tương đối nhỏ (cho M lớn). Như thế, tác động của pha trong dải thông này sẽ ảnh hưởng không đáng

kể đến chất lượng của hệ thống. Vì vậy, trong quá trình thiết kế ta không cần quan tâm đến dải tần mà hàm truyền có giá trị âm nhưng không đáng kể.

Quay trở lại với hàm truyền xấp xỉ $H(z)$ được cho ở biểu thức (6.8), thấy rằng nó không nhân quả. Tuy nhiên, vì nó bắt đầu tại một thời điểm hữu hạn $n = -M$ nên có thể dễ dàng biến nó thành nhân quả bằng cách làm trễ M bước. Nhắc lại rằng khái niệm này đã được trình bày trong phần (3.5.3) của chương 3. Chính vì vậy, ta sẽ dùng trực tiếp dạng đã cho trong biểu thức (6.8) để thiết kế bộ lọc FIR mà không nhất thiết phải quan tâm đến tính chất không nhân quả của nó. Để làm rõ hơn điều này, có thể tính toán toán học như sau.

$$H_{\text{nq}}(z) = z^{-M} H(z) \quad (6.11)$$

$$= \sum_{n=0}^{2M} h_{\text{nq}}(n) z^{-n} \quad (6.12)$$

Từ các biểu thức (6.8) và (6.11), ta có

$$h_{\text{nq}}(n) = h(n - M). \quad (6.13)$$

Nếu đặt $N = 2M$, ta có

$$h_{\text{nq}}(n) = h\left(n - \frac{N}{2}\right). \quad (6.14)$$

Đáp ứng tần số của $H_{\text{nq}}(e^{j\omega})$ và $H(e^{j\omega})$ giống nhau và mối liên hệ của pha của chúng là

$$\angle H_{\text{nq}}(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) - \frac{N}{2}\omega. \quad (6.15)$$

Nếu không quan tâm đến dải tần mà pha của $H(e^{j\omega})$ có giá trị âm thì về mặt thực tiễn có thể thấy ngay pha của $H_{\text{nq}}(e^{j\omega})$ là tuyến tính. Và đây là tính chất mong đợi khi thiết kế một bộ lọc nhằm áp dụng vào bất cứ hệ thống xử lý tín hiệu.

6.1.2 Phương pháp thiết kế cửa sổ

Phương pháp thiết kế bộ lọc FIR ta vừa thấy nhằm xấp xỉ đáp ứng xung vô hạn $h_{\text{id}}(n)$ của bộ lọc lý tưởng $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ bằng cách loại bỏ

các $h_{\text{id}}(n)$ lúc $|n| > M$ để được một đáp ứng xung hữu hạn $h(n)$. Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc xấp xỉ $h(n)$ này là một hàm số thực có thể có trị số âm và có nhiều gợn sóng trong dải thông cũng như dải triệt (xem hình 6.2). Hiện tượng này xuất hiện bởi vì $h(M) \neq 0$ lúc $n = M$ và $h(n) = 0$ lúc $n > M$, có nghĩa là $h(n)$ bị mất liên tục tại M . Để giảm thiểu ảnh hưởng của phương pháp xấp xỉ này ta có thể điều chỉnh $h_{\text{id}}(n)$ bởi các trọng số $w(n)$ để có

$$h(n) = w(n)h_{\text{id}}(n). \quad (6.16)$$

Trong miền tần số, phương trình (6.16) tương đương với

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{\text{id}}(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \quad (6.17)$$

Chọn $w(n)$ thế nào để đáp ứng các tiêu chí thiết kế tối ưu tương ứng được gọi là phương pháp cửa sổ, và $w(n)$ được gọi là cửa sổ thiết kế. Đúng thế, biến đổi Fourier của $h(n)$ là tích chập của $W(e^{j\omega})$ và $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ và tích chập này sẽ làm trơn các gợn sóng của $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ mà ta đã quan sát trong hình 6.2.

Những tiêu chí thường gặp như: dải triệt phải có độ suy giảm cao nhất; hoặc dải thông có độ gợn sóng thấp nhất; hoặc vận tốc suy giảm trong dải chuyển tiếp là lớn nhất. Phần tiếp theo sẽ trình bày rõ hơn về các loại cửa sổ và tác động của chúng.

Cửa sổ chữ nhật

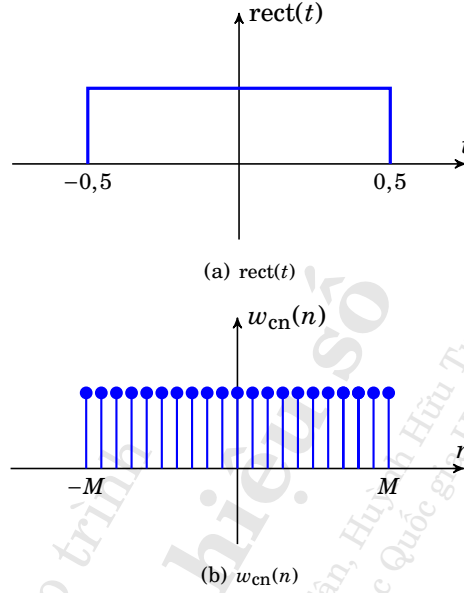
Hàm cửa sổ chữ nhật, ký hiệu là $\text{rect}(t)$, được định nghĩa như sau:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.18)$$

Phương pháp xấp xỉ vừa được trình bày ở trên tương ứng với sử dụng cửa sổ chữ nhật $w_{\text{cn}}(n)$ trong miền rời rạc sẽ là

$$w_{\text{cn}}(n) = \text{rect}\left(\frac{n}{2M}\right). \quad (6.19)$$

Các hàm $\text{rect}(t)$ và $w_{\text{cn}}(n)$ được mô tả trong hình 6.3.



Hình 6.3: Hàm chữ nhật $\text{rect}(t)$ và cửa sổ chữ nhật $w_{\text{cn}}(n)$.

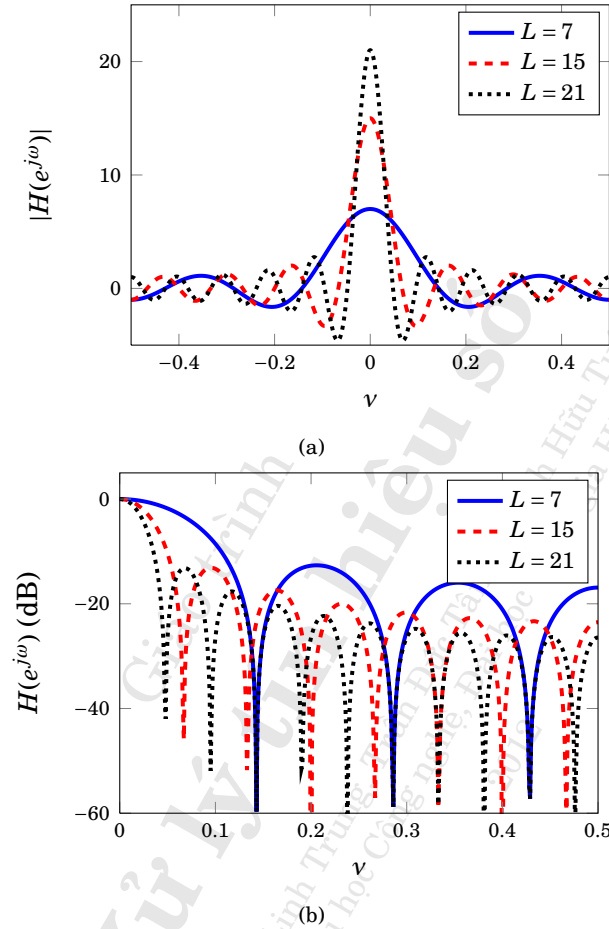
Đáp ứng tần số của cửa sổ $w_{\text{cn}}(n)$ được tính ra

$$W_{\text{cn}}(e^{j\omega}) = \frac{\sin(L\omega/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad (6.20)$$

trong đó $L = 2M+1$ là chiều dài của $w_{\text{cn}}(n)$ tương ứng với chiều dài của bộ lọc xấp xỉ. Hình 6.4 biểu diễn $W_{\text{cn}}(e^{j\omega})$ trong khoảng $\nu = [-0,5; 0,5]$.

Đáp ứng tần số $W_{\text{cn}}(e^{j\omega})$ (theo đơn vị dB) có một số tính chất sau:

- a) Có M điểm cực đại;
- b) Bề rộng búp chính là $2/M$;
- c) Đáp ứng tần số cắt trục hoành tại $2M$ điểm cách nhau 1 khoảng là $1/L$;
- d) Diện tích của $W_{\text{cn}}(e^{j\omega})$ là 1 và đạt trị cực đại L tại gốc;
- e) Tại tần số $\nu = \pm 0,5$ (tức là $\omega = \pm\pi$), $W_{\text{cn}}(e^{j\omega})$ có trị bằng 1 lúc M



Hình 6.4: Đáp ứng tần số $W_{cn}(e^{j\omega})$ của cửa sổ chữ nhật $w_{tg}(n)$.

chẵn và bằng -1 lúc M lẻ;

g) Lúc M tăng thì trị cực đại tăng và bề rộng của búp chính giảm. Tỷ lệ của trị cực đại của búp chính và búp phụ biến động giữa 4 (lúc M nhỏ) và 4,71 (tức là 13,5 dB lúc M rất lớn). Lúc M tiến về vô cực thì $W_{cn}(e^{j\omega})$ tiến về xung Dirac đơn vị.

Cửa sổ tam giác

Hàm tam giác, ký hiệu là $\text{tri}(t)$, được định nghĩa như sau:

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \quad (6.21)$$

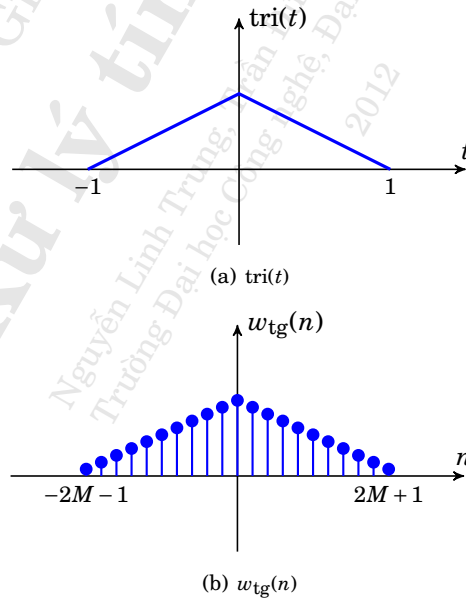
Sử dụng cửa sổ tam giác $w_{\text{tg}}(n)$, còn gọi là cửa sổ Barlett, trong miền rời rạc như sau:

$$w_{\text{tg}}(n) = \text{tri}\left(\frac{n}{2M+1}\right). \quad (6.22)$$

Cửa sổ này cũng có thể được tính bằng tích chập của hai cửa sổ chữ nhật theo công thức

$$w_{\text{tg}}(n) = \frac{1}{2M+1} \text{rect}\left(\frac{n}{2M}\right) * \text{rect}\left(\frac{n}{2M}\right). \quad (6.23)$$

Hình 6.5 mô tả $\text{tri}(t)$ và $w_{\text{tg}}(n)$.



Hình 6.5: Hàm tam giác $\text{tri}(t)$ và cửa sổ tam giác $w_{\text{tg}}(n)$.

Áp dụng kết quả đáp ứng tần số của $w_{\text{cn}}(n)$ trong công thức (6.20) và biểu diễn của $w_{\text{tg}}(n)$ trong (6.23), ta tính ra đáp ứng tần số của cửa sổ $w_{\text{tg}}(n)$ như sau

$$W_{\text{tg}}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left(\frac{\sin(L\omega/2)}{\sin(\omega/2)} \right)^2. \quad (6.24)$$

Hình 6.6 mô tả đáp ứng tần số này.

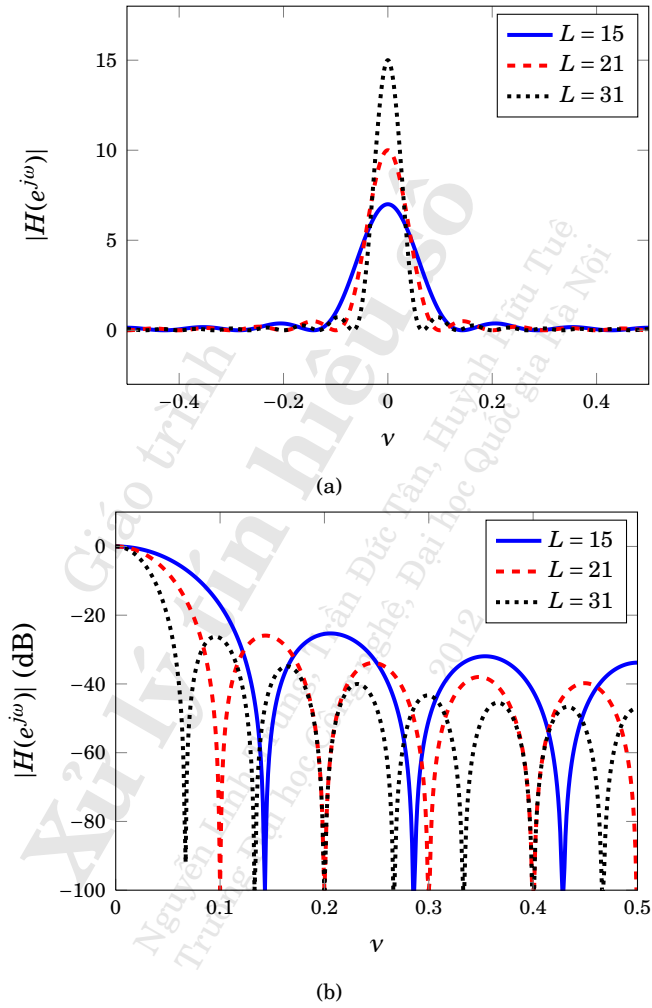
So sánh cửa sổ chữ nhật và cửa sổ tam giác

Đáp ứng tần số của hai cửa sổ này được minh họa lại theo đơn vị dB trong hình 6.7. Dùng hai cửa sổ này để thiết kế một bộ lọc FIR có chiều dài là 21 (tức là $M = 10$) ta có hai đáp ứng tần số tương ứng được minh họa như hình 6.8. Chú ý cửa sổ tam giác cho ta kết quả tốt hơn. Ta thấy cửa sổ chữ nhật gây ra những gợn sóng có tác động quan trọng trong đáp ứng tần số. Trong khi đó cửa sổ tam giác đã làm trơn các gợn sóng này; cho nên kết quả thiết kế tốt hơn rất nhiều. Như thế chất lượng của thiết kế phụ thuộc vào sự lựa chọn cửa sổ.

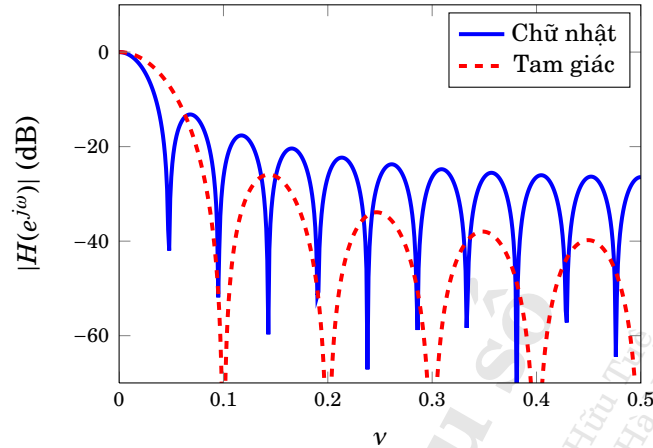
Thiết kế bộ lọc bằng cửa sổ

Như đã trình bày ở trên, để thiết kế một bộ lọc FIR ta sử dụng một bộ lọc không nhân quả đối xứng qua gốc có đáp ứng xung là $h_{\text{lt}}(n)$ và đáp ứng tần số là $H_{\text{lt}}(e^{j\omega})$. Nếu chỉ loại bỏ các hệ số của đáp ứng xung lúc vượt qua một chỉ số nào đó tức là ta vừa sử dụng cửa sổ hình chữ nhật và tạo ra những gợn sóng. Để giảm thiểu hoặc loại bỏ các gợn sóng do hiện tượng Gibbs tạo ra, cần dùng một cửa sổ để điều chỉnh đáp ứng xung của bộ lọc ta đang thiết kế.

Những quan sát đối với cửa sổ chữ nhật và tam giác như trên hình 6.9 cho thấy đáp ứng biên độ tần số của những cửa sổ chiều dài hữu hạn luôn cho xuất hiện một búp chính và các búp phụ suy giảm theo tần số; bởi tính đối xứng của đáp ứng xung nên đáp ứng tần số là một hàm thực lúc có trị dương và lúc có trị âm. Các ký hiệu v_3 , v_6 , v_s và v_m là những thông số thường được chọn lựa lúc thiết kế tương



Hình 6.6: Đáp ứng tần số $W_{\text{tg}}(e^{j\omega})$ của cửa sổ tam giác $w_{\text{tg}}(n)$ với các chiều dài khác nhau.

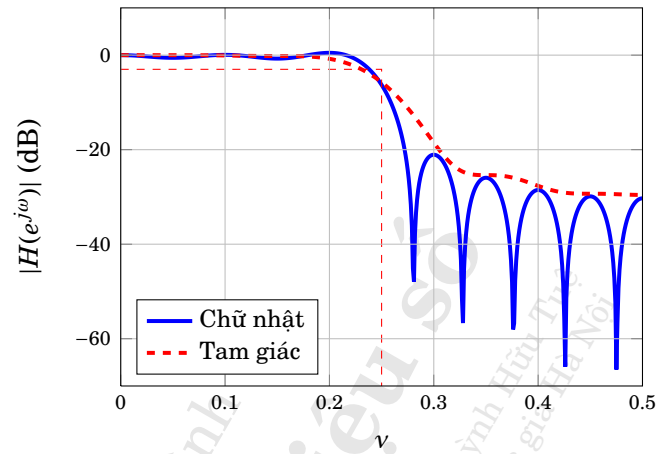


Hình 6.7: So sánh đáp ứng tần số của cửa sổ chữ nhật và tam giác.

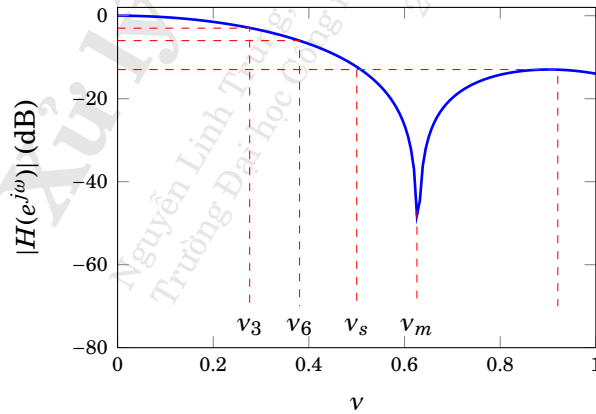
ứng với dải thông 3 dB, 6 dB, dải thông búp phụ và nửa dải thông búp chính. Các búp phụ suy giảm và vận tốc suy giảm thường được biểu diễn theo dB/octave hoặc dB/decade. Các thông số này đóng vai trò quan trọng trong quá trình thiết kế bộ lọc FIR.

Bảng 6.1 cung cấp các công thức toán học của cửa sổ đã được các nhà nghiên cứu thiết kế.

Hình 6.10 biểu diễn miền tần số của các cửa sổ này. Thông thường, thiết kế cửa sổ dựa trên một số tiêu chuẩn được xem như tối ưu. Thật ra, phải chọn lựa giữa các tiêu chí tối ưu vì thông thường các tiêu chí này mâu thuẫn nhau. Chẳng hạn, cần búp chính hẹp (hoặc dải chuyển tiếp nhỏ) và mức suy giảm của búp phụ nhỏ. Có một số cửa sổ được xây dựng như tổ hợp của các cửa sổ đơn giản hơn. Chẳng hạn cửa sổ Hanning là tổng của một cửa sổ chữ nhật và một cửa sổ cosine, hay cửa sổ tam giác là tích chập của hai cửa sổ chữ nhật. Một số cửa sổ khác được thiết kế để có một số tính chất ta mong muốn. Chẳng hạn cửa sổ Hanning cho ta độ suy giảm mạnh ở tần số cao nhưng đồng thời có búp sóng chính rộng, trong khi đó cửa sổ Hamming nhằm tối thiểu hóa các búp phụ nhưng lại làm độ suy giảm ở tần số cao chậm đi, còn cửa sổ Kaiser chứa thông số β nhằm kiểm soát độ suy giảm của búp phụ.



Hình 6.8: So sánh đáp ứng tần số của bộ lọc thiết kế dùng cửa sổ chữ nhật và cửa sổ tam giác, với tần số cắt $\nu_c = 0,25$.



Hình 6.9: Các tham số tần số góc thiết kế.

Bảng 6.1: Các hàm cửa sổ thông dụng

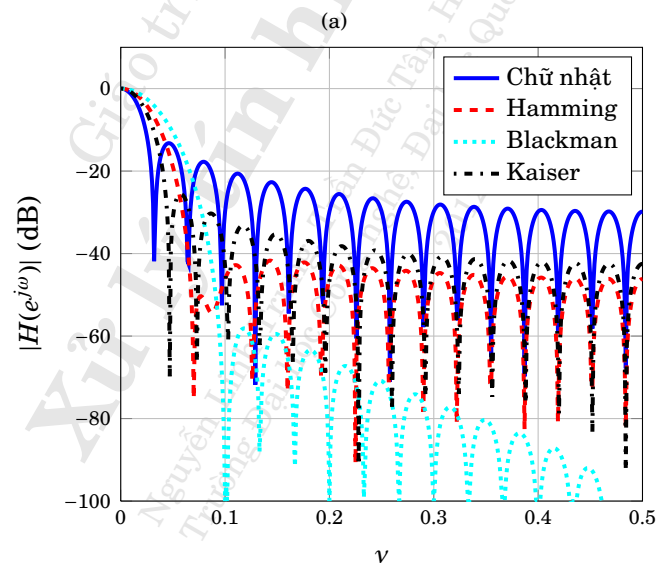
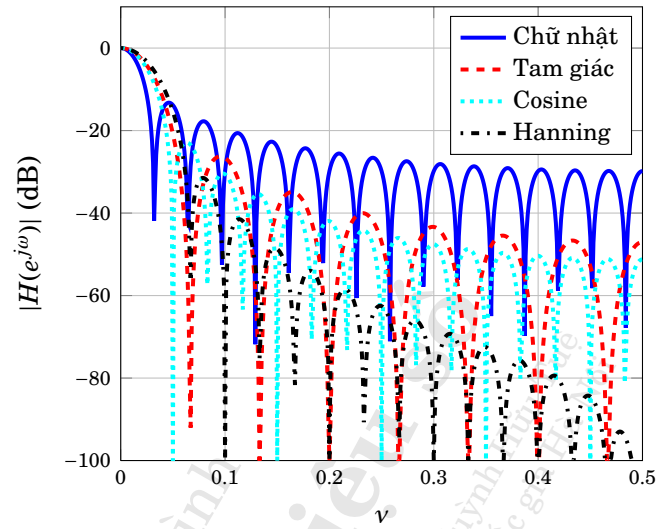
Tên cửa sổ	$w_0(n), -(L-1)/2 \leq n \leq (L-1)/2$	$w(n) = w_0\left(n - \frac{L-1}{2}\right), 0 \leq n \leq L-1$
Chữ nhật	1	1
Tam giác	$1 - \frac{2 n }{L-1}$	$\begin{cases} \frac{2n}{L-1}, & \text{với } 0 \leq n \leq \frac{L-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{L-1}, & \text{với } \frac{L-1}{2} < n \leq (L-1) \end{cases}$
Cosine	$\cos\left(\frac{\pi n}{L-1}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi n}{L-1} - \frac{\pi}{2}\right)$
Reimann	$\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1}\right)$	$\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1} - 1\right)$
Hanning	$0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$	$0,5 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$
Hamming	$0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	$0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$	$0,42 - 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$
Kaiser	$\frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{L-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$	$\frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{L-1} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$

Đối với một cửa sổ theo biến thời gian liên tục có chiều dài hữu hạn thì tối ưu hóa năng lượng của phổ trên một dải băng tần nào đó sẽ cho ra một cửa sổ có cấu trúc liên hệ đến hàm sóng cầu* bậc 1. Chính cửa sổ Kaiser là xấp xỉ tốt nhất trong miền thời gian rời rạc.

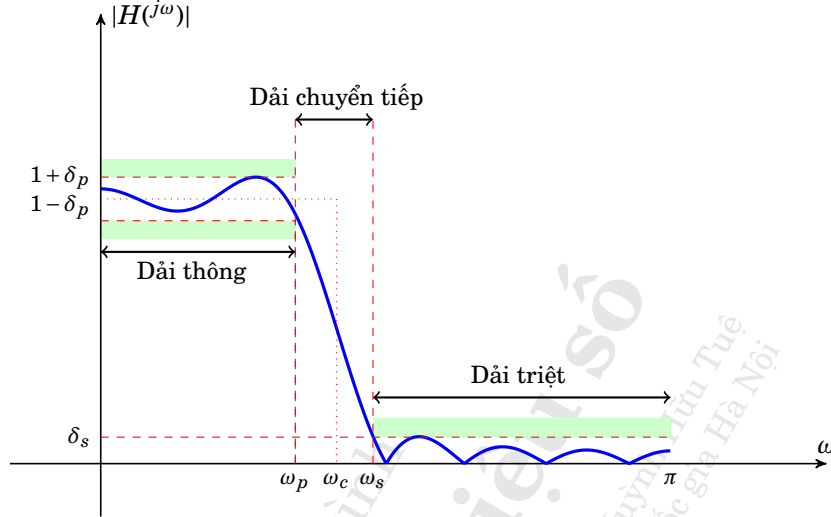
Một số điểm cần chú ý trong quá trình thiết kế bằng phương pháp cửa sổ

Đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp FIR có dạng tổng quát được minh họa ở hình 6.11. Những thông số cụ thể xuất hiện trên hình này gồm độ gợn sóng, là giới hạn giữa hai trị số $1 - \delta_p$ và $1 + \delta_p$, tần số cắt ω_p (hay ν_p) dùng để định nghĩa dải thông và tần số triệt ω_s (hay ν_s) để định nghĩa dải triệt. Độ gợn sóng trong dải triệt có

*Prolate spheroidal wave functions.



Hình 6.10: So sánh đáp ứng tần số các cửa sổ.



Hình 6.11: Minh họa đáp ứng tần số của một bộ lọc thông thấp.

trị cực đại là δ_s . Ta cũng thấy, khoảng $[\omega_p, \omega_s]$ là tương ứng với dải chuyển tiếp. Theo đơn vị dB ta có độ gợn sóng dải thông A_p (dB) và độ gợn sóng dải triệt A_s (dB) được định nghĩa như sau:

$$A_p = -20 \log \left(\frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} \right) \quad (6.25)$$

$$A_s = -20 \log \left(\frac{\delta_s}{1 + \delta_p} \right) \approx -20 \log \delta_s, \quad \delta_p \ll 1 \quad (6.26)$$

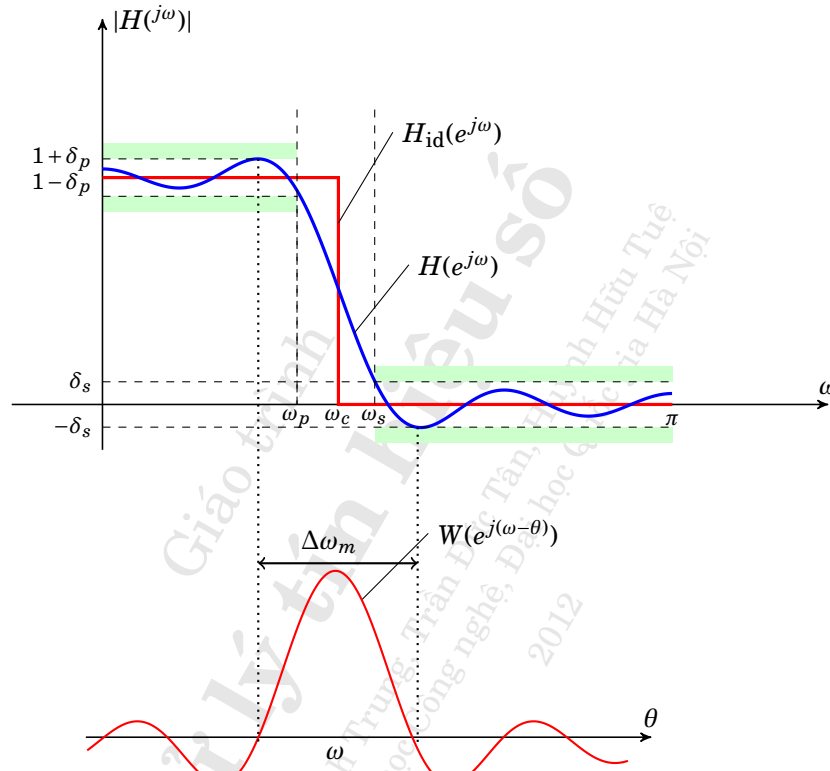
Cũng theo đơn vị dB, độ gợn sóng được cho bởi

$$\delta_p = \frac{10^{A_p/20} - 1}{10^{A_p/20} + 1} \quad (6.27)$$

$$\delta_s = (1 + \delta_p) 10^{-A_s/20} \approx 10^{-A_s/20}, \quad \delta_p \ll 1. \quad (6.28)$$

Thiết kế một bộ lọc FIR bằng phương pháp cửa sổ tức là chọn loại cửa sổ và chiều dài của bộ lọc thế nào để các đặc tả của bộ lọc được thỏa mãn. Thông thường, loại bộ lọc được chọn theo độ gợn sóng và chiều dài bộ lọc, phụ thuộc vào tần số cắt và bề rộng của dải chuyển tiếp. Để hiểu rõ, xét hình 6.12, trong đó lấy tích chập

của $W(e^{j\omega})$ và $H_{id}(e^{j\omega})$ để có đáp ứng tần số của bộ lọc muốn thiết kế. Hình vẽ này cho thấy tích chập đã biến một hàm không liên tục,



Hình 6.12: Minh họa chiều dài bộ lọc phụ thuộc vào tần số cắt và bề rộng của dải chuyển tiếp.

là $H_{id}(e^{j\omega})$, thành một hàm mềm mại hơn, là $H(e^{j\omega})$. Đồng thời, dải chuyển tiếp phụ thuộc vào bề rộng của búp chính của đáp ứng tần số cửa sổ, $\Delta\omega_m$. Bề rộng này tỉ lệ nghịch với chiều dài của cửa sổ, L . Những tính chất định tính này phụ thuộc vào đáp ứng tần số của các cửa sổ. Sau đây là một số tính chất:

a) Đối với tất cả các cửa sổ thì gợn sóng trong dải thông và trong dải triệt đều bằng nhau ($\delta_p = \delta_s$).

Bảng 6.2: Bảng tra giá trị của các cửa sổ thông dụng

Cửa sổ	A_p (dB)	A_s (dB)	$\delta_p = \delta_s$	C
Chữ nhật	0,742	21	0,0819	0,60
Hanning	0,055	44	0,0063	3,21
Hamming	0,019	53	0,0022	3,47
Blackman	0,0015	75,3	0,00017	5,71

b) Độ gợn sóng cực đại trong dải triệt thường nhỏ hơn đỉnh của búp phụ của cửa sổ. Tức là độ suy giảm trong dải triệt của bộ lọc thường lớn hơn độ suy giảm của đỉnh búp phụ của cửa sổ. Đỉnh búp phụ này cũng như trị cực đại của gợn sóng trong dải thông và độ suy giảm trong dải thông phụ thuộc rất ít vào chiều dài L của bộ lọc.

c) Mặt khác, dải chuyển tiếp, $\Delta_v = \nu_p - \nu_s$, được tính từ tần số có biên độ $1 - \delta_p$ đến tần số có biên độ δ_s , có thể xem như bằng bề rộng của búp chính của đáp ứng tần số của cửa sổ. Thật ra, dải chuyển tiếp này thông thường nhỏ hơn bề rộng của búp chính này. Như đã đề cập đến ở trên, dải chuyển tiếp tỉ lệ nghịch với chiều dài của bộ lọc, tức là

$$\Delta_v = \frac{C}{L} \quad (6.29)$$

trong đó hằng số tỉ lệ C phụ thuộc vào bộ lọc ta chọn, được xác định bằng các phương pháp mô phỏng và thực nghiệm, có giá trị được trình bày ở Bảng 6.2. Riêng bộ lọc Kaiser thì chiều dài và thông số β , thông qua thực nghiệm, được ước tính với các công thức sau đây:

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(A - 8,7), & A > 50, \\ 0,5842(A - 21)^{0,4} + 0,07886(A - 21), & 21 \leq A \leq 50, \\ 0, & A < 21. \end{cases} \quad (6.30)$$

d) Ngoài ra, có thể chọn một cách thích hợp tần số ν_c (tần số cắt lý tưởng) là trị trung bình của ν_p và ν_s . Thông thường, tần số cắt để thỏa mãn chiều dài L ngắn nhất thường nhỏ hơn trị số trung bình này. Để bảo đảm độ dài L tối thiểu ta có thể tính toán với trị số ν_c này rồi điều chỉnh các thông số sau đó. Chẳng hạn, giảm ν_c hoặc

giảm L mà vẫn thỏa các đặc tả đặc biệt là tại các tần số giới hạn của dải thông và dải triệt.

Các bước thiết kế bộ lọc FIR bằng cửa sổ được tóm tắt trong phương pháp 6.1 cho sau đây.

Phương pháp 6.1 – Thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp cửa sổ.

1. Chuẩn hóa các đặc tả tần số tương tự bởi tần số lấy mẫu F_S .
2. Xác định các tần số ν_p và ν_s của bộ lọc số thông thấp và chọn tần số cắt ν_c của bộ lọc số thông thấp: $\nu_c = (\nu_p + \nu_s)/2$.
3. Chọn cửa sổ để thỏa các đặc tả gợn sóng và suy giảm (Bảng 6.2).
4. Ước lượng chiều dài L bằng công thức $C/(\nu_s - \nu_p)$ (Bảng 6.2).
5. Tính đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp lý tưởng $h_{id}(n) = 2\nu_c \text{sinc}(2n\nu_c)$, $|N| \leq (L-1)/2$.
6. Tính đáp ứng xung của bộ lọc thiết kế $h(n) = w(n)h_{id}(n)$.

Ví dụ 6.1 (Ảnh hưởng của các cửa sổ trong thiết kế bộ lọc FIR)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc FIR thông thấp có đáp ứng tần số sau đây

$$H_d(f) = \begin{cases} 1, & 0 \leq f \leq 250 \text{ Hz} \\ 0, & f > 250 \text{ Hz} \end{cases}$$

biết rằng tần số lấy mẫu $F_S = 1 \text{ kHz}$ và độ dài bộ lọc cần thiết kế là $L = 21$.

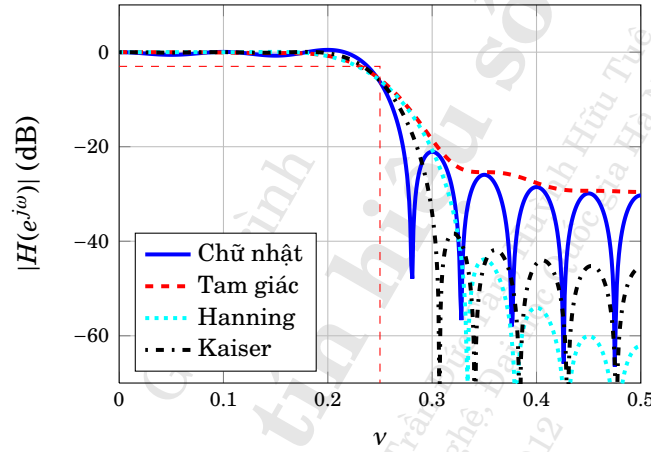
Chuẩn hóa các tần số đặc tả tương tự bởi tần số, trong miền tần số, ta có

$$\nu_c = \frac{250}{1000} = 0,25$$

và đáp ứng xung tương ứng là

$$h_d(n) = 2\nu_c \text{sinc}(2n\nu_c) = 0,5 \text{sinc}(0,5n).$$

Ảnh hưởng của cửa sổ chữ nhật chỉ là loại bỏ các $h_d(n)$ nằm ngoài chiều dài cần thiết. Thực hiện tương tự cho các cửa sổ tam giác, Hanning và Kaiser (với $\beta = 1$), ta có kết quả đáp ứng tần số được mô tả trong hình 6.13. Ta thấy rằng, đáp ứng tần số có được khi sử dụng cửa sổ chữ nhật cho thấy bộ lọc có độ suy giảm hoàn toàn chấp nhận được. Tuy nhiên, đỉnh của búp phụ tương đối cao, gần bằng 21 dB.



Hình 6.13: Ảnh hưởng của các cửa sổ, với chiều dài $L = 21$.

Ví dụ 6.2 (Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng cửa sổ Hanning)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc FIR có những đặc tả sau: $F_p = 2$ kHz, $F_s = 4$ kHz, $A_p = 2$ dB, $A_s = 40$ dB, tần số lấy mẫu $F_s = 20$ kHz.

Ta biết rằng đây là một bộ lọc số thông thấp có các tần số số đặc trưng sau đây:

$$\begin{aligned} \nu_p &= \frac{F_p}{F_s} = \frac{2}{20} = 0,1 \\ \nu_s &= \frac{F_s}{F_s} = \frac{4}{20} = 0,2. \end{aligned}$$

Với độ suy giảm $A_s = 40$ dB, đối chiếu với bảng 6.2 ta thấy có thể chọn cửa sổ Hanning ở mức suy giảm thấp hơn, là 44 dB. Với dải chuyển

tiếp

$$\Delta_v = v_s - v_p = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

thì chiều dài của bộ lọc sẽ vào khoảng

$$L = \frac{C}{\Delta_v} \approx \frac{3,21}{0,1} \approx 33.$$

Tần số cắt là

$$v_c = 0,5(v_p + v_s) = 0,15.$$

Do vậy, đáp ứng xung của bộ lọc lý tưởng là

$$h_{id}(n) = 2v_c \operatorname{sinc}(2nv_c) = 0,3 \operatorname{sinc}(0,3n),$$

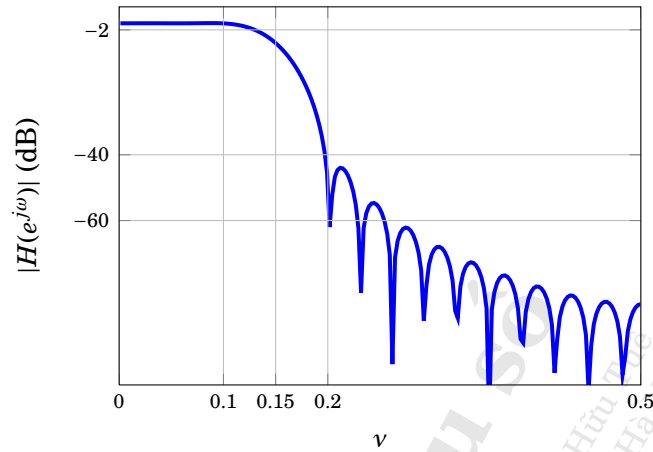
Với kết quả này, ta có đáp ứng biên độ như biểu diễn ở hình 6.14(a). Kết quả này cho thấy bộ lọc vừa thiết kế vượt xa đặc tả thiết kế. Điều này là hiển nhiên vì lúc ta chọn thông số đã vượt mức cần thiết. Như vậy, cách làm trong lần thiết kế thứ nhất là chọn thông số thỏa mãn đặc tả. Nếu với thông số đã chọn mà chất lượng bộ lọc được thiết vượt quá xa mức cần thiết thì ta tiến hành điều chỉnh, mà cụ thể nhất ở đây là giảm thông số chiều dài bộ lọc nhằm giảm giá thành sản xuất. Cách điều chỉnh sẽ được trình bày sau đây.

Mục tiêu của thử và điều chỉnh là thay đổi v_c và L thế nào để vẫn đảm bảo những đặc tả là độ gợn sóng trong dải thông nhỏ hơn 2 dB và độ suy giảm dải triệt phải lớn hơn 40 dB. Với phương tiện máy tính hiện đại thì phương pháp thử sai và điều chỉnh thực sự không mất thì giờ. Trong trường hợp này ta chỉ cần thử một hai lần là được. Từ $v_c = 0,15$, ta điều chỉnh L , sau đó điều chỉnh v_c . Trong ví dụ này, ta thấy chọn $v_c = 0,1313$ và $L = 23$ thì các thông số hoàn toàn được thỏa mãn. Đáp ứng biên độ được biểu diễn trên hình 6.14(b). Rõ ràng, ta đã giảm chiều dài bộ lọc đi nhiều, từ 33 xuống còn 23, mà vẫn thỏa mãn đặc tả thiết kế.

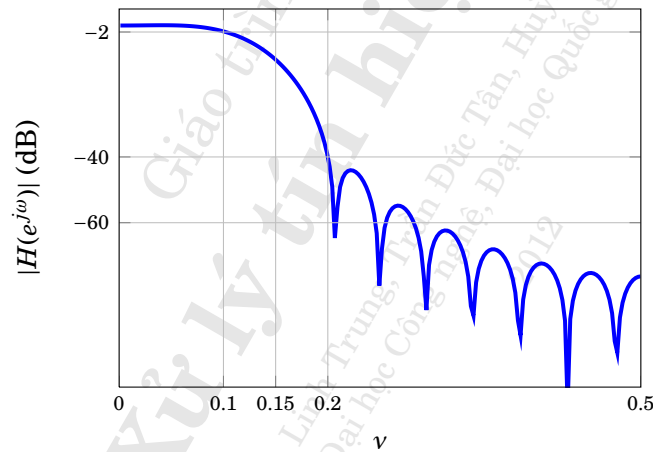
□

Ví dụ 6.3 (Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng cửa sổ Blackman)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc FIR có những đặc tả sau: $F_p = 2$ kHz, $F_s = 4$ kHz, $A_p = 2$ dB, $A_s = 70$ dB, tần số lấy mẫu $F_S = 20$ kHz.



(a) Thiết kế lần thứ nhất: $L = 33$, $\nu_c = 0,15$.



(b) Điều chỉnh kết quả: $L = 23$, $\nu_c = 0,1313$

Hình 6.14: Đáp ứng biên độ bộ lọc số FIR dùng cửa sổ Hanning, có được thông qua hai bước thiết kế: (1) thiết kế lần thứ nhất và (2) điều chỉnh thiết kế.

Giống như ví dụ 6.2, ta có được các đặc tả thiết kế cho bộ lọc thông thấp FIR như sau: tần số dải thông $\nu_p = 0,1$, tần số dải triệt $\nu_s = 0,2$, dải chuyển tiếp $\Delta_\nu = 0,1$, tần số cắt $\nu_c = 0,15$ và đáp ứng

xung của bộ lọc lý tưởng $h_{\text{id}}(n) = 0,3 \text{sinc}(0,3n)$.

Đối chiếu bảng 6.2 với độ suy giảm $A_s = 70$ dB, ta có thể chọn cửa sổ Blackman với độ suy giảm là 75,3 dB. Chiều dài của bộ lọc là

$$L = \frac{C}{\Delta_v} \approx \frac{5,71}{0,1} \approx 58.$$

Chú ý cho đến giờ ta chỉ quan tâm tới các bộ lọc có chiều dài lẻ, vì vậy có thể chọn chiều dài cho cửa sổ Blackman bằng 57 hoặc 59. Trong lần thiết kế thứ nhất ta chọn $L = 57$. Trường hợp L chẵn sẽ thảo luận sau. Đáp ứng của bộ lọc được thiết kế như ở hình 6.15(a) và rõ ràng là nó vượt xa đặc tả cần thiết.

Bằng cách thử và điều chỉnh như ví dụ 6.2, ta thay đổi v_c và L thế nào để vẫn đảm bảo những đặc tả là gợn sóng trong dải thông nhỏ hơn 2 dB và độ suy giảm dải triệt phải lớn hơn 70 dB. Trong ví dụ này, ta chọn được $v_c = 0,1278$ và $L = 39$ mà vẫn thỏa mãn đặc tả thiết kế, như ở hình 6.15(b). \square

6.1.3 Thiết kế bộ lọc thông cao

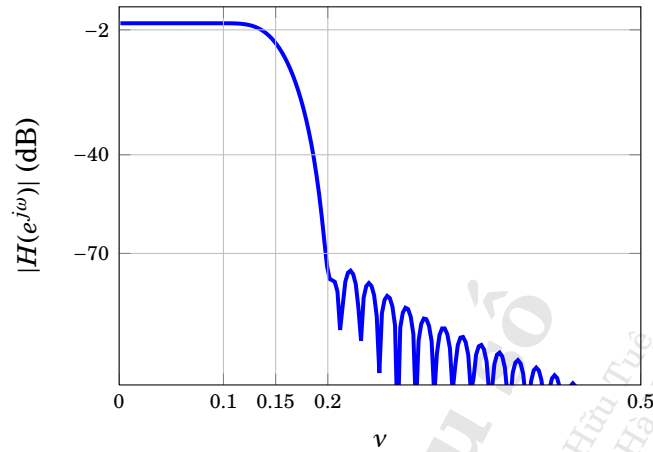
Cho đến bây giờ ta mới chỉ quan tâm đến thiết kế bộ lọc FIR thông thấp có đáp ứng xung là $h(n)$. Để phân biệt các tình huống khác, ta ký hiệu đáp ứng xung thông thấp là $h_{\text{lp}}(n)$ và đáp ứng tần số thông thấp tương ứng là $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$. Thấy rằng, nếu ta dịch chuyển $H_{\text{lp}}(e^{j\omega})$ một khoảng π thì sẽ có được một đáp ứng tần số thông cao, ký hiệu là $H_{\text{hp}}(e^{j\omega})$. Điều này được minh họa ở trong hình 6.16. Như vậy

$$H_{\text{hp}}(e^{j\omega}) = H_{\text{lp}}(e^{j(\omega-\pi)}) \quad (6.31)$$

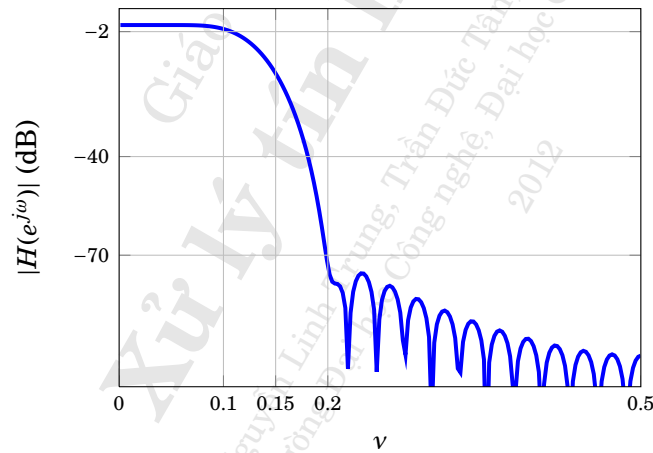
và đáp ứng xung tương ứng của bộ lọc thông cao là

$$h_{\text{hp}}(n) = (-1)^n h_{\text{lp}}(n). \quad (6.32)$$

Kết quả này cho thấy để thiết kế một bộ lọc thông cao thỏa đặc tả cho trước, ta có thể thiết kế một bộ lọc thông thấp tương ứng.



(a) Thiết kế lần thứ nhất: $L = 57$, $\nu_c = 0,15$

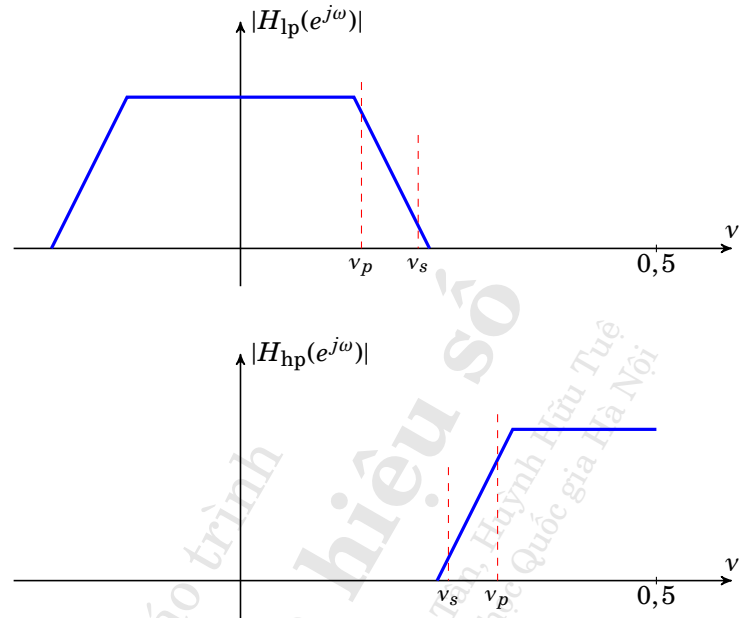


(b) Điều chỉnh thiết kế: $L = 39$, $\nu_c = 0,1278$

Hình 6.15: Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng cửa sổ Blackman.

Ví dụ 6.4 (Thiết kế bộ lọc FIR thông cao)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc FIR có những đặc tả sau: $F_p = 4$ kHz, $F_s = 2$ kHz, $A_p = 2$ dB, $A_s = 40$ dB, tần số lấy mẫu $F_S = 20$ kHz.



Hình 6.16: Thiết kế thông cao.

Từ đặc tả, ta thấy bộ lọc cần thiết kế là bộ lọc thông cao. Do đó, các thông số đặc tả tần số số là

$$v_p = \frac{F_p}{F_S} = \frac{4}{20} = 0,2$$

$$v_s = \frac{F_s}{F_S} = \frac{2}{20} = 0,1$$

và dải chuyển tiếp là

$$\Delta v = v_p - v_s = 0,2 - 0,1 = 0,1.$$

Với $A_s = 40$ dB, ta dùng bảng 6.2 để chọn cửa sổ Hanning hoặc Hamming. Nếu chọn cửa sổ Hanning, ta có chiều dài của bộ lọc là

$$L = \frac{C}{\Delta v} = \frac{3,21}{0,1} \approx 33.$$

Còn nếu chọn cửa sổ Hamming, ta có

$$L = \frac{3,47}{0,1} \approx 35.$$

Có thể thiết kế bộ lọc thông cao bằng một trong hai cách sau đây.

Cách 1: Chọn tần số cắt ν_c của bộ lọc thông thấp bằng

$$\nu_c = 0,5(\nu_p + \nu_s) = 0,15.$$

Khi đó, đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp tương ứng là

$$h_{lp}(n) = 2\nu_c \text{sinc}(2n\nu_c) = 0,3 \text{sinc}(0,3n).$$

Biết rằng, nếu đáp ứng tần số của bộ lọc lý tưởng có biên bộ bằng 1 ở gốc thì $1 - H_{lp}(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao. Do đó đáp ứng xung của bộ lọc thông cao bằng

$$\begin{aligned} h_{hp}(n) &= \delta(n) - h_{lp}(n) \\ &= \delta(n) - 0,3 \text{sinc}(0,3n). \end{aligned}$$

Kết quả thiết kế cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông cao $H_{hp}(e^{j\omega})$ như biểu diễn trong hình 6.17(a).

Cách 2: Chọn tần số cắt của bộ lọc thông thấp bằng

$$\nu_c = 0,5 - 0,5(\nu_p + \nu_s) = 0,35.$$

Ta có, đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp lý tưởng là

$$h_{id}(n) = 2\nu_c \text{sinc}(2n\nu_c) = 0,7 \text{sinc}(0,7n).$$

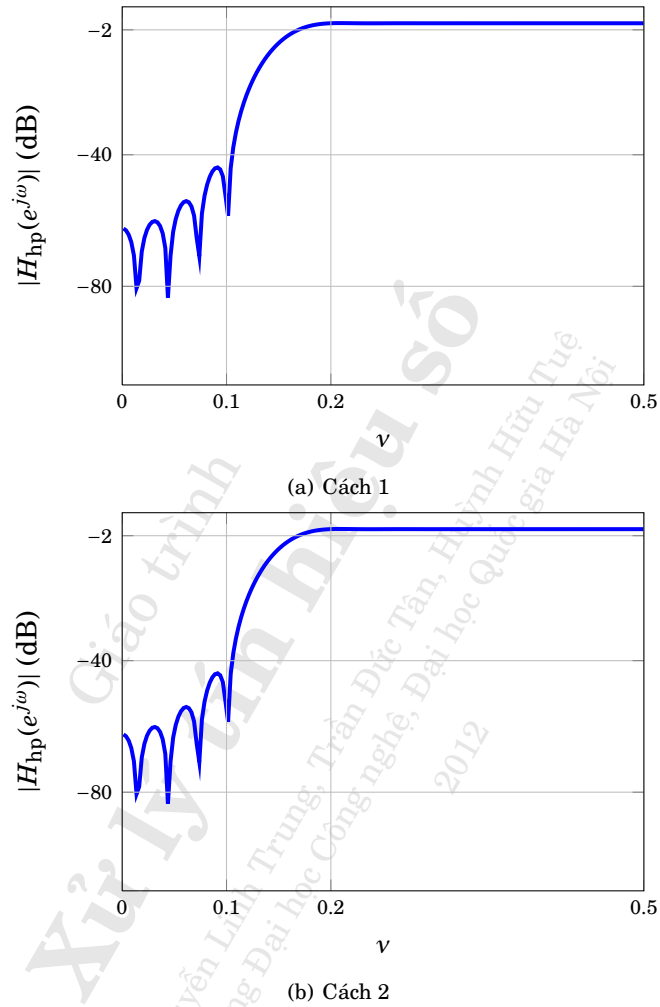
và đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp được thiết kế là

$$h_{lp}(n) = h_{id}(n)w(n).$$

Như vậy, đáp ứng xung của bộ lọc thông cao được thiết kế là

$$\begin{aligned} h_{hp}(n) &= (-1)^n h_{lp}(n) \\ &= (-1)^n 0,7 \text{sinc}(0,7n)w(n). \end{aligned}$$

Hình 6.17(b) là kết quả thiết kế bộ lọc thông cao theo cách này. \square

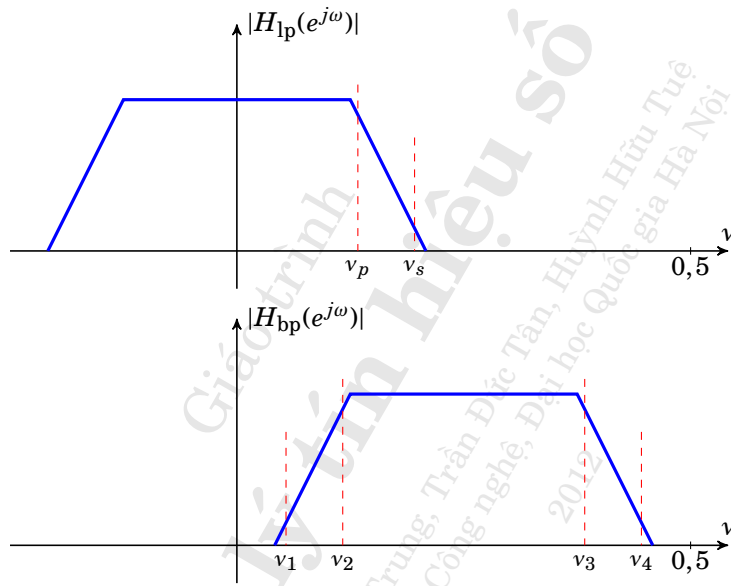


Hình 6.17: Thiết kế bộ lọc thông cao sử dụng cửa sổ Hanning theo hai cách, với $L = 33$ và $\nu_c = 0,15$.

Nhận thấy hai cách thiết kế trên đều cho cùng một kết quả. Thông thường người ta hay sử dụng cách thứ hai vì dễ tính toán và bảo đảm chất lượng của bộ lọc. Cách này thường được sử dụng cho lĩnh vực thiết kế dàn lọc.

6.1.4 Thiết kế bộ lọc thông dải

Đối với bộ lọc thông dải hay triệt dải, nếu muốn sử dụng lọc thông thấp nói trên thì cần tính đối xứng của đáp ứng tần số, như được minh họa trên hình 6.18. Từ bộ lọc thông thấp có thể suy ra bộ



Hình 6.18: Thiết kế thông dải.

lọc thông dải bởi phương trình

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega+\omega_0)}) + H_{lp}(e^{j(\omega-\omega_0)}), \quad (6.33)$$

trong đó

$$\omega_0 = \frac{v_2 + v_3}{2} = \frac{v_1 + v_4}{2}. \quad (6.34)$$

Với v_1, v_3, v_3 và v_4 cho trước, bộ lọc thông thấp sẽ có các đặc tả tần số sau:

$$v_c = \frac{v_3 + v_4}{2} - v_0; \quad (6.35)$$

$$v_p = v_3 - v_0 = \frac{v_3 - v_2}{2}; \quad (6.36)$$

$$v_s = v_4 - v_0 = \frac{v_4 - v_1}{2}. \quad (6.37)$$

Ví dụ 6.5 (Thiết kế bộ lọc FIR thông dải)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc số FIR thỏa các đặc tả: dải thông trong khoảng 4 đến 8 kHz, dải triệt trong khoảng $F < 2$ kHz và $F > 10$ kHz, $A_p = 3$ dB, $A_s = 45$ dB và $F_S = 25$ kHz.

Theo những đặc tả trên thì đây là một bộ lọc thông dải có các tần số số được chuẩn hóa là

$$v_1 = \frac{2}{25} = 0,08;$$

$$v_2 = \frac{4}{25} = 0,16;$$

$$v_3 = \frac{8}{25} = 0,32;$$

$$v_4 = \frac{10}{25} = 0,4.$$

Suy ra

$$v_0 = \frac{0,16 + 0,32}{2} = 0,24;$$

$$v_p = v_3 - v_0 = 0,32 - 0,24 = 0,08;$$

$$v_s = v_4 - v_0 = 0,4 - 0,24 = 0,16;$$

$$v_c = \frac{v_3 + v_4}{2} - v_0 = \frac{0,32 + 0,4}{2} = 0,12.$$

Đối chiếu bảng 6.2 với độ suy giảm $A_s = 45$ dB, ta thấy bộ lọc thông thấp tương ứng cần chọn thuộc loại Hamming với độ suy giảm dải triệt là 53 dB và độ dài của bộ lọc được ước chừng bởi

$$L = \frac{C}{v_s - v_p} = \frac{3,47}{0,16 - 0,08} = 43,375 \approx 44.$$

Cho đến bây giờ, ta chỉ thiết kế những bộ lọc có chiều dài lẻ, nên chọn $L = 45$, và kết quả thiết kế cho đáp ứng biên độ của bộ lọc thông cao như ở hình 6.19(a).

Bộ lọc dùng cửa sổ Hamming cho độ suy giảm dải triệt là 53 dB trong khi ta chỉ cần thỏa mãn 45 dB. Với độ thừa là 8 dB, có thể chọn chiều dài bộ lọc thấp hơn một ít. Thử nghiệm cho thấy, với $L = 27$ và $v_c = 0,956$ ta có đáp ứng tần số thỏa mãn đặc tả thiết kế, như trong hình 6.19(b).

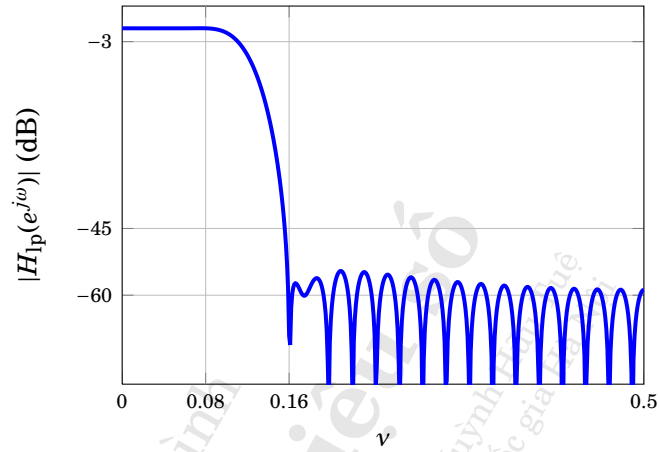
Hình 6.20 là đáp ứng tần số thông dải được thiết kế từ đáp ứng tần số thông thấp tương ứng (xem hình 6.19(b)), với $L = 27$ và $v_c = 0,956$.

□

Phương pháp thiết kế sử dụng cửa sổ như vừa được trình bày cho phép ta thiết kế các bộ lọc thông thấp, thông cao và thông dải, dựa trên bộ lọc thông thấp mà những thông số được tính toán thế nào để đặc tả thiết kế được thỏa mãn. Phương pháp luận khai triển đáp ứng tần số có tính đối xứng thành chuỗi Fourier không những có thể được sử dụng cho bộ lọc thông thấp mà còn cho tất cả các bộ lọc có đáp ứng tần số đối xứng. Tức là, phương pháp này có thể được sử dụng trực tiếp để thiết kế các bộ lọc thông thấp, thông cao, thông dải, triệt dải, v.v. Tuy nhiên, các phương pháp vừa được trình bày trên đây là tương đối thích hợp đối với bài toán thiết kế, và phương pháp thiết kế cũng dễ dàng hơn nhiều.

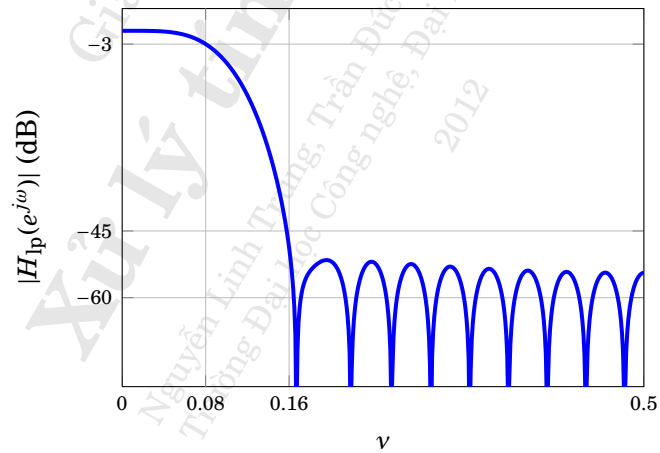
Có một trường hợp vẫn thường được quan tâm là các bộ lọc nửa băng*, tức là các bộ lọc có $v_c = 0,25$. Loại bộ lọc này mặc dù có chiều dài lớn nhưng thực chất một nửa hệ số là triệt tiêu, vì vậy về mặt điện tử thì có độ phức tạp thấp. Loại bộ lọc này được sử dụng trong lĩnh vực dàn lọc.

*Half-band filter.



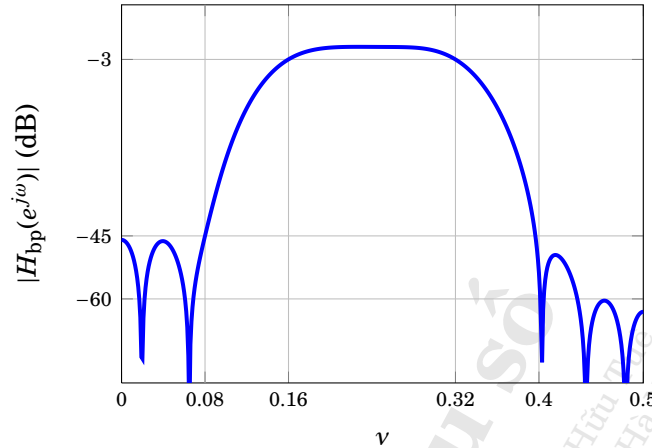
(a) Thiết kế lần thứ nhất: $L = 45$, $\nu_c = 0.12$

$$L = 27, \nu_c = 0.956$$



(b) Điều chỉnh thiết kế: $L = 27$, $\nu_c = 0.956$

Hình 6.19: Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp tương ứng với cửa sổ Hamming, dùng để thiết kế bộ lọc thông dải theo yêu cầu.



Hình 6.20: Thiết kế bộ lọc FIR thông dải, $L = 27$, $v_c = 0,956$.

6.2 Phương pháp lấy mẫu trên miền tần số

Về mặt cơ bản phương pháp này tương đối đơn giản và dễ hiểu. Thật vậy, biết rằng đáp ứng tần số là một hàm tuần hoàn theo ω có chu kỳ 2π . Như thế, ta chỉ cần lấy N mẫu của đáp ứng tần số $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ của một bộ lọc lý tưởng (thông thấp, thông cao, v.v.) trong chu kỳ $[0; 2\pi]$ và áp dụng biến đổi Fourier ngược rời rạc của N mẫu này để cho một chuỗi trong miền thời gian: $h(n) = \{h(0), h(1), \dots, h(N-1)\}$. Theo lý thuyết, biến đổi Fourier rời rạc của chuỗi $h(n)$ là một hàm theo ω có chu kỳ 2π và có giá trị trùng khớp với các mẫu lấy trong miền tần số. Nếu xem $h(n)$ là đáp ứng xung của một hệ thống FIR thì biến đổi Fourier của nó là đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống.

Rõ ràng là, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của bộ lọc được thiết kế không giống đáp ứng tần số $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ của bộ lọc lý tưởng. Vì vậy, ta có thể điều chỉnh chuỗi $h(n)$ bằng phương pháp cửa sổ, hay là điều chỉnh nó để tối ưu hóa một tiêu chí thiết kế nào đó, chẳng hạn trung bình bình phương tối thiểu. Tuy nhiên, khi việc áp dụng các phương pháp này trở thành phức tạp thì sẽ cần đến một phương pháp có hiệu quả cao hơn, là phương pháp gợn sóng đều và sẽ trình bày trong Mục 6.3.

Để minh họa những khía cạnh thực tiễn của phương pháp lấy mẫu trên miền tần số ta xét hai ví dụ sau.

Ví dụ 6.6 (Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng phương pháp lấy mẫu tần số)

Thiết kế một bộ lọc thông thấp có tần số cắt $\nu_c = 0,25$ có chiều dài $L = 20$.

Ta lấy mẫu đáp ứng tần số $H_{\text{id}}(e^{j\omega})$ của bộ lọc lý tưởng thông thấp tại L điểm cách đều nhau trên khoảng $[0; 1]$ của tần số ν , như trên hình 6.21. Ta thấy

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0 < \omega \leq 2\pi\nu_c \text{ hoặc } 2\pi(1 - \nu_c) \leq \omega < 2\pi, \\ 0, & \text{nếu } 2\pi\nu_c < \omega < 2\pi(1 - \nu_c). \end{cases} \quad (6.38)$$

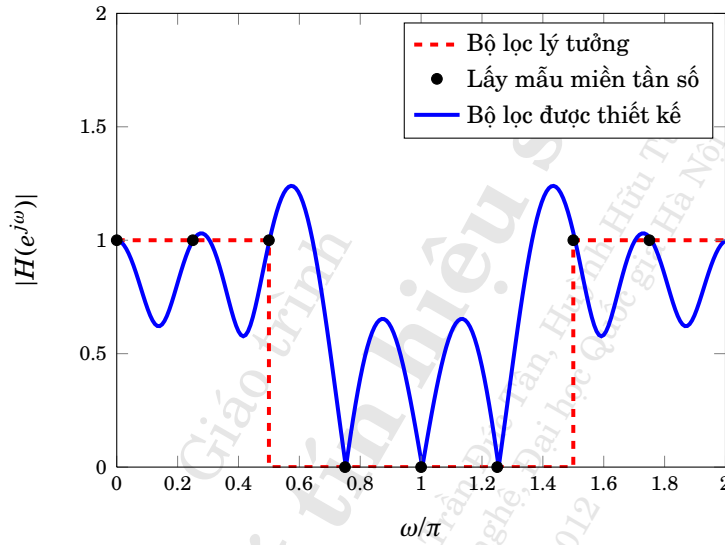
Với cách xác định biên độ như trong (6.38), tại điểm bất liên tục ν_c ta có $|H(e^{j2\pi\nu_c})| = 1$. Cách chọn này không thích hợp với giá trị của một hàm tại điểm bất liên tục và vì vậy kết quả có được chắc chắn sẽ có những dao động khá mạnh. Ngoài ra, lúc thiết kế một hệ thống nhân quả, tức phải chấp nhận một độ trễ bằng $N = (L - 1)/2$, thì độ trễ pha của $H(e^{j\omega})$ được xác định bởi $e^{-j\omega(L-1)/2}$. Vì khoảng lấy mẫu của ω là từ 0 đến 2π nên khoảng cách giữa các tần số lấy mẫu là $2\pi/N$. Như thế, độ trễ pha của các mẫu $H(k)$ trong miền tần số là $-k(L - 1)/L$. Ngoài ra, với bộ lọc có giá trị thực trong miền thời gian, thì đáp ứng biên độ có tính đối xứng và đáp ứng pha có tính phản đối xứng, cho nên pha của các mẫu trong miền tần số từ $L/2$ trở đi là bằng pha của các mẫu trước đó nhưng ngược dấu, tức ta có $H(k) = H^*(L - k)$.

Hình 6.21 là đáp ứng tần số của bộ lọc vừa được thiết kế. Như vừa được trình bày ở trên, hiện tượng Gibbs xảy ra trong đáp ứng biên độ này. Để tránh tình huống này ta có thể thay biên độ của đáp ứng tần số tại điểm bất liên tục bằng 0,5 thay vì bằng 1. Lúc đó ta có

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0 < \omega < 2\pi\nu_c \text{ hoặc } 2\pi(1 - \nu_c) < \omega < 2\pi, \\ 0,5, & \text{nếu } \omega = 2\pi\nu_c \text{ hoặc } \omega = 2\pi(1 - \nu_c), \\ 0, & \text{nếu } 2\pi\nu_c < \omega < 2\pi(1 - \nu_c). \end{cases} \quad (6.39)$$

Cách chọn lựa này theo lý thuyết của chuỗi Fourier cho phép ta giảm

bớt độ dao động. Thật vậy, kết quả của phương pháp này (đường nét đứt trong hình 6.22) cho thấy hoàn toàn tương thích với lý thuyết. Và với độ dao động thấp thì đường nét đứt là lựa chọn thích hợp. Tuy nhiên ta có thể điều chỉnh v_c và dải thông v_p để có kết quả thỏa mãn các đặc tả thiết kế.



Hình 6.21: Minh họa phương pháp thiết kế bằng lấy mẫu tần số.

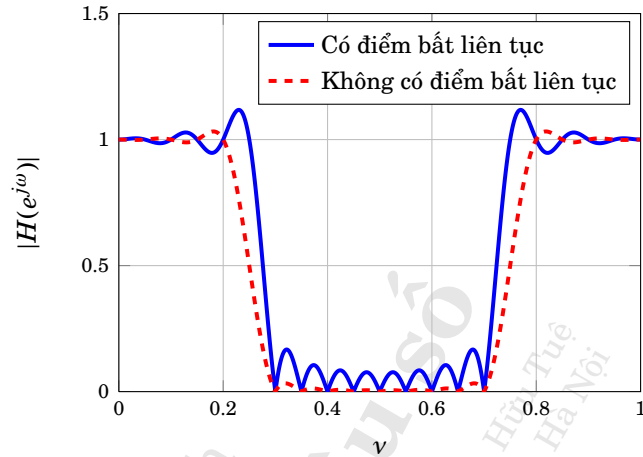
□

Ví dụ 6.7 (Thiết kế bộ lọc FIR thông dải bằng phương pháp lấy mẫu tần số)

Thiết kế một bộ lọc thông dải lý tưởng có tần số cắt $v_1 = 0,25$ và $v_2 = 0,75$.

Bộ lọc lý tưởng thông dải được biểu diễn trong hình 6.23. Tương tự ví dụ 6.6, ta lấy L mẫu cách đều nhau của $H(e^{j\omega})$ trong miền tần số trên khoảng $[0;1]$. Ta thấy

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1, & \text{nếu } 2\pi v_1 \leq \omega \leq 2\pi v_2, \\ 0, & \text{nếu } \omega < 2\pi v_1 \text{ hoặc } \omega > 2\pi v_2. \end{cases}$$



Hình 6.22: So sánh đáp ứng tần số biên độ.

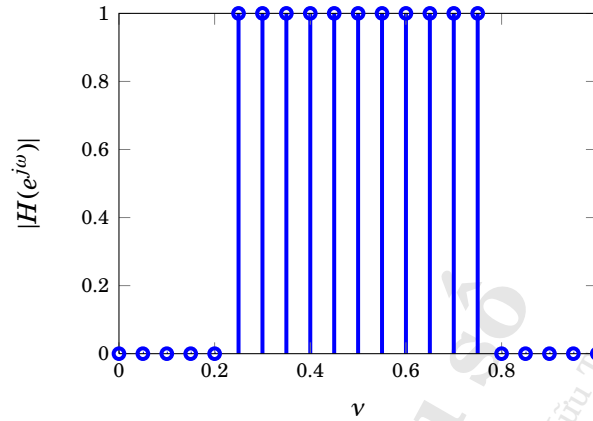
Cũng như trong ví dụ 6.6, cách chọn mẫu này cho thấy biên độ tại điểm bất liên tục bằng 1 nên kết quả sẽ cho những dao động tương đối lớn. Để giảm thiểu độ dao động tại điểm bất liên tục, chọn biên độ tại điểm bất liên tục là giá trị trung bình, tức là 0,5.

Hai phương pháp tương ứng với hai cách lấy mẫu tại điểm bất liên tục là biên độ bằng 1 và 0,5 cho ta kết quả trong hình 6.24. Và đúng như đã thảo luận, kết quả đạt được có bản chất giống ví dụ 6.6, có nghĩa là cách chọn mẫu theo trị trung bình cho ta độ dao động nhỏ hơn nhiều.

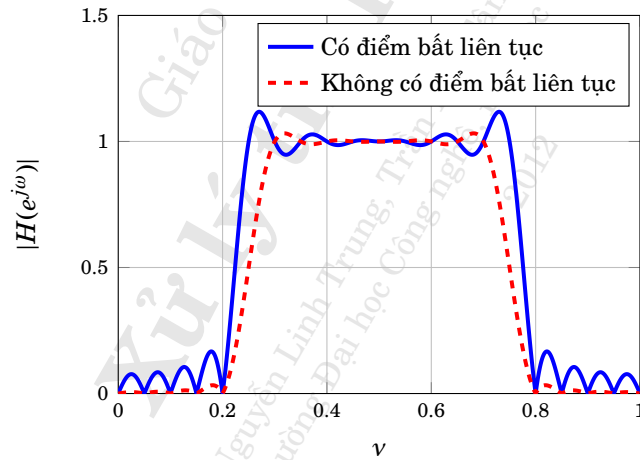
□

6.3 Phương pháp thiết kế Parks-McClellan

Như đã phân tích trên đây khi thiết kế bộ lọc FIR vấn đề thường quan tâm là các bộ lọc có pha tuyến tính. Bởi vì đặc tính này tương đối thích hợp cho các hệ truyền dẫn. Phương pháp thiết kế FIR bằng cửa sổ mặc dù dễ dàng và tương đối linh hoạt, nhưng nó vẫn có những ràng buộc như độ gợn sóng trong dải thông và trong dải triệt



Hình 6.23: Đáp ứng tần số lý tưởng của bộ lọc thông dải được lấy mẫu.



Hình 6.24: So sánh đáp ứng tần số biên độ khi có điểm bất liên tục (nét liền) và khi có sự giảm bớt bất liên tục (nét đứt).

là bằng nhau. Đầu những năm 70 của thế kỷ 20, Parks và McClellan đã đề nghị một phương pháp thiết kế có thể sử dụng cho những tình huống mà độ ràng buộc chặt chẽ hơn nhiều, như độ gợn sóng trong

các dải tần khác nhau. Phương pháp này chủ yếu sử dụng phương pháp xấp xỉ Chebyshev để áp đặt các gợn sóng này. Hơn nữa, với bộ lọc có pha tuyến tính như đã phân tích với phương pháp cửa sổ, nếu đáp ứng tần số là một hàm số thực và có biên độ khá nhỏ lúc có giá trị âm (tức là có pha bằng π) thì tác động không đáng kể với đầu ra. Do đó, đáp ứng tần số có biên độ thực đối xứng này được tạm xem như là đáp ứng tần số của biên độ. Như vậy, pha tuyến tính cuối cùng chỉ là một độ trễ nào đấy. Lập luận này hàm ý

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}, \quad (6.40)$$

trong đó $A(e^{j\omega})$ là một hàm số thực có tính đối xứng và sẽ được thảo luận trong phần tiếp theo.

Một cách tổng quát, bộ lọc có tính chất như trình bày gọi là bộ lọc có **pha tuyến tính mở rộng** và được định nghĩa như sau:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(n_0\omega + \phi)}. \quad (6.41)$$

Trong quá trình thiết kế ta cần chọn thế nào để $A(e^{j\omega})$ có giá trị âm không đáng kể. Vì độ trễ là tuyến tính và $A(e^{j\omega})$ là một hàm thực chẵn, đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ có pha tuyến tính. Thông số ϕ phải được chọn thế nào để hữu ích cho quá trình thiết kế đồng thời có kết quả thích ứng với thực tiễn (tức là đáp ứng xung phải là số thực).

Như trong phương pháp thiết kế các bộ lọc FIR bằng cửa sổ trong mục 6.1, đáp ứng xung là hữu hạn và có tính đối xứng như mong muốn. Tuy nhiên, phương pháp này bắt buộc chiều dài bộ lọc phải lẻ. Trong phần này, với định nghĩa pha tuyến tính mở rộng, chiều dài lẻ bắt buộc trong phần trên sẽ không còn phải là một ràng buộc nữa. Mặt khác, để thấy rõ độ trễ (tức là pha tuyến tính), xét một đáp ứng xung $h(n)$ nhân quả và hữu hạn, có giá trị từ 0 đến L . Hàm truyền FIR có bậc là $N = L - 1$. Để có thể có pha tuyến tính, $h(n)$ cần có một số tính chất đối xứng thế nào để trong đáp ứng tần số xuất hiện hai hàm mũ có pha ngược dấu. Tùy theo chiều dài chẵn hay lẻ và tính đối xứng hoặc phản đối xứng của $h(n)$ mà ta phân làm bốn loại bộ lọc như sau:

1. Loại I: $h(n)$ đối xứng, L lẻ;

2. Loại II: $h(n)$ đối xứng, L chẵn;
3. Loại III: $h(n)$ phản đối xứng, L lẻ;
4. Loại IV: $h(n)$ phản đối xứng, L chẵn.

Loại I

Đáp ứng xung $h(n)$ đối xứng được cho bởi

$$h(n) = h(N - n), \quad n = 0, \dots, N, \quad (6.42)$$

và có chiều dài L lẻ nên N là số chẵn ($N = L - 1$). Đáp ứng tần số của bộ lọc loại I là

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^N h(n)e^{-j\omega n}. \quad (6.43)$$

Với tính đối xứng của $h(n)$, $H(e^{j\omega})$ có thể được rút gọn như sau

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N}{2}\right) + \sum_{n=N/2+1}^N h(n)e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega \frac{N}{2}} \left[\sum_{n=0}^{N/2} a_n \cos(\omega n) \right], \end{aligned} \quad (6.44)$$

trong đó và

$$a_0 = h\left(\frac{N}{2}\right), \quad a_n = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}.$$

Đặt

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N/2} a_n \cos(\omega n),$$

ta thấy ngay $A(e^{j\omega})$ là một hàm thực chẵn theo ω . Do đó, $H(e^{j\omega})$ được biểu diễn dưới dạng như (6.41) mà ta mong muốn

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega \frac{N}{2}}. \quad (6.45)$$

Loại II

Đáp ứng xung cũng theo biểu thức (6.42), như với N lẻ. Trong trường hợp này, đáp ứng tần số sẽ được biểu diễn dưới dạng

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{(N+1)/2} b_n \cos \left\{ \omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\} \right] e^{-j\omega \frac{N}{2}} \quad (6.46)$$

trong đó

$$b_n = 2h \left(\frac{N+1}{2} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}. \quad (6.47)$$

Loại III

Đáp ứng xung $h(n)$ phản đối xứng được cho bởi

$$h(n) = h(N-n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6.48)$$

và với chiều dài L lẻ thì N là số chẵn. Đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ có thể được rút gọn thành

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=0}^{N/2} c_n \sin(\omega n) \right] e^{-j(\omega \frac{N}{2} - \frac{\pi}{2})}, \quad (6.49)$$

trong đó

$$c_n = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}. \quad (6.50)$$

Dạng này cũng thỏa mãn định nghĩa của một bộ lọc có pha tuyến tính mở rộng.

Loại IV

Đáp ứng xung loại này cũng được cho bởi biểu thức (6.48), nhưng với N lẻ. Từ đó, đáp ứng tần số có thể rút gọn thành

$$H(e^{j\omega}) = \left[\sum_{n=1}^{(N+1)/2} d_n \sin \left(\omega \left\{ n - \frac{1}{2} \right\} \right) \right] e^{-j(\omega \frac{N}{2} - \frac{\pi}{2})}, \quad (6.51)$$

trong đó

$$d_n = 2h \left(\frac{N+1}{2} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N+1}{2}. \quad (6.52)$$

Nhắc lại rằng, thiết kế một bộ lọc FIR thỏa mãn các đặc tả tức là tìm một bộ lọc có chiều dài và các hệ số tương ứng. Để các đặc tả thỏa mãn như thế, tùy thuộc ta chọn loại bộ lọc có pha tuyến tính mở rộng I, II, III hay IV đề cập trên đây mà xác định các thông số của $A(e^{j\omega})$ và từ đó suy ra $h(n)$ tương ứng. Thông thường, các đặc tả được mô tả bởi các mặt nạ thiết kế như được minh họa ở hình 6.11. Hình này cho thấy, các ràng buộc của dải thông, dải triệt và độ suy giảm trong từng dải, những phương pháp thiết kế được trình bày cho đến bây giờ khó có thể thực hiện được những mặt nạ như thế này và vì thế phương pháp Park–McClellan trở nên rất quan trọng. Phương pháp này được rút gọn thành chọn $A(e^{j\omega})$ thế nào để thỏa mãn những ràng buộc được biểu diễn bởi những mặt nạ này. Chú ý rằng, $A(e^{j\omega})$ của bốn loại bộ lọc FIR có pha tuyến tính mở rộng chứa những hàm lượng giác theo ω , và chính đặc tính này đã cho phép McClellan sử dụng phương pháp tối ưu hóa sử dụng **tiêu chí minmax** dựa trên xấp xỉ Chebyshev*. Phương pháp này thường được gọi là thiết kế **bộ lọc FIR có gợn sóng đều**, cũng gọi là thiết kế bộ lọc FIR có pha tuyến tính tối ưu, hoặc phương pháp thiết kế bộ lọc FIR sử dụng xấp xỉ Chebyshev.

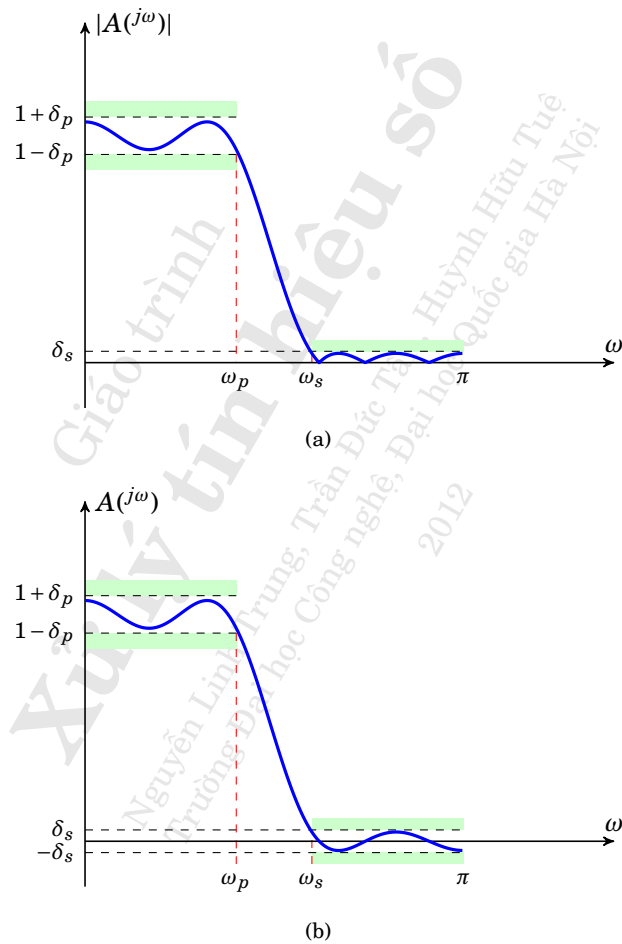
Về mặt cơ bản, áp dụng phương pháp Chebyshev không có gì phức tạp. Tuy nhiên, nó rất chi li và khá dài, vì vậy chúng ta chỉ cần khai triển phương pháp cho một trường hợp đặc biệt để hiểu rõ phương pháp luận cho trường hợp một bộ lọc FIR không nhân quả có pha mở rộng triệt tiêu. Đây chính là trường hợp mà ta đã phân tích tương đối kỹ càng cho phương pháp cửa sổ. Pha tuyến tính chính là độ trễ mà ta cần sử dụng để biến bộ lọc này thành nhân quả. Xem hình 6.25 ta thấy ngay đáp ứng tần số của bộ lọc này có dạng $A(e^{j\omega})$ trong đó $A(e^{j\omega})$ là một hàm thực chẵn theo ω có dạng

$$A(e^{j\omega}) = h(0) + 2 \sum_{n=1}^{N/2} h(n) \cos(n\omega). \quad (6.53)$$

Bộ lọc này thuộc loại I như đã trình bày trên đây với pha mở rộng triệt tiêu. Trong trường hợp này, thiết kế bộ lọc chính là tìm chiều

*Đầu những năm 70 của thế kỷ 20, McClellan trong luận án tiến sĩ của mình đã trình bày một phương pháp rất quan trọng mang tên là Parks–McClellan, hiện đang được sử dụng đại trà trong công nghệ cũng như trong lĩnh vực hàn lâm.

đài cũng như các hệ số $h(n)$ để $A(e^{j\omega})$ thỏa mãn các đặc tả của mặt nạ. Nếu mặt nạ áp đặt vào biên độ thì chính là $|A(e^{j\omega})|$ phải thỏa mãn mặt nạ này, như trên hình 6.25(a). Mặt nạ biên độ có thể mở rộng để dành cho những dải thông trong đó $A(e^{j\omega})$ âm, như trên hình 6.25(b).



Hình 6.25: Mặt nạ biên độ của $A(e^{j\omega})$.

6.3.1 Tiêu chí sai số minmax

Trước khi áp dụng phương pháp tối ưu hóa với tiêu chí minmax, ta nhớ rằng

$$T_k(\cos \theta) = \cos(k\theta), \quad k > 0, \quad (6.54)$$

trong đó $T_k(x)$ là đa thức bậc k Chebyshev, theo công thức (??) trong chương 5. Các đa thức Chebyshev có thể được tính từ các biểu thức đệ qui sau đây

$$T_0(x) = 1 \quad (6.55)$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2. \quad (6.56)$$

Đa thức Chebyshev là một họ các đa thức trực giao trên khoảng $[0; 1]$. Đặt

$$g(n) = \begin{cases} h(n), & n = 0 \\ 2h(n), & n = 1, \dots, N/2. \end{cases} \quad (6.57)$$

Ta có thể viết lại $A(e^{j\omega})$ từ (6.53) như sau:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N/2} g(n) \cos(n\omega) \quad (6.58)$$

$$= \sum_{n=0}^{N/2} g(n) T_n(x)|_{x=\cos(\omega)}. \quad (6.59)$$

Như thế $A(e^{j\omega})$ có thể được xem như một đa thức lượng giác, tức là một đa thức có biến $x = \cos(n\omega)$.

Như đã được đề cập, phương pháp xấp xỉ Chebyshev (hoặc tối ưu Chebyshev) được áp dụng với hiệu quả cao lúc tiêu chí tối ưu là sai số tuyệt đối. Gọi $A_d(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số lý tưởng ta mong muốn. Gọi $W(e^{j\omega})$ là hàm trọng số được dùng để định nghĩa sai số trong miền tần số như sau:

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [A_d(e^{j\omega}) - A(e^{j\omega})]. \quad (6.60)$$

Cách chọn hợp lý nhất cho hàm trọng số này là

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{\delta_p}, & \omega \in S_p, \\ \frac{1}{\delta_s}, & \omega \in S_s, \end{cases} \quad (6.61)$$

trong đó S_p và S_s là dải thông và dải triệt, δ_p là độ gợn sóng tuyến tính trong dải thông và δ_s là độ triệt tuyến tính trong dải triệt. Ta cũng có thể chọn hàm trọng số bằng cách chuẩn hóa như sau

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{\delta_s}{\delta_p}, & \omega \in S_p, \\ 1, & \omega \in S_s. \end{cases} \quad (6.62)$$

Thông thường những đặc tả nhằm mô tả những ràng buộc trên đáp ứng biên độ của dải thông và dải triệt, nhưng không có ràng buộc gì trong dải chuyển tiếp. Gọi S_v là tập hợp các dải tần số có đặc tả. Như thế, S_v là một tập compact trong khoảng $[0; 0.5]$, được xác định bởi

$$S_v = S_p \cap S_s, \quad (6.63)$$

và được chi tiết hóa đối với các loại bộ lọc khác nhau như trong bảng 6.3.

Bảng 6.3: Tập hợp các dải tần có đặc tả

Loại bộ lọc	S_v
Thông thấp	$[0, v_p] \cup [v_s, 1/2]$
Thông cao	$[0, v_s] \cup [v_p, 1/2]$
Thông dải	$[0, v_{s1}] \cup [v_{p1}, v_{p2}] \cup [v_{s2}, 1/2]$
Triệt dải	$[0, v_{p1}] \cup [v_{s1}, v_{s2}] \cup [v_{p2}, 1/2]$

Tiêu chí minmax trong quá trình thiết kế là tìm đáp án $g(n)$ của bài toán tối sau đây

$$g^*(n) = \arg \left[\min_{g(n)} \left\{ \max_{\omega \in S_v} E(e^{j\omega}) \right\} \right] \quad (6.64)$$

Sử dụng phương trình 6.64, ta thấy với biến $x = \cos(\omega)$ bài toán trở thành minmax theo đa thức Chebyshev theo x như sau:

$$g^*(n) = \arg \left[\min_{g(n)} \left\{ \max_{x \in F} W(e^{j\omega}) \left(A_d(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^{N/2} g(n) T_n(x) \right) \Big|_{x=\cos(\omega)} \right\} \right] \quad (6.65)$$

trong đó F là ảnh của S_v bởi ánh xạ $x = \cos(\omega)$. Bài toán tối ưu hóa này đã được Chebyshev giải quyết. Phương pháp tính số thực tiễn được McClellan xây dựng dựa trên **định lý xen kẽ*** sau đây: $g(n)$ đạt giá tối ưu $g^*(n)$ khi và chỉ khi hiện hữu $M + 2$ tần số tối ưu cục bộ v_0, v_1, \dots, v_{M+1} trong tập S_v thế nào để $E(v_{k+1}) = -E(v_k)$ và $|E(v_k)| = \delta$, với $k = 0, \dots, M + 1$.

Chính kết quả của định lý này cho thấy tại sao nó được gọi là định lý xen kẽ và là lí do tại sao bộ lọc được thiết kế dùng phương này gọi là bộ lọc có gợn sóng đều. Với bộ lọc có gợn sóng đều được minh họa ở hình 6.26, có độ gợn sóng dải thông là $\delta_p = 0,06$, độ suy giảm của dải triệt $\delta_s = 0,04$ và bậc của bộ lọc là $L - 1 = 12$ (tức là $M = 6$), ta thấy có bốn tần số tối ưu cục bộ trong dải thông và bốn tần số tối ưu cục bộ trong dải triệt. Như thế số tần số tối ưu cục bộ là $M + 2 = 8$. Định lý xen kẽ cho thấy đáp ứng tần số biên độ mở rộng này chính là tần số tối ưu.

6.3.2 Phương pháp thiết kế

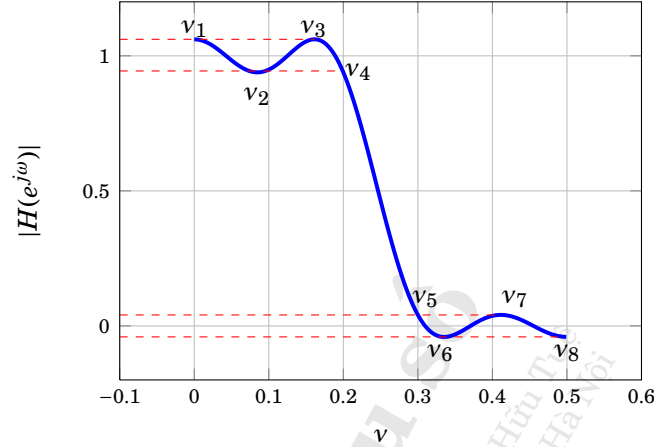
Phương pháp Parks–McClellan được tóm lược trong phương pháp thiết kế 6.2. Về cơ bản nó là một phương pháp lặp được xây dựng dựa trên định lý xen kẽ.

Phương pháp 6.2 – Thiết kế bộ lọc FIR bằng phương pháp Parks–McClellan.

1. Khởi động bởi $M + 2$ giá trị v_k ;
2. Dựa trên các giá trị của $E(e^{j2\pi v_k})$, điều chỉnh các tần số v_k cho đến lúc các $E(e^{j2\pi v_k})$ thỏa mãn điều kiện xen kẽ của định lý, và cho ra kết quả tối ưu $g^*(n)$ theo (6.65);
3. Dùng mối quan hệ (6.57) để suy ra đáp ứng xung $h(n)$.

Lập trình cho thuật toán này tương đối phức tạp tuy nhiên có rất nhiều chương trình được viết theo ngôn ngữ Fortran, C, C++, và đặc

*Alternation theorem.



Hình 6.26: Đáp ứng tần số có gợn sóng đều, với $\nu_p = 0, 2$, $\nu_s = 0, 3$. Có bốn tần số tối ưu trong dải thông và bốn trong dải triệt.

biệt là MATLAB trong đó MATLAB là thuận tiện nhất mà ta có thể sử dụng dễ dàng cho công việc hàng ngày. Chỉ cần hiểu rõ những khái niệm cơ bản vừa được trình bày trên đây thì ta có thể sử dụng một cách có hiệu quả chương trình thiết kế dùng MATLAB*.

Thông thường, độ gợn sóng, độ suy giảm và dải chuyển tiếp là những thông số có thể được thỏa mãn bằng cách chọn chiều dài bộ lọc thích hợp. Chiều dài của bộ lọc thông thấp thường được ước lượng bởi biểu thức do Kaiser đề nghị như sau:

$$L = 1 + \frac{-10 \log_{10}(\delta_p \delta_s) - 13}{2,324 \Delta \omega}, \quad (6.66)$$

trong đó $\Delta \omega = 2\pi(\nu_s - \nu_p)$. Hermann đề nghị một công thức khác, có ước lượng sát với thực tiễn hơn và MATLAB sử dụng, như sau:

$$L \approx 1 + \frac{1}{\Delta \nu} K(\delta_1, \delta_2, \Delta \nu), \quad (6.67)$$

trong đó

$$K(\delta_1, \delta_2, \Delta \nu) = C_1(\delta_1) \log(\delta_2) + C_2(\delta_1) + C_3(\delta_1, \delta_2)(\Delta \nu)^2, \quad (6.68)$$

*Để hiểu thật rõ các chi tiết giải tích cũng như lập trình, độc giả có thể tham khảo giáo trình của Oppenheim, được liệt kê trong phần tài liệu tham khảo.

với

$$C_1(\delta_1) = (0,0729 \log \delta_1)^2 + 0,07114 \log \delta_1 - 0,4761, \quad (6.69)$$

$$C_2(\delta_2) = (0,0518 \log \delta_2)^2 + 0,59410 \log \delta_2 - 0,4278, \quad (6.70)$$

$$C_3(\delta_3) = 11,01217 + 0,541244(\log \delta_1 - \log \delta_2). \quad (6.71)$$

Công thức Herman cho bởi (6.67) đưa ra một ước lượng thông thường nhỏ hơn cần thiết, cần phải điều chỉnh thêm một số đơn vị. Lúc thiết kế ta sẽ bắt đầu với L nhỏ nhất xem có thỏa mãn đặc tả không. Nếu không thỏa mãn, ta sẽ tăng dần chiều dài lên. MATLAB có lệnh dùng để ước lượng bậc bộ lọc – `firpmord` – đã tăng hai đơn vị so với công thức Kaiser nên có thể thỏa mãn ngay lần chạy đầu tiên. Công thức này cũng cho thấy chiều dài bộ lọc tỷ lệ nghịch với dải chuyển tiếp. Như vậy, để thỏa mãn các bộ lọc có dải chuyển tiếp hẹp, ta cần sử dụng bậc bộ lọc lớn.

Ví dụ 6.8 (Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp bằng phương pháp Parks–McClellan)

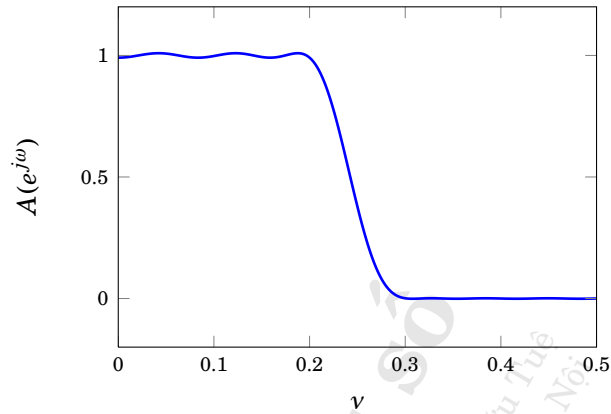
Ta muốn thiết kế một bộ lọc thông thấp có (i) tần số cắt thông dải là $\nu_p = 0,2$, (ii) tần số cắt triệt dải là $\nu_s = 0,3$, (iii) độ uốn lượn đều thông dải là $\delta_p = 0,01$, (iv) độ suy giảm dải triệt là $\delta_s = 0,001$.

Áp dụng công thức Herman, ta tính được chiều dài bộ lọc là $L = 27$. Kết quả được minh họa ở hình 6.27 và được làm rõ hơn ở hình 6.28 cho thấy độ gợn sóng và độ suy giảm không thỏa mãn đặc tả thiết kế. Vì thế, cần tăng chiều dài cho đến lúc kết quả thiết kế thỏa mãn điều kiện đặc tả. Giả sử ta tăng chiều dài bộ lọc là 1, kết quả tương ứng được minh họa ở hình 6.29 và thỏa mãn các đặc tả.

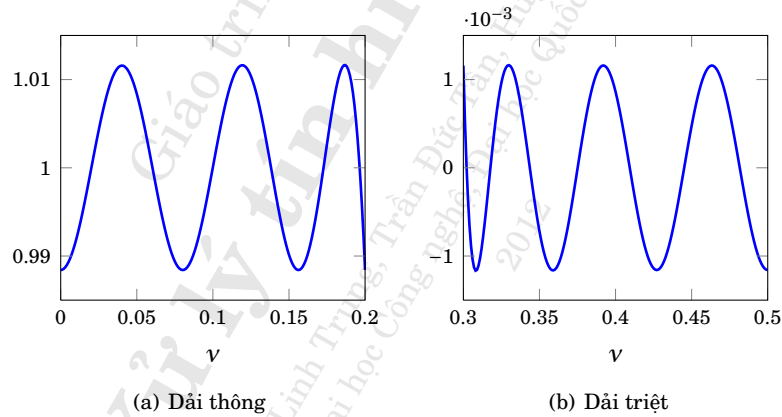
□

Ví dụ 6.9 (Thiết kế bộ lọc FIR thông dải bằng phương pháp Parks–McClellan)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc thông dải có tần số lấy mẫu là 200 Hz , và có các tần số đặc tả: (i) $F_{s1} = 36 \text{ Hz}$, (ii) $F_{p1} = 40 \text{ Hz}$, (iii) $F_{p2} = 60 \text{ Hz}$, (iv) $F_{s2} = 64 \text{ Hz}$. Độ gợn sóng $\delta_p = 0,02$ và độ suy giảm dải triệt $\delta_s = 0,02$.



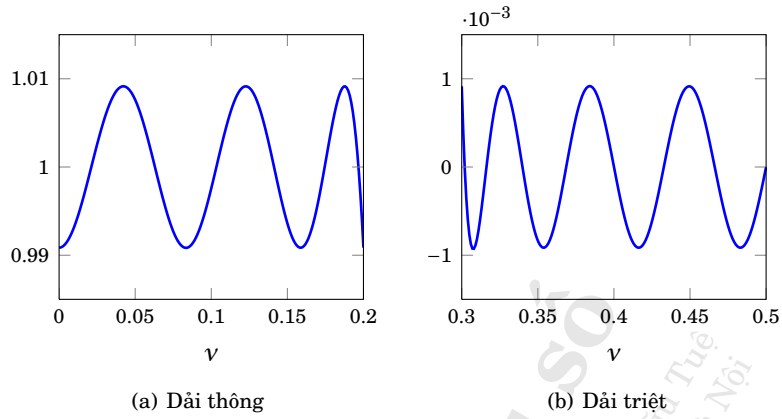
Hình 6.27: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp [Ví dụ 6.8].



Hình 6.28: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp trong dải thông và dải triệt [Ví dụ 6.8].

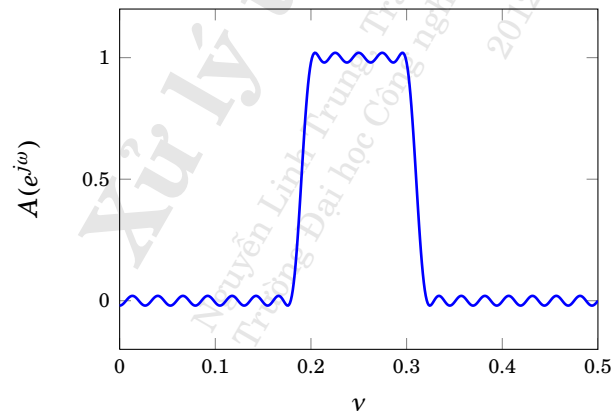
Chuẩn hóa trong miền tần số số ta có $\nu_{s1} = 0,18$, $\nu_{p1} = 0,2$, $\nu_{p2} = 0,3$, $\nu_{s2} = 0,32$. Ta thấy ngay bộ lọc này có dải chuyển tiếp khá hẹp: $\delta_{nu} = 0,02$. Theo công thức Herman, chiều dài bộ lọc được tính là $L = 74$.

Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc này được thiết kế lần đầu như trên hình 6.30, với độ gợn sóng dải thông và dải triệt chưa thỏa mãn



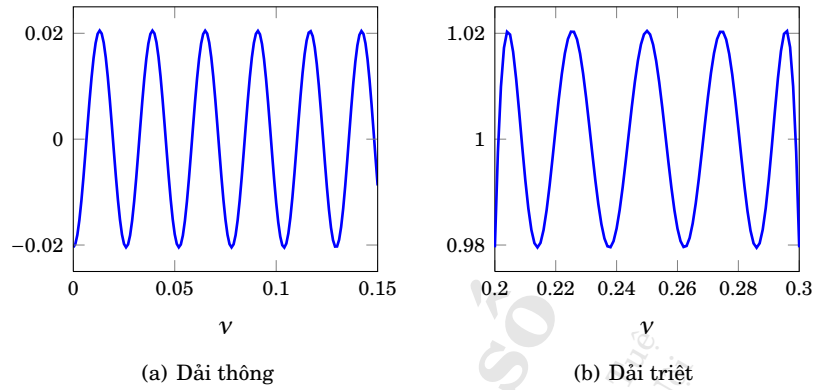
Hình 6.29: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông thấp và dải thông trong dải triệt sau khi nâng bậc bộ lọc [Ví dụ 6.8].

các đặc tả được thể hiện rõ trên hình 6.31. Sau khi tăng chiều dài bộ lọc, đáp ứng đã thỏa mãn như trên hình 6.32.

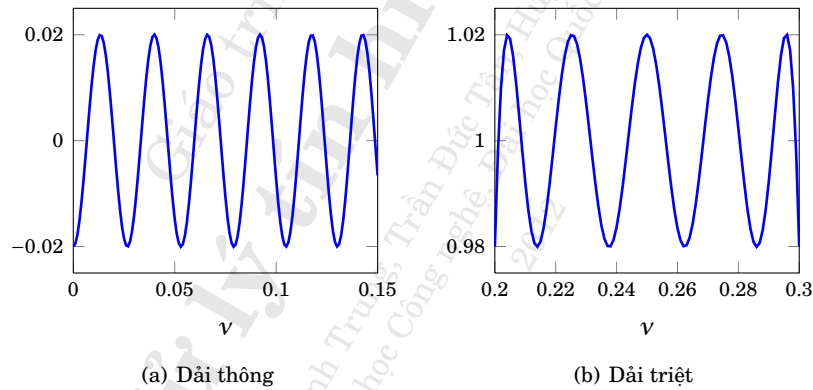


Hình 6.30: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải [Ví dụ 6.9].

□



Hình 6.31: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải trong dải thông và dải triệt [Ví dụ 6.9].



Hình 6.32: Đáp ứng tần số biên độ bộ lọc thông dải trong dải thông và dải triệt sau khi nâng bậc bộ lọc [Ví dụ 6.9].

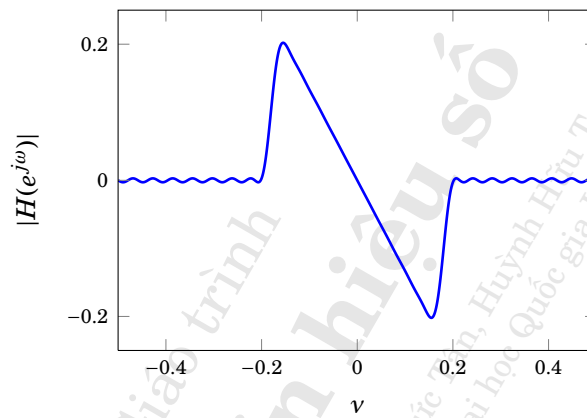
Thiết kế một bộ lọc vi phân và bộ lọc Hilbert

Bộ lọc vi phân* và **bộ lọc Hilbert[†]** là những thiết bị ta gặp khá thường xuyên trong cấu trúc của hệ thống truyền tin. Đáp ứng tần số của hai bộ lọc này được minh họa ở hình 6.33 và hình 6.34.

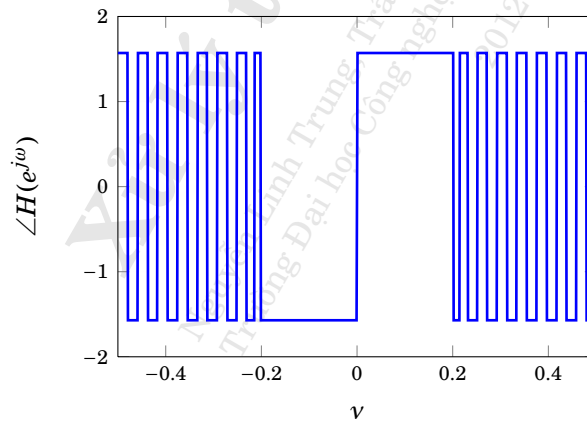
*Differentiator.

[†]Hilbert transformer.

Chú ý rằng tác động của đạo hàm hay trễ pha của bộ lọc Hilbert chỉ cần thỏa mãn trên dải thông ta quan tâm. Và như thế phương pháp của số là hoàn toàn thích hợp cho thiết kế các loại bộ lọc này tức là triển khai đáp ứng tần số thành một chuỗi Fourier và xử lý với cửa số thể nào để đáp ứng tần số thỏa mãn các đặc tả. Do Những phương pháp này đã được đưa vào MATLAB với những lệnh đặc biệt.

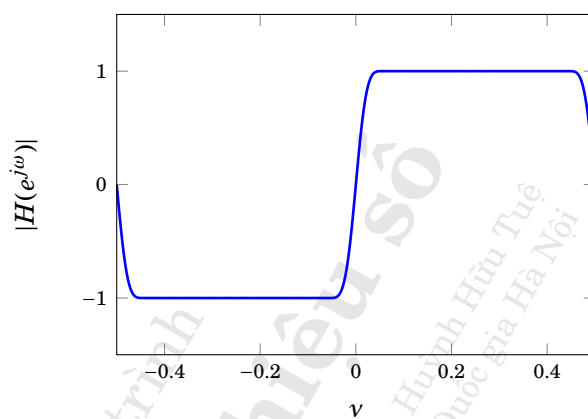


(a) Đáp ứng biên độ

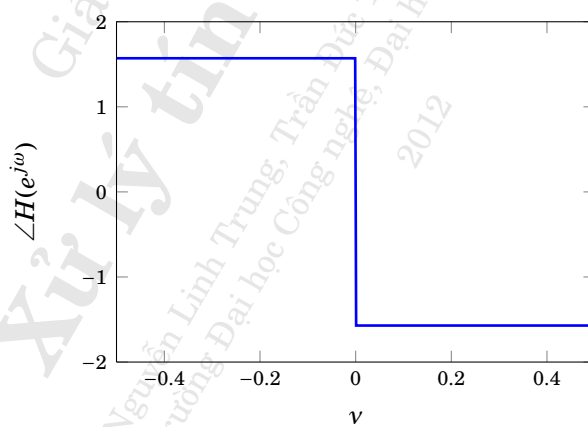


(b) Đáp ứng pha

Hình 6.33: Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc vi phân.



(a) Đáp ứng biên độ



(b) Đáp ứng pha

Hình 6.34: Đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc Hilbert.

Bài tập chương 6

6.1. Sử dụng phương pháp của sổ để thiết kế một bộ lọc FIR thông thấp có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/5, \\ 0, & \pi/5 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Xác định các hệ số của bộ lọc 30 trọng số sử dụng phương pháp của sổ, áp dụng của sổ hình chữ nhật.
- Xác định đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vừa thiết kế.

6.2. Lặp lại bài tập 6.1 sử dụng của sổ tam giác và Hanning.

6.3. Sử dụng phương pháp của sổ để thiết kế một bộ lọc FIR thông cao có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/4, \\ 1, & \pi/4 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Xác định các hệ số của bộ lọc 30 trọng số sử dụng phương pháp của sổ, áp dụng của sổ hình chữ nhật.
- Xác định đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vừa thiết kế.

6.4. Thiết kế một bộ lọc FIR thông dải có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi/5, \\ 1, & \pi/5 < |\omega| < \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Xác định các hệ số của bộ lọc 40 trọng số sử dụng phương pháp của sổ, áp dụng của sổ Hanning.
- Xác định đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vừa thiết kế.

6.5. Thiết kế một bộ lọc FIR chặn dải có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/5, \\ 0, & \pi/5 < |\omega| < \pi/3 \\ 1, & \pi/3 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

a) Xác định các hệ số của bộ lọc 40 trọng số sử dụng phương pháp cửa sổ, áp dụng cửa sổ Hanning.

b) Xác định đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vừa thiết kế.

6.6. Xác định đáp ứng xung đơn vị của một bộ lọc FIR có pha tuyến tính, chiều dài $M = 4$, có đáp ứng tần số tại các tần số góc $\omega = 0$ và $\omega = \pi/2$ như sau:

$$H_r(0) = 1, \\ H_d(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \pi/6, \\ 1, & \pi/6 < |\omega| < \pi/3 \\ 0, & \pi/3 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

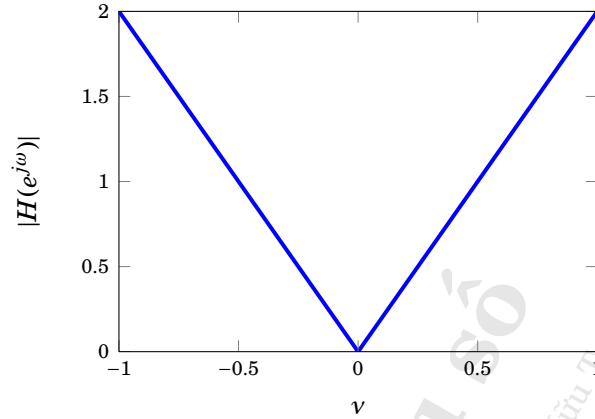
6.7. Xác định đáp ứng xung đơn vị của một bộ lọc FIR có pha tuyến tính, đáp ứng xung đối xứng, chiều dài $M = 13$, có đáp ứng tần số như sau:

$$H_r\left(\frac{2\pi k}{13}\right) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2 \\ 0, & k = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

6.8. Sử dụng phương pháp cửa sổ và dùng cửa sổ Barlett để thiết kế một bộ lọc vi phân 25 hệ số, có đáp ứng lý tưởng như ở hình 6.35.

6.9. Sử dụng phương pháp lấy mẫu trên miền tần số để thiết kế một bộ lọc FIR thông thấp có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/4, \\ 0, & \pi/4 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



Hình 6.35: Đáp ứng tần số biên độ của bộ lọc vi phân [Bài tập 6.8].

- Xác định đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc 10 trọng số.
- Xác định đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc vừa thiết kế.
- Thực thi cấu trúc bộ lọc nêu trên.

6.10. Lặp lại bài số 6.8 sử dụng phương pháp Parks–McClellan.

6.11. Sử dụng phương pháp lấy mẫu trên miền tần số để thiết kế một bộ lọc FIR thông cao có pha tuyến tính, có đáp ứng tần số biên độ xấp xỉ lý tưởng như sau:

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \pi/5, \\ 1, & \pi/5 \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- Xác định đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc 10 trọng số.
- Xác định đáp ứng tần số biên độ và pha của bộ lọc vừa thiết kế.
- Thực thi cấu trúc bộ lọc nêu trên.

6.12. Sử dụng phương pháp Parks–McClellan để thiết kế một bộ lọc FIR vi phân có pha tuyến tính, chiều dài $M = 50$, tần số dải thông là 0,12 và tần số dải triệt là 0,2.

Chương 7

THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ ĐA VẬN TỐC

Trong một hệ thống xử lý tín hiệu hay điều khiển số, có thể có một số thiết bị có vận tốc xử lý khác nhau. Như vậy, để có thể kết nối các thiết bị, cần có phương pháp thay đổi vận tốc xử lý nhằm đồng bộ hóa hệ thống. Tình huống này cho thấy cần xây dựng một phương pháp cho phép điều chỉnh vận tốc lấy mẫu.

Về mặt nguyên tắc, từ những mẫu $x(n)$ của một tín hiệu tương tự gốc $x_a(t)$ đã được lấy mẫu với vận tốc F_S , ta có thể tái tạo $x_a(t)$ và lấy mẫu nó với một vận tốc F'_S nào khác. Tuy nhiên, trong thực tế xử lý tín hiệu số, ta mong muốn thay đổi vận tốc lấy mẫu của tín hiệu số $x(n)$ mà không thông qua quá trình tái tạo tín hiệu tương tự $x_a(t)$. Chương này trình bày các khái niệm và các phương pháp nhằm thực hiện việc chuyển đổi vận tốc lấy mẫu trực tiếp trên tín hiệu số.

7.1 Hạ tốc

7.1.1 Những kết quả cơ bản

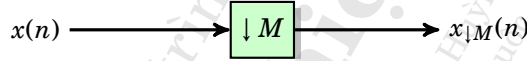
Cho $x_a(t)$ là một tín hiệu tương tự được lấy mẫu với chu kỳ T để cho tín hiệu số $x(n)$. Giả sử vận tốc lấy mẫu đã thỏa điều kiện lấy mẫu Nyquist, thì từ tín hiệu $x(n)$ có thể tái tạo lại tín hiệu $x_a(t)$ một cách hoàn hảo. Để giải quyết vấn đề đổi vận tốc một cách tổng quát, trước tiên ta xét trường hợp hạ tốc bởi một số nguyên M , tức tăng

chu kỳ vận tốc lấy mẫu T thành $T' = MT$, để có tín hiệu số $x_{\downarrow M}(n)$. Điều đáng chú ý là lúc hạ tốc, rất có thể có hiện tượng gập phổ xuất hiện, nếu vận tốc lấy mẫu F'_S không thỏa điều kiện lấy mẫu Nyquist.

Nhận thấy, tín hiệu $x_{\downarrow M}(n)$ có thể suy ra dễ dàng từ $x(n)$ bằng cách cứ mỗi M mẫu của $x(n)$ ta chỉ lấy một mẫu. Cách hạ tốc này được ký hiệu bằng một toán tử \mathcal{D}_M , và được định nghĩa như sau:

$$x_{\downarrow M}(n) = \mathcal{D}_M \{x(n)\} = x(Mn). \quad (7.1)$$

Toán tử hạ tốc này bảo toàn vị trí gốc, tức là $x_{\downarrow M}(0) = x(0)$. Với định nghĩa này, ta thấy toán tử \mathcal{D}_M là tuyến tính nhưng không bất biến theo thời gian. Sơ đồ khối như trên hình 7.1 được dùng để mô tả toán tử hạ tốc này.



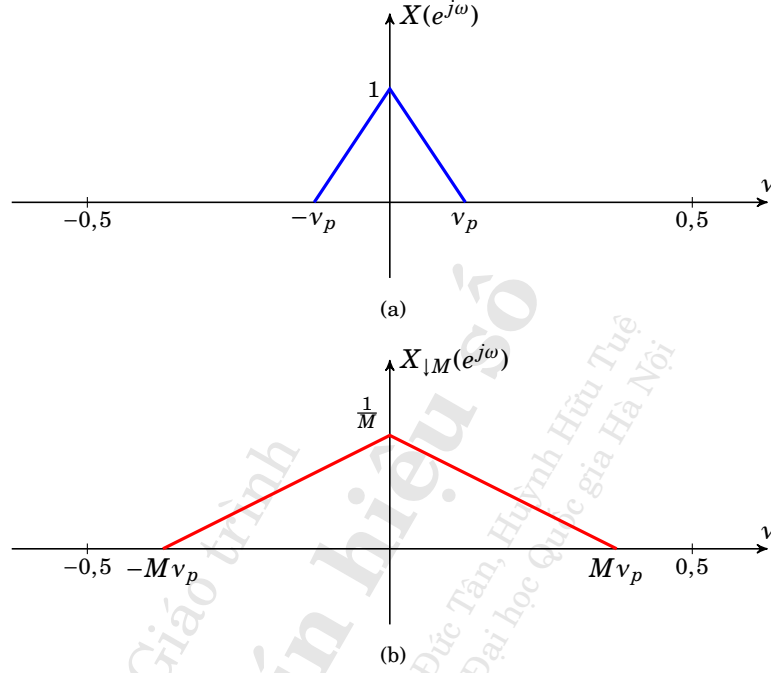
Hình 7.1: Sơ đồ khối của phép hạ tốc.

Giả sử với chu kỳ lấy mẫu T , điều kiện lấy mẫu Nyquist được thỏa mãn. Tức là tín hiệu $x_a(t)$ có dải thông B Hz hữu hạn và phổ của tín hiệu số sẽ có dải thông $v_p = B/F_S \leq 0,5$. Nếu lúc hạ tốc từ F_S xuống F_S/M mà vẫn bảo đảm được điều kiện lấy mẫu Nyquist thì dải thông v_{pM} của tín hiệu số hạ tốc $x_{\downarrow M}(n)$ theo định nghĩa là

$$v_{pM} = \frac{B}{F_S/M} = M v_p. \quad (7.2)$$

Phổ trên chu kỳ cơ bản $[-0,5; 0,5]$ của $x(n)$ và $x_{\downarrow M}(n)$ được mô tả trong hình 7.2.

Không cần tính toán nhiều, có thể thấy ngay trong trường hợp $M v_p > 0.5$ thì vận tốc lấy mẫu này thấp hơn vận tốc lấy mẫu cần thiết theo định lý Nyquist, và như thế sẽ xuất hiện hiện tượng gập phổ. Như thế, để giới hạn ảnh hưởng của hiện tượng gập phổ, thì ngay trong miền tín hiệu số, có thể cho tín hiệu gốc $x(n)$ đi qua một bộ lọc thông thấp để dải thông của đầu ra phải nhỏ hơn $0.5/M$. Tóm lại, trước khi hạ tốc, ta cần lọc tín hiệu gốc $x(n)$ với bộ lọc thông thấp lý tưởng có dải thông $v_{id} = 0.5/M$, như được mô tả ở hình 7.3.

Hình 7.2: Phổ tín hiệu trước và sau khi hạ tốc M lần.

Hệ thống này có tên là **bộ lọc hạ tốc***. Trong thực tiễn, bộ lọc lý tưởng được thiết kế theo các phương pháp đã được trình bày trong chương 6. Thông thường, ta sử dụng phương pháp FIR có pha tuyến tính, để có đáp ứng xung là $h(n)$, với $n = 0, \dots, L-1$, trong đó L là chiều dài bộ lọc FIR tương ứng. Như thế, ta thấy

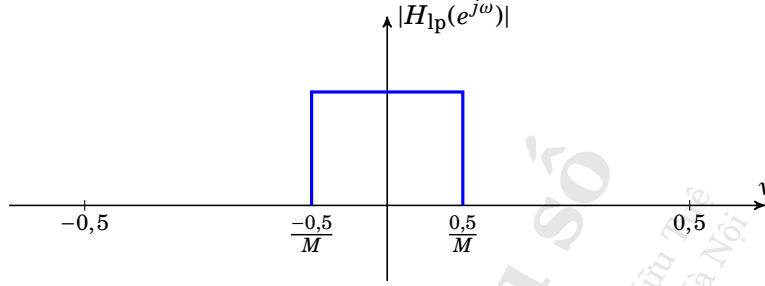
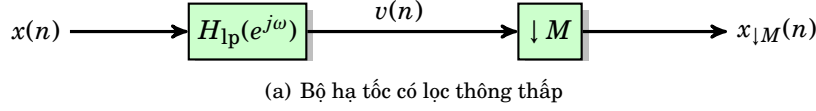
$$v(n) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(n-k), \quad (7.3)$$

và suy ra

$$x_{|M}(n) = v(Mn) = \sum_{k=0}^{L-1} h(k)x(Mn-k). \quad (7.4)$$

Kết quả này cho thấy, để bảo đảm hiện tượng gập phổ không ảnh hưởng đến đầu ra lúc hạ tốc, cần phải lọc tín hiệu với một bộ lọc

*Decimator.



Hình 7.3: Áp dụng lọc thông thấp để tránh gấp phổ.

số có tần số cắt là $\nu_{pM} = 0,5/M$. Nếu tín hiệu số gốc $x(n)$ có dải thông nhỏ hơn tần số cắt $0,5/M$ thì bộ lọc không tác động đến tín hiệu. Tuy nhiên, nếu $x(n)$ có dải thông lớn hơn tần số cắt thì bộ lọc loại phần phổ nằm ngoài tần số cắt. Như thế, vai trò của bộ lọc nhằm loại bỏ phần phổ này để tránh hiện tượng gấp phổ. Kết quả này cho thấy, lúc hạ tốc ta chấp nhận mất một ít thông tin và kết quả này là điều hiển nhiên đối với thao tác hạ tốc.

Ví dụ 7.1 (Thiết kế bộ lọc hạ tốc)

Ta muốn thiết kế một bộ lọc hạ tốc với những đặc tả như sau:

- a) hạ tốc $M = 4$ lần.
- b) Bộ lọc thông thấp có độ gợn sóng trong dải thông là 0,01 và độ suy giảm là 0,001 trong dải triệt bắt đầu từ ν_s .

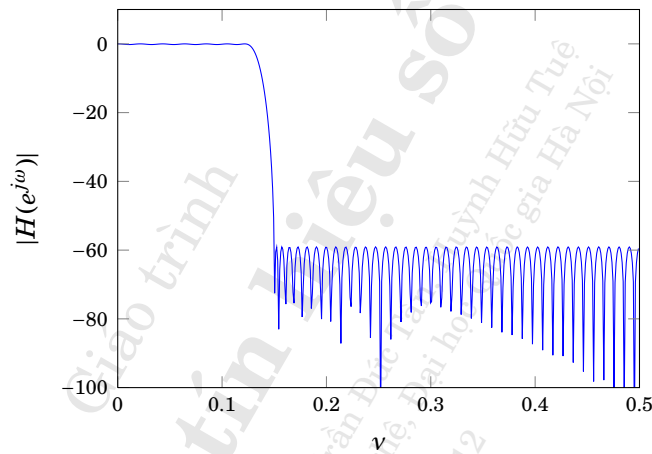
Để không xảy ra hiện tượng gấp phổ trong bộ lọc hạ tốc, tần số cắt của một bộ lọc thông thấp cần thiết kế là

$$\nu_p = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$

Với cách đặt vấn đề như đặc tả (b), chiều dài của bộ lọc sẽ phụ thuộc vào chiều dài của dải chuyển tiếp $\Delta\nu = \nu_s - \nu_p$. Trong quá trình thiết

kế, ta có thể điều chỉnh độ gọn sóng và độ suy giảm nếu thấy cần thiết.

Giả sử ta chọn $v_s = 0,15$. Theo công thức Hermann 6.67 được cho trong chương 6, chiều dài bộ lọc là $L = 103$, được tính bởi MATLAB. Về mặt thực tiễn, chiều dài này là chấp nhận được. Hình 7.4 biểu diễn đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp được thiết kế. Hệ số của bộ lọc được cho trong Bảng 7.1.



Hình 7.4: Đáp ứng tần số của bộ lọc thông thấp [Ví dụ 7.1].

Nếu ta chọn $v_s = 0,13$, chiều dài được tính toán tăng lên $L = 509$ mới có thể đáp ứng tiêu chí thiết kế này, lớn hơn nhiều so với trường hợp $v_s = 0,13$. Như vậy, $v = 0,15$ trên đây là phù hợp với thiết kế thực tiễn. \square

MATLAB có một lệnh làm hạ tốc M lần một tín hiệu x để cho tín hiệu y như sau:

```
y = decimate(x,M)
```

Lệnh này cho đầu ra y ngắn hơn M lần đầu vào x . Theo mặc định, bộ lọc được thiết kế trong chương trình MATLAB của lệnh này sử dụng họ Chebyshev thông thấp có bậc là 8 và có tần số cắt là $0,8F_s/2$. Tuy nhiên, có thể thay đổi bậc của bộ lọc bằng lệnh

Bảng 7.1: Hệ số của bộ lọc thông thấp [Ví dụ 7.1].

-0.0008	-0.0027	-0.0095	-0.0478	0.0331	0.0093	0.0029
-0.0003	-0.0041	-0.0121	-0.0565	0.0235	0.0056	0.0015
0.0004	-0.0027	-0.0062	-0.0209	0.0013	-0.0012	-0.0007
0.0015	0.0009	0.0053	0.0582	-0.0175	-0.0063	-0.0020
0.0024	0.0045	0.0148	0.1573	-0.0220	-0.0067	-0.0018
0.0025	0.0053	0.0149	0.2395	-0.0120	-0.0028	-0.0003
0.0015	0.0023	0.0040	0.2714	0.0040	0.0023	0.0015
-0.0003	-0.0028	-0.0120	0.2395	0.0149	0.0053	0.0025
-0.0018	-0.0067	-0.0220	0.1573	0.0148	0.0045	0.0024
-0.0020	-0.0063	-0.0175	0.0582	0.0053	0.0009	0.0015
-0.0007	-0.0012	0.0013	-0.0209	-0.0062	-0.0027	0.0004
0.0015	0.0056	0.0235	-0.0565	-0.0121	-0.0041	-0.0003
0.0029	0.0093	0.0331	-0.0478	-0.0095	-0.0027	-0.0008
0.0025	0.0067	0.0196	-0.0137	-0.0012	0.0002	0
0.0002	-0.0012	-0.0137	0.0196	0.0067	0.0025	0

$y = \text{decimate}(x, M, N)$

trong đó N là bậc của bộ lọc Chebyshev ta muốn sử dụng. Ta cũng có thể sử dụng bộ lọc FIR để thiết kế bộ lọc hạ tốc, bằng lệnh

$y = \text{decimate}(x, M, \text{'fir'})$

Lệnh này dùng một bộ lọc FIR có bậc là 30 và tần số số cắt là M .

7.1.2 Phổ của tín hiệu hạ tốc

Các kết quả vừa được phân tích có thể dựa trên phổ của tín hiệu hạ tốc. Phổ của tín hiệu hạ tốc có thể được tính toán một cách tương đối đơn giản như sau. Gọi $X(e^{j\omega})$ là phổ của tín hiệu gốc $x(n)$. Đặt $x_e(n)$ như sau:

$$x_e(n) = \begin{cases} x(n), & \text{nếu } n = kM, \\ 0, & \text{nếu } n \neq kM. \end{cases} \quad (7.5)$$

Để biểu diễn $x_e(n)$ theo $x(n)$, ta sử dụng cấp số nhân

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{M-1} = \begin{cases} M, & \text{nếu } x = 1, \\ \frac{1-x^M}{1-x}, & \text{nếu } x \neq 1 \end{cases} \quad (7.6)$$

với $x = e^{jk2\pi n/M}$ để được

$$x_e(n) = x(n) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{jk \frac{2\pi}{M} n}. \quad (7.7)$$

Mối liên hệ giữa $x(n)$, $x_e(n)$ và $x_{\downarrow M}(n)$ được mô tả như trong hình 7.5.

Phổ của $x_e(n)$ được tính như sau:

$$\begin{aligned} X_e(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n) e^{-jn\omega} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jn(\omega - k \frac{2\pi}{M})} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{-j(\omega - k \frac{2\pi}{M})}) \end{aligned} \quad (7.8)$$

Mặt khác, biết rằng $x_{\downarrow M}(n) = x_e(nM)$, ta có thể biểu diễn phổ $X_{\downarrow M}(e^{j\omega})$ theo $X_e(e^{j\omega})$ như sau:

$$\begin{aligned} X_{\downarrow M}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(nM) e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n) e^{-jn \frac{\omega}{M}} \\ &= X_e(e^{j \frac{\omega}{M}}) \end{aligned} \quad (7.9)$$

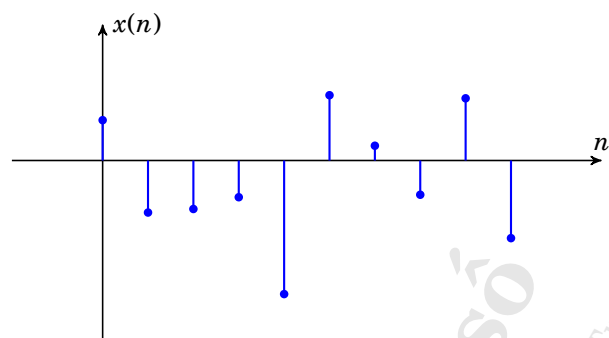
Biểu thức (7.8) và (7.9) cho ta phổ của $x_{\downarrow M}(n)$ là

$$X_{\downarrow M}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(e^{j \frac{\omega - k 2\pi}{M}}). \quad (7.10)$$

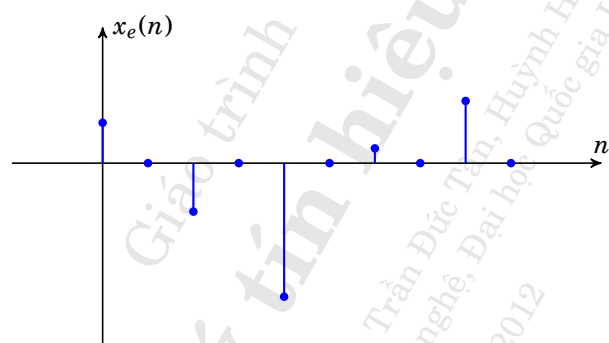
Từ công thức này, cũng có thể suy ra biến đổi \mathcal{Z} của $x_{\downarrow M}(n)$ bằng cách thế $e^{j\omega}$ trong công thức (7.10) bởi z và đặt $W_M = e^{-j \frac{2\pi}{M}}$. Như thế ta có

$$X_{\downarrow M}(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(W_M^k z^{\frac{1}{M}}). \quad (7.11)$$

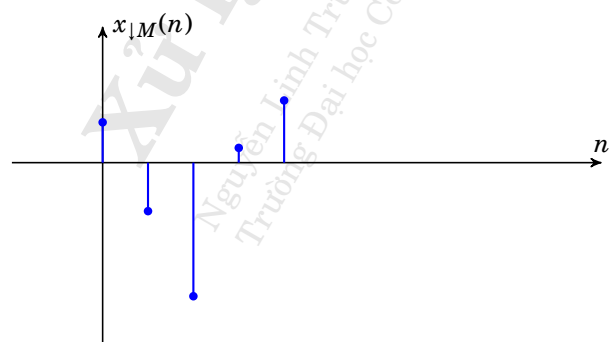
Phổ của tín hiệu hạ tốc được minh họa ở hình 7.6 cho $M = 2$ và hình 7.7 cho $M = 3$. Hiện tượng gập phổ xảy ra trong hình 7.7. Vì vậy, vai trò của bộ lọc thông thấp để giới hạn ảnh hưởng của hiện tượng gập phổ là hết sức cần thiết.



(a) $x(n]$

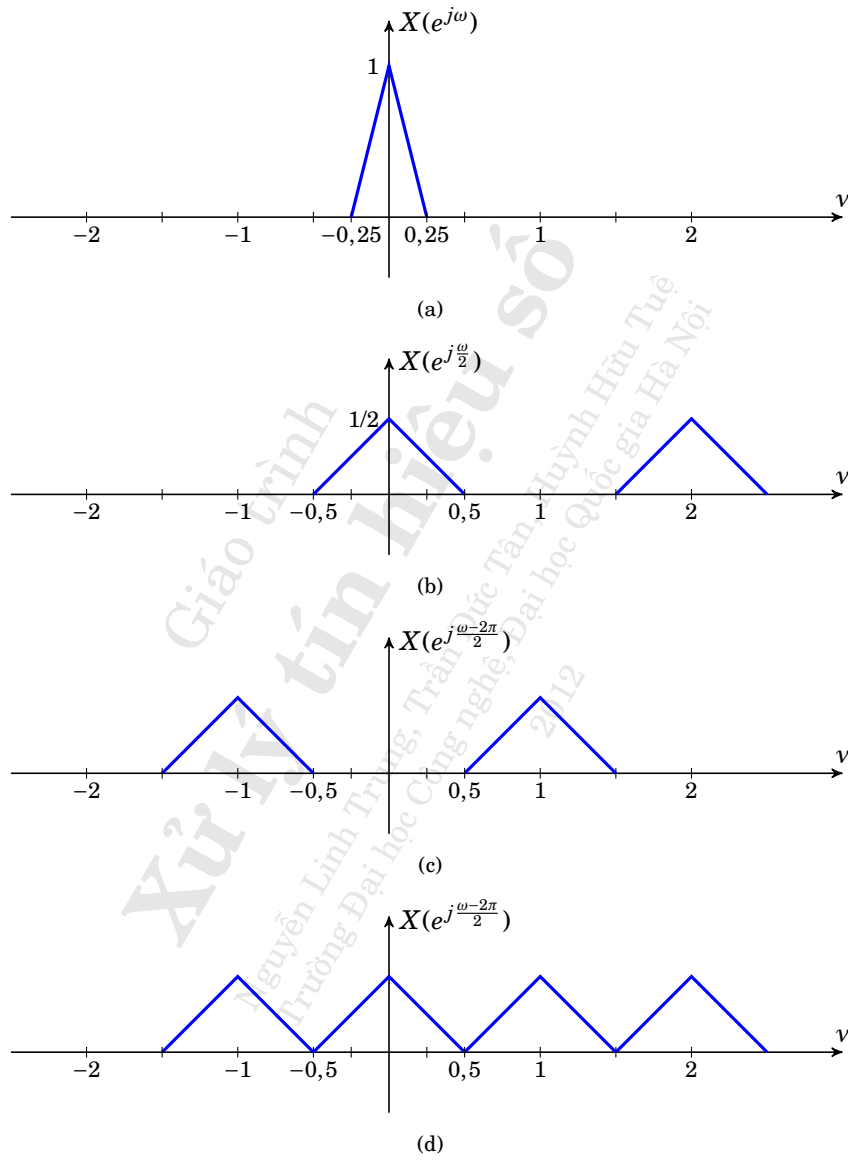


(b) $x_e(n]$

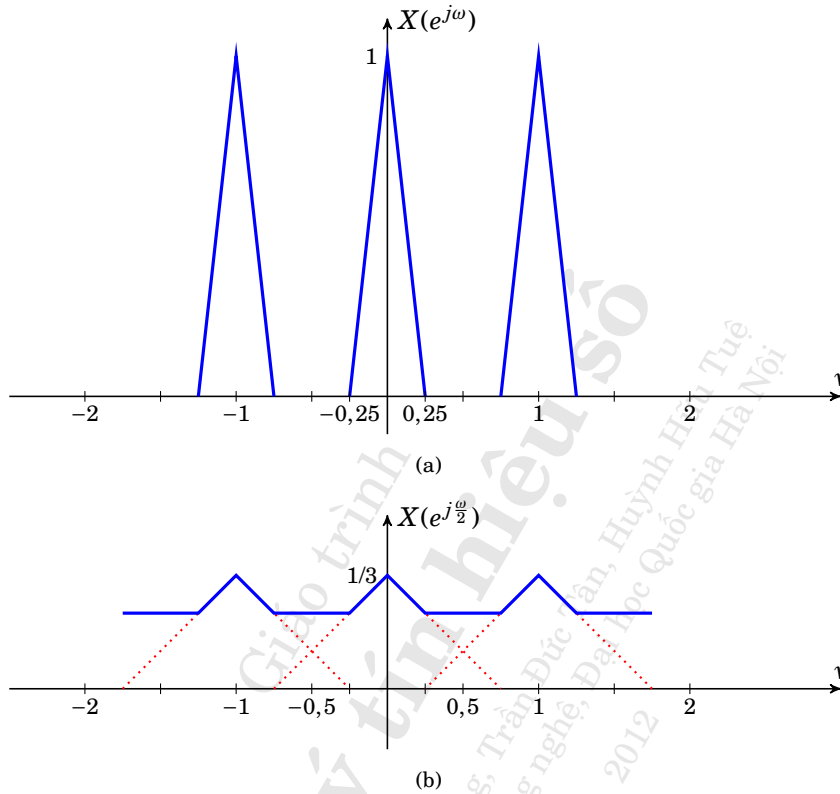


(c) $x_{|M}(n]$

Hình 7.5: Mối liên hệ giữa $x(n]$, $x_e(n]$ và $x_{|M}(n]$, với $M = 2$.



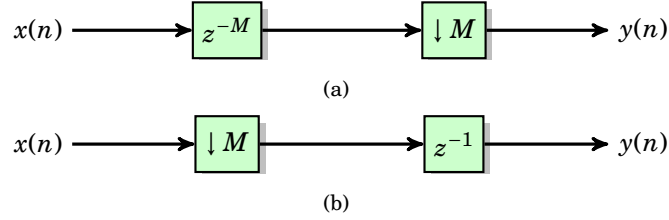
Hình 7.6: Minh họa phổ tín hiệu hạ tốc $M = 2$ lần.



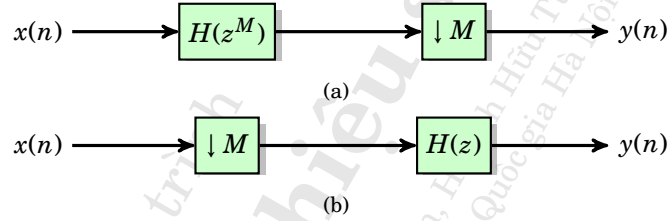
Hình 7.7: Minh họa phổ tín hiệu hạ tốc $M = 3$ lần.

Có một kết quả rất hữu ích tương ứng với trường hợp hạ tốc lúc thiết kế một hệ thống đa vận tốc, đó là **đẳng thức Noble***, được minh họa như hình 7.8. Khai triển trực tiếp về mặt tín hiệu thì đẳng thức Noble này là hiển nhiên. Đẳng thức Noble này có thể được mở rộng dễ dàng cho một bộ lọc có hàm truyền là $H(z)$ như được minh họa ở hình 7.9.

*Noble equality.



Hình 7.8: Đẳng thức Noble trong trường hợp hạ tốc: (a) và (b) là tương đương.

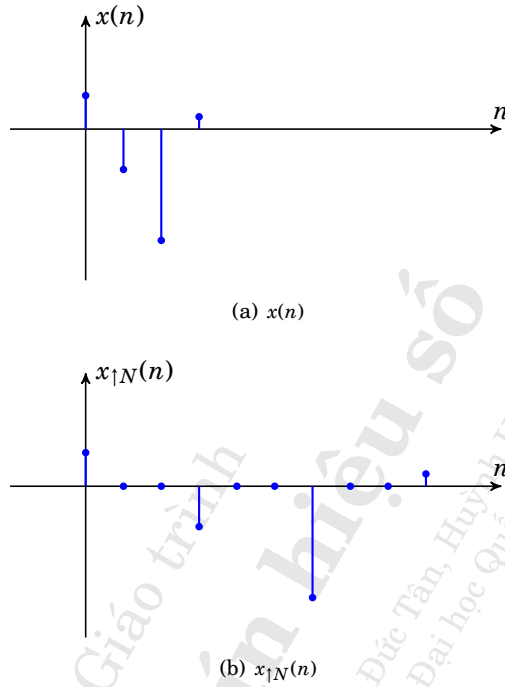


Hình 7.9: Mở rộng đẳng thức Noble trong trường hợp hạ tốc: (a) và (b) là tương đương.

7.2 Tăng tốc

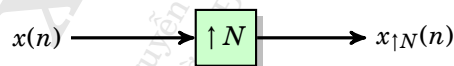
Cho $x(n)$ là tín hiệu số có được lúc lấy mẫu của tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với chu kỳ lấy mẫu T thỏa điều kiện lấy mẫu Nyquist. Như thế, lúc tăng tốc N lần, rõ ràng hiện tượng gấp phổ không xảy ra. Mặt khác, nếu tăng tốc từ tín hiệu số $x(n)$ thì thấy ngay có một số mẫu ta không biết được. Đồng thời, để có trị số của các mẫu này, chắc chắn ta phải dùng một thuật toán nội suy. Thuật toán nội suy này là tương ứng với một bộ lọc số. Như thế, vai trò của bộ lọc số trong trường hợp tăng tốc không nhằm để giới hạn ảnh hưởng của hiện tượng gấp phổ mà chỉ đóng vai trò nội suy để cho ta những mẫu mà ta không có. Gọi $x_{1N}(n)$ là tín hiệu tăng tốc suy ra từ $x(n)$, ta có định nghĩa sau:

$$x_{1N}(n) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } n \neq kN, \\ x\left(\frac{n}{N}\right) & \text{nếu } n = kN. \end{cases} \quad (7.12)$$



Hình 7.10: Mối liên hệ giữa $x(n)$ và $x_{\uparrow N}(n)$ với $N = 3$.

Hình 7.10 cho thấy, bước đầu tiên tăng tốc tức là chèn thêm $N - 1$ mẫu có trị 0 vào giữa hai mẫu của tín hiệu gốc. Sơ đồ khối của bước tăng tốc được mô tả ở hình 7.11.

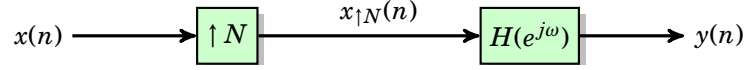


Hình 7.11: Sơ đồ biểu diễn phép tăng tốc.

Từ tín hiệu tăng tốc bước đầu $v(n)$, ta dùng một bộ lọc để nội suy các mẫu không hiện diện trong tín hiệu gốc. Hệ thống minh họa trong hình 7.12 được gọi là **bộ lọc tăng tốc***.

Cấu trúc của bộ lọc này sẽ được xác định một cách rõ ràng sau

*Interpolator.



Hình 7.12: Bộ lọc tăng tốc.

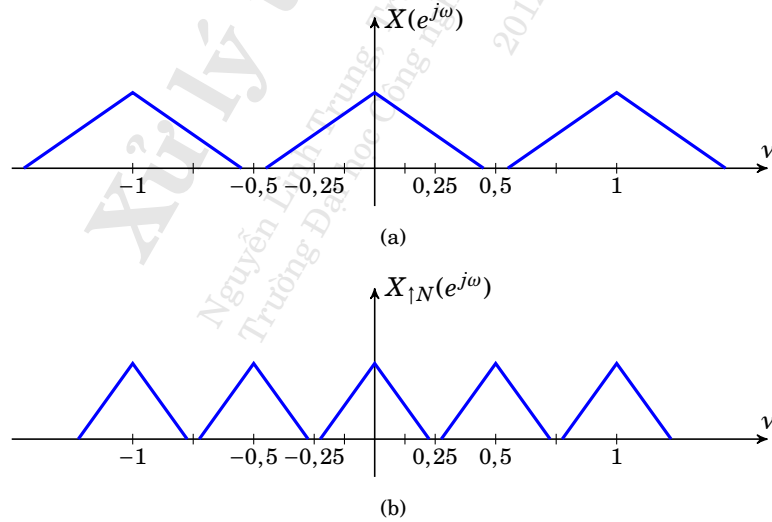
khi ta tính phổ của tín hiệu tăng tốc $x_{\uparrow N}(n)$. Theo định nghĩa của $x_{\uparrow N}(n)$ thì phổ của nó phải là

$$\begin{aligned} X_{\uparrow N}(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\uparrow N}(n) e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-jmN\omega} \\ &= X(e^{jN\omega}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Biến đổi \mathcal{Z} của $x_{\uparrow N}(n)$ có thể suy ra từ (7.13) bằng cách thế $e^{j\omega}$ bằng z để có

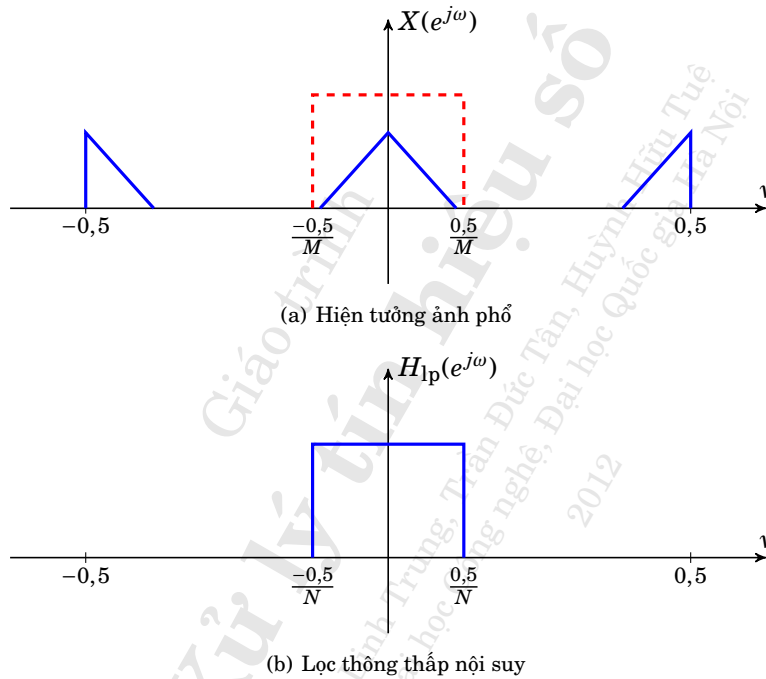
$$X_{\uparrow N}(z) = X(z^N). \quad (7.14)$$

Phổ của $x_{\uparrow N}(n)$ được minh họa ở hình 7.13.



Hình 7.13: Minh họa phổ tín hiệu tăng tốc.

Ta thấy ngay, ngoài phần phổ cơ bản chứa đựng thông tin thì có một số phần phổ khác xuất hiện trong khoảng tần số số $[-0,5; 0,5]$, được gọi là **ảnh phổ***. Điều quan trọng quan sát được là những phần ảnh phổ này không tác động đến phần phổ cơ bản ta quan tâm. Bộ lọc thông thấp được sử dụng để loại bỏ các thành phần ảnh phổ này chính là bộ lọc nội suy được đề cập ở trên (xem hình 7.14).



Hình 7.14: Lọc thông thấp để loại ảnh phổ trong bộ tăng tốc.

Ví dụ 7.2 (Thiết kế bộ lọc tăng tốc)

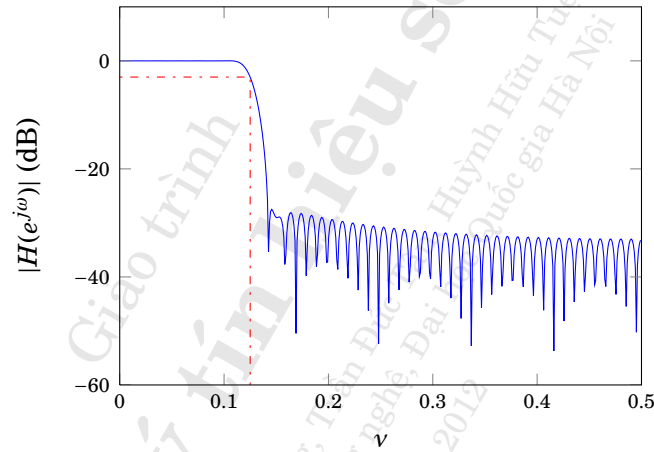
Trong ví dụ này, ta thiết kế một bộ lọc tăng tốc $N = 4$ lần. Điểm quan trọng của giải pháp là sau khi tăng tốc ta cần thiết kế một bộ lọc thông thấp có tần số số cắt tại $\nu_c = 0,5/4 = 0,125$, được thiết kế như trên hình 7.15. Ngoài việc thiết kế bộ lọc nội suy theo cách thông

*Frequency image.

thường, trong MATLAB có lệnh sau đây để lọc nội suy tín hiệu là đầu ra của bộ tăng tốc:

```
y = interp(x,N)
```

trong đó x là tín hiệu gốc, N là vận tốc cần tăng và y là tín hiệu tăng tốc. Lệnh này sử dụng một bộ lọc thông thấp FIR đối xứng sao cho dữ liệu gốc không bị tác động, đồng thời nội suy những dữ liệu của tín hiệu tăng tốc thế nào để sai số trung bình bình phương tối thiểu.

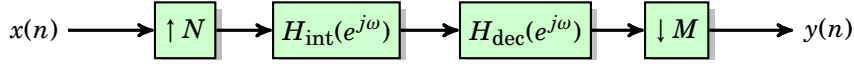


Hình 7.15: Bộ lọc nội suy có tần số cắt 0,125.

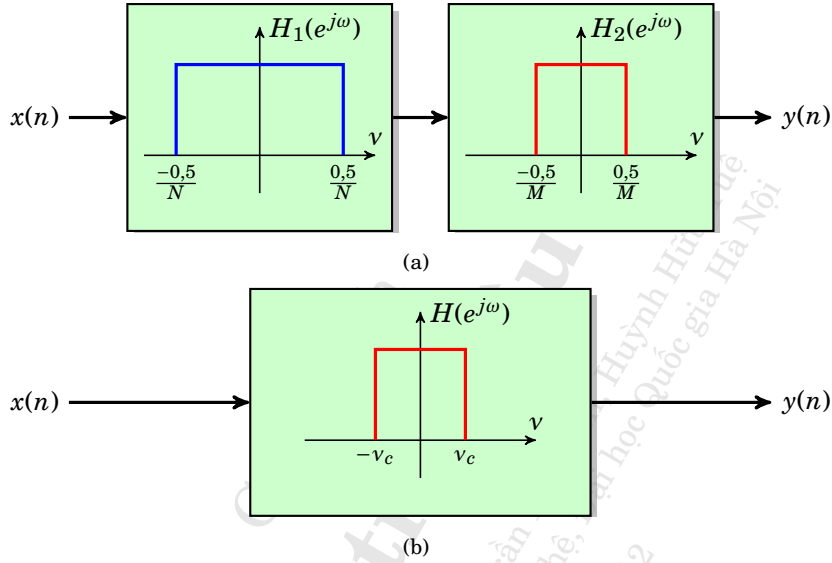
□

7.3 Thay đổi vận tốc theo một hệ số hữu tỷ

Tín hiệu $x(n)$ là tín hiệu số có được từ quá trình lấy mẫu của tín hiệu tương tự $x_a(t)$ với chu kỳ T . Từ $x(n)$, ta phải xây dựng tín hiệu số $x_{NM}(n)$ là tín hiệu số có được từ thao tác lấy mẫu của $x_a(t)$ với chu kỳ MT/N . Với vận tốc lấy mẫu này ta thấy ngay, ta cần tăng tốc N lần và hạ tốc M lần thì đạt được kết quả. Như thế, sử dụng hệ thống bộ lọc tăng tốc nối tiếp với bộ lọc hạ tốc ta sẽ có được kết quả mong muốn (xem hình 7.16). Trong hệ thống này, có hai bộ lọc thông thấp



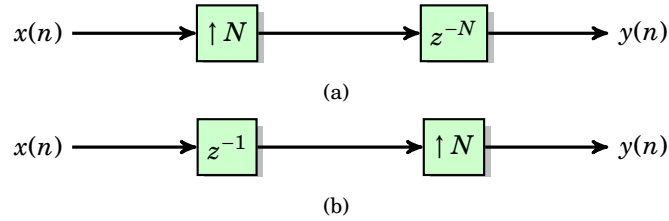
Hình 7.16: Thay đổi vận tốc theo hệ số hữu tỷ M/N .



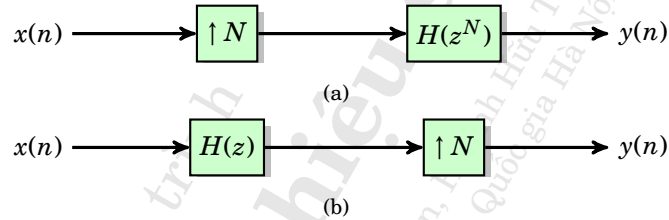
Hình 7.17: Kết hợp hai bộ lọc. Tần số cắt của bộ lọc kết hợp là giá trị nhỏ nhất của các tần số cắt của các bộ lọc thành phần: $v_c = \min \left\{ \frac{0.5}{N}, \frac{0.5}{M} \right\}$.

lý tưởng $H_1(e^{j\omega})$ và $H_2(e^{j\omega})$ mắc nối tiếp nhau, được mô tả như trên hình 7.17(a). Như vậy, ta có thể kết hợp để thành một bộ lọc thông thấp độc nhất $H(e^{j\omega})$, như trên hình 7.17(b).

Có thể thiết kế bộ lọc đổi vận tốc này bằng các phương pháp đã được trình bày trong chương 6. Cũng như đối với hệ thống hạ tốc, có một kết quả rất hữu ích tương ứng với trường hợp tăng tốc lúc thiết kế một hệ thống đa vận tốc, đó chính đẳng thức Noble trong trường hợp tăng tốc, được minh họa ở hình 7.18. Như đối với trường hợp hạ tốc, đẳng thức Noble cho tăng tốc cũng có thể được mở rộng dễ dàng cho một bộ lọc có hàm truyền là $H(z)$, như trên hình 7.19.



Hình 7.18: Dạng thức Noble trong trường hợp tăng tốc: (a) và (b) là tương đương.



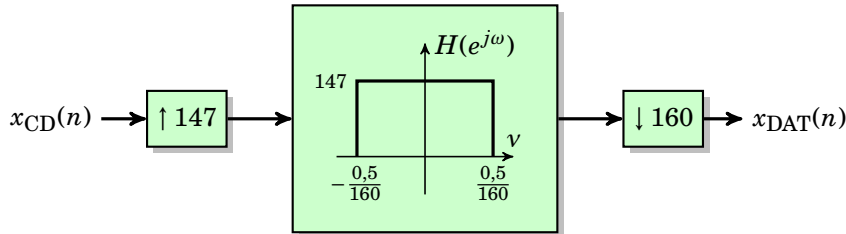
Hình 7.19: Mở rộng dạng thức Noble trong trường hợp tăng tốc: (a) và (b) là tương đương.

Ví dụ 7.3 (Thiết kế bộ lọc đa vận tốc hữu tỷ)

Vào những năm 90 của thế kỷ 20, ta có hai thiết bị âm nhạc số phổ biến là CD (Compact Disk) và DAT (Digital Audio Tape). CD hoạt động với vận tốc lấy mẫu 44,1 KHz, trong khi đó DAT lại hoạt động ở 48 KHz. Các công ty đã chọn các con số này để làm cho các hệ thống này không thể tương thích. Yêu cầu đặt ra là thiết kế một bộ lọc đa vận tốc để kết nối hai thiết bị này.

Với phương pháp xử lý đa vận tốc, ta thấy có thể thay đổi vận tốc lấy mẫu từ 48 KHz thành 44,1 KHz dễ dàng. Như thế, để có hệ số chuyển đổi vận tốc 44,1/48, tức tương đương với 147/160, ta cần hạ tốc 160 lần và tăng tốc 147 lần. Sơ đồ khối tương ứng với hệ thống này được minh họa ở hình 7.20.

Nhận thấy, hệ số tăng tốc 147, hạ tốc 160 và tần số cắt $0,5/160 = 0,0031$ là những thông số khó đạt được trong thực tế. Đúng như thế, ta sử dụng lệnh sau đây của MATLAB:



Hình 7.20: Hệ thống chuyển đổi tín hiệu từ CD sang DAT [Ví dụ 7.3].

```
[N,f0,m0,w]=firpmord([0.0031,0.0033],[1 0],[0.01,.001],1)
```

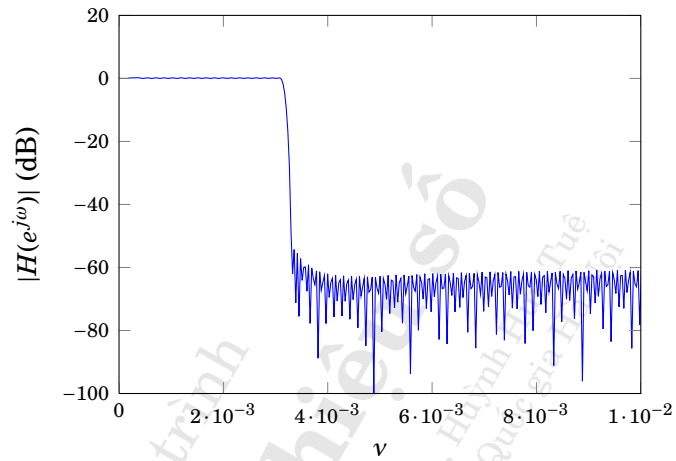
Lệnh này cho phép tính bậc của bộ lọc có độ dài N , các tần số số v_p và v_s , biên độ lý tưởng của dải thông là đơn vị, biên độ của dải triệt là 0, độ gợn sóng là 0,01 và độ suy giảm là 0,001. Số 1 cuối cùng là tần số Nyquist.

Các thông số thiết kế cho ví dụ này vượt quá mức độ chặt chẽ cần thiết. Thật vậy, dải chuyển tiếp có chiều dài bằng $0,0031 - 0,0033 = 0,0002$, độ gợn sóng của dải thông là 0,01 là độ suy giảm của dải triệt là 0,001. Với các thông số này, chiều dài của bộ lọc rất lớn, được tính ra là $L = N + 1 = 12707$. Đáp ứng tần số của bộ lọc trong hệ thống thay đổi vận tốc này có hiệu quả lý thuyết rất cao, như trên hình 7.21(a).

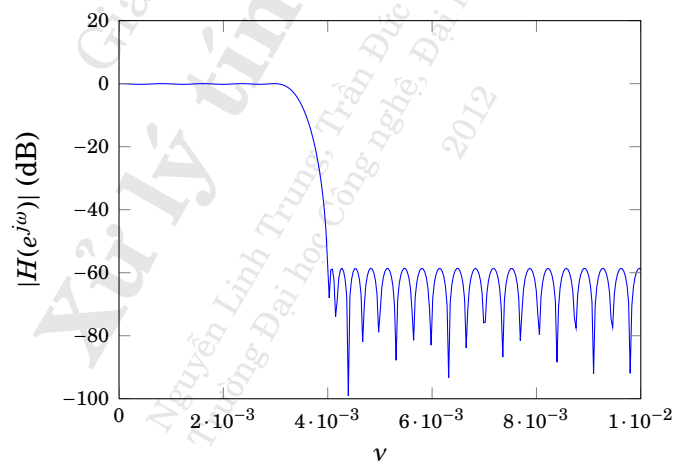
Tuy nhiên, với chiều dài $L = 12707$ thì độ phức tạp để thực hiện bộ lọc FIR này cũng rất cao. Chẳng hạn ta có thể thực hiện bộ lọc này với biểu diễn đa pha bằng cách sử dụng 127 bộ lọc song song, mỗi bộ lọc có chiều dài là 100.

Ta có thể giảm độ phức tạp bằng cách thay đổi các thông số để có những ràng buộc nhẹ nhàng hơn. Chẳng hạn, dải thông đi từ 0,0031 đến 0,004. Độ gợn sóng của dải chuyển tiếp là 0,01 và độ suy giảm của dải triệt là 0,001. Với dải chuyển tiếp không chặt như đề xuất, ta thấy kết quả đạt được là một bộ lọc có chiều dài được tính là 2825 và đáp ứng tần số được minh họa ở hình 7.21(b).

Độ phức tạp của bộ lọc thứ hai nhỏ hơn so với độ phức tạp của bộ lọc thứ nhất. Tuy nhiên, dải chuyển tiếp của bộ lọc thứ hai này lại lớn hơn rất nhiều so với bộ lọc thứ nhất. Sự thỏa hiệp giữa độ phức tạp và chất lượng trong thiết kế luôn là vấn đề ta phải đối diện



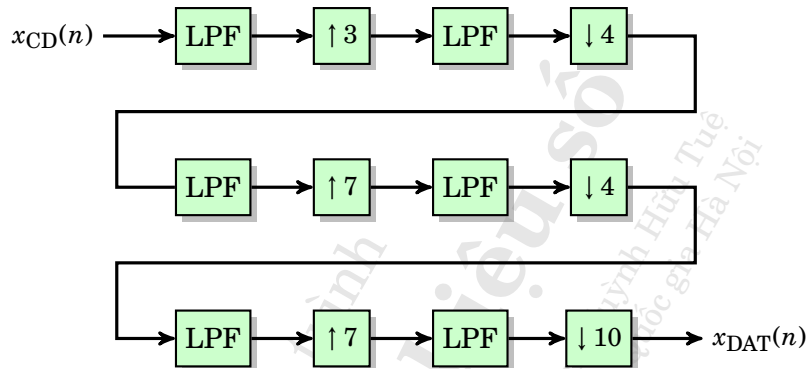
(a) Dải chuyển tiếp từ 0,0031 đến 0,0033



(b) Dải chuyển tiếp từ 0,0031 đến 0,004

Hình 7.21: Đáp ứng bộ lọc đa vận tốc kết nối CD với DAT [Ví dụ 7.3].

để cân nhắc. Đối với thiết kế này, bộ lọc được thiết kế tuy có chiều dài nhỏ hơn nhiều so với bộ lọc thứ nhất, nhưng cái giá phải trả vẫn là có chất lượng thấp hơn. Trong thực tiễn, hai bộ lọc này vẫn phải được thực hiện bằng cấu trúc đa pha. Vì thế, chúng được thực hiện bằng cấu trúc nhiều tầng như hình 7.22.



Hình 7.22: Hệ thống chuyển đổi tín hiệu từ CD sang DAT trong thực tiễn. Các vận tốc hữu tỷ là 3/4, 7/4 và 7/10.

Trong MATLAB, lệnh sau đây cho phép ta thay đổi vận tốc lấy mẫu:

```
y = resample(x,N,M)
```

trong đó x là tín hiệu gốc, N/M là tỷ lệ thay đổi vận tốc. Lệnh này sử dụng một bộ lọc thông thấp được thiết kế theo phương pháp sai số trung bình bình phương tối thiểu đồng thời nó cũng loại bỏ độ trễ trong tín hiệu đầu ra do bộ lọc tạo nên. MATLAB cũng có một lệnh khác là:

```
y = upfirdn(x, h, L, M)
```

trong đó x là tín hiệu gốc, h là đáp ứng xung của bộ lọc thông thấp, L/M là tỷ số thay đổi vận tốc.

□

7.4 Biểu diễn đa pha

Khi một hệ thống cần xử lý ở vận tốc khá cao thì độ phức tạp cũng như giá thành của phần cứng sẽ tăng nhanh. Trong trường hợp này, ta phải tìm cách hạ vận tốc xử lý, hàm ý phải hạ tốc tín hiệu cần xử lý. Cách tổ chức thích hợp nhất là phân tích một tín hiệu thành các thành phần có vận tốc lấy mẫu nhỏ hơn và mỗi thành phần như thế này được xem như là một pha của tín hiệu.

Một tín hiệu $x(n)$ có thể được biểu diễn hai pha $x_1(n)$ và $x_2(n)$ như sau:

$$\begin{aligned}x_1(n) &= \dots, x(-4), x(-2), x(0), x(2), x(4), \dots \\x_2(n) &= \dots, x(-3), x(-1), x(1), x(3), x(5), \dots\end{aligned}$$

hay được biểu diễn ba pha $x_1(n)$, $x_2(n)$ và $x_3(n)$ với

$$\begin{aligned}x_1(n) &= \dots, x(-3), x(0), x(3), x(6), \dots \\x_2(n) &= \dots, x(-2), x(1), x(4), x(7), \dots \\x_3(n) &= \dots, x(-1), x(2), x(5), x(8), \dots\end{aligned}$$

Một cách tổng quát, $x(n)$ có thể được biểu diễn bởi M pha $x_k(n)$ được định nghĩa như sau:

$$x_k(n) = x(nM + k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (7.15)$$

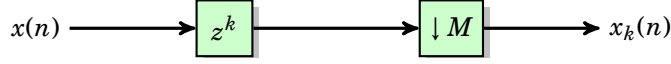
Nhận thấy, xử lý tín hiệu $x(n)$ là hoàn toàn tương đương với xử lý song song M pha $x_k(n)$. Cách biểu diễn trực tiếp nhất các thành phần pha là thông qua sử dụng biến đổi \mathcal{Z} của tín hiệu, như

$$X_k(z) = \sum x(nM + k)z^{-n}. \quad (7.16)$$

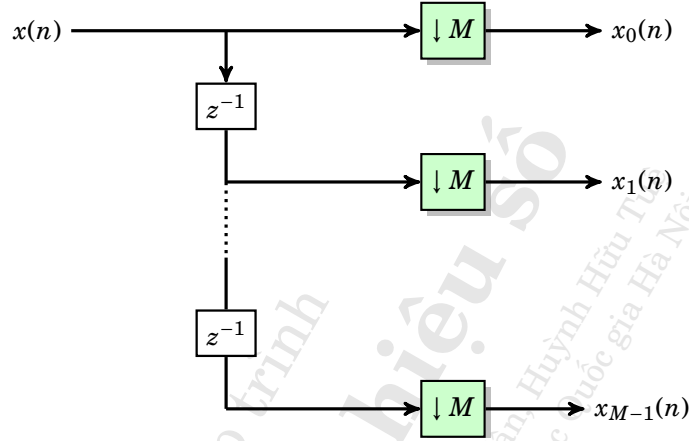
Tín hiệu $x_k(n) = x(nM + k)$ có được bằng cách dịch sớm tín hiệu $x(n)$ đi k bước, sau đó hạ tốc M lần, như được minh họa ở hình 7.23. Như thế, hệ thống ở hình 7.24 có thể được sử dụng để phân tích $x(n)$ thành M thành phần pha.

Tương tự, có thể biểu diễn đáp ứng xung $h(n)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến thành M thành phần pha như sau:

$$h_k(n) = h(nM + k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (7.17)$$



Hình 7.23: Ghép nối bộ sớm pha và bộ hạ tốc.



Hình 7.24: Phân tích thành M thành phần pha.

Gọi $H_k(z)$ là hàm truyền của hệ thống có đáp ứng xung là $h_k(n)$. Ta có

$$H_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+k)z^{-n}, \quad (7.18)$$

và

$$H_k(z^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nM+k)z^{-nM}. \quad (7.19)$$

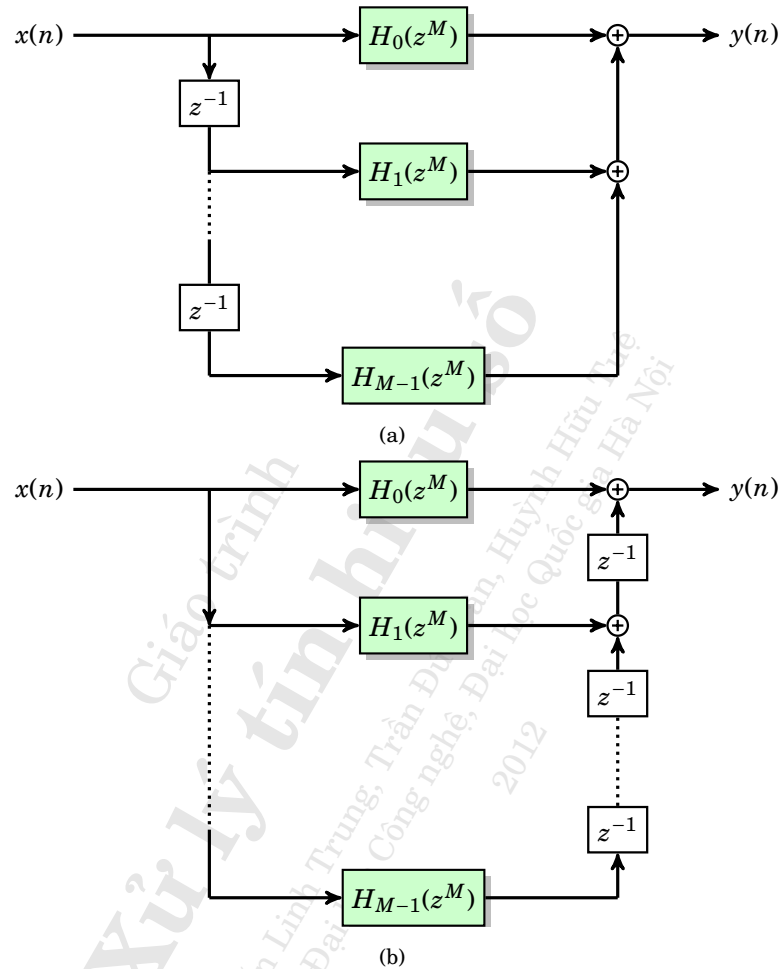
Biết rằng hàm truyền $H(z)$ của đáp ứng xung $h(n)$ là

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}, \quad (7.20)$$

ta có thể suy ra ngay

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} H_k(z^M). \quad (7.21)$$

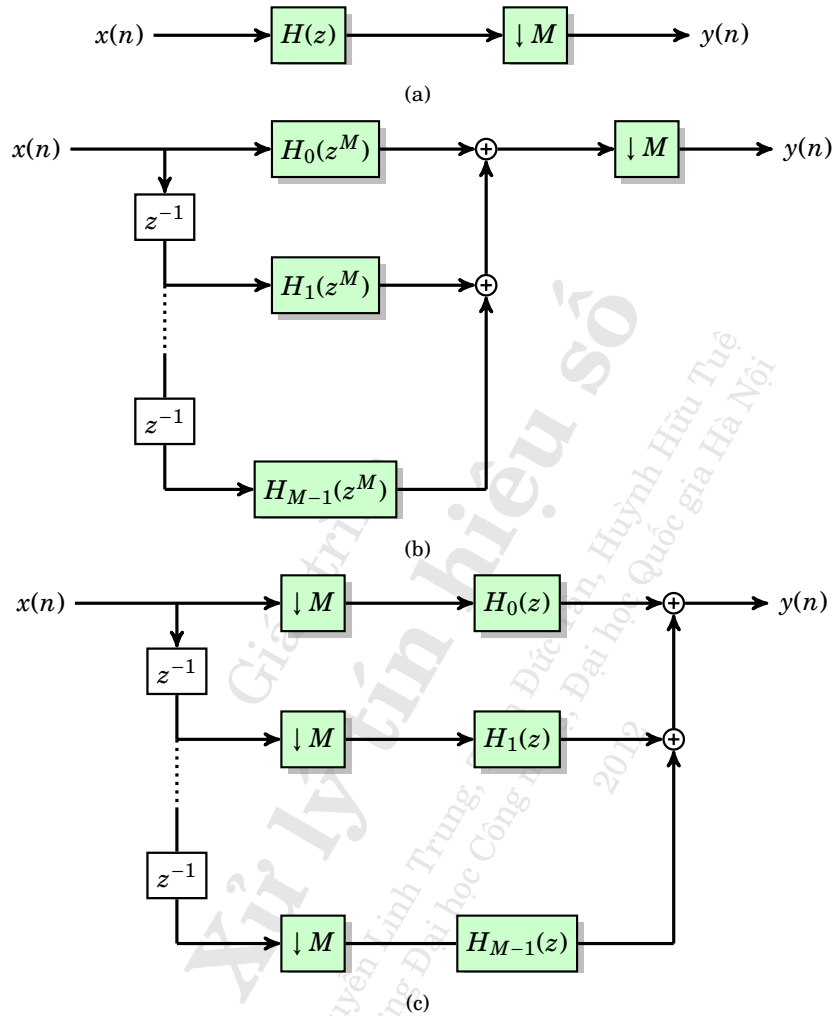
Cấu trúc này được mô tả bởi sơ đồ khối ở hình 7.25(a). Hệ thống này



Hình 7.25: Sơ đồ khối bộ lọc đa pha: (a) và (b) là tương đương.

được gọi là **bộ lọc đa pha*** và hoàn toàn tương đương với sơ đồ khối ở hình 7.25(b). Có thể thấy ngay các sơ đồ khối này sẽ rất hữu ích khi cần thiết kế một bộ lọc của hệ thống biến đổi vận tốc lấy mẫu có chiều dài rất lớn. Tính hữu ích của cấu trúc này có được nhờ các đẳng thức Noble đã được trình bày ở trên.

*Polyphase filter.

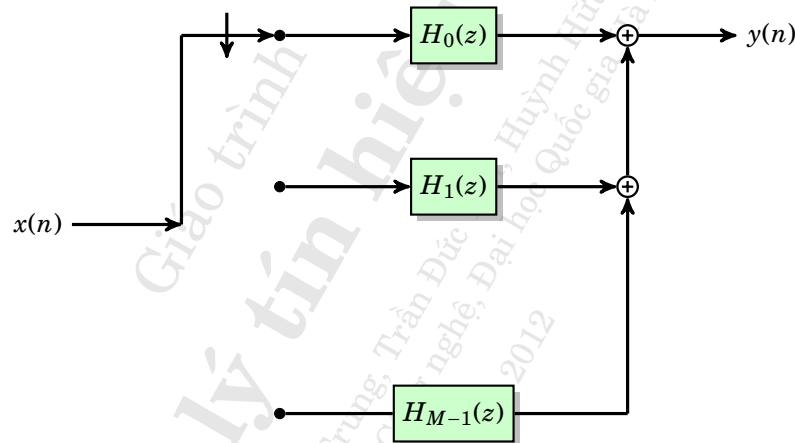


Hình 7.26: Áp dụng biểu diễn đa pha vào một hệ thống có chiều dài lớn. Hệ thống (a) được phân tích đa pha thành hai hệ thống tương đương (b) và (c).

Thật vậy, xét hệ thống $H(z)$ có chiều dài rất lớn ở hình 7.26(a) được phân tích thành hệ thống đa pha như ở hình 7.26(b). Hệ thống này trong thực tiễn là một phần của hệ thống thay đổi vận tốc theo

một tỷ lệ hữu tỉ (tham chiếu). Có rất nhiều trường hợp, chẳng hạn như trong ví dụ 7.3, để đáp ứng các đặc tả của hệ thống $H(z)$ có chiều dài L rất lớn và như thế không thể thực hiện được trực tiếp $H(z)$. Trong trường hợp này, ta dùng bộ lọc đa pha để một mặt hạ vận tốc xử lý, mặt khác làm giảm chiều dài của các bộ lọc được thiết kế. Chiều dài của mỗi bộ lọc đa pha thành phần nhỏ hơn rất nhiều so với chiều dài của bộ lọc gốc $H(z)$. Kết quả cuối cùng được minh họa ở hình 7.26(c).

Sơ đồ hệ thống này có thể thực hiện về mặt điện tử bằng mô hình như được minh họa ở hình 7.27.



Hình 7.27: Áp dụng biểu diễn đa pha vào một hệ thống có chiều dài lớn: thực hiện về mặt điện tử.

7.5 Kết luận

Trong chương này, ta đã nghiên cứu phương pháp thiết kế một bộ lọc tương đối phức tạp nhằm giúp các hệ thống hoạt động với vận tốc khác nhau có thể kết nối với nhau. Tuy nhiên, vì ràng buộc chặt chẽ của thiết kế mà ta cần có bộ lọc có chiều dài khá lớn. Thực hiện bằng điện tử các bộ lọc có chiều dài khá lớn là một vấn đề rất khó

giải quyết. Tuy nhiên, với biểu diễn đa pha, ta có thể thay thế bộ lọc này bằng một cấu trúc gồm nhiều bộ lọc ngắn hơn hoạt động song song. Cấu trúc song song này cho thấy không những ta giải quyết được vấn đề thực thi điện tử mà hơn thế nữa với cấu trúc này ta đã giảm khá nhiều vận tốc xử lý cho từng bộ phận của cấu trúc. Như thế, thao tác thay đổi vận tốc xử lý và cấu trúc đa pha là một thể thống nhất, mặc dù điểm xuất phát của hai khái niệm này có vẻ độc lập nhau.

Giáo trình
Xử lý tín hiệu số
Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội
2012

Bài tập

7.1. Cho một tín hiệu có chiều dài hữu hạn được biểu diễn như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - 0.1n, & \text{nếu } 0 \leq n \leq 10, \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

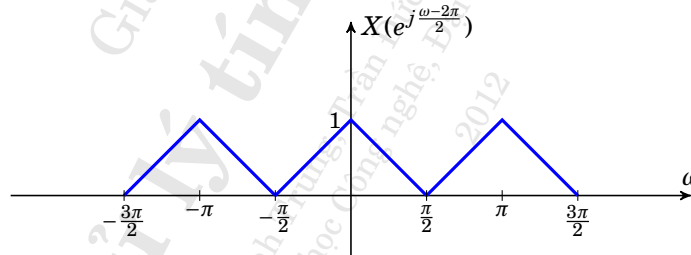
Cho tín hiệu $x(n)$ trên đi qua bộ hạ tốc với hệ số $M = 2$.

7.2. Cho một tín hiệu $x(n)$, có biến đổi Z là

$$X(z) = 3z^{-1} + 4z^{-2} + 7z^{-3} + 4z^{-4} + 3z^{-5},$$

đi qua một bộ hạ tốc có hệ số $M = 2$. Hãy xác định biến đổi Z của tín hiệu đầu ra.

7.3. Cho tín hiệu có phổ biên độ được mô tả như hình 7.28. Cho tín



Hình 7.28: Phổ tín hiệu trước khi hạ tốc [Bài tập 7.3].

hiệu này đi qua bộ hạ tốc có hệ số $M = 3$. Hãy xác định phổ biên độ tín hiệu đầu ra.

7.4. Cho một tín hiệu có chiều dài hữu hạn được biểu diễn như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1 - 0.1n, & \text{nếu } 0 \leq n \leq 10, \\ 0, & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Cho tín hiệu $x(n)$ trên đi qua bộ tăng tốc với hệ số $N = 2$.

7.5. Cho tín hiệu $x(n)$, có biến đổi Z là

$$X(z) = 1 + 3z^{-1} + 4z^{-2} + 7z^{-3} + 4z^{-4},$$

đi qua một bộ tăng tốc có hệ số $N = 3$, xác định tín hiệu đầu ra $y(n)$.

7.6. Cho tín hiệu có phổ biên độ được mô tả như ở hình 7.28 qua bộ tăng tốc có hệ số $N = 3$. Hãy xác định phổ biên độ tín hiệu đầu ra.

7.7. Cho tín hiệu $x(n)$, có biến đổi Z là

$$X(z) = 5 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4},$$

đi qua một bộ tăng tốc có hệ số $N = 3$, rồi qua một bộ hạ tốc có hệ số $M = 2$. Hãy xác định tín hiệu đầu ra $y(n)$.

7.8. Cho tín hiệu $x(n)$, có biến đổi Z là

$$X(z) = 5 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

đi qua một bộ hạ tốc có hệ số $M = 2$, rồi qua một bộ tăng tốc có hệ số $N = 3$. Hãy xác định tín hiệu đầu ra $y(n)$.

Tài liệu tham khảo

- [1] M. Bellanger, *Traitement numérique du signal : Théorie et pratique*, Dunod, 2002.
- [2] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [3] F. Harris, *Multirate Signal Processing for Communication Systems*, Prentice Hall, 2004.
- [4] V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing Using MATLAB*, 2nd ed., CL Engineering, 2006.
- [5] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, 1980.
- [6] S. M. Kuo, *Digital Signal Processors - Architectures, Implementations, and Applications*, Prentice Hall, 2005.
- [7] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*, 2nd ed., McGraw-Hill, 2001.
- [8] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, 2nd ed., Prentice-Hall, 1999.
- [9] A. Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977.
- [10] P. Prandoni and M. Vetterli, *Signal Processing for Communications*, CRC Press, 2008.

- [11] J. G. Proakis and D. K. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*, 4th ed., Prentice Hall, 2006.
- [12] R. J. Schilling and S. L. Harris, *Fundamentals of Digital Signal Processing Using MATLAB*, 2nd ed., Cengage Learning, 2010.
- [13] Nguyễn Quốc Trung, *Xử lý tín hiệu số và lọc số*, Tập 1, NXB Khoa học Kỹ thuật, 1999.
- [14] Nguyễn Quốc Trung, *Xử lý tín hiệu số và lọc số*, Tập 2, NXB Khoa học Kỹ thuật, 2003.
- [15] P. P. Vaidyanathan, *Multirate Systems And Filter Banks*, Prentice Hall, 1992.

Chỉ mục

- AR, 72
ARMA, 71, 75
Ảnh phổ, 228
- Bộ biến đổi số – tương tự, 23
Bộ biến đổi tương tự – số, 11
 lấy mẫu, 11
 lượng tử hóa, 11
 mã hóa, 11
Bộ cộng, 73
Bộ dịch trễ đơn vị, 73
Bộ khuếch đại, 73
Bộ vi xử lý tín hiệu, $DS\mu P$, 9
Biến đổi Z , 29, 54
 ngược, 59
 vùng hội tụ, 54
Biến đổi Fourier, 14
 đáp ứng tần số của hệ thống, 68
 phổ tín hiệu, 67
 thời gian liên tục, 66
 thời gian rời rạc, 66
Biến đổi Laplace, 28, 90
Biến đổi song tuyến tính, 133
Butterworth, 89, 98
- Cấu trúc thực thi, 71
 dạng nối tiếp, 77
 dạng song song, 78
 dạng thang chéo, 81
 dạng trực tiếp I, 76
 dạng trực tiếp II, 76
- Cửa sổ
 Blackman, 172
 chữ nhật, 166
 Cosine, 172
 Hamming, 172
 Hanning, 172
 Kaiser, 172
 tam giác (Barlett), 169
Chebyshev, 89, 101, 197
- Dịch gốc thời gian, 37
Dải chuyển tiếp, 93
Dải thông, 93
 độ gợn sóng, 102
Dải triệt, 93, 116
 độ gợn sóng dải triệt, 174
Định lý xen kẽ, 204
Đẳng thức Noble, 224, 230
Đáp ứng tần số, 68

- Đáp ứng xung, 47
 chiều dài hữu hạn, FIR, 47, 72
 chiều dài vô hạn, IIR, 47, 72
 Đồ thị dòng chảy, 74
 Đổi chiều thời gian, 37
 Đổi thang thời gian, 39
 Độ gọn sóng, 116
 Độ trễ
 bao, 93
 nhóm, 93
 pha, 93
 FIR, 47
 Gập phổ, 17, 216
 Hàm truyền, 64
 nghiệm cực, 65
 nghiệm không, 65
 Hệ thống, 4
 AR, 72
 ARMA, 71
 bất biến, 43
 bậc hữu hạn, 41
 có pha tuyến tính, 93
 đệ quy, 73
 động, có nhớ, 43
 FIR, 47
 IIR, 47
 không nhân quả, 65
 khởi động từ gốc, 63
 MA, 72
 nối tiếp, 45, 76
 nhân quả, 44
 ổn định, 45
 pha tối thiểu, 96
 rời rạc, 27, 40
 song song, 45
 tự hồi quy, 72
 tĩnh, không nhớ, 43
 toàn cực, 72
 toàn không, 72
 tuyến tính, 44
 tuyến tính bất biến, 46
 Hiện tượng Gibbs, 164
 IIR, 47, 89
 Khuếch đại tín hiệu, 40
 Lấy mẫu, 11
 đều, 13
 chu kỳ lấy mẫu, 13
 đều, 13
 tần số, 192
 Lấy và giữ mẫu, 20
 Lọc, 1, 4
 đa pha, 237
 hạ tốc, 217
 Hilbert, 209
 lý tưởng, 93
 lưu bậc không, 130
 phẳng tối đa, 98
 số, 5
 tăng tốc, 226
 tương tự, 5, 89
 vi phân, 209
 Lượng tử hóa, 20, 84
 bộ lượng tử, 21
 mức lượng tử, 13
 sai số lượng tử, 84

- sai số tích lũy, 85
- Méo, 92
 - biên độ, 92
 - pha, 92
- MA, 72, 81
- Nghiem
 - cực, 96
 - không, 96
 - riêng, 62
 - thuần nhất, 63
- Nyquist, 21
 - định lý lấy mẫu, 17
 - tần số, 18
- Parks–McClellan, 195
- Phương trình đặc trưng, 63
- Phương trình sai phân tuyến tính, 41
 - hệ số hằng số, 41, 64
 - nghiệm riêng, 62
 - nghiệm thuần nhất, 63
- Pha tuyến tính, 93, 195
 - mở rộng, 197
- Sơ đồ hệ thống, 41, 73
- Tích chập, 18, 48
- Tín hiệu, 2
 - công suất, 34
 - chẵn, đối xứng, 35
 - đáp ứng, đầu ra, 41
 - điều hòa, 91
 - kích thích, đầu vào, 41
 - không nhân quả, 57
 - lẻ, phản đối xứng, 35
 - năng lượng, 3, 34
 - ngẫu nhiên, 3
 - nhân quả, 55
 - rời rạc, 13
 - thời gian liên tục, 2
 - thời gian rời rạc, 2
 - tuần hoàn, 3, 34
- Tín hiệu cơ sở
 - đốc đơn vị, 32
 - mũ rời rạc, 32
 - thang đơn vị, 31
 - xung Dirac, 14
 - xung Kronecker, 31
- Tần số, 18
 - cắt, 136
 - cắt chuẩn hóa, 98
 - chuẩn hóa, 120
 - Nyquist, 18
 - số, 66, 136
 - tương tự, 136
 - vật lý, 138
- Thiết kế
 - thông cao, 113, 155, 183
 - thông dải, 106, 146, 188
 - thông thấp, 179
 - triệt dải, 110, 153
- Tiêu chí minmax, 200
- Vòng tròn đơn vị, 65
- Vận tốc lấy mẫu, 21

Giáo trình
Xử lý tín hiệu số
Nguyễn Linh Trung, Trần Đức Tân, Huỳnh Hữu Tuệ
Trường Đại học Công nghệ, Đại học Quốc gia Hà Nội
2012