Incluye código de acceso a: MathXL®

david c. lay

álgebra lineal y sus aplicaciones

4a edición

ALWAYS LEARNING

PEARSON

Código de acceso a MathXL® (en inglés)

Para registrarse en línea, ingrese a **www.mathxl.com**, vaya a la sección *Register*, seleccione la opción *Student* y siga las instrucciones que aparecen en pantalla.

El código de acceso para el estudiante que viene a continuación sólo puede usarse una vez y permite el acceso a esta plataforma durante un año.

Si está adquiriendo un libro nuevo y este código aparece descubierto, es probable que ya haya sido utilizado por alguien más.

IMPORTANTE:
Use una moneda para raspar y descubrir el código de acceso.
No use objetos afilados porque podría dañarlo.
El código de acceso no puede ser reemplazado en caso de daño.

CUARTA EDICIÓN

Álgebra lineal

y sus aplicaciones

David C. Lay

University of Maryland—College Park

Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

Traductora especialista en matemáticas

Revisión técnica

Javier Alfaro Pastor

Instituto Tecnológico Autónomo de México

PEARSON

Datos de catalogación bibliográfica

LAY, DAVID C.

Álgebra lineal y sus aplicaciones.
Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2012

ISBN: 978-607-32-1398-1
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 576

ISBN 9780321385178

Edición en español
Dirección Educación Superior: Mario Contreras
Editor sponsor: Gabriela López Ballesteros
e-mail: gabriela.lopezballesteros@pearson.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de Producción: Enrique Trejo Hernández
Gerencia Editorial
Latinoamérica: Marisa de Anta

CUARTA EDICIÓN, 2012

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. núm. 1031.

ISBN 978-607-32-1398-1
ISBN e-book 978-607-32-1399-8
ISBN e-chapter 978-607-32-1400-1

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 15 14 13 12

PEARSON

www.pearsonenespañol.com **ISBN: 978-607-32-1398-1**

A mi esposa, Lillian, y a nuestras hijas
Christina, Deborah y Melissa, cuyo
apoyo, ánimos y devotas
oraciones hicieron posible este libro.

Acerca del autor

David C. Lay tiene una licenciatura de Aurora University (Illinois), y una maestría y un doctorado en la Universidad de California en Los Ángeles. Lay ha sido catedrático e investigador en matemáticas desde 1966, principalmente en la Universidad de Maryland, College Park. También ha trabajado como profesor visitante en la Universidad de Amsterdam, en la Universidad Libre de Amsterdam y en la Universidad de Kaiserslautern, en Alemania. Ha escrito más de 30 artículos de investigación de análisis funcional y álgebra lineal.

Como miembro fundador del Grupo de Estudio del Currículo de Álgebra Lineal patrocinado por la NSF, ha sido líder en el movimiento actual para modernizar el plan de estudios de álgebra lineal. Lay también es coautor de varios libros de matemáticas, entre los que se incluyen, *Introduction to Functional Analysis*, con Angus E. Taylor, *Calculus and its Applications*, con L. J. Goldstein y D. I. Schneider, y *Linear Algebra Gems–Assets for Undergraduate Mathematics*, con D. Carlson, C. R. Johnson y A. D. Porter.

El profesor Lay ha recibido cuatro premios universitarios por excelencia docente, incluido el de Distinguished Scholar Teacher de la Universidad de Maryland en 1996. En 1994 la Mathematical Association of America le otorgó el premio Distinguished College or University Teaching of Mathematics. Ha sido elegido por los estudiantes universitarios como miembro de la Alpha Lambda Delta National Scholastic Honor Society y de la Golden Key National Honor Society. En 1989 Aurora University le concedió el premio Outstanding Alumnus. Lay es miembro de la American Mathematical Society, de la Canadian Mathematical Society, de la International Linear Algebra Society, de la Mathematical Association of America, Sigma Xi, y de la Society for Industrial and Applied Mathematics. Desde 1992 ha formado parte de la junta directiva nacional de la Association of Christians in the Mathematical Sciences.

Contenido

Los capítulos 9 y 10 se encuentran en inglés en el sitio Web del libro.

Apéndices

Prefacio

La respuesta de los estudiantes y profesores a las tres primeras ediciones de *Álgebra lineal y sus aplicaciones* ha sido muy gratificante. Esta cuarta edición brinda un importante apoyo tanto para la enseñanza como para el uso de la tecnología en el curso. Al igual que en las ediciones anteriores, el libro ofrece una introducción elemental actualizada al álgebra lineal y una amplia selección de aplicaciones interesantes. El material es accesible a estudiantes con la madurez que se consigue al finalizar de manera exitosa dos semestres de matemáticas de nivel universitario, por lo general, de cálculo.

El objetivo principal del libro es ayudar a los estudiantes a dominar los conceptos básicos y las habilidades que usarán más adelante en sus carreras. Los temas expuestos siguen las recomendaciones del Grupo de Estudio del Currículo de Álgebra Lineal, las cuales se basan en una cuidadosa investigación de las necesidades reales de los estudiantes y en un consenso entre profesionales de muchas disciplinas que utilizan el álgebra lineal. Esperamos que este curso sea una de las clases de matemáticas más útiles e interesantes para los estudiantes de licenciatura.

LO NUEVO EN ESTA EDICIÓN

El principal objetivo de esta revisión fue actualizar los ejercicios e incluir nuevos contenidos, tanto en el libro como en línea.

1. Más del 25 por ciento de los ejercicios son nuevos o actualizados, en especial los ejercicios computacionales. Los conjuntos de ejercicios son una de las características más importantes de este libro, y estos nuevos ejercicios siguen el mismo estándar elevado de los conjuntos de ejercicios de las tres últimas ediciones. Están diseñados de tal forma que se refieren a los temas importantes de cada una de las secciones anteriores, y permiten que los alumnos desarrollen confianza al motivarlos a practicar y generalizar las nuevas ideas que acaban de estudiar.
2. El 25 por ciento de los ejemplos introductorios de los capítulos son nuevos. Estas introducciones tienen que ver con aplicaciones de álgebra lineal y despiertan el interés en torno al desarrollo del tema que se presenta a continuación. El texto retoma el ejemplo introductorio en una sección al final de cada capítulo.
3. Se incluye un nuevo capítulo, el 8, titulado “Geometría de los espacios vectoriales”, el cual presenta un tema novedoso que mis alumnos han disfrutado estudiar. Las secciones 1, 2 y 3 ofrecen las herramientas geométricas básicas. La sección 6 utiliza estas ideas para estudiar las curvas y superficies de Bézier, las cuales se utilizan en gráficos elaborados con computadora en el campo de la ingeniería y en línea (en Adobe® Illustrator® y Macromedia® FreeHand®). Estas cuatro secciones se pueden cubrir en cuatro o cinco sesiones de clase de 50 minutos.

   El segundo curso en las aplicaciones de álgebra lineal suele comenzar con una revisión sustancial de las ideas principales del primer curso. Si una parte del capítulo 8 se encuentra en el primer curso, el segundo podría incluir una breve reseña de las secciones 1 a 3 y, luego, un enfoque de la geometría en las secciones 4 y 5. Eso conduciría, naturalmente, a los capítulos 9 y 10 que se presentan en línea, los cuales se han utilizado junto con el capítulo 8 en varias escuelas en los últimos cinco años.

4. Hay dos nuevos capítulos disponibles en línea en inglés, y se pueden utilizar en un segundo curso:

   Chapter 9. Optimization
   Chapter 10. Finite-State Markov Chains

   Se requiere un código de acceso y está disponible para todos los profesores que adopten el libro. Para más información, visite *www.pearsonhighered.com/irc* o póngase en contacto con su representante de Pearson.
5. Diapositivas de PowerPoint® están disponibles para las 25 secciones principales del texto; también se incluyen más de 75 figuras del texto.

CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS

Introducción temprana a los conceptos clave

Muchas de las ideas fundamentales del álgebra lineal se introducen dentro de las primeras siete lecturas en el contexto concreto de $\mathbb{R}^n$, y después, gradualmente, se examinan desde diferentes puntos de vista. Más adelante, se presentan generalizaciones de estos conceptos como extensiones naturales de ideas familiares, visualizadas a través de la intuición geométrica desarrollada en el capítulo 1. Un logro importante del libro es que el nivel de dificultad es bastante uniforme durante todo el curso.

Una visión moderna de la multiplicación de matrices

Una buena notación es importante, y el libro refleja la manera en que los científicos e ingenieros utilizan el álgebra lineal en la práctica. Las definiciones y demostraciones se centran en las columnas de una matriz antes que en sus entradas. Un tema central es considerar un producto matriz-vector $A\mathbf{x}$ como una combinación lineal de las columnas de A. Este enfoque moderno simplifica muchos argumentos, y vincula las ideas de espacio vectorial con el estudio de sistemas lineales.

Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales forman un "hilo" que se entreteje en la trama del libro. Su uso mejora el sentido geométrico del texto. En el capítulo 1, por ejemplo, las transformaciones lineales ofrecen una visión dinámica y gráfica de la multiplicación matriz-vector.

Valores propios y sistemas dinámicos

Los valores propios se presentan muy pronto en el libro, en los capítulos 5 y 7. Como este material se estudia durante varias semanas, los estudiantes tienen más tiempo de lo habitual para aprender y revisar tales conceptos fundamentales. Los valores propios se aplican a sistemas dinámicos discretos y continuos, los cuales se presentan en las secciones 1.10, 4.8 y 4.9, y en las cinco secciones del capítulo 5. Algunos cursos llegan al capítulo 5, después de aproximadamente cinco semanas, cubriendo las secciones 2.8 y 2.9 en vez del capítulo 4. Estas dos secciones opcionales presentan todos los conceptos de espacio vectorial del capítulo 4 necesarios para el capítulo 5.

Ortogonalidad y problemas de mínimos cuadrados

Estos temas reciben un tratamiento más completo que el que se otorga comúnmente en los libros básicos. El Grupo de Estudio del Currículo de Álgebra Lineal ha hecho hincapié en la necesidad de contar con una unidad sustancial de ortogonalidad y problemas de mínimos cuadrados, ya que la ortogonalidad desempeña un importante papel en los cálculos computacionales y en el álgebra lineal numérica, y porque, con frecuencia, en el trabajo práctico surgen sistemas lineales inconsistentes.

CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Aplicaciones

Una amplia selección de aplicaciones muestra el poder del álgebra lineal para explicar principios fundamentales y simplificar los cálculos en ingeniería, ciencias de la computación, matemáticas, física, biología, economía y estadística. Algunas aplicaciones se presentan en secciones separadas, mientras que otras se explican con ejemplos y ejercicios. Además, cada capítulo se inicia con un ejemplo introductorio que prepara el escenario para algunas aplicaciones del álgebra lineal y sirve de base para el desarrollo de las matemáticas que siguen. Después, el texto considera nuevamente la aplicación en una sección cercana al final del capítulo.

Un fuerte énfasis geométrico

Todos los conceptos importantes en el curso cuentan con una interpretación geométrica, ya que muchos estudiantes aprenden mejor cuando logran visualizar una idea. Aquí se presentan más dibujos de lo habitual, y algunas de las figuras nunca antes se han presentado en un libro de álgebra lineal.

Ejemplos

Este libro dedica una mayor proporción de su material de exposición a ejemplos, en comparación con la mayoría de libros de álgebra lineal. Hay más ejemplos de los que un profesor presenta normalmente en clase. Puesto que los ejemplos se escribieron con sumo cuidado y con detalle, los estudiantes pueden leerlos por su cuenta.

Teoremas y demostraciones

Los resultados importantes se establecen como teoremas. Otros datos útiles se presentan en recuadros, para una fácil localización. La mayoría de los teoremas incluyen demostraciones formales, escritas pensando en el alumno principiante. En algunos casos, los cálculos esenciales de una demostración se muestran en un ejemplo cuidadosamente elegido. Algunas comprobaciones de rutina se dejan para los ejercicios, cuando sea benéfico para los estudiantes.

Problemas de práctica

Antes de cada conjunto de ejercicios se incluyen problemas de práctica seleccionados con gran cuidado. Las soluciones completas se presentan después del conjunto de ejercicios. Estos problemas se centran en los aspectos problemáticos del conjunto de ejercicios o sirven de "calentamiento" para los ejercicios; con frecuencia, las soluciones contienen útiles consejos o advertencias acerca del trabajo que hay que realizar.

Ejercicios

El gran número de ejercicios incluye desde algunos que tienen que ver con cálculos de rutina hasta preguntas conceptuales que requieren de mayor reflexión. Un buen número de preguntas innovadoras destacan las dificultades conceptuales que he encontrado en los documentos de los estudiantes en los últimos años. Cada conjunto de ejercicios está cuidadosamente organizado en el mismo orden general que el libro, de manera que las tareas se pueden encontrar fácilmente cuando solo se ha estudiado una parte de la sección. Una característica notable de los ejercicios es su sencillez numérica. El contenido de los problemas se puede ordenar rápidamente, para que los estudiantes dediquen poco tiempo a los cálculos numéricos. Los ejercicios se concentran en enseñar a razonar antes que en realizar cálculos mecánicos. Los ejercicios de la *cuarta edición* conservan la integridad de los que se incluyeron en la tercera edición, y presentan nuevos problemas para estudiantes y profesores.

Los ejercicios marcados con el símbolo [**M**] están diseñados para trabajarse con la ayuda de un "programa de **M**atrices" (por ejemplo, programas computacionales, como **M**ATLAB®, **M**aple™, **M**athematica®, **M**athCad®, o Derive™, o calculadoras programables con capacidades matriciales, como las que fabrica Texas Instruments).

Preguntas verdadero/falso

Para animar a los estudiantes a leer todo el libro y a pensar críticamente, he desarrollado 300 preguntas sencillas de falso/verdadero que se presentan en 33 secciones del libro, justo después de los problemas computacionales. Estas preguntas se pueden contestar directamente del libro, y preparan al estudiante para los problemas conceptuales que siguen. Los estudiantes aprecian estas preguntas una vez que valoran la importancia de leer con cuidado el libro. Con base en las pruebas de clase y los análisis con los estudiantes, decidí no incluir las respuestas en el libro. Se cuenta con 150 preguntas adicionales de falso/verdadero (casi siempre al final de los capítulos) para comprobar la comprensión del material. El libro presenta solo respuestas con V o F para la mayoría de estas preguntas, pero omite las justificaciones de las respuestas (las cuales, por lo general, requieren de cierto razonamiento).

Ejercicios de escritura

La capacidad de escribir enunciados matemáticos coherentes en español es esencial para todos los estudiantes de álgebra lineal, y no solo para aquellos que cursan un posgrado en matemáticas. El libro incluye muchos ejercicios para los que una justificación por escrito es parte de la respuesta. Los ejercicios conceptuales que requieren una prueba corta, por lo general, incluyen consejos que ayudan a los estudiantes a comenzar. Para todos los ejercicios de escritura de numeración impar, en la parte final del libro, se incluye ya sea una solución o una sugerencia.

Temas computacionales

El libro hace hincapié en los efectos de la computadora tanto en el desarrollo como en la práctica del álgebra lineal en las ciencias y la ingeniería. Las frecuentes notas numéricas llaman la atención en torno a problemas computacionales; además, distinguen entre los conceptos teóricos, como la inversión de matrices, y las implementaciones computacionales, como la factorización LU.

APOYO EN LÍNEA

El sitio Web en *www.pearsonenespañol.com/lay* contiene material de apoyo para el libro de texto. Para los estudiantes, incluye **hojas de repaso** y **exámenes de práctica** (con soluciones) que cubren los temas principales en el libro. Estas secciones provienen directamente de cursos que he impartido en los últimos años. Cada hoja de repaso identifica definiciones clave, así como teoremas y habilidades de una parte específica del libro.

Aplicaciones de los capítulos

El sitio Web también contiene siete estudios de caso, los cuales amplían los temas introducidos al inicio de cada capítulo, al agregar datos del mundo real y la posibilidad de realizar una exploración más profunda. Por otro lado, más de veinte proyectos de aplicación amplían los temas del libro e introducen nuevas aplicaciones, como splines cúbicos, rutas de vuelo de aerolíneas, matrices de dominio en competencias deportivas y códigos de corrección de errores. Algunas aplicaciones matemáticas son técnicas de integración, ubicación de raíces polinomiales, secciones cónicas, superficies cuadráticas y extremos de funciones de dos variables. También se incluyen temas de álgebra lineal numérica, como números de condición, factorizaciones de matrices y el método QR para encontrar valores propios. Entretejidos en cada análisis, se encuentran ejercicios que pueden implicar grandes conjuntos de datos (por lo que requieren de tecnología para su solución).

Introducción a la tecnología

Si el curso incluye un trabajo con MATLAB, Maple, Mathematica o calculadoras TI, se puede leer uno de los proyectos en el sitio Web para tener una introducción a la tecnología.

Archivos de datos

Cientos de archivos contienen datos de 900 ejercicios del texto, estudios de caso y proyectos de aplicación. Los datos están disponibles en *www.pearsonenespañol.com/lay* en una variedad de formatos, para MATLAB, Maple, Mathematica y las calculadoras graficadoras TI-83+/86/89. Al permitir a los alumnos acceder a las matrices y los vectores de un problema particular con solo pulsar unas cuantas teclas, los archivos de datos eliminan los errores de captura de datos y ahorran tiempo en la tarea.

Proyectos MATLAB

Estos proyectos de exploración invitan a los estudiantes a descubrir los aspectos matemáticos y numéricos básicos de álgebra lineal. Escritos por Rick Smith, se han desarrollado para acompañar los cursos de álgebra lineal computacional en la Universidad de Florida, que han utilizado *Álgebra lineal y sus aplicaciones* durante muchos años. Se hace referencia a los proyectos por medio de un icono WEB en puntos adecuados del libro. Alrededor de la mitad de los proyectos exploran conceptos fundamentales, como el espacio columna, la diagonalización y las proyecciones ortogonales; varios proyectos tratan temas numéricos, tales como flops, métodos iterativos y DVS, y algunos más exploran aplicaciones como la interpolación de Lagrange y las cadenas de Markov.

COMPLEMENTOS

Manuales de tecnología para el profesor

Cada manual ofrece una guía detallada para integrar al curso un paquete de software específico o una calculadora gráfica. Los manuales fueron escritos por profesores que ya han utilizado tecnología con este libro. Los siguientes manuales están disponibles para profesores que adopten el libro, a través de Pearson Instructor Resource Center, *www.pearsonhighered.com/irc*: MATLAB (ISBN: 0-321-53365-8), Maple (ISBN: 0-321-75605-3), Mathematica (ISBN: 0-321-38885-2) y TI-83+/86/89 (ISBN: 0-321-38887-9).

AGRADECIMIENTOS

Estoy muy agradecido con muchos grupos de personas que me han ayudado en los últimos años con diversos aspectos de este libro.

Quiero agradecer a Israel Gohberg y Robert Ellis, quienes desde hace más de quince años han colaborado conmigo en la investigación, lo que ha contribuido a formar en gran parte mi punto de vista del álgebra lineal. Para mí, ha sido un privilegio ser un miembro del Grupo de Estudio del Currículo de Álgebra Lineal junto con David Carlson, Charles Johnson y Duane Porter. Sus ideas creativas acerca de la enseñanza del álgebra lineal han influido en este libro de forma significativa.

Agradezco sinceramente a los siguientes revisores por su cuidadoso análisis y sugerencias constructivas:

Rafal Ablamowicz, *Tennessee Technological University*
Brian E. Blank, *Washington University en Saint Louis*
Vahid Dabbaghian-Abdoly, *Simon Fraser University*
James L. Hartman, *The College of Wooster*
Richard P. Kubelka, *San Jose State University*
Martin Nikolov, *University of Connecticut*
Ilya M. Spitkovsky, *College of William & Mary*
John Alongi, *Northwestern University*
Steven Bellenot, *Florida State University*
Herman Gollwitzer, *Drexel University*
David R. Kincaid, *The University of Texas en Austin*
Douglas B. Meade, *University of South Carolina*
Tim Olson, *University of Florida*
Albert L. Vitter III, *Tulane University*

En esta cuarta edición, agradezco a mi hermano, Steven Lay, de Lee University, por su generosa ayuda y aliento, y por su reciente revisión del capítulo 8. Agradezco a Raymond Rosentrater, de Westmont College, por sus útiles consejos y su ayuda con los ejemplos introductorios de los capítulos. Otra talentosa profesora, Judith McDonald, de Washington State University, desarrolló muchos nuevos ejercicios para el libro. Su ayuda y entusiasmo por el libro fue muy refrescante y estimulante.

Agradezco a los expertos en tecnología que trabajaron en los diferentes complementos de la cuarta edición, la preparación de los datos, la redacción de las notas para los profesores, la escritura de notas de tecnología para los estudiantes y por compartir sus proyectos con nosotros: Jeremy Case (MATLAB), Taylor University; Douglas Meade (Maple), University of South Carolina; Michael Miller (calculadora TI), Western Baptist College; y Marie Vanisko (Mathematica), Carroll College.

Agradezco al profesor John Risley y a los estudiantes de posgrado David Aulicino, Sean Burke y Goldberg Hersh por sus conocimientos técnicos para ayudar a desarrollar las tareas en línea que apoyan el libro. Por las pruebas en clase de este apoyo de tareas en línea, estoy muy agradecido con: Agnes Boskovitz, Malcolm Brooks, Elizabeth Ormerod, Alexander Isaev y John Urbas, de la Australian National University; John Scott y Wee Leben, del Montgomery College, Maryland; y Xingru Zhang en SUNY University of Buffalo.

Agradezco la ayuda de Blaise DeSesa, Jean Horn, Roger Lipsett, Paul Lorczak, Thomas Polaski, Sarah Streett y Marie Vanisko, quienes comprobaron la exactitud de los cálculos en el libro.

Por último, agradezco sinceramente al personal de Addison-Wesley por toda su ayuda en el desarrollo y la producción de la cuarta edición: Caroline Celano, editora responsable; Chere Bemelmans, editora de contenido; Tamela Ambush, editora administrativa asociada; Carl Cottrell, productor de medios de comunicación; Jeff Weidenaar, director ejecutivo de marketing; Kendra Bassi, asistente de marketing; y Andrea Nix, diseñadora de texto. Por último, agradezco a tres buenos amigos que han guiado el desarrollo de la obra casi desde el principio con sus sabios consejos y estímulos: Greg Tobin, editor, Laurie Rosatone, editor anterior, y William Hoffman, editor actual. Muchas gracias a todos.

David C. Lay

AGRADECIMIENTOS

Pearson agradece a los profesores usuarios de esta obra y a los centros de estudio por su apoyo y retroalimentación, elementos fundamentales para esta nueva edición de *Álgebra lineal y sus aplicaciones*.

COLOMBIA
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Gustavo Rubiano

MÉXICO

AGUASCALIENTES
Instituto Tecnológico de Aguascalientes
Ciencias Básicas
Alejandra Espinosa Guzmán
David Ortiz Acosta
Jesús Espino Márquez
José Refugio González López
Judith Mauricio de Anda
Paula Castillo Rosales
Sergio Heraccio Sánchez Calvillo

DISTRITO FEDERAL
Instituto Tecnológico Autónomo de México
Departamento de Matemáticas
Araceli Reyes Guerrero
Marcela González Peláez

Universidad Anáhuac del Sur
Departamento de Matemáticas
José Antonio Bohon Devars

Universidad del Valle de México campus Tlalpan
Departamento de Matemáticas
Juan Andrés Aspiazu Fabián

GUANAJUATO
Instituto Tecnológico de Celaya
Ciencias Básicas
José Carlos Cárdenas Rivera

SAN LUIS POTOSÍ
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
Física y Matemáticas
Guadalupe Silva Esparza
J. Socorro Loera Díaz
María del Pilar Yudiche Paz
María Eugenia Noriega Treviño
María Irene Liliana Gallegos García
María Isabel Zermeño Mantante
Miguel Ángel Viramontes Reyna

PUEBLA
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Puebla
Departamento Académico de Administración
Escuela de Negocios y Ciencias Sociales
Jorge Alberto González Mendivil
Miguel Guadalupe Díaz Sánchez

Instituto Tecnológico de Puebla
Departamento Ingeniería Industrial
Escuela de Ingeniería
Alfonso Serrano Gálvez

Universidad De Las Américas Puebla
Departamento de Turismo
Escuela de Negocios y Economía
Alfonso Rocha Herrera

Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
Departamento Administración
Escuela de Negocios
Claudia Malcón Cervera

SINALOA
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Sinaloa
Departamento de Ingeniería
Cruz Evelia Sosa Carrillo

Universidad de Occidente, Unidad Culiacán
Departamento de Ingeniería
Raúl Soto Murray

Nota para los estudiantes

Este curso es potencialmente el más interesante y valioso de los cursos de matemáticas de licenciatura. De hecho, algunos estudiantes me han escrito o han hablado conmigo después de la graduación para decirme que aún utilizan este libro de cuando en cuando como una referencia en su carrera en las grandes corporaciones y en las escuelas de posgrado de ingeniería. Los siguientes comentarios ofrecen algunos consejos prácticos e información para ayudarle a dominar el material y disfrutar del curso.

En álgebra lineal, los *conceptos* son tan importantes como los *cálculos*. Los sencillos ejercicios numéricos que se incluyen al principio de cada conjunto de ejercicios solo le ayudarán a comprobar su comprensión de los procedimientos básicos. Más adelante en su carrera, las computadoras harán los cálculos, pero usted tendrá que elegir cuáles son pertinentes, saber interpretar los resultados, y después explicar los resultados a otras personas. Por esta razón, muchos ejercicios en el libro le piden que explique o justifique sus cálculos. Con frecuencia se solicita una explicación por escrito como parte de la respuesta. Para los ejercicios con numeración impar, se incluye ya sea la explicación deseada o, al menos, una buena sugerencia. Debe evitar la tentación de consultar esas respuestas antes de haber tratado de escribir la solución. De lo contrario, es probable que crea que entiende algo cuando en realidad no es así.

Para dominar los conceptos de álgebra lineal, tendrá que leer y releer el texto con cuidado. Los nuevos términos aparecen en negritas, a veces dentro de un recuadro de definición. Al final del libro se incluye un glosario. Algunos hechos importantes se establecen como teoremas o se destacan en recuadros sombreados, para una fácil localización. Le animo a que lea las primeras cinco páginas del prefacio para aprender más acerca de la estructura de este libro. Esto le dará una idea para comprender cómo puede continuar el curso.

En un sentido práctico, el álgebra lineal es un lenguaje. Usted tiene que aprender este lenguaje de la misma manera que un idioma extranjero, esto es, con el trabajo diario. El material que se presenta en una sección no es fácil de entender a menos que haya estudiado a fondo el libro y que haya trabajado los ejercicios de las secciones anteriores. ¡Mantenerse al día con el curso le ahorrará mucho tiempo y angustia!

Notas numéricas

Espero que lea las notas numéricas en el texto, incluso si no está utilizando una computadora o una calculadora gráfica con el libro. En la vida real, la mayoría de las aplicaciones del álgebra lineal implican cálculos numéricos que están sujetos a algún error numérico, aunque quizás este sea muy pequeño. Las notas numéricas le advertirán las posibles dificultades en el uso del álgebra lineal más adelante en su carrera, y si usted estudia las notas ahora, es más probable que las recuerde después.

Si le gusta leer las notas numéricas, es posible que desee tomar un curso más tarde en álgebra lineal numérica. Debido a la gran demanda de mayor capacidad para realizar cálculos, científicos de la computación y matemáticos trabajan en álgebra lineal numérica para desarrollar algoritmos de cálculos más rápidos y más confiables, mientras que los ingenieros eléctricos diseñan computadoras pequeñas y rápidas para ejecutar algoritmos. Este es un campo emocionante, y su primer curso de álgebra lineal le ayudará a prepararse para ello.

1

Ecuaciones lineales en álgebra lineal

EJEMPLO INTRODUCTORIO

Modelos lineales en economía e ingeniería

Al final del verano de 1949, Wassily Leontief, profesor de Harvard, introducía con cuidado la última de sus tarjetas perforadas en la computadora Mark II de la universidad. Las tarjetas contenían información acerca de la economía de Estados Unidos; se trataba de un resumen de más de 250,000 datos generados por la Oficina de Estadística Laboral (U.S. Bureau of Labor) durante dos años de intenso trabajo. Leontief dividió la economía estadounidense en 500 "sectores", que incluían las industrias carbonífera, automotriz, de comunicaciones, etcétera. Para cada sector, escribió una ecuación lineal que describía cómo la industria en cuestión distribuía su producto hacia los otros sectores de la economía. Como la computadora Mark II, una de las más grandes de su época, no podía manejar el sistema resultante de 500 ecuaciones y 500 incógnitas, Leontief redujo el problema a un sistema de 42 ecuaciones y 42 incógnitas.

Programar la Mark II para manejar las 42 ecuaciones de Leontief requirió varios meses de trabajo, y él estaba ansioso por ver cuánto tardaría la computadora en resolver el problema. La máquina emitió zumbidos y sus luces parpadearon durante 56 horas antes de que finalmente arrojara un resultado. En las secciones 1.6 y 2.6 se analizará la naturaleza de esa solución.

Leontief, galardonado en 1973 con el Premio Nobel de Economía, abrió la puerta a una nueva era en la elaboración de modelos matemáticos en economía. Sus esfuerzos en Harvard, en 1949, representaron uno de los primeros usos significativos de las computadoras para analizar lo que, en esa época, era un modelo matemático de gran escala. Desde entonces, investigadores en muchos otros campos han empleado computadoras para analizar modelos matemáticos. Debido a las enormes cantidades de datos implicados, los modelos, por lo regular, son *lineales*; es decir, se describen mediante *sistemas de ecuaciones lineales*.

La importancia del álgebra lineal para diversas aplicaciones ha crecido en proporción directa al incremento de la capacidad de las computadoras, y cada nueva generación de hardware y software dispara la demanda de capacidades aun mayores. Por ello, la ciencia de la computación está fuertemente vinculada con el álgebra lineal a través del explosivo crecimiento de los procesamientos en paralelo y el cálculo a gran escala.

Ahora los científicos e ingenieros trabajan en problemas cada vez más complejos, lo que era impensable hace algunas décadas. Actualmente, ¡el álgebra lineal tiene mayor valor potencial para estudiantes de muchos campos científicos y de negocios que cualquier otra materia de matemáticas! El material que se presenta en este libro ofrece el fundamento para un trabajo posterior en muchas áreas interesantes. A continuación se mencionan unas cuantas posibilidades; otras se describirán más adelante.

- *Exploración petrolera*. Cuando un barco busca depósitos submarinos de petróleo, sus computadoras resuelven *todos los días* miles de sistemas de ecuaciones lineales. Los datos sísmicos de las ecuaciones se obtienen a partir de las ondas de choque submarinas generadas por explosiones de pistolas de aire. Las ondas rebotan en las rocas bajo el agua, y los geófonos conectados a la popa del barco mediante cables de varios kilómetros se encargan de medirlas.

- *Programación lineal.* Actualmente, muchas decisiones empresariales importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables. La industria de las aerolíneas, por ejemplo, utiliza la programación lineal para organizar los itinerarios de las tripulaciones de vuelo, monitorizar la ubicación de los aviones o planear la variada agenda de los servicios de apoyo, como las actividades operativas y de mantenimiento en las terminales aéreas.
- *Redes eléctricas.* Los ingenieros utilizan software de simulación para diseñar circuitos eléctricos y microchips, lo que implica millones de transistores. Dicho software se basa en técnicas de álgebra lineal y en sistemas de ecuaciones lineales.

WEB

Los sistemas de ecuaciones lineales constituyen el corazón del álgebra lineal, y este capítulo los utiliza para introducir, de manera sencilla y concreta, algunos de los conceptos centrales del álgebra lineal. Las secciones 1.1 y 1.2 presentan un método sistemático para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En este libro se empleará dicho algoritmo para realizar diversos cálculos. Las secciones 1.3 y 1.4 muestran cómo un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a una *ecuación vectorial* y a una *ecuación matricial*. Esta equivalencia reducirá problemas que implican combinaciones lineales de vectores a preguntas acerca de sistemas de ecuaciones lineales. Los conceptos fundamentales de generación, independencia lineal y transformaciones lineales, que se estudiarán en la segunda mitad de este capítulo, desempeñarán un papel esencial a lo largo del libro conforme se explore la belleza y el poder del álgebra lineal.

1.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

donde b y los **coeficientes** $a_1, \ldots, a_n$ son números reales o complejos, que generalmente se conocen de antemano. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo. En los ejemplos y ejercicios del libro, n normalmente está entre 2 y 5. En problemas de la vida real, n podría ser 50 o 5000, o incluso mayor.

Las ecuaciones

$$4x_1 - 5x_2 + 2 = x_1 \quad \text{y} \quad x_2 = 2\left(\sqrt{6} - x_1\right) + x_3$$

son lineales porque se pueden reordenar algebraicamente en la forma de la ecuación (1):

$$3x_1 - 5x_2 = -2 \quad \text{y} \quad 2x_1 + x_2 - x_3 = 2\sqrt{6}$$

Las ecuaciones

$$4x_1 - 5x_2 = x_1x_2 \quad \text{y} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$$

no son lineales debido a la presencia de x_1x_2 en la primera ecuación y de $\sqrt{x_1}$ en la segunda.

Un **sistema de ecuaciones lineales** (o **sistema lineal**) es una colección de una o más ecuaciones lineales que implican las mismas variables, por ejemplo, $x_1, \ldots, x_n$. Un ejemplo es

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned} \tag{2}$$

Una **solución** del sistema es una lista de números $(s_1, s_2,\ldots, s_n)$ que da validez a cada ecuación cuando se utilizan los valores $s_1,\ldots, s_n$ en lugar de $x_1,\ldots, x_n$, respectivamente. Por ejemplo, (5, 6.5, 3) es una solución del sistema (2) porque al sustituir estos valores en (2) para x_1, x_2, x_3, respectivamente, las ecuaciones se simplifican a $8 = 8$ y $-7 = -7$.

El conjunto de todas las posibles soluciones se llama **conjunto solución** del sistema lineal. Se dice que dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Es decir, cada solución del primer sistema es una solución del segundo sistema, y cada solución del segundo sistema también es una solución del primero.

Es fácil encontrar el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables porque equivale a obtener la intersección de dos rectas. Un problema común es

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Las gráficas de esas ecuaciones son líneas rectas, las cuales se denotan como ℓ_1 y ℓ_2. Un par de números (x_1, x_2) satisface *ambas* ecuaciones del sistema si y solo si el punto (x_1, x_2) está sobre ℓ_1 y ℓ_2. En el sistema anterior, la solución es el único punto (3, 2), lo que puede comprobarse fácilmente. Véase la figura 1.

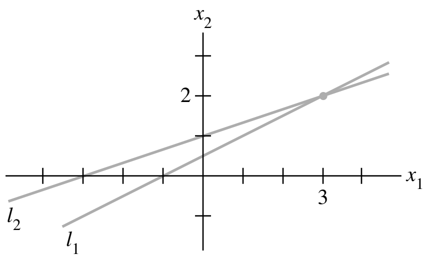
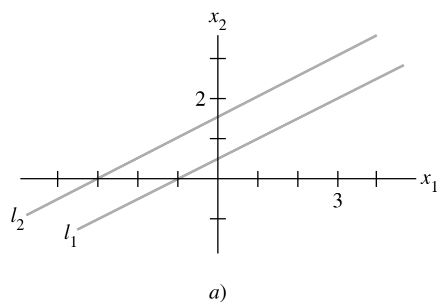


FIGURA 1 Exactamente una solución.

Desde luego, dos rectas no necesitan intersecarse en un solo punto; podrían ser paralelas, o coincidir y, así, "intersecarse" en todos los puntos de la recta. La figura 2 muestra las gráficas que corresponden a los siguientes sistemas:

$$a)\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$



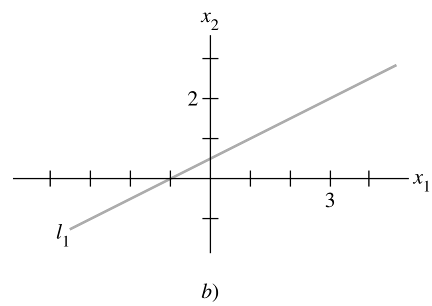


FIGURA 2 *a*) No hay solución. *b*) Número infinito de soluciones.

Las figuras 1 y 2 ilustran el siguiente hecho general acerca de los sistemas lineales, el cual se comprobará en la sección 1.2.

Un sistema de ecuaciones lineales tiene

1. ninguna solución, o
2. exactamente una solución, o
3. un número infinito de soluciones.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene una solución o un número infinito de soluciones; un sistema es **inconsistente** cuando no tiene ninguna solución.

Notación matricial

La información esencial de un sistema lineal puede registrarse de forma compacta en un arreglo rectangular llamado **matriz**. Dado el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \tag{3}$$

con los coeficientes de cada variable alineados en columnas, la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

se llama **matriz coeficiente** (o **matriz de coeficientes**) del sistema (3), y

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

se llama **matriz aumentada** del sistema. (Aquí la segunda fila contiene un cero porque la segunda ecuación podría escribirse como $0 \cdot x_1 + 2x_2 - 8x_3 = 8$). La matriz aumentada de un sistema consiste en la matriz de coeficientes con una columna adicional que contiene las constantes de los miembros derechos de las ecuaciones.

El **tamaño** de una matriz indica su número de filas y columnas. La matriz aumentada (4) tiene 3 filas y 4 columnas, por lo que es una matriz de 3×4 (que se lee “3 por 4”). Si m y n son enteros positivos, entonces una **matriz de $\boldsymbol{m \times n}$** es un arreglo rectangular de números con m filas y n columnas. (Siempre va primero el número de filas). La notación matricial simplificará los cálculos en los ejemplos que siguen.

Solución de un sistema lineal

Esta sección y la siguiente describen un algoritmo, o un procedimiento sistemático, para resolver sistemas lineales. La estrategia básica es *remplazar un sistema por otro equivalente (es decir, uno con el mismo conjunto solución) y que sea más fácil resolver*.

En general, use el término x_1 de la primera ecuación de un sistema para eliminar los términos x_1 en las ecuaciones restantes. Después, utilice el término x_2 en la segunda ecuación para eliminar los términos x_2 en las demás ecuaciones, y así sucesivamente, hasta que finalmente obtenga un sistema equivalente de ecuaciones muy sencillo.

Se utilizan tres operaciones básicas para simplificar un sistema lineal: remplazar una ecuación por la suma de esta y un múltiplo de otra ecuación, intercambiar dos ecuaciones, y multiplicar todos los términos de una ecuación por una constante distinta de cero. Después del primer ejemplo, resultará claro por qué esas tres operaciones no alteran el conjunto solución del sistema.

EJEMPLO 1 Resuelva el sistema (3).

SOLUCIÓN Aquí se muestra el procedimiento de eliminación, con y sin notación matricial, y los resultados se colocan uno al lado del otro para facilitar la comparación:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &=& 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &=& -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Mantenga x_1 en la primera ecuación y elimínela en las otras ecuaciones. Para hacerlo, sume la ecuación 1 multiplicada por 4 a la ecuación 3. Después de cierta práctica, estos cálculos se podrán efectuar mentalmente:

$$\begin{array}{r|l} 4\cdot[\text{ecuación 1}]: & 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ +\ [\text{ecuación 3}]: & -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ \hline [\text{nueva ecuación 3}]: & \quad -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

El resultado de este cálculo se escribe en lugar de la tercera ecuación original:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &=& 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &=& -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Ahora, multiplicamos la ecuación 2 por $1/2$ para así obtener 1 como coeficiente de x_2. (Este cálculo simplificará la aritmética en el siguiente paso).

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_2 - 4x_3 &=& 4 \\ -3x_2 + 13x_3 &=& -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Utilice x_2 de la ecuación 2 para eliminar $-3x_2$ en la ecuación 3. El cálculo "mental" es

$$\begin{array}{r|l} 3\cdot[\text{ecuación 2}]: & 3x_2 - 12x_3 = 12 \\ +\ [\text{ecuación 3}]: & -3x_2 + 13x_3 = -9 \\ \hline [\text{nueva ecuación 3}]: & \quad x_3 = 3 \end{array}$$

El nuevo sistema tiene forma *triangular*:[1]

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 0 \\ x_2 - 4x_3 &=& 4 \\ x_3 &=& 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se desea eliminar el término $-2x_2$ de la ecuación 1, pero es más eficiente usar primero x_3 de la ecuación 3 para eliminar los términos $-4x_3$ y $+x_3$ en las ecuaciones 2 y 1. Los dos cálculos "mentales" son

$$\begin{array}{r|l} 4\cdot[\text{ec. 3}]: & 4x_3 = 12 \\ +\ [\text{ec. 2}]: & x_2 - 4x_3 = 4 \\ \hline [\text{nueva ec. 2}]: & x_2 \quad = 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1\cdot[\text{ec. 3}]: & -x_3 = -3 \\ +\ [\text{ec. 1}]: & x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \hline [\text{nueva ec. 1}]: & x_1 - 2x_2 \quad = -3 \end{array}$$

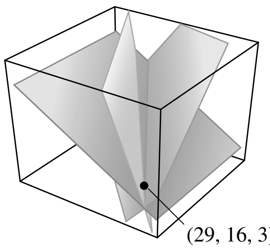
[1] En la siguiente sección se remplazará el término intuitivo *triangular* por uno más preciso.

Es conveniente combinar los resultados de esas dos operaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad &= -3 \\ x_2 \qquad &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora, una vez que se ha eliminado la columna que está sobre x_3 en la ecuación 3, regrese a x_2 en la ecuación 2 y utilícela para eliminar $-2x_2$ sobre ella. Gracias al trabajo previo con x_3, ahora no hay operaciones que impliquen términos con x_3. Sume dos veces la ecuación 2 a la ecuación 1 para obtener el sistema:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 29 \\ \qquad x_2 \qquad = 16 \\ \qquad\qquad x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$



Cada una de las ecuaciones originales determina un plano en el espacio tridimensional. El punto (29, 16, 3) pertenece a los tres planos.

En esencia, el proceso está terminado. Se observa que la única solución del sistema original es (29, 16, 3). Sin embargo, puesto que son muchos los cálculos realizados, es recomendable comprobar los resultados. Para comprobar que (29, 16, 3) *es* una solución, sustituya esos valores en el lado izquierdo del sistema original, y calcule:

$$\begin{aligned} (29) - 2(16) + (3) &= 29 - 32 + 3 = 0 \\ 2(16) - 8(3) &= 32 - 24 = 8 \\ -4(29) + 5(16) + 9(3) &= -116 + 80 + 27 = -9 \end{aligned}$$

Los resultados concuerdan con el lado derecho del sistema original, de manera que (29, 16, 3) es una solución del sistema. ■

El ejemplo 1 muestra cómo las operaciones con las ecuaciones de un sistema lineal corresponden a las operaciones en las filas adecuadas de la matriz aumentada. Las tres operaciones básicas mencionadas con anterioridad corresponden a las siguientes operaciones en la matriz aumentada.

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILA

1. (Remplazo) Sustituir una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila.[2]
2. (Intercambio) Intercambiar dos filas.
3. (Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero.

Las operaciones de fila pueden aplicarse a cualquier matriz, no solo a las matrices aumentadas de un sistema lineal. Dos matrices son **equivalentes por filas** si existe una secuencia de operaciones elementales de fila que transforme una matriz en otra.

Es importante observar que las operaciones de fila son *reversibles*. Si dos filas se intercambian, es posible hacerlas retornar a sus posiciones originales mediante otro intercambio. Si una fila se multiplica por una constante c distinta de cero, entonces al multiplicar la nueva fila por $1/c$ se obtiene la fila original. Por último, considere una operación de remplazo que implica a dos filas —por ejemplo, las filas 1 y 2— y suponga que a la fila 2 se le suma la fila 1 multiplicada por c para producir una nueva fila 2. Para "revertir" esta operación, sume la fila 1 multiplicada por $-c$ a la nueva fila 2 para así obtener la fila 2 original. Véase los ejercicios 29 al 32 al final de esta sección.

[2] Una forma alternativa de expresar la operación de remplazo de filas es: "Sume a una fila un múltiplo de otra fila".

Por el momento, estamos interesados en las operaciones de fila sobre la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales. Suponga que un sistema se transforma en otro mediante operaciones de fila. Considerando cada tipo de operación de fila, puede verse que cualquier solución del sistema original continúa siendo una solución del nuevo sistema. A la inversa, puesto que el sistema original se puede obtener mediante operaciones de fila sobre el nuevo sistema, cada solución del nuevo sistema también es solución del sistema original. Este análisis justifica el siguiente enunciado.

Si las matrices aumentadas de dos sistemas lineales son equivalentes por filas, entonces los dos sistemas tienen el mismo conjunto solución.

A pesar de que el ejemplo 1 es largo, después de cierta práctica se desarrollará habilidad para realizar los cálculos con rapidez. En el texto y en los ejercicios de este libro, las operaciones de fila por lo general serán muy fáciles de efectuar, lo que permitirá al lector enfocarse en los conceptos subyacentes. Pero debe aprender a realizar con exactitud las operaciones de fila porque se utilizarán a lo largo del libro.

El resto de esta sección muestra cómo emplear operaciones de fila para determinar el tamaño de un conjunto solución, sin resolver completamente el sistema lineal.

Preguntas de existencia y unicidad

La sección 1.2 mostrará por qué un conjunto solución de un sistema lineal puede no contener ninguna solución, o bien, tener una solución o un número infinito de soluciones. Las respuestas a las siguientes dos preguntas determinarán la naturaleza del conjunto solución de un sistema lineal.

Para determinar qué posibilidad es verdadera para un sistema particular, nos planteamos dos preguntas.

DOS PREGUNTAS FUNDAMENTALES ACERCA DE UN SISTEMA LINEAL

1. ¿El sistema es consistente, es decir, al menos *existe* una solución?
2. Si existe una solución, ¿*solo* hay una, es decir, la solución es *única*?

Estas dos preguntas se presentarán a lo largo del libro, en diversas circunstancias. Esta sección y la siguiente le mostrarán cómo responder a esas preguntas usando operaciones de fila sobre la matriz aumentada.

EJEMPLO 2 Determine si el siguiente sistema es consistente

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Este es el sistema del ejemplo 1. Suponga que se han efectuado las operaciones de fila necesarias para obtener la forma triangular

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

En este punto, conocemos x_3. Si se sustituyera el valor de x_3 en la ecuación 2, entonces se podría calcular x_2 y, por lo tanto, se podría obtener x_1 de la ecuación 1. Así que existe una solución; el sistema es consistente. (En efecto, x_2 está determinada de manera unívoca por la ecuación 2 ya que x_3 sólo tiene un valor posible, y en consecuencia x_1 está determinada de forma unívoca por la ecuación 1. Por lo tanto, la solución es única). ■

EJEMPLO 3 Determine si el siguiente sistema es consistente

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

SOLUCIÓN La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener una x_1 en la primera ecuación, se intercambian las filas 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Para eliminar el término $5x_1$ en la tercera ecuación, a la fila 3 se suma la fila 1 multiplicada por $-5/2$:

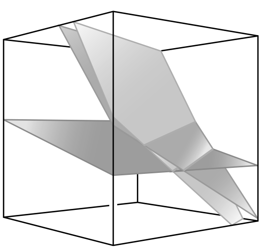
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ahora, use el término x_2 en la segunda ecuación para eliminar el término $-(1/2)x_2$ en la tercera ecuación. A la fila 3, sume la fila 2 multiplicada por $1/2$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ahora la matriz aumentada está en forma triangular. Para interpretarla correctamente, conviene regresar a la notación con ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 0 &= 5/2 \end{aligned} \tag{8}$$



Este sistema es inconsistente porque no existe un punto que pertenezca a los tres planos de manera simultánea.

La ecuación $0 = 5/2$ es una forma abreviada de $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 5/2$. Este sistema en forma triangular, evidentemente, tiene una contradicción inherente. No existen valores de x_1, x_2, x_3 que satisfagan la ecuación (8) porque la ecuación $0 = 5/2$ nunca es válida. Como (5) y (8) tienen el mismo conjunto solución, entonces el sistema original es inconsistente (es decir, no tiene solución). ■

Preste atención a la matriz aumentada en (7). Su última fila es característica de un sistema inconsistente en forma triangular.

NOTA NUMÉRICA

En problemas del mundo real, los sistemas de ecuaciones lineales se resuelven en computadora. Para una matriz de coeficientes cuadrada, los programas computacionales casi siempre utilizan el algoritmo de eliminación presentado aquí y en la sección 1.2, aunque ligeramente modificado para obtener mayor exactitud.

La gran mayoría de los problemas de álgebra lineal en los negocios y en la industria se resuelven con programas que emplean *aritmética de punto flotante*. Los números se representan como decimales $\pm .d_1 \cdots d_p \times 10^r$, donde r es un entero, y el número p de dígitos a la derecha del punto decimal, por lo general, está entre 8 y 16. La aritmética con dichos números normalmente es inexacta, porque el resultado debe redondearse (o truncarse) al número de dígitos almacenados. Se introduce el “error de redondeo” cuando un número como $1/3$ ingresa a la computadora, ya que su representación decimal debe ser aproximada por una cantidad finita de dígitos. Por fortuna, las inexactitudes en la aritmética de punto flotante rara vez causan problemas. Las notas numéricas en este libro ocasionalmente le advertirán sobre asuntos que deberá considerar más adelante en su carrera profesional.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

A lo largo del libro, es conveniente resolver los problemas de práctica antes de trabajar los ejercicios. Las soluciones se presentan después de cada conjunto de ejercicios.

1. Exprese con palabras la siguiente operación elemental de fila que debe efectuarse en el sistema para resolverlo. [En *a*) es posible más de una respuesta].

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 5x_3 - x_4 &= 7 \\ x_3 + 3x_4 &= -5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_2 + 8x_3 \qquad &= -4 \\ 2x_3 \qquad &= 3 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

2. La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma que se indica a continuación. Determine si el sistema es consistente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ¿$(3, 4, -2)$ es una solución para el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

4. ¿Para qué valores de h y k es consistente el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ -6x_1 + 3x_2 &= k \end{aligned}$$

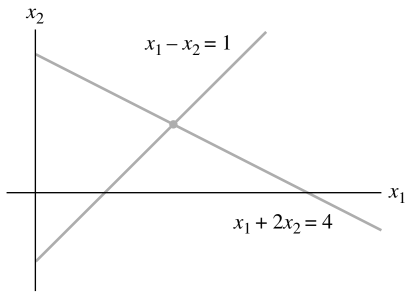
1.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4 resuelva cada sistema utilizando operaciones elementales de fila sobre las ecuaciones o sobre la matriz aumentada. Siga el procedimiento de eliminación sistemático explicado en esta sección.

1. $$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 7 \\ -2x_1 - 7x_2 &= -5 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= -3 \\ 5x_1 + 7x_2 &= 10 \end{aligned}$$

3. Encuentre el punto (x_1, x_2) que pertenece tanto a la recta $x_1 + 2x_2 = 4$ como a la recta $x_1 - x_2 = 1$. Observe la figura.



4. Obtenga el punto de intersección de las rectas $x_1 + 2x_2 = -13$ y $3x_1 - 2x_2 = 1$.

En los ejercicios 5 y 6 considere que cada matriz es la matriz aumentada de un sistema lineal. Exprese con palabras las siguientes dos operaciones elementales de fila que deben realizarse para resolver el sistema.

5. $$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

6. $$\begin{bmatrix} 1 & -6 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 7 a 10, la matriz aumentada de un sistema lineal se redujo mediante operaciones de fila a la forma indicada. En cada caso, continúe con las operaciones adecuadas de fila y describa el conjunto solución del sistema original.

7. $$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

9. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 11 a 14 resuelva los sistemas.

11. $$\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= -4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &= -1 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\ x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad - 6x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

En los ejercicios 15 y 16 determine si los sistemas son consistentes. No resuelva por completo dichos sistemas.

15. $$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 \qquad\qquad &= 5 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 &= 3 \\ -x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad - 4x_4 &= -10 \\ 3x_2 + 3x_3 \qquad &= 0 \\ x_3 + 4x_4 &= -1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

17. ¿Las tres rectas $2x_1 + 3x_2 = -1$, $6x_1 + 5x_2 = 0$, y $2x_1 - 5x_2 = 7$ tienen un punto común de intersección? Explique su respuesta.

18. Diga si los tres planos $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4$, $x_2 - 2x_3 = -2$, y $2x_1 + 3x_2 = 0$ tienen al menos un punto común de intersección. Explique su respuesta.

En los ejercicios 19 a 22, determine el valor o los valores de h tales que la matriz sea la matriz aumentada de un sistema lineal consistente.

19. $\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & h & -5 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -4 & 12 & h \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 23 y 24, se citan enunciados clave de esta sección, con ligeras modificaciones (pero manteniendo su validez), o se alteraron de manera que, en algunos casos, son falsos. Marque cada enunciado como verdadero o falso, y *justifique* su respuesta. (Si el enunciado es verdadero, entonces indique la ubicación aproximada donde se presenta un enunciado similar, o haga referencia a una definición o un teorema. Si la afirmación es falsa, indique la ubicación de un enunciado que se haya citado o empleado incorrectamente, o cite un ejemplo que muestre la falsedad del enunciado en todos los casos). Preguntas similares de falso/verdadero se presentarán en muchas secciones del libro.

23. *a*) Todas las operaciones elementales de fila son reversibles.

b) Una matriz de 5×6 tiene seis filas.

c) El conjunto solución de un sistema lineal que incluye a las variables $x_1, \ldots, x_n$ es una lista de números $(s_1, \ldots, s_n)$ que da validez a cada ecuación del sistema cuando se sustituyen los valores $s_1, \ldots, s_n$ por $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente.

d) Las dos preguntas fundamentales acerca de un sistema lineal incluyen existencia y unicidad.

24. *a*) Dos matrices son equivalentes por filas si tienen el mismo número de filas.

b) En una matriz aumentada, las operaciones elementales de fila no modifican nunca el conjunto solución del sistema lineal asociado.

c) Dos sistemas lineales equivalentes pueden tener diferentes conjuntos solución.

d) Un sistema consistente de ecuaciones lineales tiene una o más soluciones.

25. Encuentre una ecuación que incluya a g, h y k, y que permita que esta matriz aumentada corresponda a un sistema consistente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}$$

26. Suponga que el sistema que aparece a continuación es consistente para todos los posibles valores de f y g. ¿Qué puede decirse acerca de los coeficientes c y d? Justifique su respuesta.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

27. Suponga que a, b, c y d son constantes tales que a es diferente de cero y el sistema que aparece a continuación es consistente para todos los posibles valores de f y g. ¿Qué podría decir acerca de los números a, b, c y d? Justifique su respuesta.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= f \\ cx_1 + dx_2 &= g \end{aligned}$$

28. Construya tres diferentes matrices aumentadas para los sistemas lineales cuyo conjunto solución es $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$.

En los ejercicios 29 a 32, encuentre la operación elemental de fila que transforme a la primera matriz en la segunda, y luego encuentre la operación de fila inversa que transforme a la segunda matriz en la primera.

29. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

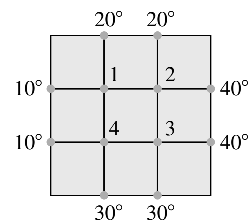
30. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -12 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

Un importante asunto en el estudio de transferencia de calor es determinar la distribución de temperatura de estado estable de una placa delgada cuando se conoce la temperatura en los bordes. Suponga que la placa que se ilustra en la figura representa una sección transversal de una viga de metal, con flujo de calor despreciable en la dirección perpendicular a la placa. Sean $T_1, \ldots, T_4$ las temperaturas en los cuatro nodos interiores de la malla en la figura. La temperatura en un nodo es aproximadamente igual al promedio de las temperaturas de los cuatro nodos más cercanos, esto es, a la izquierda, arriba, a la derecha y abajo.[3] Por ejemplo,

$$T_1 = (10 + 20 + T_2 + T_4)/4, \quad \text{o} \quad 4T_1 - T_2 - T_4 = 30$$



33. Escriba un sistema de cuatro ecuaciones cuya solución dé estimaciones de las temperaturas $T_1, \ldots, T_4$.

34. Resuelva el sistema de ecuaciones del ejercicio 33. [*Sugerencia:* Para conseguir rapidez en el cálculo, intercambie las filas 1 y 4 antes de iniciar las operaciones de "remplazo"].

[3] Véase Frank M. White, *Heat and Mass Transfer* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing, 1991), pp. 145-149.

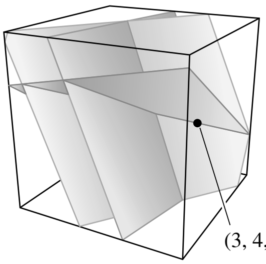
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. *a*) Para efectuar "cálculos a mano", la mejor elección es intercambiar las ecuaciones 3 y 4. Otra posibilidad es multiplicar la ecuación 3 por $1/5$. O bien, remplazar la ecuación 4 por su suma con la fila 3 multiplicada por $-1/5$. (En cualquier caso, no utilice x_2 en la ecuación 2 para eliminar $4x_2$ en la ecuación 1. Espere hasta que se haya logrado una forma triangular y los términos x_3 y x_4 se hayan eliminado de las primeras dos ecuaciones).

b) El sistema tiene forma triangular. La simplificación ulterior inicia con x_4 en la cuarta ecuación. Utilice x_4 para eliminar todos los términos x_4 sobre ella. Ahora el paso adecuado es sumar la ecuación 4, multiplicada por 2, a la ecuación 1. (Luego, vaya a la ecuación 3 y multiplíquela por $1/2$, y después utilice la ecuación para eliminar los términos x_3 sobre ella).

2. El sistema correspondiente a la matriz aumentada es

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= -6 \\ 4x_2 - 7x_3 &= 2 \\ 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$



Como $(3, 4, -2)$ satisface las dos primeras ecuaciones, está sobre la recta de intersección de los primeros dos planos. Puesto que $(3, 4, -2)$ no satisface las tres ecuaciones, se concluye que no pertenece a los tres planos.

La tercera ecuación hace $x_3 = 0$, el cual, desde luego, es un valor permitido para x_3. Después de eliminar los términos x_3 en las ecuaciones 1 y 2, se podría continuar para obtener valores únicos de x_1 y x_2. Así que existe una solución, y es única. Esta situación contrasta con la del ejemplo 3.

3. Es fácil comprobar si una lista específica de números es una solución. Sean $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, y $x_3 = -2$, y encuentre que

$$\begin{aligned} 5(3) - (4) + 2(-2) &= 15 - 4 - 4 = 7 \\ -2(3) + 6(4) + 9(-2) &= -6 + 24 - 18 = 0 \\ -7(3) + 5(4) - 3(-2) &= -21 + 20 + 6 = 5 \end{aligned}$$

Aunque las primeras dos ecuaciones se satisfacen, no sucede lo mismo con la tercera, por lo que $(3, 4, -2)$ no es una solución del sistema. Observe cómo se utilizan los paréntesis cuando se realizan las sustituciones; su uso es muy recomendable para protegerse contra errores aritméticos.

4. Cuando la segunda ecuación se remplaza por su suma con la primera ecuación multiplicada por 3, el sistema se convierte en:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= h \\ 0 &= k + 3h \end{aligned}$$

Si $k + 3h$ es diferente de cero, el sistema no tiene solución. El sistema es consistente para cualesquiera valores de h y k que produzcan $k + 3h = 0$.

1.2 REDUCCIÓN POR FILAS Y FORMAS ESCALONADAS

En esta sección se perfecciona el método de la sección 1.1 para obtener un nuevo algoritmo de reducción por filas que permitirá analizar cualquier sistema de ecuaciones lineales.[1] Las preguntas fundamentales de existencia y unicidad planteadas en la sección 1.1 podrán responderse utilizando la primera parte del algoritmo.

El algoritmo es aplicable a cualquier matriz, sin importar si esta se considera o no como la matriz aumentada de un sistema lineal. Así, la primera parte de esta sección se ocupa de una matriz rectangular arbitraria y empieza introduciendo dos importantes clases de matrices, que incluyen a las matrices "triangulares" de la sección 1.1. En las definiciones que siguen, una fila o columna *distinta de cero* (o *no nula*) de una matriz será una fila o columna que contenga al menos un elemento diferente de cero; una **entrada principal** de una fila se refiere a la entrada o el elemento diferente de cero que se encuentra más a la izquierda (en una fila distinta de cero).

[1] El algoritmo es una variante de lo que se conoce comúnmente como *eliminación gaussiana*. Un método de eliminación similar para sistemas lineales fue utilizado por matemáticos chinos en el año 250 a. C. El proceso era desconocido en la cultura occidental hasta el siglo XIX, cuando el famoso matemático alemán, Carl Friedrich Gauss, lo descubrió. El ingeniero alemán, Wilhelm Jordan, dio a conocer el algoritmo en un libro sobre geodesia publicado en 1888.

DEFINICIÓN

Una matriz rectangular está en **forma escalonada** (o **forma escalonada por filas**) si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las diferentes de cero están arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Si una matriz de forma escalonada satisface las siguientes condiciones adicionales, entonces está en **forma escalonada reducida** (o **forma escalonada reducida por filas**):

4. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.
5. Cada entrada principal 1 es la única entrada distinta de cero en su columna.

Una **matriz escalonada** (o bien, una **matriz escalonada reducida**) está en forma de escalón (o en forma escalonada reducida, respectivamente). La propiedad 2 dice que las entradas principales forman un patrón escalonado (esto es, en forma de *escalera*) que avanza hacia abajo y hacia la derecha de la matriz. La propiedad 3 es una simple consecuencia de la propiedad 2, pero se incluyó para darle mayor énfasis.

Las matrices "triangulares" de la sección 1.1, tales como

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

están en forma escalonada. De hecho, la segunda matriz está en forma escalonada reducida. A continuación se presentan más ejemplos.

EJEMPLO 1 Las siguientes matrices están en forma escalonada. Las entradas principales (■) pueden tener cualquier valor diferente de cero; las entradas con asterisco (∗) pueden tener cualquier valor (incluyendo al cero).

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Las siguientes matrices están en forma escalonada reducida porque las entradas principales son números 1, y hay ceros abajo *y arriba* de cada entrada principal 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$ ■

Cualquier matriz distinta de cero puede **reducirse por filas** (es decir, transformarse mediante operaciones elementales de fila) para producir más de una matriz en forma escalonada, utilizando diferentes secuencias de operaciones de fila. Sin embargo, la forma escalonada reducida que se obtiene a partir de una matriz es única. El siguiente teorema se demuestra en el apéndice A al final del libro.

TEOREMA 1

Unicidad de la forma escalonada reducida

Cada matriz es equivalente por filas a una, y solo a una, matriz escalonada reducida.

Si una matriz A es equivalente por filas a una matriz escalonada U, entonces U se llama **una forma escalonada** (o una forma escalonada por filas) **de A**; si U está en forma escalonada reducida, entonces **U es la forma escalonada reducida de A**. [La mayoría de los programas de matrices y de las calculadoras con capacidades para trabajar con matrices emplean la abreviatura RREF (por las siglas de *reduced row echelon form*) para referirse a la forma escalonada reducida por filas. Algunos utilizan REF (por las siglas de *row echelon form*) para designar la forma escalonada por filas].

Posiciones pivote

Cuando las operaciones de fila sobre una matriz producen una forma escalonada, las operaciones de fila posteriores para obtener la forma escalonada reducida no cambian la posición de las entradas principales. Como la forma escalonada reducida es única, entonces *las entradas principales siempre están en las mismas posiciones en cualquier forma escalonada obtenida a partir de una matriz dada.* Esas entradas principales corresponden a los números 1 principales de la forma escalonada reducida.

DEFINICIÓN

Una **posición pivote** en una matriz A es una ubicación en A que corresponde a un 1 principal en la forma escalonada reducida de A. Una **columna pivote** es una columna de A que contiene una posición pivote.

En el ejemplo 1, los cuadrados (■) identifican las posiciones pivote. Muchos conceptos fundamentales en los primeros cuatro capítulos estarán relacionados de una u otra manera con las posiciones pivote en una matriz.

EJEMPLO 2 Reduzca por filas la matriz A que se muestra a continuación hasta la forma escalonada, y localice las columnas pivote de A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Utilice la misma estrategia básica de la sección 1.1. La entrada superior de la columna diferente de cero más a la izquierda de la matriz es la primera posición pivote. En esta posición debe colocarse una entrada diferente de cero, o *pivote*. Una buena opción es intercambiar las filas 1 y 4 (porque los cálculos mentales en el siguiente paso no implicarán fracciones).

$$\begin{array}{c} \text{Pivote} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Columna pivote} \end{array}$$

Cree ceros debajo del pivote, 1, sumando múltiplos de la primera fila a las filas inferiores, para así obtener la matriz (1) que se muestra a continuación. La posición pivote en la segunda fila debe estar tan a la izquierda como sea posible, es decir, en la segunda columna. Se elige el 2 en esta posición como el siguiente pivote.

$$\begin{array}{c} \text{Pivote} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \\ \text{Siguiente columna pivote} \end{array} \tag{1}$$

Sume la fila 2 multiplicada por $-5/2$ a la fila 3, y sume la fila 2 multiplicada por $3/2$ a la fila 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

La matriz en (2) es diferente de las que se incluyen en la sección 1.1. ¡No hay manera de crear una entrada principal en la columna 3! (No podemos emplear las filas 1 o 2 porque, al hacerlo, se destruiría el arreglo escalonado de las entradas principales ya obtenidas). Sin embargo, si se intercambian las filas 3 y 4, se puede obtener una entrada principal en la columna 4.

Pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Forma general:} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Columnas pivote

La matriz está en forma escalonada y así revela que las columnas 1, 2 y 4 de A son columnas pivote.

Posiciones pivote

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Columnas pivote ■

Un **pivote**, como el que se muestra en el ejemplo 2, es un número distinto de cero en una posición pivote que se utiliza conforme se necesite crear ceros mediante operaciones de fila. Los pivotes en el ejemplo 2 fueron 1, 2 y -5. Observe que esos números no son los mismos que los elementos reales de A en las posiciones pivote indicadas en (3).

Con el ejemplo 2 como guía, es posible describir un procedimiento eficiente para transformar una matriz en una matriz escalonada o escalonada reducida. El estudio cuidadoso y el dominio de este procedimiento rendirán valiosos frutos en este curso.

Algoritmo de reducción por filas

El algoritmo que sigue consta de cuatro pasos y produce una matriz en forma escalonada. Un quinto paso da por resultado una matriz en forma escalonada reducida. Demostraremos este algoritmo con un ejemplo.

EJEMPLO 3 Aplique operaciones elementales de fila para transformar la siguiente matriz a la forma escalonada y, luego, a la forma escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

PASO 1

Se inicia con la columna diferente de cero del extremo izquierdo. Esta es una columna pivote. La posición pivote se ubica en la parte superior.

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}\\ \quad\text{Columna pivote}\end{array}$$

PASO 2

Seleccione como pivote una entrada diferente de cero en la columna pivote. Si es necesario, intercambie filas para mover esta entrada a la posición pivote.

Intercambie a las filas 1 y 3. (O bien, también se podrían intercambiar las filas 1 y 2).

$$\begin{array}{l}\quad\text{Pivote}\\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}\end{array}$$

PASO 3

Utilice operaciones de remplazo de filas para crear ceros en todas las posiciones ubicadas debajo del pivote.

Como paso preliminar, se podría dividir la fila superior entre el pivote, 3. Pero con dos números 3 en la columna 1, esto es tan fácil como sumar la fila 1 multiplicada por -1 a la fila 2.

$$\begin{array}{l}\quad\text{Pivote}\\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}\end{array}$$

PASO 4

Cubra (o ignore) la fila que contiene la posición pivote y cubra todas las filas, si las hay, por encima de esta. Aplique los pasos 1 a 3 a la submatriz restante. Repita el proceso hasta que no haya filas diferentes de cero por modificar.

Con la fila 1 cubierta, el paso 1 muestra que la columna 2 es la próxima columna pivote; para el paso 2, seleccione como pivote la entrada "superior" en esa columna.

$$\begin{array}{l}\qquad\text{Pivote}\\ \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}\\ \qquad\text{Siguiente columna pivote}\end{array}$$

En el paso 3, se podría insertar un paso adicional de dividir la fila "superior" de la submatriz entre el pivote, 2. En vez de ello, se suma la fila "superior" multiplicada por $-3/2$ a la fila de abajo. Esto produce

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Para el paso 4, cuando se cubre la fila que contiene la segunda posición pivote, se obtiene una nueva submatriz con una sola fila:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{\text{Pivote}}{1} & 4 \end{bmatrix}$$

Los pasos 1 a 3 no necesitan aplicarse para esta submatriz, pues ya se ha alcanzado una forma escalonada para la matriz completa. Si se desea la forma escalonada reducida, se efectúa un paso más.

PASO 5

Empezando con la posición pivote del extremo derecho y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, genere ceros arriba de cada pivote. Si un pivote no es 1, conviértalo en 1 mediante una operación de escalamiento.

El pivote del extremo derecho está en la fila 3. Genere ceros sobre él, sumando múltiplos adecuados de la fila 3 a las filas 1 y 2.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila 1} + (-6)\cdot\text{fila 3} \\ \leftarrow \text{Fila 2} + (-2)\cdot\text{fila 3} \\ \end{array}$$

El siguiente pivote se encuentra en la fila 2. Se escala esta fila dividiéndola entre el pivote.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{Fila escalada por } \tfrac{1}{2} \\ \end{array}$$

Cree un cero en la columna 2 sumando la fila 2 multiplicada por 9 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila 1} + (9)\cdot\text{fila 2} \\ \\ \end{array}$$

Finalmente, escale la fila 1 dividiéndola entre el pivote, 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila escalada por } \tfrac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

Esta es la forma escalonada reducida de la matriz original. ■

La combinación de los pasos 1 a 4 se conoce como **fase progresiva** del algoritmo de reducción por filas. El paso 5, que produce la única forma escalonada reducida, se conoce como **fase regresiva**.

NOTA NUMÉRICA

En el paso 2 que se describió antes, un programa computacional por lo general selecciona como pivote a la entrada en una columna que tenga el mayor valor absoluto. Esta estrategia, llamada **pivoteo parcial**, se utiliza porque reduce los errores de redondeo en los diversos cálculos.

Soluciones de sistemas lineales

El algoritmo de reducción por filas conduce directamente a una descripción explícita del conjunto solución de un sistema lineal cuando se aplica a la matriz aumentada del sistema.

Suponga, por ejemplo, que la matriz aumentada de un sistema lineal se transformó a la forma escalonada *reducida* equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Existen tres variables porque la matriz aumentada tiene cuatro columnas. El sistema de ecuaciones asociado es

$$\begin{aligned} x_1 \quad - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + \quad x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Las variables x_1 y x_2 correspondientes a las columnas pivote se conocen como **variables básicas**[2]. La otra variable, x_3, se denomina **variable libre**.

Siempre que un sistema es consistente, como en (4), el conjunto solución se puede describir explícitamente al despejar en el sistema de ecuaciones *reducido* las variables básicas en términos de las variables libres. Esta operación es posible porque la forma escalonada reducida coloca a cada variable básica en una y solo una ecuación. En (4), despeje x_1 de la primera ecuación y x_2 de la segunda. (Ignore la tercera ecuación, ya que no ofrece restricciones sobre las variables).

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ es libre} \end{cases} \tag{5}$$

El enunciado "x_3 es libre" significa que existe libertad de elegir cualquier valor para x_3. Una vez hecho esto, las fórmulas en (5) determinan los valores de x_1 y x_2. Por ejemplo, cuando $x_3 = 0$, la solución es (1, 4, 0); cuando $x_3 = 1$, la solución es (6, 3, 1). *Cada asignación diferente de x_3 determina una solución (distinta) del sistema, y cada solución del sistema está determinada por una asignación de x_3.*

EJEMPLO 4 Encuentre la solución general del sistema lineal cuya matriz aumentada se redujo a

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN La matriz está en forma escalonada, pero se desea la forma escalonada reducida antes de despejar las variables. El siguiente paso es completar la reducción por filas. El símbolo $\sim$ antes de una matriz indica que esta es equivalente por filas a la matriz anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

[2] Algunos libros utilizan el término *variables principales*, ya que corresponden a las columnas que contienen entradas principales.

Existen cinco variables porque la matriz aumentada tiene seis columnas. Ahora el sistema asociado es

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 \quad + 3x_4 \quad &= 0 \\ x_3 - 4x_4 \quad &= 5 \\ x_5 &= 7 \end{aligned} \tag{6}$$

Las columnas pivote de la matriz son 1, 3 y 5, así que las variables básicas son x_1, x_3 y x_5. Las variables restantes, x_2 y x_4, deben ser libres. Se despejan las variables básicas para obtener la solución general:

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ es libre} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ es libre} \\ x_5 = 7 \end{cases} \tag{7}$$

Observe que el valor de x_5 ya estaba establecido por la tercera ecuación del sistema (6). ■

Descripciones paramétricas de conjuntos solución

Las descripciones en (5) y (7) son *descripciones paramétricas* de conjuntos solución en los cuales las variables libres actúan como parámetros. *Resolver un sistema* significa encontrar una descripción paramétrica del conjunto solución o determinar que el conjunto solución está vacío.

Siempre que un sistema sea consistente y tenga variables libres, el conjunto solución tendrá muchas descripciones paramétricas. Por ejemplo, en el sistema (4), se puede sumar la ecuación 2 multiplicada por 5 a la ecuación 1 para obtener el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 \quad\quad &= 21 \\ x_2 + x_3 &= \ \ 4 \end{aligned}$$

Se podría tratar a x_2 como un parámetro y despejar x_1 y x_3 en términos de x_2, y se tendría una descripción exacta del conjunto solución. Sin embargo, para ser consistentes, se establece la convención (arbitraria) de utilizar siempre las variables libres como parámetros para describir un conjunto solución. (La sección de respuestas al final del libro también refleja esta convención).

Cuando un sistema es inconsistente, el conjunto solución es un conjunto vacío, aun cuando el sistema tenga variables libres. En este caso, el conjunto solución *no* tiene representación paramétrica.

Sustitución regresiva

Considere el siguiente sistema, cuya matriz aumentada está en forma escalonada, pero *no* en forma escalonada reducida:

$$\begin{aligned} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= \ \ 10 \\ x_2 - 3x_3 + 3x_4 + \ \ x_5 &= -5 \\ x_4 - \ \ x_5 &= \ \ 4 \end{aligned}$$

Un programa computacional resolvería este sistema mediante sustitución regresiva, en vez de calcular la forma escalonada reducida. Es decir, el programa despejaría x_4 de la ecuación 3 en términos de x_5, y sustituiría la expresión para x_4 en la ecuación 2; luego, despejaría x_2 de esta última, sustituiría las expresiones para x_2 y x_4 en la ecuación 1 y despejaría x_1.

Nuestro formato matricial para la fase regresiva de reducción por filas, el cual produce la forma escalonada reducida, tiene el mismo número de operaciones aritméticas que la sustitución regresiva. Pero la disciplina del formato matricial reduce de forma sustancial los errores posibles en los cálculos a mano. ¡La mejor estrategia es utilizar solamente la forma escalonada *reducida* para resolver un sistema! La *Guía de estudio* que acompaña a este libro ofrece varias sugerencias útiles para efectuar operaciones de fila de manera exacta y rápida.

NOTA NUMÉRICA

En general, la fase progresiva de reducción por filas es más larga que la fase regresiva. Por lo regular, un algoritmo para resolver un sistema se mide en *flops* (u operaciones de punto flotante). Un **flop** es una operación aritmética ($+$, $-$, $*$, $/$) que se realiza sobre dos números reales de punto flotante.[3] Para una matriz de $n \times (n + 1)$, la reducción a la forma escalonada puede requerir $2n^3/3 + n^2/2 - 7n/6$ flops (que es aproximadamente $2n^3/3$ flops cuando n es moderadamente grande, por ejemplo, $n \geq 30$). En contraste, una reducción adicional a la forma escalonada reducida necesita, a lo sumo, n^2 flops.

Preguntas de existencia y unicidad

Aunque una forma escalonada no reducida es una herramienta poco eficiente para resolver un sistema, esta forma es justamente el medio correcto para responder las dos preguntas fundamentales planteadas en la sección 1.1.

EJEMPLO 5 Determine la existencia y unicidad de las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x_2 - 6x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 8x_5 &= 9 \\ 3x_1 - 9x_2 + 12x_3 - 9x_4 + 6x_5 &= 15 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN La matriz aumentada de este sistema se redujo por filas en el ejemplo 3 a:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Las variables básicas son x_1, x_2 y x_5; las variables libres son x_3 y x_4. No existe ninguna ecuación del tipo $0 = 1$ que indique la inconsistencia del sistema, así que se podría emplear sustitución regresiva para encontrar una solución. Pero en (8) ya es evidente la *existencia* de una solución. Además, la solución *no es única* porque hay variables libres. Cada diferente asignación de x_3 y x_4 determina una solución distinta. Por lo tanto, el sistema tiene un número infinito de soluciones. ■

Cuando un sistema está en forma escalonada y no contiene ecuaciones del tipo $0 = b$, con b diferente de cero, entonces cada ecuación no nula tiene una variable básica con un coeficiente distinto de cero. Es posible que las variables básicas estén completamente determinadas (sin variables libres) o que al menos una de las variables básicas pueda expresarse en términos de una o más variables libres. En el primer caso, existe una solución única; en el último caso, hay infinidad de soluciones (una para cada asignación de valores a las variables libres).

[3] Tradicionalmente, un *flop* era solo una multiplicación o división, ya que la suma y la resta tomaban mucho menos tiempo y podían ignorarse. Ahora se prefiere la definición de *flop* que aquí se presenta, debido a los avances en la arquitectura computacional. Véase Golub y Van Loan, *Matrix Computations*, 2a. ed. (Baltimore: The Johns Hopkins Press, 1989), pp. 19-20.

Esas observaciones justifican el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Teorema de existencia y unicidad

Un sistema lineal es consistente si y solo si la columna más a la derecha de la matriz aumentada *no* es una columna pivote, es decir, si y solo si una forma escalonada de la matriz aumentada *no* tiene filas del tipo

$$[0 \ \cdots \ 0 \quad b] \quad \text{con } b \text{ diferente de cero}$$

Si un sistema lineal es consistente, entonces el conjunto solución contiene: **i.** una única solución, cuando no existen variables libres, o **ii.** una infinidad de soluciones, cuando hay al menos una variable libre.

El siguiente procedimiento indica cómo encontrar y describir todas las soluciones de un sistema lineal.

USO DE LA REDUCCIÓN POR FILAS PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL

1. Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. Emplee el algoritmo de reducción por filas para obtener una matriz aumentada equivalente en forma escalonada. Determine si el sistema es consistente o no. Si no existe solución, deténgase; en caso contrario, continúe con el siguiente paso.
3. Prosiga con la reducción por filas para obtener la forma escalonada reducida.
4. Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz obtenida en el paso 3.
5. Rescriba cada ecuación no nula del paso 4 de manera que su única variable básica se exprese en términos de cualquiera de las variables libres que aparecen en la ecuación.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Encuentre la solución general del sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Obtenga la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$

1.2 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, determine cuáles matrices están en forma escalonada reducida y cuáles se encuentran solo en forma escalonada.

1. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *d*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

2. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 3 y 4 aplique la reducción por filas a las matrices para llevarlas a la forma escalonada reducida. En las matrices original y final encierre en un círculo las posiciones pivote, e indique las columnas pivote.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

5. Describa las posibles formas escalonadas de una matriz de 2×2 diferente de cero**.** Utilice los símbolos ■, $*$ y 0, como en la primera parte del ejemplo 1.

6. Repita el ejercicio 5 para una matriz de 3×2 diferente de cero.

Encuentre las soluciones generales de los sistemas cuyas matrices aumentadas se presentan en los ejercicios 7 a 14.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 3 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ -3 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 12 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Los ejercicios 15 y 16 emplean la notación del ejemplo 1 para matrices en forma escalonada. Suponga que cada matriz representa la matriz aumentada para un sistema de ecuaciones lineales. En cada caso, determine si el sistema es consistente. De ser así, determine si la solución es única.

15. *a*) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{bmatrix}$

16. *a*) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$

En los ejercicios 17 y 18, determine el valor o los valores de h tales que la matriz sea la matriz aumentada de un sistema lineal consistente.

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 19 y 20, asigne valores para h y k de manera que el sistema *a*) no tenga solución, *b*) tenga solución única, y *c*) tenga muchas soluciones. Dé respuestas por separado para cada inciso.

19. $\begin{aligned} x_1 + hx_2 &= 2 \\ 4x_1 + 8x_2 &= k \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1 \\ 2x_1 + hx_2 &= k \end{aligned}$

En los ejercicios 21 y 22, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta.[4]

21. *a*) En algunos casos, una matriz se puede reducir por filas a más de una matriz en forma escalonada reducida, mediante diferentes secuencias de operaciones de fila.

b) El algoritmo de reducción por filas solamente se aplica a matrices aumentadas para un sistema lineal.

c) En un sistema lineal una variable básica es una variable que corresponde a una columna pivote en la matriz de coeficientes.

d) Encontrar una descripción paramétrica del conjunto solución de un sistema lineal es lo mismo que *resolver* el sistema.

e) Si una fila en una forma escalonada de una matriz aumentada es [0 0 0 5 0], entonces el sistema lineal asociado es inconsistente.

22. *a*) La forma escalonada reducida de una matriz es única.

b) Si cada columna de una matriz aumentada contiene un pivote, entonces el sistema correspondiente es consistente.

c) Las posiciones pivote en una matriz dependen de si se utilizan o no intercambios de filas en el proceso de reducción por filas.

d) Una solución general de un sistema es una descripción explícita de todas las soluciones del sistema.

e) Si un sistema tiene variables libres, entonces el conjunto solución contiene muchas soluciones.

23. Suponga que la matriz coeficiente de un sistema lineal de cuatro ecuaciones con cuatro variables tiene un pivote en cada columna. Explique por qué el sistema tiene solución única.

24. Suponga que un sistema de ecuaciones lineales tiene una matriz *aumentada* de 3×5 cuya quinta columna no es una columna pivote. ¿El sistema es consistente? ¿Por qué?

[4] Preguntas de verdadero/falso de este tipo se presentarán en muchas secciones. Antes de los ejercicios 23 y 24 de la sección 1.1, se describieron algunos métodos para justificar las respuestas.

25. Suponga que la matriz coeficiente de un sistema de ecuaciones lineales tiene una posición pivote en cada fila. Explique por qué el sistema es consistente.

26. Suponga que una matriz de *coeficientes* de 3×5 para un sistema tiene tres columnas pivote. ¿El sistema es consistente? ¿Por qué?

27. Restructure la última frase del teorema 2 empleando el concepto de columnas pivote: "Si un sistema lineal es consistente, entonces la solución es única si y solo si __________".

28. En una matriz aumentada, ¿qué se necesita saber acerca de las columnas pivote para determinar que el sistema lineal es consistente y tiene una solución única?

29. Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas se conoce como *sistema subdeterminado*. ¿Tal sistema puede tener una solución única? Explique su respuesta.

30. Dé un ejemplo de un sistema subdeterminado inconsistente de dos ecuaciones con tres incógnitas.

31. Un sistema de ecuaciones lineales con más ecuaciones que incógnitas se llama *sistema sobredeterminado*. ¿Tal sistema puede ser consistente? Ilustre su respuesta con un sistema específico de tres ecuaciones con dos incógnitas.

32. Considere que una matriz de $n \times (n + 1)$ se simplifica por filas a su forma escalonada reducida. Aproximadamente, ¿qué fracción del número total de operaciones (flops) está implicada en la fase regresiva de la reducción cuando $n = 20$? ¿Y cuando $n = 200$?

Suponga que los datos experimentales están representados por un conjunto de puntos en el plano. Un **polinomio de interpolación** para los datos es un polinomio cuya gráfica pasa por todos los puntos. En el ámbito científico, dicho polinomio se utiliza, por ejemplo, para estimar valores entre los puntos de datos conocidos. Otro uso es en la creación de curvas para imágenes gráficas en el monitor de las computadoras. Un método para construir un polinomio de interpolación consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales.

WEB

33. Encuentre el polinomio de interpolación $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ para los datos (1, 6), (2, 15), (3, 28). Es decir, determine a_0, a_1 y a_2 tales que

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 6 \\ a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 &= 15 \\ a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 &= 28 \end{aligned}$$

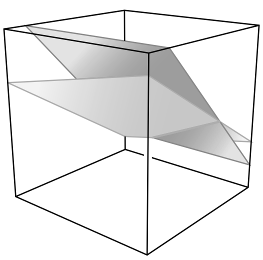
34. [**M**] En un experimento de túnel de viento, la fuerza sobre un proyectil debido a la resistencia del aire se midió a diferentes velocidades:

Velocidad (100 ft/seg)	0	2	4	6	8	10
Fuerza (100 lb)	0	2.90	14.8	39.6	74.3	119

Encuentre un polinomio de interpolación para estos datos y estime la fuerza sobre el proyectil si este viaja a 750 ft/seg. Utilice $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5$. ¿Qué ocurre si usted intenta emplear un polinomio de menor grado que 5? (Por ejemplo, intente un polinomio cúbico).[5]

[5] Los ejercicios marcados con el símbolo [**M**] deben trabajarse con la ayuda de un "programa de matrices" (esto es, un programa computacional, como **M**ATLAB®, **M**aple™, **M**athematica®, **M**athCad® o Derive™, o una calculadora programable con capacidades matriciales, como las fabricadas por Texas Instruments o Hewlett-Packard).

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA



La solución general del sistema de ecuaciones es la recta de intersección de los dos planos.

1. La forma escalonada reducida de la matriz aumentada y el sistema correspondiente son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} x_1 \qquad - 2x_3 &= 9 \\ x_2 + \ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Las variables básicas son x_1 y x_2, y la solución general es

$$\begin{cases} x_1 = 9 + 2x_3 \\ x_2 = 3 - x_3 \\ x_3 \text{ es libre} \end{cases}$$

Nota: Es esencial que la solución general describa a cada variable, con cualquier parámetro claramente definido. El siguiente enunciado *no* describe la solución:

$$\begin{cases} x_1 = 9 + 2x_3 \\ x_2 = 3 - x_3 \\ x_3 = 3 - x_2 \quad \text{Solución incorrecta} \end{cases}$$

Esta descripción implica que *tanto* x_2 *como* x_3 son libres, lo que desde luego no es el caso.

2. La matriz aumentada del sistema se reduce por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & -5 & 3 \\ 3 & -6 & -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta matriz escalonada indica que el sistema es *inconsistente*, porque su columna del extremo derecho es una columna pivote; la tercera fila corresponde a la ecuación $0 = 5$. No hay necesidad de realizar más operaciones de fila. Observe que en este problema es irrelevante la presencia de las variables libres porque el sistema es inconsistente.

1.3 ECUACIONES VECTORIALES

Importantes propiedades de sistemas lineales se pueden describir mediante el concepto y la notación de vectores. Esta sección relaciona ecuaciones vectoriales con sistemas ordinarios de ecuaciones. El término *vector* aparece en una variedad de contextos matemáticos y físicos, los cuales se analizarán en el capítulo 4, “Espacios vectoriales”. Por ahora, *vector* significará una *lista ordenada de números*. Esta idea sencilla permite realizar, de manera rápida, interesantes e importantes aplicaciones.

Vectores en $\mathbb{R}^2$

Una matriz con una sola columna es un **vector columna**, o simplemente un **vector**. Ejemplos de vectores con dos entradas son

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} .2 \\ .3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

donde w_1 y w_2 son números reales. $\mathbb{R}^2$ (léase “erre dos”) denota el conjunto de todos los vectores con dos entradas. La $\mathbb{R}$ representa los números reales que aparecen como entradas en los vectores, y el exponente 2 indica que cada vector contiene dos entradas.[1]

Dos vectores en $\mathbb{R}^2$ son **iguales** si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Así, $\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ *no* son iguales, porque los vectores en $\mathbb{R}^2$ son *pares ordenados* de números reales.

Dados dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$, su **suma** es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, que se obtiene al sumar las entradas correspondientes de **u** y **v**. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Considerando un vector **u** y un número real c, el **múltiplo escalar** de **u** por c es el vector $c\mathbf{u}$, que se obtiene al multiplicar por c cada entrada en **u**. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c = 5, \qquad \text{entonces} \quad c\mathbf{u} = 5\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

[1] La mayor parte del libro se refiere a vectores y matrices que solo tienen entradas reales. Sin embargo, todas las definiciones y los teoremas en los capítulos 1 a 5, y en la mayor parte del resto del libro, conservan su validez si las entradas son números complejos. Vectores y matrices complejos surgen de manera natural en áreas como física e ingeniería eléctrica.

El número c en $c\mathbf{u}$ se llama **escalar**; se escribe en cursivas, y no en negritas, para así distinguirlo del vector $\mathbf{u}$.

Es posible combinar las operaciones de multiplicación por un escalar y suma vectorial, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 A partir de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, encuentre $4\mathbf{u}$, $(-3)\mathbf{v}$, y $4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v}$.

SOLUCIÓN

$$4\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix}, \qquad (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

y

$$4\mathbf{u} + (-3)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Algunas veces, por conveniencia (y también para ahorrar espacio), en este libro se denota un vector columna como $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ en la forma $(3, -1)$. En este caso, los paréntesis y la coma distinguen al vector $(3, -1)$ de la matriz fila 1×2 $[3 \ \ -1]$, que se representa con corchetes y sin coma. Así,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$$

porque las matrices tienen diferentes formas, aunque las entradas sean iguales.

Descripciones geométricas de $\mathbb{R}^2$

Considere un sistema de coordenadas rectangulares en el plano. Como cada punto en el plano está determinado por un par ordenado de números, *es posible identificar un punto geométrico* (a, b) *con el vector columna* $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Así, puede considerarse a $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de todos los puntos del plano. Véase la figura 1.

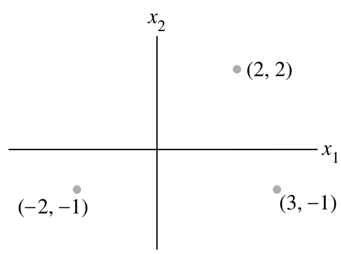


FIGURA 1 Vectores como puntos.

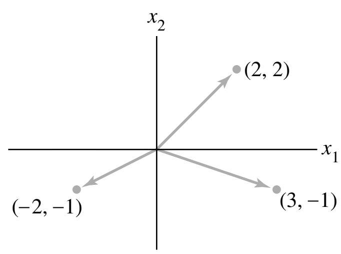


FIGURA 2 Vectores con flechas.

La visualización geométrica de un vector como $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ se facilita al incluir una flecha (un segmento de recta dirigido) desde el origen $(0, 0)$ al punto $(3, -1)$, como en la figura 2. En este caso, los puntos individuales a lo largo de la flecha carecen de significado especial.[2]

La suma de dos vectores tiene una útil representación geométrica. La siguiente regla puede verificarse mediante geometría analítica.

---

[2] En física, las flechas representan fuerzas y, por lo general, son libres para moverse en el espacio. En la sección 4.1 se analizará esta interpretación de vectores.

Regla del paralelogramo para la adición

Si **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ se representan como puntos en el plano, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ corresponde a un cuarto vértice del paralelogramo cuyos otros vértices son **u**, **0** y **v**. Véase la figura 3.

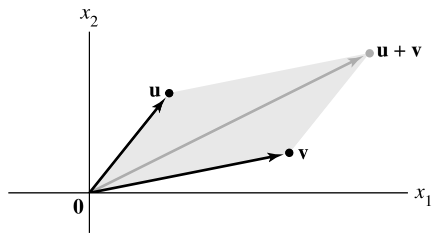


FIGURA 3 Regla del paralelogramo.

EJEMPLO 2 Los vectores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ se muestran en la figura 4. ■

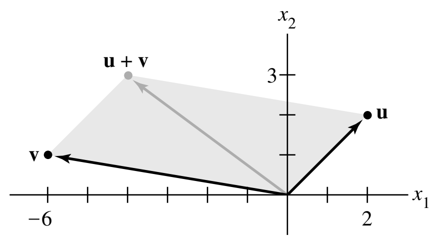


FIGURA 4

El siguiente ejemplo ilustra el hecho de que el conjunto de todos los múltiplos escalares de un vector diferente de cero (también llamado no nulo), fijo, es una recta que pasa por el origen, (0, 0).

EJEMPLO 3 Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. En una gráfica muestre los vectores **u**, 2**u** y $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$.

SOLUCIÓN Observe la figura 5, donde se indican **u**, $2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $-\frac{2}{3}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2/3 \end{bmatrix}$. La flecha para 2**u** es el doble de largo que la flecha para **u**, y las flechas apuntan en el mismo sentido. La flecha para $-\frac{2}{3}\mathbf{u}$ es dos tercios de la longitud de la flecha para **u**, y las flechas apuntan en sentidos opuestos. En general, la longitud de la flecha para $c\mathbf{u}$ es $|c|$ veces la

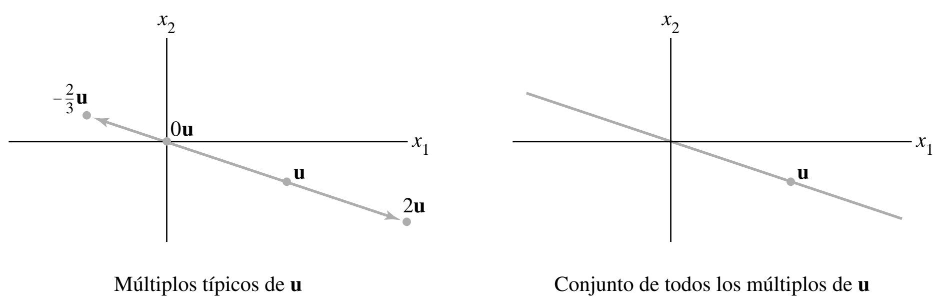


FIGURA 5

longitud de la flecha para **u**. [Recuerde que la longitud del segmento de línea de (0, 0) a (a, b) es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto se analizará en el capítulo 6]. ■

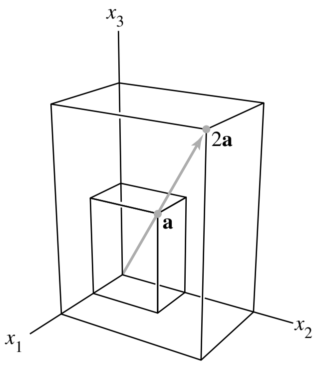


FIGURA 6
Múltiplos escalares.

Vectores en $\mathbb{R}^3$

Los vectores en $\mathbb{R}^3$ son matrices columna de 3×1 con tres entradas. Se representan geométricamente mediante puntos en un espacio coordenado tridimensional; algunas veces se incluyen flechas desde el origen para dar una mayor claridad visual. Los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $2\mathbf{a}$ se muestran en la figura 6.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Si n es un entero positivo, $\mathbb{R}^n$ (léase "erre ene") denota la colección de todas las listas (o *n-adas ordenadas*) de n números reales, generalmente escritas como matrices columna de $n \times 1$ del tipo

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

El vector cuyas entradas son todas cero se llama **vector cero** y se denota con **0**. (El número de entradas en **0** será evidente a partir del contexto).

La igualdad de vectores en $\mathbb{R}^n$ y las operaciones de multiplicación escalar y suma vectorial en $\mathbb{R}^n$ se definen entrada por entrada como en $\mathbb{R}^2$. Esas operaciones sobre vectores tienen las siguientes propiedades, las cuales pueden verificarse directamente a partir de las propiedades correspondientes de los números reales. Véase el problema de práctica 1 y los ejercicios 33 y 34 al final de esta sección.

Propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$

Para todo **u**, **v**, **w** en $\mathbb{R}^n$ y para todos los escalares c y d:

i. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
ii. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
iii. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
iv. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
donde $-\mathbf{u}$ denota $(-1)\mathbf{u}$
v. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
vi. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
vii. $c(d\mathbf{u}) = (cd)(\mathbf{u})$
viii. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

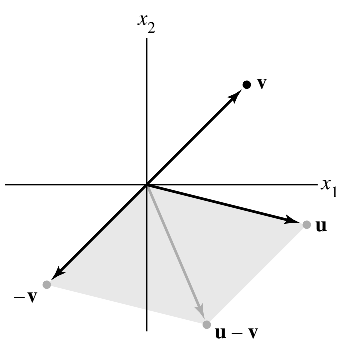


FIGURA 7
Resta vectorial.

Para simplificar la notación, un vector del tipo $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ con frecuencia se escribe como $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. La figura 7 muestra a $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ como la suma de **u** y $-\mathbf{v}$.

Combinaciones lineales

Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ y dados los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_p$, el vector **y** definido por

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

se llama **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ con **pesos** $c_1, \ldots, c_p$. La propiedad **ii** anterior nos permite omitir los paréntesis al formar la combinación lineal. Los pesos en una combinación lineal pueden ser cualesquiera números reales, incluyendo el cero. Por ejemplo, algunas combinaciones lineales de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son

$$\sqrt{3}\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 \;(= \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{0}\;(= 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2)$$

EJEMPLO 4 La figura 8 identifica combinaciones lineales seleccionadas de $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (Observe que los conjuntos de líneas paralelas de la rejilla están trazados mediante múltiplos enteros de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Estime las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que generan los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$.

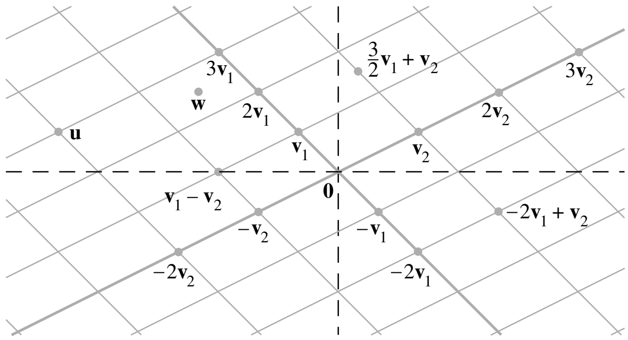


FIGURA 8 Combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

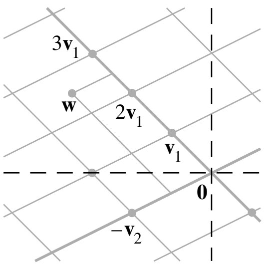


FIGURA 9

SOLUCIÓN La regla del paralelogramo indica que $\mathbf{u}$ es la suma de $3\mathbf{v}_1$ y $-2\mathbf{v}_2$; es decir,

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$

Esta expresión para $\mathbf{u}$ se puede interpretar como las instrucciones para desplazarse desde el origen a $\mathbf{u}$ por dos trayectorias rectas. Primero, desplácese 3 unidades en la dirección de $\mathbf{v}_1$ hacia $3\mathbf{v}_1$, y luego avance -2 unidades en la dirección de $\mathbf{v}_2$ (paralela a la recta que pasa por $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{0}$). Después, aunque el vector $\mathbf{w}$ no está sobre una línea de la rejilla, $\mathbf{w}$ parece estar a la mitad del camino entre dos pares de rectas de la rejilla, en el vértice de un paralelogramo determinado por $(5/2)\mathbf{v}_1$ y $(-1/2)\mathbf{v}_2$. (Véase la figura 9). Así, una estimación razonable de $\mathbf{w}$ es

$$\mathbf{w} = \tfrac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2 \qquad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo relaciona un problema sobre combinaciones lineales con la pregunta fundamental de existencia que se estudió en las secciones 1.1 y 1.2.

EJEMPLO 5 Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{b}$ se puede generar (o escribir) como una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. Es decir, determine si existen pesos x_1 y x_2 tales que

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b} \tag{1}$$

Si la ecuación vectorial (1) tiene solución, encuéntrela.

SOLUCIÓN Aplique las definiciones de multiplicación escalar y suma vectorial para rescribir la ecuación vectorial

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Los vectores en los miembros izquierdo y derecho de (2) son iguales si y solo si sus entradas correspondientes son iguales. Es decir, x_1 y x_2 hacen válida la ecuación vectorial (1) si y solo si x_1 y x_2 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned} \tag{3}$$

Para resolver este sistema, se reduce por filas la matriz aumentada del sistema como sigue:[3]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de (3) es $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Así que $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, con pesos $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir,

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$ ■

Observe en el ejemplo 5 que los vectores originales $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}$ son las columnas de la matriz aumentada reducida por filas:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} & \\ & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{b} \end{matrix} & \end{array}$$

Por brevedad, se escribe esta matriz en una forma que identifique sus columnas, a saber,

$$[\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{b}] \tag{4}$$

De la ecuación vectorial (1) es claro cómo escribir esta matriz aumentada, sin realizar los pasos intermedios del ejemplo 5. Tome los vectores en el orden en que aparecen en (1) y colóquelos en las columnas de una matriz como en (4).

El análisis anterior puede modificarse fácilmente para establecer el siguiente hecho fundamental.

Una ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal cuya matriz aumentada es

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}] \tag{5}$$

En particular, $\mathbf{b}$ se puede generar por una combinación lineal de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ si y solo si existe una solución al sistema lineal correspondiente a la matriz (5).

[3] El símbolo $\sim$ entre matrices denota equivalencia de filas (sección 1.2).

Una de las ideas fundamentales en álgebra lineal es el estudio del conjunto de todos los vectores que se pueden generar o escribir como una combinación lineal de un conjunto fijo $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de vectores.

DEFINICIÓN

Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ se denota como Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ y se llama el **subconjunto de $\mathbb{R}^n$ extendido** o **generado por** $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. Es decir, Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir en la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

con escalares $c_1, \ldots, c_p$.

Preguntar si un vector $\mathbf{b}$ está en Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ equivale a preguntar si la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{b}$$

tiene una solución o, de manera equivalente, si el sistema lineal con la matriz aumentada $[\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_p \quad \mathbf{b}]$ tiene una solución.

Observe que Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ contiene a cada múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$ (por ejemplo), ya que $c\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_p$. En particular, el vector cero debe estar en Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$.

Descripción geométrica de Gen {v} y de Gen {u, v}

Sea $\mathbf{v}$ un vector diferente de cero en $\mathbb{R}^3$. Entonces Gen $\{\mathbf{v}\}$ es el conjunto de todos los múltiplos escalares de $\mathbf{v}$, que es el conjunto de puntos sobre la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. Véase la figura 10.

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbf{v}$ no es un múltiplo de $\mathbf{u}$, entonces Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es el plano en $\mathbb{R}^3$ que contiene a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. En particular, Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ contiene la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{0}$, y la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. Véase la figura 11.

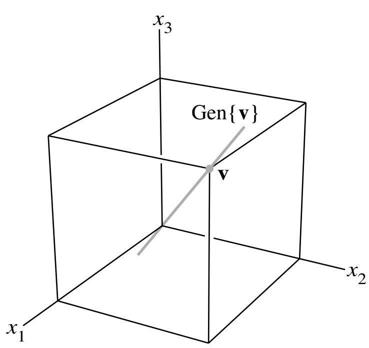


FIGURA 10 Gen $\{\mathbf{v}\}$ como una recta que pasa por el origen.

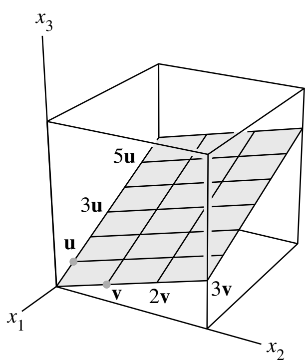


FIGURA 11 Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ como un plano que pasa por el origen.

EJEMPLO 6 Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ es un plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$. ¿Está $\mathbf{b}$ en ese plano?

SOLUCIÓN ¿Tiene solución la ecuación $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$? Para responder a esto, reduzca por filas la matriz aumentada $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{b}]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -13 & 8 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -18 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

La tercera ecuación es $0 = -2$, la cual muestra que el sistema no tiene solución. La ecuación vectorial $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ no tiene solución, de manera que $\mathbf{b}$ *no* está en Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. ■

Combinaciones lineales en aplicaciones

El ejemplo final muestra cómo surgen múltiplos escalares y combinaciones lineales cuando una cantidad, como el "costo", se descompone en varias categorías. El principio básico en este ejemplo concierne al costo de fabricar varias unidades de un producto cuando se conoce el costo por unidad:

$$\left\{\begin{matrix} \text{número} \\ \text{de unidades} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \text{costo} \\ \text{por unidad} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{costo} \\ \text{total} \end{matrix}\right\}$$

EJEMPLO 7 Una empresa fabrica dos productos. Para obtener \$1.00 del producto B, la empresa gasta \$0.45 en materiales, \$0.25 en mano de obra y \$0.15 por concepto de costos indirectos. Para obtener \$1.00 del producto C, la empresa gasta \$0.40 en materiales, \$0.30 en mano de obra y \$0.15 en costos indirectos. Sean

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} .45 \\ .25 \\ .15 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} .40 \\ .30 \\ .15 \end{bmatrix}$$

Entonces $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ representan los "costos por dólar de ingreso" para los dos productos.

a) ¿Qué interpretación económica puede darse al vector $100\mathbf{b}$?

b) Suponga que la empresa desea fabricar x_1 dólares del producto B y x_2 dólares del producto C. Dé un vector que describa los diversos costos que tendrá que enfrentar la empresa (por materiales, mano de obra y gastos indirectos).

SOLUCIÓN

a) Calcule

$$100\mathbf{b} = 100\begin{bmatrix} .45 \\ .25 \\ .15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

El vector $100\mathbf{b}$ lista los diversos costos para producir \$100 del producto B, a saber, \$45 por materiales, \$25 por mano de obra y \$15 por gastos indirectos.

b) Los costos de fabricación de x_1 dólares del producto B están dados por el vector $x_1\mathbf{b}$, y los costos para manufacturar x_2 dólares del producto C están dados por $x_2\mathbf{c}$. Así que los costos totales para ambos productos están dados por el vector $x_1\mathbf{b} + x_2\mathbf{c}$. ■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Demuestre que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ para cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$.
2. Obtenga el valor o los valores de h para que $\mathbf{y}$ esté en Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$

1.3 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 3 y 4, muestre los siguientes vectores utilizando flechas en una gráfica xy: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{v}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$. Observe que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es el vértice de un paralelogramo cuyos otros vértices son $\mathbf{u}$, $\mathbf{0}$ y $-\mathbf{v}$.

3. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 1

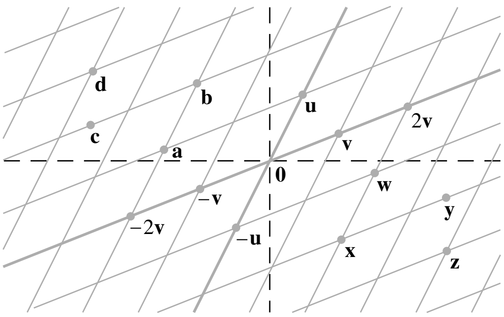
4. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como en el ejercicio 2

En los ejercicios 5 y 6, escriba un sistema de ecuaciones que sea equivalente a la ecuación vectorial dada.

5. $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

6. $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Utilice la figura adjunta para escribir cada vector listado en los ejercicios 7 y 8 como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Cada vector en $\mathbb{R}^2$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?



7. Vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$

8. Vectores $\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$

En los ejercicios 9 y 10, escriba una ecuación vectorial que sea equivalente al sistema de ecuaciones dado.

9. $$\begin{aligned} x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -2x_1 - 7x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

En los ejercicios 11 y 12, determine si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

11. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 y 14, determine si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de los vectores formados a partir de las columnas de la matriz A.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 8 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

15. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$. ¿Con qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?

16. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. ¿Para qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{y}$ en el plano generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$?

En los ejercicios 17 y 18, liste cinco vectores en Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Para cada vector, muestre los pesos sobre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ empleados para generar el vector e indique las tres entradas de este. No realice bosquejos.

17. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

19. Dé una descripción geométrica de Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

20. Realice una descripción geométrica de Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para los vectores del ejercicio 18.

21. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ está en Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ para todas las h y k.

22. Construya una matriz A de 3×3, con entradas diferentes de cero, y un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{b}$ *no* esté en el conjunto generado por las columnas de A.

En los ejercicios 23 y 24, marque cada enunciado como falso o verdadero. Justifique sus respuestas.

23. *a*) Otra notación para el vector $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ es $[-4 \quad 3]$.

    b) Los puntos en el plano que corresponden a $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ están sobre una recta que pasa por el origen.

    c) Un ejemplo de combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$.

d) El conjunto solución del sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3\ \ \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de la ecuación $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

e) El conjunto Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ siempre se visualiza como un plano que pasa por el origen.

24. *a*) Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero, Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ solo contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen, y la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y el origen.

b) Cualquier lista de cinco números reales es un vector en $\mathbb{R}^5$.

c) Preguntar si el sistema lineal correspondiente a la matriz aumentada $[\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3\ \ \mathbf{b}]$ tiene solución equivale a preguntar si el vector $\mathbf{b}$ está en Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

d) El vector $\mathbf{v}$ resulta cuando un vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se suma al vector $\mathbf{v}$.

e) No todos los pesos $c_1,\ldots, c_p$ en una combinación lineal $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ pueden ser cero.

25. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Denote las columnas de A por $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, y sea $W = \text{Gen}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

a) ¿Está $\mathbf{b}$ en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$?

b) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? ¿Cuántos vectores hay en W?

c) Demuestre que $\mathbf{a}_1$ está en W. [*Sugerencia:* Las operaciones de fila son innecesarias].

26. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W?

b) Demuestre que la segunda columna de A está en W.

27. Una compañía minera posee dos minas. En un día, la mina #1 produce mineral que contiene 30 toneladas métricas de cobre y 600 kilogramos de plata, mientras que, también en un día, la mina #2 produce mineral que contiene 40 toneladas métricas de cobre y 380 kilogramos de plata. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 600 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 380 \end{bmatrix}$. Así, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ representan la "producción diaria" de la mina #1 y la mina #2, respectivamente.

a) ¿Qué interpretación física puede darse al vector $5\mathbf{v}_1$?

b) Suponga que la compañía opera la mina #1 durante x_1 días y la mina #2 por x_2 días. Escriba una ecuación vectorial cuya solución dé el número de días que cada mina debería operar para producir 240 toneladas de cobre y 2824 kilogramos de plata. No resuelva la ecuación.

c) [**M**] Resuelva la ecuación en *b*).

28. Una planta eléctrica de vapor quema dos tipos de carbón: antracita (A) y bituminoso (B). Por cada tonelada de A que se quema, la planta produce 27.6 millones de Btu de calor, 3100 gramos (g) de dióxido de sulfuro, y 250 g de contaminantes sólidos (partículas). Por cada tonelada de B que se quema, la planta produce 30.2 millones de Btu, 6400 g de dióxido de sulfuro, y 360 g de contaminantes sólidos (partículas).

a) ¿Cuánto calor produce la planta cuando quema x_1 toneladas de A y x_2 toneladas de B?

b) Suponga que la producción de la planta de vapor está descrita por un vector que lista las cantidades de calor, dióxido de sulfuro y contaminantes sólidos. Exprese esta producción como una combinación lineal de dos vectores, suponiendo que la planta quema x_1 toneladas de A y x_2 toneladas de B.

c) [**M**] Durante cierto tiempo, la planta de vapor produjo 162 millones de Btu de calor, 23,610 g de dióxido de sulfuro y 1623 g de contaminantes sólidos. Determine cuántas toneladas de cada tipo debe haber quemado la planta. Como parte de la solución, incluya una ecuación vectorial.

29. Sean $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_k$ puntos en $\mathbb{R}^3$ y suponga que para $j = 1,\ldots, k$ un objeto con masa m_j está localizado en el punto $\mathbf{v}_j$. Los físicos llaman *masas puntuales* a esos objetos. La masa total del sistema de masas puntuales es

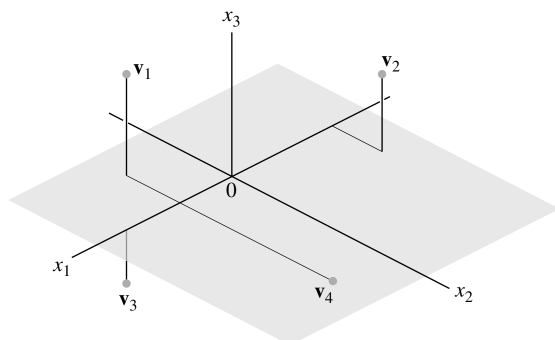
$$m = m_1 + \cdots + m_k$$

El *centro de gravedad* (o *centro de masa*) del sistema es

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{m}[m_1\mathbf{v}_1 + \cdots + m_k\mathbf{v}_k]$$

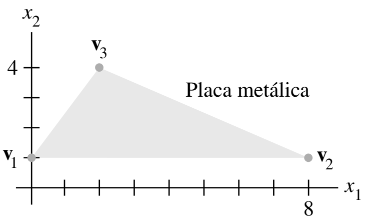
Calcule el centro de gravedad del sistema que consiste en las siguientes masas puntuales (véase la figura):

Punto	**Masa**
$\mathbf{v}_1 = (2, -2, 4)$	4 g
$\mathbf{v}_2 = (-4, 2, 3)$	2 g
$\mathbf{v}_3 = (4, 0, -2)$	3 g
$\mathbf{v}_4 = (1, -6, 0)$	5 g



30. Sea $\mathbf{v}$ el centro de masa de un sistema de masas puntuales localizadas en $\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_k$ como en el ejercicio 29. ¿Está $\mathbf{v}$ en Gen $\{\mathbf{v}_1,\ldots, \mathbf{v}_k\}$? Explique su respuesta.

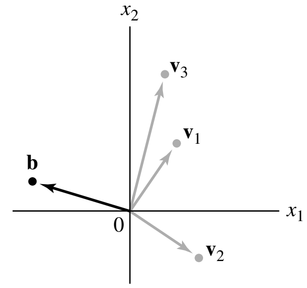
31. Una delgada placa triangular de densidad y grosor uniformes tiene vértices en $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (8, 1)$ y $\mathbf{v}_3 = (2, 4)$, como en la figura que aparece a continuación; la masa de la placa es de 3 g.



a) Encuentre las coordenadas (x, y) del centro de masa de la placa. Este "punto de equilibrio" de la placa coincide con el centro de masa de un sistema que consta de tres masas puntuales de 1 g colocadas en los vértices de la placa.

b) Determine cómo distribuir una masa adicional de 6 g en los tres vértices de la placa para así mover su punto de equilibrio a (2, 2). [*Sugerencia:* Sean w_1, w_2 y w_3 las masas agregadas a los tres vértices, de manera que $w_1 + w_2 + w_3 = 6$].

32. Considere los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$, que se muestran en la figura. ¿Tiene solución la ecuación $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{b}$? ¿Es única la solución? Utilice la figura para explicar sus respuestas.



33. Con los vectores $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, verifique las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$.

a) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

b) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ para cada escalar c

34. Utilice el vector $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ para verificar las siguientes propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$.

a) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$

b) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ para todos los escalares c y d

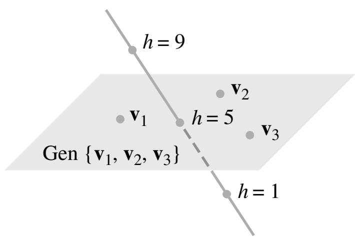
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Tome los vectores arbitrarios $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ en $\mathbb{R}^n$, y calcule

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) && \text{Definición de suma vectorial} \\ &= (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) && \text{Conmutatividad de la adición en } \mathbb{R} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u} && \text{Definición de suma vectorial} \end{aligned}$$

2. El vector $\mathbf{y}$ pertenece a Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si y solo si existen escalares x_1, x_2, x_3 tales que

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$$



Los puntos $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}$ están sobre la recta que se interseca con el plano cuando $h = 5$.

Esta ecuación vectorial es equivalente a un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Si la matriz aumentada de este sistema se reduce por filas, se encuentra que

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & h-8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{bmatrix}$$

Este sistema es consistente si y solo si no existe pivote en la cuarta columna. Es decir, $h - 5$ debe ser 0. Así, $\mathbf{y}$ está en Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ si y solo si $h = 5$.

Recuerde: La presencia de una variable libre en un sistema no garantiza que este sea consistente.

1.4 ECUACIÓN MATRICIAL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Una idea fundamental en álgebra lineal consiste en ver una combinación lineal de vectores como el producto de una matriz y un vector. La siguiente definición permite reformular algunos de los conceptos de la sección 1.3 desde nuevos puntos de vista.

DEFINICIÓN

Si A es una matriz de $m \times n$, con columnas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, y si $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{R}^n$, entonces el **producto de** A **y** $\mathbf{x}$, denotado como $A\mathbf{x}$, es **la combinación lineal de las columnas de** A **utilizando como pesos las entradas correspondientes en** $\mathbf{x}$**;** es decir,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Observe que $A\mathbf{x}$ está definido solamente si el número de columnas de A es igual al número de entradas en $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 1

a)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 32 \\ -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Para $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^m$, escriba la combinación lineal $3\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3$ como una matriz por un vector.

SOLUCIÓN Coloque $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en las columnas de una matriz A y coloque los pesos 3, -5 y 7 en un vector $\mathbf{x}$. Es decir,

$$3\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = A\mathbf{x} \qquad \blacksquare$$

La sección 1.3 mostró cómo escribir un sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial que implica una combinación lineal de vectores. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

es equivalente a

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Como en el ejemplo 2, la combinación lineal en el lado izquierdo es una matriz por un vector, de manera que (2) se convierte en

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

La ecuación (3) tiene la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Tal ecuación se llama **ecuación matricial**, para distinguirla de una ecuación vectorial como la que se muestra en (2).

Observe cómo la matriz en (3) es justamente la matriz de coeficientes del sistema (1). Cálculos similares indican que cualquier sistema de ecuaciones lineales, o cualquier ecuación vectorial como (2), se puede escribir como una ecuación matricial equivalente en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Esta sencilla observación se utilizará de manera recurrente a lo largo del texto.

A continuación se presenta el resultado formal.

TEOREMA 3

Si A es una matriz de $m \times n$, con columnas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, y si $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^m$, la ecuación matricial

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4}$$

tiene el mismo conjunto solución que la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{5}$$

la cual, a la vez, tiene el mismo conjunto solución que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}] \tag{6}$$

El teorema 3 constituye una poderosa herramienta para comprender problemas de álgebra lineal, porque ahora un sistema de ecuaciones lineales puede verse en tres formas diferentes, pero equivalentes: como una ecuación matricial, como una ecuación vectorial o como un sistema de ecuaciones lineales. Siempre que usted construya un modelo matemático de un problema de la vida real, tendrá libertad para elegir qué punto de vista es más natural. Además, será posible pasar de una formulación del problema a otra, según sea conveniente. En cualquier caso, la ecuación matricial (4), la ecuación vectorial (5) y el sistema de ecuaciones se resuelven de la misma manera: por reducción de filas de la matriz aumentada (6). Más adelante se analizarán otros métodos de solución.

Existencia de soluciones

La definición de $A\mathbf{x}$ conduce directamente al siguiente hecho que resulta útil.

La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución si y solo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

En la sección 1.3 se consideró la pregunta de existencia: "¿Está $\mathbf{b}$ en Gen $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$?". De manera equivalente: "¿Es consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?". Un problema de existencia más difícil consiste en determinar si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente *para toda* $\mathbf{b}$ posible.

EJEMPLO 3 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. ¿La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para todas las posibles b_1, b_2, b_3?

SOLUCIÓN Se reduce por filas la matriz aumentada para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 7 & 5 & b_3 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 3b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + 4b_1) \end{bmatrix}$$

La tercera entrada en la columna 4 es igual a $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3$. La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *no* es consistente para toda $\mathbf{b}$ porque algunas asignaciones de $\mathbf{b}$ pueden hacer que $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3$ sea diferente de cero. ■

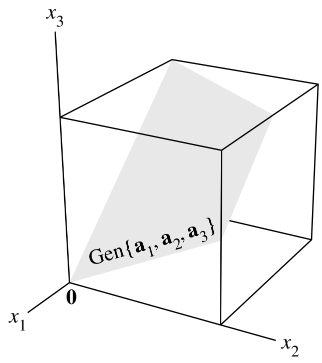


FIGURA 1 Las columnas de $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ generan un plano a través de $\mathbf{0}$.

La matriz reducida del ejemplo 3 da una descripción de todas las $\mathbf{b}$ para las cuales la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es* consistente: las entradas en $\mathbf{b}$ deben satisfacer

$$b_1 - \tfrac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$$

Esta es la ecuación de un plano que pasa por el origen en $\mathbb{R}^3$. El plano es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las tres columnas de A. Véase la figura 1.

La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ del ejemplo 3 no es consistente para todas las $\mathbf{b}$ porque la forma escalonada de A tiene una fila de ceros. Si A tuviera un pivote en las tres filas, no habría que preocuparse por los cálculos en la columna aumentada, ya que, en este caso, una forma escalonada de la matriz aumentada no tendría una fila como $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$.

En el siguiente teorema, la frase "las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$" significa que *cada* $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A. En general, un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^m$ **genera** a $\mathbb{R}^m$ si cada vector en $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p$; es decir, si Gen $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\} = \mathbb{R}^m$.

TEOREMA 4

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces, los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes. Es decir, para una A particular, todos los enunciados son verdaderos o todos son falsos.

a) Para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución.

b) Cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A.

c) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$.

d) A tiene una posición pivote en cada fila.

El teorema 4 es uno de los teoremas más útiles en este capítulo. Los enunciados *a*), *b*) y *c*) son equivalentes a causa de la definición de $A\mathbf{x}$ y lo que significa para un conjunto de vectores generar $\mathbb{R}^m$. El análisis posterior al ejemplo 3 revela por qué *a*) y *d*) son equivalentes; al final de la sección se presenta una prueba de ello. Los ejercicios aportan ejemplos de cómo emplear el teorema 4.

Advertencia: El teorema 4 se refiere a una *matriz* de *coeficientes*, no a una matriz aumentada. Si una matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede o no ser consistente.

Cálculo de $A\mathbf{x}$

Los cálculos en el ejemplo 1 se apoyaron en la definición del producto de una matriz A y un vector $\mathbf{x}$. El siguiente ejemplo sencillo conducirá a un método más eficiente para calcular las entradas en $A\mathbf{x}$ cuando los problemas se resuelvan a mano.

EJEMPLO 4 Calcule $A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN A partir de la definición,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 \\ 6x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_2 \\ 5x_2 \\ -2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4x_3 \\ -3x_3 \\ 8x_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}$$

La primera entrada en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos (algunas veces se llama *producto punto*), empleando la primera fila de A y las entradas en $\mathbf{x}$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Esta matriz muestra cómo calcular de forma directa la primera entrada en $A\mathbf{x}$, sin escribir todos los cálculos indicados en (7). De manera similar, la segunda entrada en $A\mathbf{x}$ puede calcularse multiplicando las entradas en la segunda fila de A por las entradas correspondientes en $\mathbf{x}$, y después sumando los productos resultantes:

$$\begin{bmatrix} & & \\ -1 & 5 & -3 \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ \\ \end{bmatrix}$$

De manera semejante, la tercera entrada en $A\mathbf{x}$ puede determinarse con la tercera fila de A y las entradas en $\mathbf{x}$. ■

Regla fila-vector para calcular Ax

Si el producto $A\mathbf{x}$ está definido, entonces la i-ésima entrada en $A\mathbf{x}$ es la suma de los productos de las entradas correspondientes de la fila i de A y del vector $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 5

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 7 \\ 8 \cdot 4 + 0 \cdot 7 \\ (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot r + 0 \cdot s + 0 \cdot t \\ 0 \cdot r + 1 \cdot s + 0 \cdot t \\ 0 \cdot r + 0 \cdot s + 1 \cdot t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$$ ■

Por definición, la matriz del ejemplo 5*c*) con números 1 en la diagonal y ceros en las demás posiciones se llama **matriz identidad** y se denota con I. Los cálculos en el inciso *c*) indican que $I\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$. Existe una análoga matriz identidad de $n \times n$, algunas veces denotada como I_n. Al igual que en *c*), $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

Propiedades del producto matriz-vector $A\mathbf{x}$

Es importante el contenido del próximo teorema y se utilizará a lo largo del libro. La demostración se apoya en la definición de $A\mathbf{x}$ y en las propiedades algebraicas de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 5

Si A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, y c es un escalar, entonces:

a) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$;

b) $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$.

DEMOSTRACIÓN En aras de la sencillez, se toma $n = 3$, $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$, y $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$. (La demostración para el caso general es similar). Para $i = 1, 2, 3$, sean u_i y v_i las i-ésimas entradas en $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente. Para probar el enunciado *a*), calcule $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ como una combinación lineal de las columnas de A empleando como pesos las entradas en $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= [\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3\,]\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix} \\ &= \overbrace{(u_1+v_1)\underbrace{\mathbf{a}_1}_{} + (u_2+v_2)\underbrace{\mathbf{a}_2}_{} + (u_3+v_3)\underbrace{\mathbf{a}_3}_{\text{Columnas de } A}}^{\text{Entradas en } \mathbf{u}+\mathbf{v}} \\ &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3) \\ &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \end{aligned}$$

Para demostrar el enunciado *b*), calcule $A(c\mathbf{u})$ como una combinación lineal de las columnas de A utilizando como pesos las entradas en $c\mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{u}) &= [\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3\,]\begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix} = (cu_1)\mathbf{a}_1 + (cu_2)\mathbf{a}_2 + (cu_3)\mathbf{a}_3 \\ &= c(u_1\mathbf{a}_1) + c(u_2\mathbf{a}_2) + c(u_3\mathbf{a}_3) \\ &= c(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) \\ &= c(A\mathbf{u}) \end{aligned}$$

■

NOTA NUMÉRICA

Con la finalidad de optimizar un algoritmo computacional para calcular $A\mathbf{x}$, la secuencia de operaciones implicaría datos almacenados en ubicaciones adyacentes de memoria. Los algoritmos profesionales más ampliamente utilizados para cálculos matriciales están escritos en Fortran, un lenguaje que almacena una matriz como un conjunto de columnas. Tales algoritmos calculan $A\mathbf{x}$ como una combinación lineal de las columnas de A. En contraste, si un programa está escrito en el conocido lenguaje C, el cual almacena matrices por filas, entonces $A\mathbf{x}$ debería calcularse mediante la regla alternativa que usa las filas de A.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4 Como se indicó después del teorema 4, los enunciados *a*), *b*) y *c*) son lógicamente equivalentes. De manera que es suficiente demostrar (para una matriz arbitraria A) que *a*) y *d*) son ambos verdaderos o ambos falsos. Eso vinculará a los cuatro enunciados.

Sea U una forma escalonada de A. Dada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}]$ se puede reducir por filas a una matriz aumentada $[U \quad \mathbf{d}]$ para alguna $\mathbf{d}$ en $\mathbb{R}^m$:

$$[A \quad \mathbf{b}] \sim \cdots \sim [U \quad \mathbf{d}]$$

Si el enunciado d) es verdadero, entonces cada fila de U contiene una posición pivote y tal vez no exista un pivote en la columna aumentada. De manera que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para cualquier $\mathbf{b}$, y a) es verdad. Si d) es falso, la última fila de U solo tiene ceros. Sea $\mathbf{d}$ cualquier vector con un 1 en su última entrada. En tal caso, $[U \quad \mathbf{d}]$ representa un sistema *inconsistente*. Como las operaciones de fila son reversibles, $[U \quad \mathbf{d}]$ se puede transformar a la forma $[A \quad \mathbf{b}]$. El nuevo sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ también es inconsistente, y a) es falso. ■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$. Es posible demostrar que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Con base en este hecho, presente a $\mathbf{b}$ como una combinación lineal específica de las columnas de A.

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$. Compruebe el teorema 5$a$) en este caso mediante el cálculo de $A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ y $A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$.

1.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4 calcule los productos utilizando: a) la definición, como en el ejemplo 1, y b) la regla fila-vector para calcular $A\mathbf{x}$. Si un producto está indefinido, explique por qué.

1. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8, aplique la definición de $A\mathbf{x}$ para escribir la ecuación matricial como una ecuación vectorial, o viceversa.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 8 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 1 \\ -49 \\ 11 \end{bmatrix}$

7. $x_1\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

8. $z_1\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + z_2\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} + z_3\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} + z_4\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, primero escriba el sistema como una ecuación vectorial y después como una ecuación matricial.

9. $\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

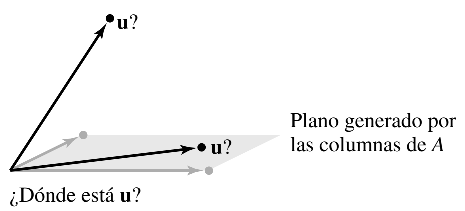
10. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$

Considerando A y $\mathbf{b}$ en los ejercicios 11 y 12, escriba la matriz aumentada para el sistema lineal que corresponde a la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Después, resuelva el sistema y escriba la solución como un vector:

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

13. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el plano en $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A? (Véase la figura). ¿Por qué?



14. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A? ¿Por qué?

15. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Demuestre que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución para todas las posibles $\mathbf{b}$, y describa el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las cuales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *sí* tiene solución.

16. Repita el ejercicio 15 considerando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Los ejercicios 17 a 20 se refieren a las matrices A y B que se presentan a continuación. Realice los cálculos pertinentes para justificar sus respuestas y mencione un teorema adecuado.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

17. ¿Cuántas filas de A contienen una posición pivote? ¿La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^4$?

18. ¿Cada vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz B anterior? ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^3$?

19. ¿Todo vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz A anterior? ¿Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$?

20. ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^4$? ¿La ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene solución para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^4$?

21. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

22. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera a $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

En los ejercicios 23 y 24, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

23. *a*) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reconoce como una *ecuación vectorial*.

b) Un vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de una matriz A si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.

c) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si la matriz aumentada $[A \;\; \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila.

d) La primera entrada en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos.

e) Si las columnas de una matriz A de $m \times n$ generan a $\mathbb{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

f) Si A es una matriz de $m \times n$ y si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente para alguna $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces A no puede tener una posición pivote en cada fila.

24. *a*) Cada ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a una ecuación vectorial con el mismo conjunto solución.

b) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado por las columnas de A.

c) Cualquier combinación lineal de vectores siempre se puede escribir en la forma $A\mathbf{x}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ adecuados.

d) Si la matriz coeficiente A tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

e) El conjunto solución de un sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3 \;\; \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A = [\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3]$.

f) Si A es una matriz de $m \times n$ cuyas columnas no generan a $\mathbb{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

25. Observe que $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Con base en este hecho (sin realizar operaciones de fila), encuentre escalares c_1, c_2, c_3 tales que $\begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

26. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Es posible demostrar que $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Apóyese en este hecho (sin realizar operaciones de fila) para obtener x_1 y x_2 que satisfagan la ecuación $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

27. Rescriba la siguiente ecuación matricial (numérica) en forma simbólica como una ecuación vectorial, utilizando los símbolos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ para los vectores y $c_1, c_2, \ldots$ para los escalares. Defina qué representa cada símbolo, utilizando los datos presentados en la ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 & 9 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -11 \end{bmatrix}$$

28. Considere que $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ y $\mathbf{v}$ son vectores en $\mathbb{R}^5$, mientras que x_1, x_2 y x_3 denotan escalares. Escriba la siguiente ecuación vectorial como una ecuación matricial. Identifique cualquier símbolo que utilice.

$$x_1\mathbf{q}_1 + x_2\mathbf{q}_2 + x_3\mathbf{q}_3 = \mathbf{v}$$

29. Construya una matriz de 3×3, no en forma escalonada, cuyas columnas generen a $\mathbb{R}^3$. Demuestre que la matriz que construyó tiene la propiedad deseada.

30. Construya una matriz de 3×3, no en forma escalonada, cuyas columnas *no* generen a $\mathbb{R}^3$. Demuestre que la matriz que construyó tiene la característica deseada.

31. Sea A una matriz de 3×2. Explique por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede ser consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$. Generalice su argumento al caso de una A arbitraria con más filas que columnas.

32. ¿Un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^4$ podría generar a $\mathbb{R}^4$? Explique su respuesta. ¿Y qué hay respecto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ cuando n es menor que m?

33. Suponga que A es una matriz de 4×3, y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. ¿Qué podría decir sobre la forma escalonada reducida de A? Justifique su respuesta.

34. Considere que A es una matriz de 3×4, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores en $\mathbb{R}^3$, y que $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Suponga que $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$ para algunos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ en $\mathbb{R}^4$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{w}$ es consistente? (*Nota:* $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ denotan vectores, y no entradas escalares de vectores).

35. Sean A una matriz de 5×3, $\mathbf{y}$ un vector en $\mathbb{R}^3$, y $\mathbf{z}$ un vector en $\mathbb{R}^5$. Suponga que $A\mathbf{y} = \mathbf{z}$. ¿Qué hecho permite concluir que el sistema $A\mathbf{x} = 5\mathbf{z}$ es consistente?

36. Suponga que A es una matriz de 4×4 y $\mathbf{b}$ un vector en $\mathbb{R}^4$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. Explique por qué las columnas de A deben generar a $\mathbb{R}^4$.

[**M**] En los ejercicios 37 a 40, determine si las columnas de la matriz generan a $\mathbb{R}^4$.

37. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & -5 & 8 \\ -5 & -3 & 4 & -9 \\ 6 & 10 & -2 & 7 \\ -7 & 9 & 2 & 15 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 & 8 \\ 3 & -7 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 & 4 & 6 \\ -8 & 4 & -6 & -10 & -3 \\ -7 & 11 & -5 & -1 & -8 \\ 3 & -1 & 10 & 12 & 12 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 5 & 11 & -6 & -7 & 12 \\ -7 & -3 & -4 & 6 & -9 \\ 11 & 5 & 6 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & -7 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

41. [**M**] Encuentre una columna de la matriz del ejercicio 39 que se pueda eliminar y, aun así, las restantes columnas de la matriz sigan generando a $\mathbb{R}^4$.

42. [**M**] Encuentre una columna de la matriz del ejercicio 40 que se pueda eliminar y, aun así, las restantes columnas sigan generando a $\mathbb{R}^4$. ¿Se puede eliminar más de una columna?

WEB

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. La ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & -5 \\ 4 & -8 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es equivalente a la ecuación vectorial

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que expresa a $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de las columnas de A.

2.
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+20 \\ 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 19 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1.5 CONJUNTOS SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

Los conjuntos solución de sistemas lineales son importantes objetos de estudio en álgebra lineal. Más adelante, se presentarán en diversos contextos. Esta sección utiliza notación vectorial para dar descripciones explícitas y geométricas de tales conjuntos solución.

Sistemas lineales homogéneos

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **homogéneo** si se puede escribir en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es una matriz de $m \times n$, y $\mathbf{0}$ es el vector cero en $\mathbb{R}^m$. Tal sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *siempre* tiene al menos una solución, a saber, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (el vector cero en $\mathbb{R}^n$). Esta solución cero generalmente se conoce como **solución trivial**. Para una ecuación dada $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la pregunta importante es si existe una **solución no trivial**, es decir, un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero que satisfaga $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El teorema de existencia y unicidad de la sección 1.2 (teorema 2) conduce de inmediato al siguiente resultado.

La ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y solo si la ecuación tiene al menos una variable libre.

EJEMPLO 1 Determine si el siguiente sistema homogéneo tiene una solución no trivial. Luego, describa el conjunto solución.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Sea A la matriz de coeficientes del sistema; la matriz aumentada $[A \quad \mathbf{0}]$ se reduce por filas a una forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como x_3 es una variable libre, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene soluciones no triviales (una para cada asignación de x_3). Para describir el conjunto solución, continúe la reducción por filas de $[A \quad \mathbf{0}]$ hasta su forma escalonada *reducida*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 \qquad - \tfrac{4}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 \qquad\quad &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

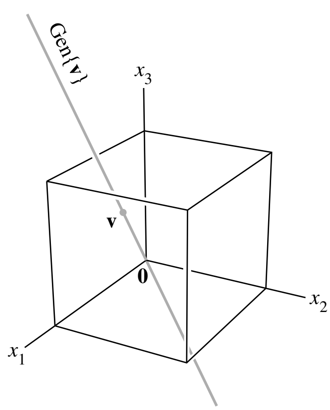


FIGURA 1

Al despejar las variables básicas x_1 y x_2 se obtiene $x_1 = \frac{4}{3}x_3$, $x_2 = 0$, con x_3 libre. Como un vector, la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_3\mathbf{v}, \quad \text{donde } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aquí se factorizó x_3 de la expresión para la solución general vectorial. Esto muestra que cada solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es, en este caso, un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$. La solución se obtiene al considerar $x_3 = 0$. Geométricamente, el conjunto solución es una recta que pasa por $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Véase la figura 1. ■

Observe que una solución no trivial **x** puede tener algunas entradas cero, siempre y cuando no todas ellas sean cero.

EJEMPLO 2 Una sola ecuación lineal puede tratarse como un sencillo sistema de ecuaciones. Describa todas las soluciones del "sistema" homogéneo

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \tag{1}$$

SOLUCIÓN No hay necesidad de una notación matricial. Despeje la variable básica x_1 en términos de las variables libres. La solución general es $x_1 = .3x_2 + .2x_3$, con x_2 y x_3 libres. Como un vector, la solución general es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 + .2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} .2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} .3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} .2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \quad (\text{con } x_2, x_3 \text{ libres}) \tag{2}$$

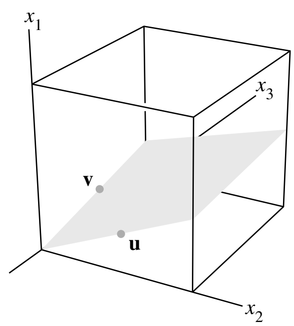


FIGURA 2

Este cálculo indica que cada solución de (1) es una combinación lineal de los vectores **u** y **v**, que se muestran en (2). Es decir, el conjunto solución es Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Puesto que **u** y **v** no son múltiplos entre sí, el conjunto solución es un plano que pasa por el origen. Véase la figura 2. ■

Los ejemplos 1 y 2, junto con los ejercicios, ilustran el hecho de que el conjunto solución de una ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ siempre se puede expresar de manera explícita como Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ para vectores adecuados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. Si la única solución es el vector cero, entonces el conjunto solución es Gen $\{\mathbf{0}\}$. Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ solo tiene una variable libre, el conjunto solución es una recta que pasa por el origen, como en la figura 1. Un plano que pasa por el origen, como en la figura 2, da una buena imagen mental para el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ cuando existen dos o más variables libres. Observe, sin embargo, que se puede emplear una figura similar para visualizar Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ aun cuando **u** y **v** no estén relacionados con soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Véase la figura 11 de la sección 1.3.

Forma vectorial paramétrica

La ecuación original (1) para el plano del ejemplo 2 es una descripción *implícita* del plano. Al resolver esta ecuación se obtiene una descripción *explícita* del plano como el conjunto generado por **u** y **v**. La ecuación (2) se llama **ecuación vectorial paramétrica** del plano. Algunas veces dicha ecuación se escribe como

$$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \quad (s, t \text{ en } \mathbb{R})$$

para poner de relieve que los parámetros varían sobre todos los números reales. En el ejemplo 1, la ecuación $\mathbf{x} = x_3\mathbf{v}$ (con x_3 libre), o $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$ (con t en $\mathbb{R}$), es la ecuación vectorial paramétrica de una recta. Siempre que un conjunto solución se describa explícitamente con vectores como en los ejemplos 1 y 2, se dirá que la solución está en **forma vectorial paramétrica**.

Soluciones de sistemas no homogéneos

Cuando un sistema lineal no homogéneo tiene muchas soluciones, la solución general se puede escribir en forma vectorial paramétrica como un vector más una combinación lineal arbitraria de vectores que satisfagan el sistema homogéneo correspondiente.

EJEMPLO 3 Describa todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Aquí A es la matriz de coeficientes del ejemplo 1. Al efectuar operaciones de fila sobre $[A \quad \mathbf{b}]$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 \quad - \tfrac{4}{3}x_3 &= -1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = -1 + \frac{4}{3}x_3,\ x_2 = 2$, $x_2 = 2$ y x_3 es libre. Como un vector, la solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{p}}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + x_3\mathbf{v}$, o, escribiendo t como un parámetro general,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \quad (t \text{ en } \mathbb{R}) \tag{3}$$

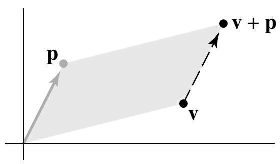


FIGURA 3
La suma de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{v}$ traslada $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + \mathbf{p}$.

describe el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en forma vectorial paramétrica. Recuerde del ejemplo 1 que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la ecuación vectorial paramétrica

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \quad (t \text{ en } \mathbb{R}) \tag{4}$$

[con la misma $\mathbf{v}$ que aparece en (3)]. Así, las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtienen sumando el vector $\mathbf{p}$ a las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. El propio vector $\mathbf{p}$ es justamente una solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ [correspondiente a $t = 0$ en (3)]. ■

Para describir el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en forma geométrica, podemos pensar que la suma vectorial es una *traslación*. Dados $\mathbf{v}$ y $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, el efecto de sumar $\mathbf{p}$ a $\mathbf{v}$ es *mover* a $\mathbf{v}$ en una dirección paralela a la recta que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{0}$. Se dice que **p traslada a v** hacia $\mathbf{v} + \mathbf{p}$. Véase la figura 3. Si cada punto sobre la recta L en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es trasladado por un vector $\mathbf{p}$, el resultado es una recta paralela a L. Véase la figura 4.

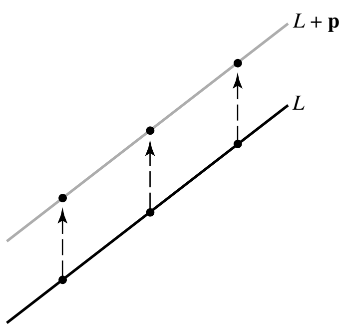


FIGURA 4
Recta trasladada.

Suponga que L es la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$, descrita mediante la ecuación (4). Sumar $\mathbf{p}$ a cada punto sobre L produce la recta trasladada que describe la ecuación (3). Observe que $\mathbf{p}$ está sobre la recta en la ecuación (3). Así, (3) es **la ecuación de la recta que pasa por p paralela a v.** Entonces *el conjunto solución de* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *es una recta que pasa por* $\mathbf{p}$ *paralela al conjunto solución de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La figura 5 ilustra este caso.

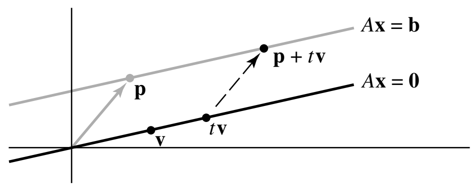


FIGURA 5 Conjuntos solución paralelos de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La relación entre los conjuntos solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que se ilustra en la figura 5, se generaliza a cualquier ecuación *consistente* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, aunque el conjunto solución será más grande que una recta cuando existan muchas variables libres. El siguiente teorema da el enunciado preciso. Para una demostración, véase el ejercicio 25.

TEOREMA 6

> Suponga que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para alguna $\mathbf{b}$ dada, y sea $\mathbf{p}$ una solución. El conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, donde $\mathbf{v}_h$ es cualquier solución de la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

El teorema 6 dice que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución, entonces el conjunto solución se obtiene al trasladar el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, empleando cualquier solución particular $\mathbf{p}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para dicha traslación. La figura 6 ilustra el caso en que existen dos variables libres. Aun cuando $n > 3$, nuestra imagen mental del conjunto solución de un sistema consistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) es un solo punto diferente de cero, o una recta o un plano que no pasan por el origen.

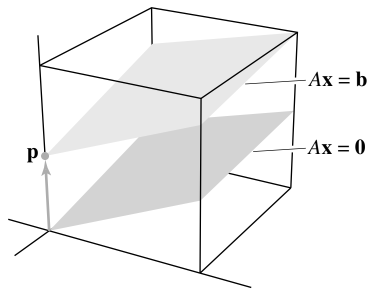


FIGURA 6 Conjuntos solución paralelos de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Advertencia: El teorema 6 y la figura 6 solamente se aplican a una ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que tiene al menos una solución $\mathbf{p}$ diferente de cero. Cuando $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución, entonces el conjunto solución es vacío.

El siguiente algoritmo resume los cálculos que se muestran en los ejemplos 1, 2 y 3.

ESCRITURA DE UN CONJUNTO SOLUCIÓN (DE UN SISTEMA CONSISTENTE) EN FORMA VECTORIAL PARAMÉTRICA

1. Reduzca por filas la matriz aumentada a su forma escalonada reducida.
2. Exprese cada variable básica en términos de cualquiera de las variables libres presentes en una ecuación.
3. Escriba una solución típica $\mathbf{x}$ como un vector cuyas entradas dependen de las variables libres (si las hay).
4. Descomponga $\mathbf{x}$ en una combinación lineal de vectores (con entradas numéricas) empleando las variables libres como parámetros.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Cada una de las siguientes ecuaciones determina un plano en $\mathbb{R}^3$. ¿Se intersecan los dos planos? Si es así, describa su intersección

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

2. Escriba la solución general de $10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7$ en forma vectorial paramétrica, y relacione el conjunto solución con el obtenido en el ejemplo 2.

1.5 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, determine si el sistema tiene una solución no trivial. Intente usar lo menos posible las operaciones de fila.

1.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 5 y 6, siga el método de los ejemplos 1 y 2 para escribir el conjunto solución del sistema homogéneo en forma vectorial paramétrica.

5.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -1x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 7 a 12, describa todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma vectorial paramétrica, donde A es equivalente por filas a la matriz dada.

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & -4 \\ 2 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5 + 4x_3$, $x_2 = -2 - 7x_3$, con x_3 libre. Use vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbb{R}^3$.

14. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5x_4$, $x_2 = 3 - 2x_4$, $x_3 = 2 + 5x_4$, con x_4 libre. Utilice vectores para describir este conjunto como una "recta" en $\mathbb{R}^4$.

15. Describa y compare los conjuntos solución de $x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$ y $x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2$.

16. Describa y compare los conjuntos solución de $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$ y $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$.

17. Siga el método del ejemplo 3 para describir las soluciones del siguiente sistema en forma vectorial paramétrica. También, dé una descripción geométrica del conjunto solución y compárelo con el que obtuvo en el ejercicio 5.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8 \\ -4x_1 - 4x_2 - 8x_3 &= -16 \\ -3x_2 - 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

18. Como en el ejercicio 17, describa las soluciones del siguiente sistema en forma vectorial paramétrica, y realice una comparación geométrica con el conjunto solución del ejercicio 6.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 &= -8 \end{aligned}$$

En los ejercicios 19 y 20, encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por **a** y es paralela a **b**.

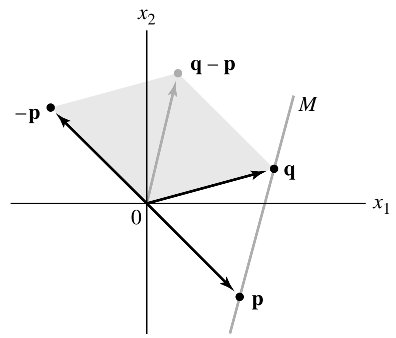
19. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22, obtenga una ecuación paramétrica de la recta M que pasa a través de **p** y **q**. [*Sugerencia: M* es paralela al vector $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. Véase la figura que aparece más abajo].

21. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$



En los ejercicios 23 y 24, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

23. *a*) Una ecuación homogénea siempre es consistente.

b) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ da una descripción explícita de su conjunto solución.

c) La ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial si y solo si la ecuación tiene al menos una variable libre.

d) La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ describe una recta que pasa por **v** y es paralela a **p**.

e) El conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, donde $\mathbf{v}_h$ es cualquier solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

24. *a*) Un sistema homogéneo de ecuaciones puede ser inconsistente.

b) Si **x** es una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces cada entrada en **x** es distinta de cero.

c) El efecto de sumar **p** a un vector es mover a dicho vector en una dirección paralela a **p**.

d) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es homogénea si el vector cero es una solución.

e) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene por traslación del conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

25. Demuestre el teorema 6:

a) Suponga que $\mathbf{p}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de manera que $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Sea $\mathbf{v}_h$ cualquier solución de la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y sea $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$. Demuestre que $\mathbf{w}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Sea $\mathbf{w}$ cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y defina $\mathbf{v}_h = \mathbf{w} - \mathbf{p}$. Demuestre que $\mathbf{v}_h$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto demuestra que cada solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$, donde $\mathbf{p}$ es una solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{v}_h$ una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

26. Suponga que A es la matriz *cero* de 3×3 (con cero en todas las entradas). Describa el conjunto solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

27. Suponga que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. Explique por qué la solución es única precisamente cuando $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solo la solución trivial.

En los ejercicios 28 a 31, *a*) ¿la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial? *b*) ¿La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para toda posible $\mathbf{b}$?

28. A es una matriz de 3×3 con tres posiciones pivote.

29. A es una matriz de 4×4 con tres posiciones pivote.

30. A es una matriz de 2×5 con dos posiciones pivote.

31. A es una matriz de 3×2 con dos posiciones pivote.

32. Si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, ¿el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser un plano que pasa por el origen? Explique su respuesta.

33. Construya una matriz A, diferente de cero, de 3×3 tal que el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sea una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

34. Construya una matriz A, diferente de cero, de 3×3 tal que el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sea una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

35. A partir de $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 21 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, encuentre por inspección una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [*Sugerencia:* Piense en la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ escrita como una ecuación vectorial].

36. A partir de $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$, encuentre por inspección una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

37. Construya una matriz A de 2×2 tal que el conjunto solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa a través de (4, 1) y el origen. Luego, encuentre un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *no* sea una recta en $\mathbb{R}^2$ paralela al conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Por qué esto *no* contradice al teorema 6?

38. Sean A una matriz de $m \times n$, y $\mathbf{w}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Demuestre que para cualquier escalar c, el vector $c\mathbf{w}$ también satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [Es decir, demuestre que $A(c\mathbf{w}) = \mathbf{0}$].

39. Suponga que A es una matriz de $m \times n$, y que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Explique por qué $A(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ debe ser el vector cero. Luego, explique por qué $A(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \mathbf{0}$ para cada par de escalares c y d.

40. Suponga que A es una matriz de 3×3 y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ tales que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *no* tiene solución. ¿Existe un vector $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene una solución única? Justifique su respuesta.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Reduzca por filas la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & -1 & 8 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 3x_3 &= 4 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = 4 - 3x_3$, $x_2 = -1 + 2x_3$, con x_3 libre. La solución general en forma vectorial paramétrica es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 3x_3 \\ -1 + 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{p}}}{\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbf{v}}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

La intersección de los dos planos es la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$.

2. La matriz aumentada $[10 \quad -3 \quad -2 \quad 7]$ es equivalente por filas a $[1 \quad -.3 \quad -.2 \quad .7]$, y la solución general es $x_1 = .7 + .3x_2 + .2x_3$, con x_2 y x_3 libres. Es decir,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 + .3x_2 + .2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} .3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} .2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= \mathbf{p} + x_2\mathbf{u} + x_3\mathbf{v}$$

El conjunto solución de la ecuación no homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el plano trasladado $\mathbf{p}$ + Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, que pasa por $\mathbf{p}$ y es paralelo al conjunto solución de la ecuación homogénea del ejemplo 2.

1.6 APLICACIONES DE SISTEMAS LINEALES

Tal vez usted espere que un problema de la vida real que implica álgebra lineal tenga solo una solución, o quizá ninguna solución**.** La finalidad de esta sección es mostrar cómo, de manera natural, surgen sistemas lineales con muchas soluciones. Aquí las aplicaciones provienen de áreas como economía, química y flujo en redes.

Un sistema homogéneo en economía

WEB

El sistema de 500 ecuaciones con 500 variables, que se mencionó en la introducción de este capítulo, ahora se conoce como un modelo de "entrada-salida" (o "producción") de Leontief.[1] En la sección 2.6 se examinará este modelo con más detalle, cuando se disponga de más bases teóricas y de una mejor notación. Por ahora, se considerará un "modelo de intercambio" más sencillo, que también se debe a Leontief.

Suponga que la economía de una nación se divide en muchos sectores, como manufactura, comunicaciones, entretenimiento y servicios. Considere que se conoce la producción total anual de cada sector y se sabe exactamente cómo esta producción se divide o se "intercambia" entre los otros sectores de la economía. Al valor total en dólares de la producción de un sector se le llama **precio** de esa producción. Leontief probó el siguiente resultado.

> Existen *precios de equilibrio* que se pueden asignar a las producciones totales de varios sectores, de tal forma que el ingreso de cada sector equilibra exactamente sus gastos.

El siguiente ejemplo ilustra cómo encontrar los precios de equilibrio.

EJEMPLO 1 Suponga que una economía comprende las industrias carbonífera, eléctrica y del acero, y que la producción de cada sector se distribuye entre los diversos sectores como se muestra en la tabla 1, página 50: las entradas en una columna representan las partes fraccionales de la producción total de un sector industrial.

La segunda columna de la tabla 1, por ejemplo, dice que la producción total del sector eléctrico se divide como sigue: 40% a la industria del carbón, 50% a la del acero, y el restante 10% a la industria eléctrica. (El sector eléctrico trata a este 10% como un gasto en el que se incurre con la finalidad de operar su negocio). Como se deben considerar todas las producciones, las fracciones decimales en cada columna deben sumar 1.

[1] Véase Wassily W. Leontief, "Input-Output Economics", *Scientific American*, octubre de 1951, pp. 15-21.

Denote los precios (es decir, valores en dólares) del total de las producciones anuales de los sectores del carbón, eléctrico y del acero mediante p_C, p_E y p_S, respectivamente. Si es posible, encuentre los precios de equilibrio que hacen que los ingresos de cada sector igualen a sus gastos.

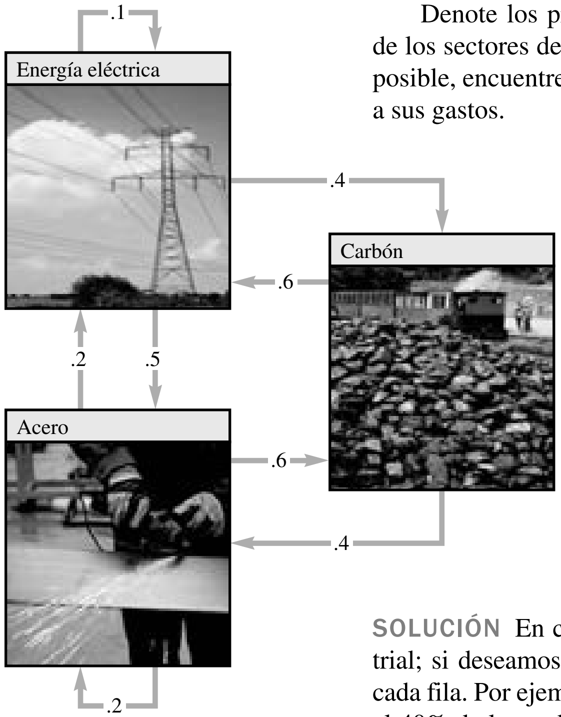


TABLA 1 Una economía básica

Distribución de la producción por sectores:			
Del carbón	**Eléctrico**	**Del acero**	**Comprada por:**
.0	.4	.6	S. del carbón
.6	.1	.2	S. eléctrico
.4	.5	.2	S. del acero

SOLUCIÓN En cada columna se indica hacia dónde va la producción de cada sector industrial; si deseamos saber qué necesita cada sector como insumos, hay que leer a lo largo de cada fila. Por ejemplo, la primera fila de la tabla 1 dice que el sector del carbón recibe (y paga) el 40% de la producción del sector eléctrico y el 60% del producto de la industria del acero. Puesto que los respectivos valores de las producciones totales son p_E y p_S, la industria del carbón debe gastar $.4p_E$ dólares por compartir el producto del sector eléctrico y $.6p_S$ por la producción de la industria del acero. Así, los gastos totales del sector carbonífero son $.4p_E + .6p_S$. Para hacer que el ingreso de la industria del carbón, p_C, sea igual a sus gastos, escribimos

$$p_C = .4p_E + .6p_S \tag{1}$$

La segunda fila de la tabla de intercambio indica que el sector eléctrico gasta $0.6p_C$ en la industria del carbón, $0.1p_E$ en energía eléctrica, y $0.2p_S$ en la industria del acero. Así que el requerimiento de ingreso/gasto para el sector eléctrico es

$$p_E = .6p_C + .1p_E + .2p_S \tag{2}$$

Finalmente, la tercera fila de la tabla de intercambio conduce al último requerimiento:

$$p_S = .4p_C + .5p_E + .2p_S \tag{3}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3), se transfieren todas las incógnitas a los lados izquierdos de las ecuaciones y se combinan términos semejantes. [Por ejemplo, en el lado izquierdo de (2), se escribe $p_E - .1p_E$ como $.9p_E$.]

$$\begin{aligned} p_C - .4p_E - .6p_S &= 0 \\ -.6p_C + .9p_E - .2p_S &= 0 \\ -.4p_C - .5p_E + .8p_S &= 0 \end{aligned}$$

El siguiente paso es reducir por filas. Aquí, para simplificar, los decimales se redondean a dos cifras.

$$\begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ -.6 & .9 & -.2 & 0 \\ -.4 & -.5 & .8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & .66 & -.56 & 0 \\ 0 & -.66 & .56 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & .66 & -.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -.4 & -.6 & 0 \\ 0 & 1 & -.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -.94 & 0 \\ 0 & 1 & -.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución general es $p_C = .94p_S$, $p_E = .85p_S$, y p_S es libre. El vector de precios de equilibrio para la economía tiene la forma

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_C \\ p_E \\ p_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .94p_S \\ .85p_S \\ p_S \end{bmatrix} = p_S \begin{bmatrix} .94 \\ .85 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cualquier asignación (no negativa) para p_S da por resultado una asignación de precios de equilibrio. Por ejemplo, si se toma p_S como 100 (o \$100 millones), entonces $p_C = 94$ y $p_E = 85$. Los ingresos y gastos de cada sector serán iguales si la producción de carbón se cotiza en \$94 millones, la de energía eléctrica en \$85 millones, y la de acero en \$100 millones. ■

Balanceo de ecuaciones químicas

Las ecuaciones químicas describen las cantidades de sustancias que se consumen y producen en reacciones químicas. Por ejemplo, cuando el gas propano se quema, el propano (C_3H_8) se combina con oxígeno (O_2) para formar dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O), de acuerdo con una ecuación de la forma

$$(x_1)C_3H_8 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O \tag{4}$$

Para "balancear" esta ecuación, un químico debe encontrar números $x_1,\ldots, x_4$ tales que los números totales de átomos de carbón (C), hidrógeno(H) y oxígeno (O) en el lado izquierdo concuerden con los números de átomos correspondientes en el lado derecho (porque, en la reacción, los átomos no se crean ni se destruyen).

Un método sistemático para balancear ecuaciones químicas es colocar una ecuación vectorial que describa el número de átomos de cada tipo presentes en una reacción. Como la ecuación (4) implica a tres tipos de átomos (carbón, hidrógeno y oxígeno), construya un vector en $\mathbb{R}^3$ para cada reactante y producto en (4) que liste los números de "átomos por molécula", como sigue:

$$C_3H_8\colon \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix},\ O_2\colon \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ CO_2\colon \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ H_2O\colon \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Carbón} \\ \leftarrow \text{Hidrógeno} \\ \leftarrow \text{Oxígeno} \end{array}$$

Para balancear la ecuación (4), los coeficientes $x_1,\ldots, x_4$ deben satisfacer

$$x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver, mueva todos los términos a la izquierda (cambiando los signos en los vectores tercero y cuarto):

$$x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La reducción por filas de la matriz aumentada para esta ecuación conduce a la solución general

$$x_1 = \tfrac{1}{4}x_4,\ x_2 = \tfrac{5}{4}x_4,\ x_3 = \tfrac{3}{4}x_4, \text{ con } x_4 \text{ libre}$$

Como los coeficientes en una ecuación química deben ser enteros, tome $x_4 = 4$; en tal caso, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 3$. La ecuación balanceada es

$$C_3H_8 + 5O_2 \rightarrow 3CO_2 + 4H_2O$$

La ecuación también estaría balanceada si, por ejemplo, cada coeficiente se duplicara. Sin embargo, para la mayoría de los propósitos, los químicos prefieren utilizar una ecuación balanceada cuyos coeficientes sean los números más pequeños posibles.

Flujo de redes

WEB

Los sistemas de ecuaciones lineales se originan naturalmente cuando científicos, ingenieros o economistas estudian el flujo de alguna cantidad a través de una red. Por ejemplo, los planificadores urbanos y los ingenieros de tráfico monitorizan el patrón de flujo de tránsito en una rejilla de las calles de la ciudad. Los ingenieros eléctricos calculan el flujo de corriente a través de circuitos eléctricos. Y los economistas analizan la distribución de productos del fabricante al consumidor a través de una red de mayoristas y minoristas. Para muchas redes, los sistemas de ecuaciones implican cientos o incluso miles de variables y ecuaciones.

Una *red* consiste en un conjunto de puntos llamados *uniones*, o *nodos*, con líneas o arcos llamados *ramas*, que conectan algunos o todos los nodos. Se indica la dirección y el sentido de flujo en cada rama, y la cantidad de flujo (o tasa) se denota con una variable.

La suposición básica en el flujo de red es que el flujo total en la red es igual al flujo total de salida de la red, y que el flujo total en un nodo es igual al flujo total de salida en dicho nodo. Por ejemplo, la figura 1 muestra 30 unidades que fluyen por una rama hacia una unión; x_1 y x_2 denotan los flujos de salida del nodo a través de otras ramas. Como el flujo se "conserva" en cada unión, entonces $x_1 + x_2 = 30$. En forma similar, el flujo en cada nodo se describe mediante una ecuación lineal. El problema de análisis de redes es determinar el flujo en cada rama cuando se tiene información parcial (como el flujo de entrada y salida de la red).

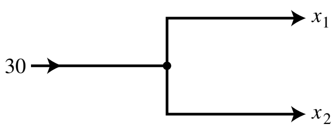


FIGURA 1
Una unión, también llamada nodo.

EJEMPLO 2 La red de la figura 2 representa el flujo del tránsito (en vehículos por hora) en varias calles de un solo sentido en el centro de Baltimore en un día común, poco después del mediodía. Determine el patrón de flujo general para la red.

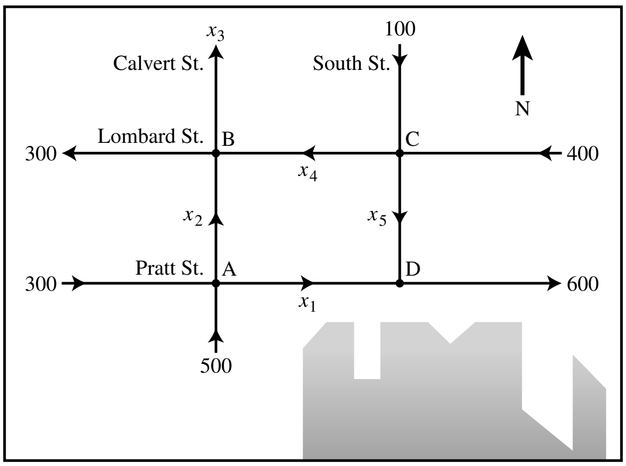


FIGURA 2 Calles de Baltimore.

SOLUCIÓN Escriba las ecuaciones que describen el flujo, y después encuentre la solución general del sistema. Marque las intersecciones de las calles (nodos) y los flujos desconocidos en las ramas, como se indica en la figura 2. En cada intersección, iguale el flujo de entrada al de salida.

Intersección	Flujo de entrada		Flujo de salida
A	$300 + 500$	$=$	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$=$	$300 + x_3$
C	$100 + 400$	$=$	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	$=$	600

También, el flujo total de entrada en la red ($500 + 300 + 100 + 400$) es igual al flujo total de salida ($300 + x_3 + 600$), que se simplifica a $x_3 = 400$. Combine esta ecuación con un reordenamiento de las primeras cuatro ecuaciones para obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\quad &= 800 \\
x_2 - x_3 + x_4 \qquad &= 300 \\
x_4 + x_5 &= 500 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad\quad + x_5 &= 600 \\
x_3 \qquad\qquad\quad &= 400
\end{aligned}$$

La reducción por filas de la matriz aumentada conduce a

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad + x_5 &= 600 \\
x_2 \qquad\quad - x_5 &= 200 \\
x_3 \qquad\quad &= 400 \\
x_4 + x_5 &= 500
\end{aligned}$$

El patrón de flujo general para la red está descrito por

$$\begin{cases}
x_1 = 600 - x_5 \\
x_2 = 200 + x_5 \\
x_3 = 400 \\
x_4 = 500 - x_5 \\
x_5 \text{ es libre}
\end{cases}$$

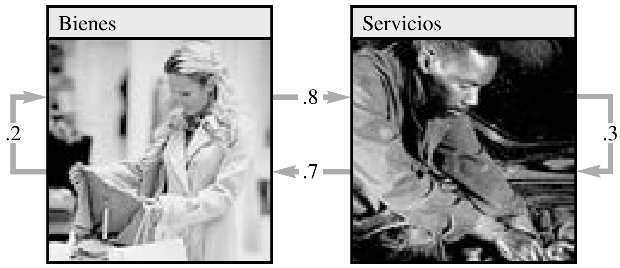
Un flujo negativo en una rama de la red corresponde a un flujo en el sentido opuesto al indicado en el modelo. Como las calles en este problema son de un solo sentido, ninguna de las variables puede ser negativa. Este hecho conduce a ciertas limitaciones sobre los posibles valores de las variables. Por ejemplo, $x_5 \leq 500$ porque x_4 no puede ser negativa. En el problema de práctica 2 se consideran otras restricciones sobre las variables. ■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Suponga que una economía tiene tres sectores: agricultura, minería y manufactura. Agricultura vende el 5% de su producción a minería y el 30% a manufactura, y retiene el resto. Minería vende el 20% de su producto a agricultura y el 70% a manufactura, conservando el resto. Manufactura vende el 20% de su producción a agricultura y el 30% a minería, y retiene lo restante. Determine la tabla de intercambio para esta economía; utilice las columnas para describir cómo la producción de cada sector se intercambia entre los tres sectores.
2. Considere el flujo de red que se analizó en el ejemplo 2. Determine el posible rango de valores de x_1 y x_2. [*Sugerencia:* El ejemplo mencionó que $x_5 \leq 500$. ¿Qué implicaciones tiene esto sobre x_1 y x_2? Además, considere el hecho de que $x_5 \geq 0$].

1.6 EJERCICIOS

1. Suponga que una economía solo tiene dos sectores: bienes y servicios. Cada año, el sector de bienes vende el 80% de su producción al de servicios y retiene el resto, mientras que el sector de servicios vende el 70% de su producción al sector de bienes y conserva lo restante. Encuentre los precios de equilibrio para las producciones anuales de los sectores de bienes y servicios que permiten igualar el ingreso con el gasto de cada sector.



2. Encuentre otro conjunto de precios de equilibrio para la economía del ejemplo 1. Suponga la misma economía, pero que ahora se utiliza el yen japonés en vez del dólar estadounidense para medir los valores de las diversas producciones de los sectores. ¿Esto modificaría el problema en algún sentido? Analícelo.

3. Considere una economía con tres sectores: combustibles y energía, manufactura y servicios. Combustibles y energía vende el 80% de su producción a manufactura, el 10% a servicios, y retiene el resto. Manufactura vende el 10% de su producción a combustibles y energía, el 80% a servicios, y conserva lo restante. Servicios vende el 20% a combustible y energía, el 40% a manufactura, y retiene el resto.
   a) Construya la tabla de intercambio para esta economía.
   b) Desarrolle un sistema de ecuaciones que permita determinar los precios con los cuales se igualen los ingresos y gastos de cada sector. Después, escriba la matriz aumentada que puede reducirse por filas para obtener esos precios.
   c) [**M**] Encuentre un conjunto de precios de equilibrio cuando el precio para la producción de servicios es de 100 unidades.

4. Suponga que una economía tiene cuatro sectores: minero, maderero, de energía y del transporte. Minería vende el 10% de su producción al sector maderero, el 60% a energía, y conserva el resto. El sector maderero vende el 15% de su producción a minería, el 50% a energía, el 20% al sector del transporte, y conserva lo restante. Energía vende el 20% de su producción a minería, el 15% al sector maderero, el 20% al sector del transporte, y retiene el resto. El sector del transporte vende el 20% de su salida de producción a minería, el 10% al sector maderero, el 50% a energía, y conserva lo restante.
   a) Construya la tabla de intercambio para esta economía.
   b) [**M**] Encuentre un conjunto de precios de equilibrio para esta economía.

5. Una economía tiene cuatro sectores: agricultura, manufactura, servicios y transporte. El sector agrícola vende el 20% de su producción a manufactura, el 30% a servicios, el 30% al sector del transporte, y conserva el resto. Manufactura vende el 35% de su producción al sector agrícola, el 35% a servicios, el 20% al sector del transporte, y conserva el resto. Servicios vende el 10% de su salida de producción a agricultura, el 20% a manufactura, el 20% al sector del transporte, y conserva el resto. El sector del transporte vende el 20% de su salida de producción a agricultura, el 30% a manufactura, el 20% a servicios, y conserva el remanente.
   a) Construya la tabla de intercambio para esta economía.
   b) [**M**] Encuentre un conjunto de precios de equilibrio para la economía si el valor del producto del sector del transporte es de $10.00 por unidad.
   c) El sector de servicios lanza una exitosa campaña para "comer productos frescos de granja", e incrementa su participación con el sector agrícola al 40%, mientras que su participación con el sector manufacturero cae al 10%. Construya la tabla de intercambio para esta nueva economía.
   d) [**M**] Encuentre un conjunto de precios de equilibrio para esta nueva economía si el valor del sector del transporte continúa a $10.00 por unidad. ¿Qué efectos tuvo la campaña de "comer productos frescos de granja" sobre los precios de equilibrio para los sectores en esta economía?

En los ejercicios 6 a 11, balancee las ecuaciones químicas utilizando el enfoque de ecuación vectorial analizado en esta sección.

6. El óxido de aluminio y el carbón reaccionan para crear el elemento aluminio y dióxido de carbono:

   $$Al_2O_3 + C \to Al + CO_2$$

   [Para cada compuesto, construya un vector que liste los números de átomos de aluminio, oxígeno y carbón].

7. El Alka-Seltzer contiene bicarbonato de sodio ($NaHCO_3$) y ácido cítrico ($H_3C_6H_5O_7$). Cuando se disuelve una tableta en agua, la siguiente reacción produce citrato de sodio, agua y dióxido de carbono (gas):

   $$NaHCO_3 + H_3C_6H_5O_7 \to Na_3C_6H_5O_7 + H_2O + CO_2$$

8. La piedra caliza, $CaCO_3$, neutraliza el ácido, H_3O, en la lluvia ácida, mediante la siguiente ecuación sin balancear:

   $$H_3O + CaCO_3 \to H_2O + Ca + CO_2$$

9. El sulfhídrico de boro reacciona violentamente con agua para formar ácido bórico y gas sulfhídrico de hidrógeno (que expide olor a huevo podrido). La ecuación sin balancear es

   $$B_2S_3 + H_2O \to H_3BO_3 + H_2S$$

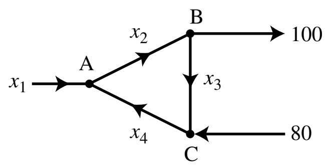
10. [**M**] Si es posible, utilice aritmética exacta o un formato racional para los cálculos al balancear la siguiente reacción química:

   $$PbN_6 + CrMn_2O_8 \to Pb_3O_4 + Cr_2O_3 + MnO_2 + NO$$

11. [**M**] La reacción química que aparece a continuación se puede utilizar en algunos procesos industriales, como la producción de arsénico (AsH_3). Utilice aritmética exacta o un formato racional para los cálculos al balancear esta ecuación.

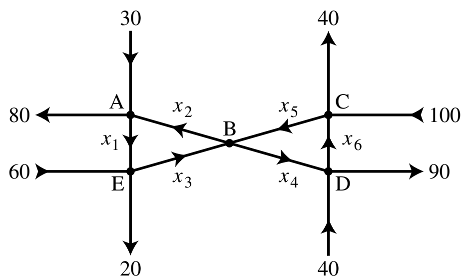
   $$\begin{aligned} &MnS + As_2Cr_{10}O_{35} + H_2SO_4 \\ &\quad \to HMnO_4 + AsH_3 + CrS_3O_{12} + H_2O \end{aligned}$$

12. Encuentre el patrón de flujo general de la red que se ilustra en la figura. Suponiendo que todos los flujos son no negativos, ¿cuál es el valor más pequeño posible para x_4?



13. *a*) Encuentre el patrón de flujo general de la red que se ilustra en la figura.

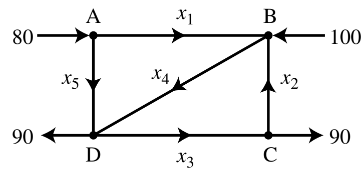
b) Suponiendo que los flujos deben ser en los sentidos indicados, encuentre los flujos mínimos en las ramas denotadas como x_2, x_3, x_4 y x_5.



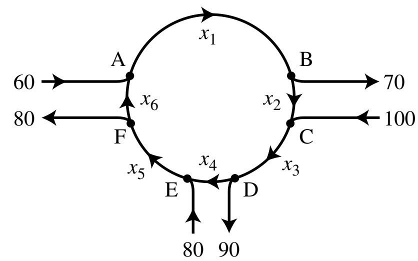
14. *a*) Encuentre el patrón de tráfico general de la red de autopistas que se representa en la figura. (Las tasas de flujo están en vehículos/minuto).

b) Describa el patrón de tráfico general cuando está cerrada la ruta cuyo flujo es x_5.

c) Cuando $x_5 = 0$, ¿cuál es el valor mínimo de x_4?



15. En Inglaterra las intersecciones con frecuencia se construyen como circuitos en forma de glorieta de un solo sentido, como el que se ilustra en la figura. Suponga que el tráfico debe circular en los sentidos indicados. Encuentre la solución general del flujo de red. Determine el valor más pequeño posible para x_6.



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Escriba los porcentajes como decimales. Como todas las salidas deben tomarse en cuenta, cada columna debe sumar 1. Este hecho ayuda a llenar cualquier entrada faltante.

Distribución de la producción por sectores:			
Agricultura	**Minería**	**Manufactura**	**Comprada por:**
.65	.20	.20	Agricultura
.05	.10	.30	Minería
.30	.70	.50	Manufactura

2. Como $x_5 \leq 500$, las ecuaciones D y A para x_1 y x_2 implican que $x_1 \geq 100$ y $x_2 \leq 700$. El hecho de que $x_5 \geq 0$ implica que $x_1 \leq 600$ y $x_2 \geq 200$. Así, $100 \leq x_1 \leq 600$, y $200 \leq x_2 \leq 700$.

1.7 INDEPENDENCIA LINEAL

Las ecuaciones homogéneas de la sección 1.5 se pueden estudiar desde una perspectiva diferente si las escribimos como ecuaciones vectoriales. De esta manera, la atención se transfiere de las soluciones desconocidas de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a los vectores que aparecen en las ecuaciones vectoriales.

Por ejemplo, considere la ecuación

$$x_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{1}$$

Esta ecuación tiene una solución trivial, desde luego, donde $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Al igual que en la sección 1.5, el asunto principal es si la solución trivial es la *única*.

DEFINICIÓN

Se dice que un conjunto indexado de vectores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente** si la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

solo tiene la solución trivial. Se dice que el conjunto $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ es **linealmente dependiente** si existen pesos $c_1,\ldots,c_p$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \tag{2}$$

La ecuación (2) se llama **relación de dependencia lineal** entre $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p$ cuando no todos los pesos son cero. Un conjunto indexado es linealmente dependiente si y solo si no es linealmente independiente. Por brevedad, puede decirse que $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p$ son linealmente dependientes cuando queremos decir que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Se utiliza una terminología semejante para los conjuntos linealmente independientes.

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$.

a) Determine si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

b) Si es posible, encuentre una relación de dependencia lineal entre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

SOLUCIÓN

a) Se debe determinar si existe una solución no trivial de la ecuación (1) que aparece más arriba. Las operaciones de fila sobre la matriz aumentada asociada indican que

$$\begin{bmatrix}1&4&2&0\\2&5&1&0\\3&6&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&0\\0&-3&-3&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Como es evidente, x_1 y x_2 son variables básicas, y x_3 es libre. Cada valor de x_3 distinto de cero determina una solución no trivial de (1). Así que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes (y, por tanto, no son linealmente independientes).

b) Para encontrar una relación de dependencia lineal entre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, se reduce por filas completamente a la matriz aumentada y se escribe el nuevo sistema:

$$\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad\begin{aligned}x_1 \quad\;\; - 2x_3 &= 0\\ x_2 + \; x_3 &= 0\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Así, $x_1 = 2x_3$, $x_2 = -x_3$, y x_3 es libre. Seleccione cualquier valor distinto de cero para x_3; por ejemplo, $x_3 = 5$. De esta manera, $x_1 = 10$ y $x_2 = -5$. Sustituya estos valores en la ecuación (1) para obtener

$$10\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 5\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Esta es una (entre una infinidad) de las posibles relaciones de dependencia lineal entre $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. ■

Independencia lineal de las columnas de una matriz

Suponga que, en vez de utilizar un conjunto de vectores, se inicia con una matriz $A = [\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$. En tal caso, la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se puede escribir como

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

Cada relación de dependencia lineal entre las columnas de A corresponde a una solución no trivial de A$\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, tenemos el siguiente resultado importante.

> Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene *solo* la solución trivial. (3)

EJEMPLO 2 Determine si las columnas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

SOLUCIÓN Para estudiar $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se reduce por filas la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

En este punto, es claro que hay tres variables básicas y ninguna variable libre. Así, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ solo tiene la solución trivial, y las columnas de A son linealmente independientes. ■

Conjuntos de uno o dos vectores

Un conjunto que solo tiene un vector —por ejemplo, $\mathbf{v}$— es linealmente independiente si y solo si $\mathbf{v}$ no es el vector cero. Esto se debe a que la ecuación vectorial $x_1\mathbf{v} = \mathbf{0}$ solo tiene la solución trivial cuando $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. El vector cero es linealmente dependiente porque $x_1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ tiene muchas soluciones no triviales.

El siguiente ejemplo explicará la naturaleza de un conjunto linealmente dependiente de dos vectores.

EJEMPLO 3 Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes.

a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ *b)* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) Observe que $\mathbf{v}_2$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, a saber, $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$. Así que, $-2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, lo que muestra que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente dependiente.

b) Desde luego, los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ *no* son múltiplos entre sí. ¿Podrían ser linealmente dependientes? Suponga que c y d satisfacen

$$c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Si $c \neq 0$, entonces es posible despejar $\mathbf{v}_1$ en términos de $\mathbf{v}_2$, a saber, $\mathbf{v}_1 = (-d/c)\mathbf{v}_2$. Este resultado es imposible porque $\mathbf{v}_1$ *no* es múltiplo de $\mathbf{v}_2$. Así que c debe ser cero. De manera similar, d también debe ser cero. Por lo tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. ■

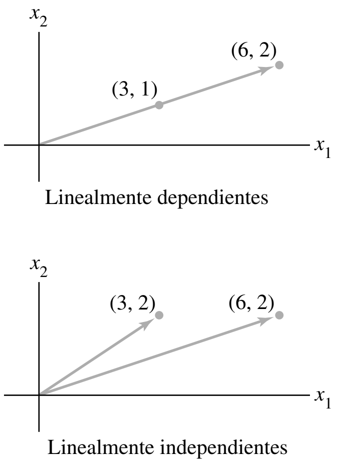


FIGURA 1

Los argumentos del ejemplo 3 indican que siempre es posible determinar por *inspección* cuándo un conjunto de dos vectores es linealmente dependiente. Las operaciones de fila son innecesarias. Basta con comprobar si al menos uno de los vectores es un escalar multiplicado por el otro. (La prueba solo se aplica a conjuntos de *dos* vectores).

> Un conjunto de dos vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente dependiente si al menos uno de los vectores es un múltiplo del otro. El conjunto es linealmente independiente si y solo si ninguno de los vectores es un múltiplo del otro.

En términos geométricos, dos vectores son linealmente dependientes si y solo si ambos están sobre la misma recta que pasa por el origen. La figura 1 muestra los vectores del ejemplo 3.

Conjuntos de dos o más vectores

La prueba del siguiente teorema es similar a la solución del ejemplo 3. Los detalles se presentan al final de esta sección.

TEOREMA 7

> **Caracterización de conjuntos linealmente dependientes**
>
> Un conjunto indexado $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ de dos o más vectores es linealmente dependiente si y solo si al menos uno de los vectores en S es una combinación lineal de los otros. De hecho, si S es linealmente dependiente y $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, entonces alguna $\mathbf{v}_j$ (con $j > 1$) es una combinación lineal de los vectores precedentes, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$.

Advertencia: El teorema 7 *no* dice que *cada* vector en un conjunto linealmente dependiente es una combinación lineal de los vectores precedentes. Un vector en un conjunto linealmente dependiente puede no ser combinación lineal de los otros vectores. Véase el problema de práctica 3.

EJEMPLO 4 Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$. Describa el conjunto generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y explique por qué un vector $\mathbf{w}$ está en Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ si y solo si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente.

SOLUCIÓN Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes porque ninguno de ellos es múltiplo del otro, de manera que generan un plano en $\mathbb{R}^3$. (Véase la sección 1.3). De hecho, Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es el plano x_1x_2 (con $x_3 = 0$). Si $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente, de acuerdo con el teorema 7. A la inversa, suponga que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente. Por el teorema 7, algún vector en $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es una combinación lineal de los vectores precedentes (porque $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$). Ese vector debe ser $\mathbf{w}$, porque $\mathbf{v}$ no es múltiplo de $\mathbf{u}$. Así, $\mathbf{w}$ está en Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Véase la figura 2. ■

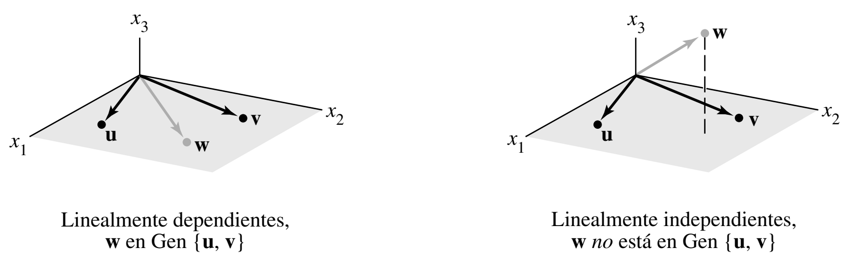


FIGURA 2 Dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$.

El ejemplo 4 se generaliza a cualquier conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ en $\mathbb{R}^3$ con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ linealmente independientes. El conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ será linealmente dependiente si y solo si $\mathbf{w}$ está en el plano generado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Los siguientes dos teoremas describen casos especiales en los cuales la dependencia lineal de un conjunto es automática. Aún más, el teorema 8 será un resultado clave para trabajar en capítulos posteriores.

TEOREMA 8

> Si un conjunto contiene más vectores que entradas en cada vector, entonces el conjunto es linealmente dependiente. Es decir, cualquier conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si $p > n$.

$$\begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} \end{array}$$

FIGURA 3
Si $p > n$, las columnas son linealmente dependientes.

DEMOSTRACIÓN Sea $A = [\mathbf{v}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_p]$. Entonces, A es $n \times p$, y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ corresponde a un sistema de n ecuaciones con p incógnitas. Si $p > n$, hay más variables que ecuaciones, por lo que debe existir una variable libre. Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial, y las columnas de A son linealmente dependientes. Véase la figura 3 para una versión matricial de este teorema. ■

Advertencia: El teorema 8 no dice nada acerca del caso en que el número de vectores en el conjunto *no* excede el número de entradas en cada vector.

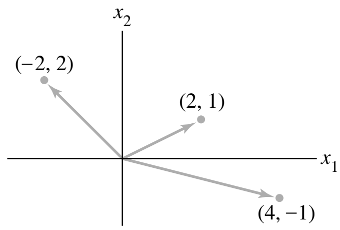


FIGURA 4
Un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 5 Los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ son linealmente dependientes de acuerdo con el teorema 8, ya que hay tres vectores en el conjunto y solamente existen dos entradas en cada vector. Sin embargo, observe que ninguno de los vectores es un múltiplo de alguno de los otros. Véase la figura 4. ■

TEOREMA 9

> Si un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ contiene al vector cero, entonces el conjunto es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN Al renumerar los vectores, se puede suponer que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Así, la ecuación $1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ indica que S es linealmente dependiente. ■

EJEMPLO 6 Por inspección, determine si el conjunto dado es linealmente dependiente.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a) El conjunto contiene cuatro vectores, cada uno de los cuales tiene solamente tres entradas. Así que, de acuerdo con el teorema 8, el conjunto es linealmente dependiente.

b) El teorema 8 no se aplica aquí porque el número de vectores no excede al número de entradas en cada vector. Como el vector cero se encuentra en el conjunto, este último es linealmente dependiente, de acuerdo con el teorema 9.

c) Compare las entradas correspondientes de los dos vectores. El segundo vector parece ser el primer vector multiplicado por $-3/2$. La relación es válida para los primeros tres pares de entradas, pero falla para el cuarto par. Así, ninguno de los vectores es múltiplo de otro y, por lo tanto, son linealmente independientes. ■

En general, la sección se debería leer *varias* veces para asimilar plenamente un concepto tan importante como el de independencia lineal. Las notas en la *Guía de estudio* para esta sección ayudarán a construir imágenes mentales de las principales ideas de álgebra lineal. Por ejemplo, es importante leer con cuidado la siguiente demostración, ya que ilustra cómo *se emplea* la definición de independencia lineal.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 7 (Caracterización de conjuntos linealmente dependientes) Si alguna $\mathbf{v}_j$ en S es una combinación lineal de los demás vectores, entonces $\mathbf{v}_j$ se puede restar en ambos lados de la ecuación, produciendo así una relación de dependencia lineal con un peso diferente de cero (-1) sobre $\mathbf{v}_j$. [Por ejemplo, si $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$, entonces $\mathbf{0} = (-1)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 + \cdots + 0\mathbf{v}_p$.]. Por lo tanto, S es linealmente dependiente.

A la inversa, suponga que S es linealmente dependiente. Si $\mathbf{v}_1$ es cero, entonces es una combinación lineal (trivial) de los demás vectores en S. De otra forma, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, y existen pesos $c_1,\ldots, c_p$, sin que todos sean cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

Sea j el subíndice más grande para el cual $c_j \neq 0$. Si $j = 1$, entonces $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, lo que es imposible porque $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. De manera que $j > 1$, y

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_j\mathbf{v}_j + 0\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_p &= \mathbf{0} \\ c_j\mathbf{v}_j &= -c_1\mathbf{v}_1 - \cdots - c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} \\ \mathbf{v}_j &= \left(-\frac{c_1}{c_j}\right)\mathbf{v}_1 + \cdots + \left(-\frac{c_{j-1}}{c_j}\right)\mathbf{v}_{j-1} \end{aligned}$$

■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$.

1. Determine si los siguientes conjuntos son linealmente independientes y explique por qué: $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$,$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$,$\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\}$,$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$,$\{\mathbf{v}, \mathbf{z}\}$ y $\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}$.
2. ¿Las respuestas al problema 1 implican que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ es linealmente independiente?
3. Para determinar si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ es linealmente dependiente, ¿es aconsejable comprobar si, por ejemplo, $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$?
4. ¿El conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$ es linealmente dependiente?

1.7 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, determine si los vectores son linealmente independientes. Justifique cada respuesta.

1. $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8, determine si las columnas de la matriz forman un conjunto linealmente independiente. Justifique sus respuestas.

5. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & -10 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, *a*) ¿para qué valores de h está $\mathbf{v}_3$ en Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y *b*) ¿para qué valores de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente *dependiente*? Justifique sus respuestas.

9. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 a 14, encuentre el valor o valores de h para los cuales los vectores son linealmente *dependientes*. Justifique sus respuestas.

11. $\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ h \\ 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ -9 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$

Por inspección, determine si los vectores en los ejercicios 15 a 20 son linealmente *independientes*. Justifique sus respuestas.

15. $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -8 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta con base en una cuidadosa lectura del texto.

21. *a*) Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial.

b) Si S es un conjunto linealmente dependiente, entonces cada vector es una combinación lineal de los otros vectores en S.

c) Las columnas de cualquier matriz de 4×5 son linealmente dependientes.

d) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes, y si $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ es linealmente dependiente, entonces $\mathbf{z}$ está en Gen $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

22. *a*) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes, y si $\mathbf{w}$ está en Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, entonces $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente dependiente.

b) Si tres vectores en $\mathbb{R}^3$ están en el mismo plano en $\mathbb{R}^3$, entonces son linealmente dependientes.

c) Si un conjunto contiene menos vectores que entradas en los vectores, entonces el conjunto es linealmente independiente.

d) Si un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto contiene más de n vectores.

En los ejercicios 23 a 26, describa las posibles formas escalonadas de la matriz. Utilice la notación del ejemplo 1 de la sección 1.2.

23. A es una matriz de 2×2 con columnas linealmente dependientes.

24. A es una matriz de 3×3 con columnas linealmente independientes.

25. A es una matriz de 4×2, $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$, y $\mathbf{a}_2$ no es múltiplo de $\mathbf{a}_1$.

26. A es una matriz de 4×3, $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$, tal que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{a}_3$ no está en Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

27. ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de 6×4 si sus columnas son linealmente independientes? ¿Por qué?

28. ¿Cuántas columnas pivote debe tener una matriz de 4×6 si sus columnas generan a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

29. Construya matrices A y B de 3×2 tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga una solución no trivial, pero $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga solamente la solución trivial.

30. *a*) Llene el espacio del siguiente enunciado: "Si A es una matriz de $m \times n$, entonces las columnas de A son linealmente independientes si y solo si A tiene ______ columnas pivote".

b) Explique por qué es verdadero el enunciado en *a*).

Los ejercicios 31 y 32 deberían resolverse *sin efectuar operaciones de fila*. [*Sugerencia:* Escriba $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como una ecuación vectorial].

31. A partir de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, observe que la tercera columna es la suma de las dos primeras. Encuentre una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

32. A partir de $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, observe que la primera columna menos la segunda multiplicada por 3 es igual a la tercera columna. Determine una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En los ejercicios 33 a 38 cada enunciado es verdadero (en todos los casos) o falso (para al menos un ejemplo). Si es falso, idee un ejemplo específico para demostrar que el enunciado no siempre es válido. Tal ejemplo se llama *contraejemplo* del enunciado. Si un enunciado es verdadero, dé una justificación. (Un ejemplo específico no puede explicar por qué un enunciado siempre es verdadero. Aquí es necesario realizar más trabajo que en los ejercicios 21 y 22).

33. Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$, y $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente dependiente.

34. Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

35. Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ están en $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ es linealmente dependiente.

36. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ están en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v}_3$ *no* es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

37. Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ también es linealmente dependiente.

38. Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^4$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ también es linealmente independiente. [*Sugerencia:* Piense en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + 0 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$].

39. Suponga que A es una matriz de $m \times n$ tal que para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene, a lo sumo, una solución.

Use la definición de independencia lineal para explicar por qué las columnas de A deben ser linealmente independientes.

40. Suponga que una matriz A de $m \times n$ tiene n columnas pivote. Explique por qué para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene, a lo sumo, una solución. [*Sugerencia:* Explique por qué $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no puede tener un número infinito de soluciones].

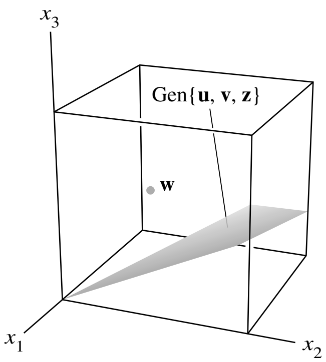
[**M**] En los ejercicios 41 y 42, utilice tantas columnas de A como sea posible para construir una matriz B tal que la ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tenga la solución trivial. Para comprobar su trabajo, resuelva $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

41. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 10 & 7 & -4 \\ -5 & -3 & -7 & -11 & 15 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & -7 & 23 & 4 & 15 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 12 & 10 & -6 & 8 & 4 & -14 \\ -7 & -6 & 4 & -5 & -7 & 9 \\ 9 & 9 & -9 & 9 & 9 & -18 \\ -4 & -3 & -1 & 0 & -8 & 1 \\ 8 & 7 & -5 & 6 & 1 & -11 \end{bmatrix}$

43. [**M**] Con A y B del ejercicio 41, seleccione una columna $\mathbf{v}$ de A que no se haya utilizado en la construcción de B y determine si $\mathbf{v}$ está en el conjunto generado por las columnas de B. (Describa sus cálculos).

44. [**M**] Repita el ejercicio 43 con las matrices A y B del ejercicio 42. Luego, dé una explicación del resultado, suponiendo que B se construyó de acuerdo con las especificaciones.



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Sí. En cada caso, ningún vector es múltiplo del otro. Por lo tanto, cada conjunto es linealmente independiente.
2. No. La observación en el problema de práctica 1, por sí misma, no dice nada sobre la independencia lineal de $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{z}\}$.
3. No. Cuando se comprueba la independencia lineal, por lo general es poco útil la idea de comprobar si un vector seleccionado es una combinación lineal de los demás. Puede ocurrir que el vector seleccionado no sea una combinación lineal de los otros y, aun así, el conjunto entero de vectores sea linealmente dependiente. En este problema de práctica, $\mathbf{w}$ no es una combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{z}$.
4. Sí, de acuerdo con el teorema 8. Existen más vectores (cuatro) que entradas (tres) en ellos.

1.8 INTRODUCCIÓN A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

La diferencia entre una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y la ecuación vectorial asociada $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ es tan solo cuestión de notación. Sin embargo, es posible encontrar una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en álgebra lineal (y en aplicaciones como gráficos generados por computadora y procesamiento de señales) que no esté directamente relacionada con combinaciones lineales de vectores. Esto sucede cuando se piensa en la matriz A como un objeto que "actúa" sobre un vector $\mathbf{x}$ multiplicándolo para producir un nuevo vector $A\mathbf{x}$.

Por ejemplo, en las ecuaciones

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad \text{y} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

se observa que la multiplicación por A transforma a $\mathbf{x}$ en $\mathbf{b}$, y transforma a $\mathbf{u}$ en el vector cero. Véase la figura 1.

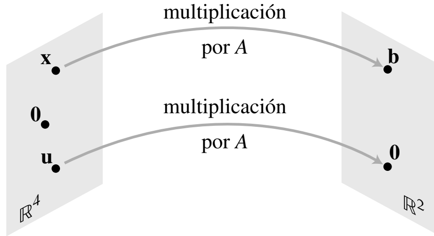


FIGURA 1 Transformación de vectores por medio de multiplicación matricial.

Desde este nuevo punto de vista, resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ equivale a encontrar todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que se transforman en el vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ como resultado de la "acción" de la multiplicación por A.

La correspondencia de $\mathbf{x}$ a $A\mathbf{x}$ es una *función* de un conjunto de vectores a otro. Este concepto generaliza la noción común de una función como una regla que transforma un número real en otro.

Una **transformación** (o **función** o **mapeo**) T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que asigna a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ un vector $T(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^m$. El conjunto $\mathbb{R}^n$ se llama el **dominio** de T, y $\mathbb{R}^m$ se llama el **codominio** de T. La notación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ indica que el dominio de T es $\mathbb{R}^n$ y que el codominio es $\mathbb{R}^m$. Para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, el vector $T(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^m$ es la **imagen** de $\mathbf{x}$ (bajo la acción de T). El conjunto de todas las imágenes $T(\mathbf{x})$ es el **rango** de T. Véase la figura 2.

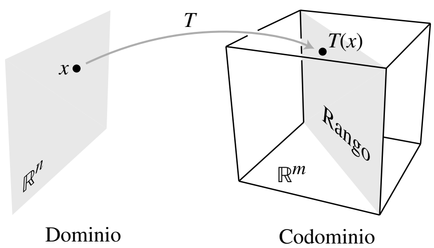
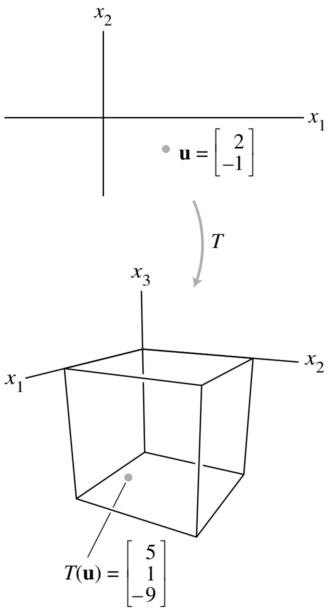


FIGURA 2 Dominio, codominio y rango de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Es muy importante la nueva terminología de esta sección porque un enfoque dinámico del producto matriz-vector es la clave para entender diversas ideas en álgebra lineal, y para construir modelos matemáticos de sistemas físicos que evolucionan en el tiempo. Estos *sistemas dinámicos* se analizarán en las secciones 1.10, 4.8 y 4.9, así como en el capítulo 5.

Transformaciones matriciales

Lo que resta de esta sección se centra en mapeos asociados con la multiplicación matricial. Para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x})$ se calcula como $A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $m \times n$. Para simplificar, algunas veces esta *transformación matricial* se denota como $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Observe que el dominio de T es $\mathbb{R}^n$ cuando A tiene n columnas, y el codominio de T es $\mathbb{R}^m$ cuando cada columna de A tiene m entradas. El rango de T es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A, porque cada imagen $T(\mathbf{x})$ es de la forma $A\mathbf{x}$.



EJEMPLO 1 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, de manera que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre $T(\mathbf{u})$, la imagen de $\mathbf{u}$ bajo la transformación T.

b) Encuentre una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$.

c) ¿Hay más de una $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$?

d) Determine si $\mathbf{c}$ está en el rango de la transformación T.

SOLUCIÓN

a) Calcule

$$T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

b) Resuelva $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ para $\mathbf{x}$. Es decir, resuelva $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Empleando el método analizado en la sección 1.4, reduzca por filas la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & -.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Así que $x_1 = 1.5$, $x_2 = -.5$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -.5 \end{bmatrix}$. La imagen de esta $\mathbf{x}$ bajo T es el vector $\mathbf{b}$ dado.

c) Cualquier $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T es $\mathbf{b}$ debe satisfacer la ecuación (1). A partir de (2), es evidente que la ecuación (1) tiene una solución única, por lo que hay exactamente una $\mathbf{x}$ cuya imagen es $\mathbf{b}$.

d) El vector $\mathbf{c}$ está en el rango de T si $\mathbf{c}$ es la imagen de alguna $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$, es decir, si $\mathbf{c} = T(\mathbf{x})$ para alguna $\mathbf{x}$. Esto es justamente otra manera de preguntar si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es consistente. Para encontrar la respuesta, reduzca por filas la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 14 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

La tercera ecuación, $0 = -35$, indica que el sistema es inconsistente. De manera que $\mathbf{c}$ *no* está en el rango de T. ■

La pregunta del ejemplo 1*c*) es un problema de *unicidad* para un sistema de ecuaciones lineales, traducido aquí al lenguaje de transformaciones lineales: ¿Es $\mathbf{b}$ la imagen de una *única* $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$? De manera similar, el ejemplo 1*d*) es un problema de *existencia*: *¿Existe* una $\mathbf{x}$ cuya imagen sea $\mathbf{c}$?

Las siguientes dos transformaciones matriciales se pueden visualizar geométricamente. Ambas refuerzan el enfoque dinámico de una matriz como algo que transforma vectores en otros vectores. La sección 2.7 incluye otros interesantes ejemplos relacionados con los gráficos generados por computadora.

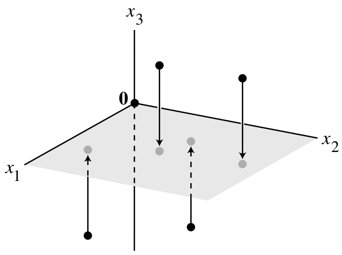


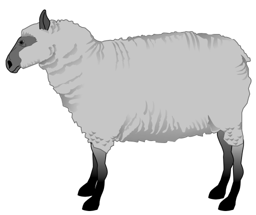
FIGURA 3
Una transformación proyección.

EJEMPLO 2 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ *proyecta* puntos de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano x_1x_2 porque

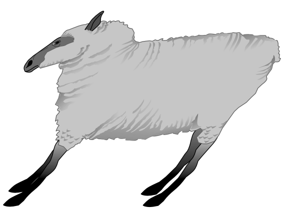
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Véase la figura 3. ■

EJEMPLO 3 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. La transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ se llama una **transformación de trasquilado**. Se puede demostrar que si T actúa sobre cada punto del cuadrado 2×2 que se ilustra en la figura 4, entonces el conjunto de imágenes forma el paralelogramo sombreado. La idea fundamental es demostrar que T mapea segmentos de recta sobre segmentos de recta (como se muestra en el ejercicio 27) y después comprobar que los vértices del cuadrado se mapean sobre los vértices del paralelogramo. Por ejemplo, la imagen del punto $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, y la imagen de $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$. T deforma el cuadrado como si la parte superior de este se empujara hacia la derecha manteniendo fija la base. La transformación de trasquilado se presenta en física, geología y cristalografía. ■



borrego



borrego deformado por una transformación de trasquilado

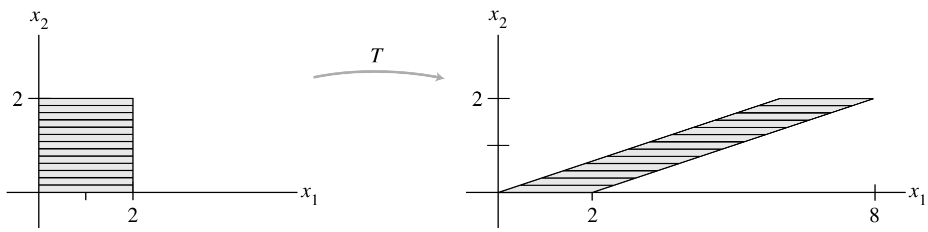


FIGURA 4 Una transformación de trasquilado.

Transformaciones lineales

El teorema 5 de la sección 1.4 establece que si A es de $m \times n$, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ tiene las propiedades

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} \quad \text{y} \quad A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$$

para toda $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ y todos los escalares c. Estas propiedades, expresadas en notación funcional, identifican a la más importante clase de transformaciones en álgebra lineal.

DEFINICIÓN

Una transformación (o mapeo) T es **lineal** si:

i. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todas las $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en el dominio de T;

ii. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ para todos los escalares c y para todas las $\mathbf{u}$ en el dominio de T.

Cada transformación matricial es una transformación lineal. En los capítulos 4 y 5 se analizarán importantes ejemplos de transformaciones lineales que no son transformaciones matriciales.

Las transformaciones lineales *preservan las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar*. La propiedad **i** dice que el resultado $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ de primero sumar **u** y **v** en $\mathbb{R}^n$ y después aplicar T es lo mismo que primero aplicar T a **u** y **v**, y luego sumar $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ en $\mathbb{R}^m$. Esas dos propiedades conducen fácilmente a los siguientes útiles resultados.

Si T es una transformación lineal, entonces

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

y

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) \tag{4}$$

para todos los vectores **u**, **v** en el dominio de T y para todos los escalares c, d.

La propiedad (3) se deriva de la condición **ii** en la definición, porque $T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. La propiedad (4) requiere tanto de **i** como de **ii**:

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = T(c\mathbf{u}) + T(d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

Observe que *si una transformación satisface la ecuación (4) para cualesquiera* **u**, **v** *y* c, d, *entonces debe ser lineal*. (Establezca $c = d = 1$ para preservación de la suma, y $d = 0$ para preservación de la multiplicación escalar). La aplicación repetida de (4) produce una útil generalización:

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_pT(\mathbf{v}_p) \tag{5}$$

En física e ingeniería, la ecuación (5) se conoce como *principio de superposición*. Piense que $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p$ son señales que entran a un sistema y $T(\mathbf{v}_1),\ldots,T(\mathbf{v}_p)$ son las respuestas de ese sistema a las señales. El sistema satisface el principio de superposición si para cualquier entrada expresada como una combinación lineal de tales señales, la respuesta del sistema es *la misma* combinación lineal de las respuestas a las señales individuales. En el capítulo 4 retomaremos esta idea.

EJEMPLO 4 Dado un escalar r, defina $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$. T se llama una **contracción** cuando $0 \le r \le 1$, y una **dilatación** cuando $r > 1$. Sea $r = 3$, y demuestre que T es una transformación lineal.

SOLUCIÓN Sean **u**, **v** en $\mathbb{R}^2$ y sean c, d escalares. De esta forma,

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) &= 3(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) && \text{Definición de } T \\ &\left.\begin{aligned} &= 3c\mathbf{u} + 3d\mathbf{v} \\ &= c(3\mathbf{u}) + d(3\mathbf{v}) \end{aligned}\right\} && \text{Aritmética vectorial} \\ &= cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Así, T es una transformación lineal porque satisface (4). Véase la figura 5. ■

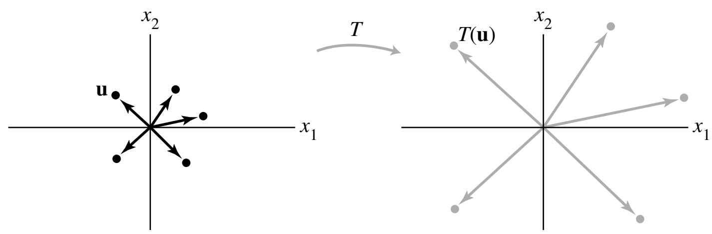


FIGURA 5 Una transformación de dilatación.

EJEMPLO 5 Defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Encuentre las imágenes bajo T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Observe que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, evidentemente, es igual a $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. En la figura 6 es claro que T hace girar a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ en el sentido antihorario, en torno al origen, en un ángulo de 90°. De hecho, T transforma el paralelogramo entero determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en el determinado por $T(\mathbf{u})$y $T(\mathbf{v})$. (Véase el ejercicio 28). ■

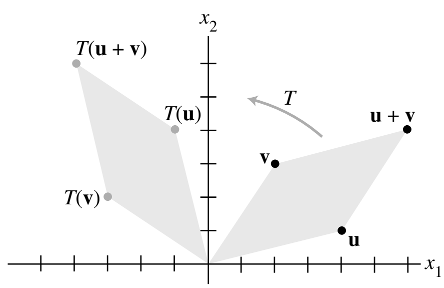


FIGURA 6 Una transformación de rotación.

El ejemplo final no es geométrico, sino que muestra cómo un mapeo lineal puede transformar un tipo de datos en otro.

EJEMPLO 6 Una compañía fabrica dos productos, B y C. Utilizando los datos del ejemplo 7 de la sección 1.3, construya una matriz de "costo unitario", $U = [\mathbf{b} \quad \mathbf{c}]$, cuyas columnas describan los "costos por dólar de producción" para ambos bienes:

$$\begin{array}{cc} & \text{Producto} \\ & \begin{array}{cc} \text{B} & \text{C} \end{array} \\ U = & \begin{bmatrix} .45 & .40 \\ .25 & .35 \\ .15 & .15 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Materiales} \\ \text{Mano de obra} \\ \text{Gastos indirectos} \end{array}$$

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ el vector de "producción", correspondiente a x_1 dólares del producto B y a x_2 dólares del producto C, y defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mediante

$$T(\mathbf{x}) = U\mathbf{x} = x_1\begin{bmatrix} .45 \\ .25 \\ .15 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} .40 \\ .30 \\ .15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Costo total de materiales} \\ \text{Costo total de mano de obra} \\ \text{Costo total de gastos indirectos} \end{bmatrix}$$

El mapeo T transforma una lista de cantidades de producción (medidas en dólares) en una lista de costos totales. La linealidad de este mapeo se refleja de dos maneras:

1. Si la producción se incrementa en un factor de, por ejemplo, 4, de $\mathbf{x}$ a $4\mathbf{x}$, entonces los costos se incrementarán por el mismo factor, de $T(\mathbf{x})$ a $4T(\mathbf{x})$.

2. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores de producción, entonces el vector de costo total asociado con la producción combinada $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es precisamente la suma de los vectores de costo $T(\mathbf{x})$ y $T(\mathbf{y})$. ■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Suponga que $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para alguna matriz A y para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^5$. ¿Cuántas filas y columnas tiene A?
2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dé una descripción geométrica de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.
3. El segmento de recta de $\mathbf{0}$ a un vector $\mathbf{u}$ es el conjunto de puntos de la forma $t\mathbf{u}$, donde $0 \le t \le 1$. Demuestre que una transformación lineal T mapea este segmento en el segmento entre $\mathbf{0}$ y $T(\mathbf{u})$.

1.8 EJERCICIOS

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, y defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   Encuentre las imágenes bajo T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

   Defina $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Encuentre $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathrm{v})$.

En los ejercicios 3 a 6, con T definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, encuentre un vector $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$, y analice si $\mathbf{x}$ es único.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \\ 10 \end{bmatrix}$

7. Sea A una matriz de 6×5. ¿Qué valores de a y b permiten definir $T : \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?

8. ¿Cuántas filas y columnas debe tener una matriz A para poder definir un mapeo de $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^7$ con la regla $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$?

Para los ejercicios 9 y 10, encuentre todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que son mapeados en el vector cero por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para la matriz A dada.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

11. Sean $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 9. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

12. Sean $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, y A la matriz del ejercicio 10. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

En los ejercicios 13 a 16, utilice un sistema de coordenadas rectangulares para graficar $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, y sus imágenes bajo la transformación T dada. (Elabore un esquema grande y separado para cada ejercicio). Describa geométricamente lo que hace T a cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$.

13. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

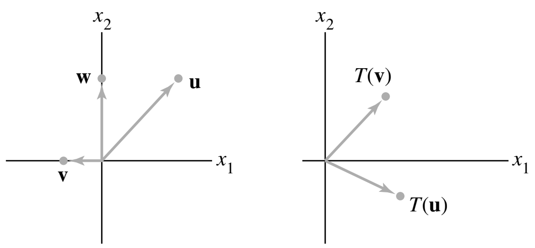
14. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

15. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

16. $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

17. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y mapea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Considerando el hecho de que T es lineal, encuentre las imágenes bajo T de $2\mathbf{u}$, $3\mathbf{v}$ y $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

18. La figura muestra los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, junto con las imágenes $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ bajo la acción de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Copie esta figura cuidadosamente, y dibuje la imagen de $T(\mathbf{w})$ con la mayor exactitud posible. [*Sugerencia:* Primero, escriba $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.]



19. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

20. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{x}$ en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Encuentre una matriz A tal que $T(\mathbf{x})$ sea $A\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

En los ejercicios 21 y 22, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

21. *a*) Una transformación lineal es un tipo especial de función.

b) Si A es una matriz de 3×5, y T es una transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces el dominio de T es $\mathbb{R}^3$.

c) Si A es una matriz de $m \times n$, entonces el rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es $\mathbb{R}^m$.

d) Cada transformación lineal es una transformación matricial.

e) Una transformación T es lineal si y solo si

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

para cualesquiera $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en el dominio de T y para todos los escalares c_1 y c_2.

22. *a*) El rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

b) Cada transformación matricial es una transformación lineal.

c) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y si $\mathbf{c}$ está en $\mathbb{R}^m$, entonces una pregunta de unicidad es: "¿Está $\mathbf{c}$ en el rango de T?".

d) Una transformación lineal preserva las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar.

e) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ siempre mapea el origen de $\mathbb{R}^n$ al origen de $\mathbb{R}^m$.

23. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = mx + b$.

a) Demuestre que f es una transformación lineal cuando $b = 0$.

b) Encuentre una propiedad de una transformación lineal que se viole cuando $b \neq 0$.

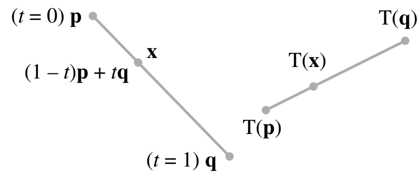
c) ¿Por qué f se llama una función lineal?

24. Una *transformación afín* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene la forma $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde A es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^m$. Demuestre que T *no* es una transformación lineal cuando $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. (Las transformaciones afines son importantes en los gráficos generados por computadora).

25. Dados $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^n$, la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$ tiene la ecuación paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$. Demuestre que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mapea esta recta sobre otra recta o sobre un solo punto (una *recta degenerada*).

26. *a*) Demuestre que la recta que pasa por los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir en la forma paramétrica $\mathbf{x} = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$. (Consulte la figura de los ejercicios 21 y 22 de la sección 1.5).

b) El segmento de recta de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ es el conjunto de puntos de la forma $(1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q}$ para $0 \leq t \leq 1$ (como que se muestra en la figura de abajo). Demuestre que una transformación lineal T mapea este segmento de recta sobre un segmento de recta o sobre un solo punto.



27. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$, y sea P el plano que pasa por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$. La ecuación paramétrica de P es $\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ (con s, t en $\mathbb{R}$). Demuestre que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mapea P sobre un plano a través de $\mathbf{0}$, o sobre una recta que pasa por $\mathbf{0}$, o justo sobre el origen en $\mathbb{R}^3$. ¿Qué se puede decir acerca de $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ para que la imagen del plano P sea un plano?

28. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Es posible demostrar que el conjunto P de todos los puntos en el paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tiene la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, para $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Explique por qué la imagen, bajo la transformación T, de un punto en P está en el paralelogramo determinado por $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

29. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que refleja cada punto a través del eje x_2. Elabore dos esquemas semejantes a la figura 6, que ilustren las propiedades **i** y **ii** de una transformación lineal.

30. Suponga que los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ generan a $\mathbb{R}^n$, y que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal. Considere que $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ para $i = 1, \ldots, p$. Demuestre que T es la transformación cero. Es decir, demuestre que si $\mathbf{x}$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^n$, entonces $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

31. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^n$. Explique por qué el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ es linealmente dependiente.

En los ejercicios 32 a 36, los vectores columna están escritos como filas, como $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, y $T(\mathbf{x})$ se escribe como $T(x_1, x_2)$.

32. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2|x_2|, x_1 - 4x_2)$ no es lineal.

33. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3, 2x_1 - 5x_2)$ no es lineal.

34. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación que refleja a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a través del plano $x_3 = 0$ sobre $T(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, -x_3)$. Demuestre que T es una transformación lineal. [Para algunas ideas, véase el ejemplo 4].

35. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación que proyecta a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ sobre el plano $x_2 = 0$, de manera que $T(\mathbf{x}) = (x_1, 0, x_3)$. Demuestre que T es una transformación lineal.

36. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Suponga que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Demuestre que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. [*Sugerencia:* Considere el hecho de que $c_1T(\mathbf{u}) + c_2T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para algunos pesos c_1 y c_2, sin que ambos sean iguales a cero].

[**M**] En los ejercicios 37 y 38, las matrices determinan una transformación lineal T. Encuentre todas las $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

37. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 \\ -7 & 7 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 3 \\ -9 & 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

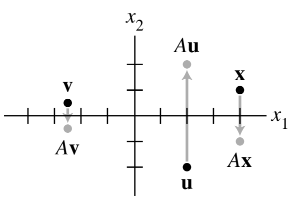
38. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 & 0 \\ 5 & -8 & 7 & 4 \\ 6 & -8 & 6 & 4 \\ 9 & -7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

39. [**M**] Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y sea A la matriz del ejercicio 37. ¿Está $\mathbf{b}$ en el rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? Si es así, obtenga una $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo la transformación sea $\mathbf{b}$.

40. [**M**] Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$ y sea A la matriz del ejercicio 38. ¿Está $\mathbf{b}$ en el rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? Si así es, encuentre una $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo la transformación sea $\mathbf{b}$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. A debe tener cinco columnas para que $A\mathbf{x}$ esté definido. A debe tener dos filas para que el codominio de T esté en $\mathbb{R}^2$.
2. Dibuje algunos puntos aleatorios (vectores) sobre papel milimétrico para ver qué ocurre. Un punto como (4, 1) se mapea en (4, −1). La transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ refleja los puntos a través del eje x (o eje x_1).
3. Sea $\mathbf{x} = t\mathbf{u}$ para alguna t tal que $0 \le t \le 1$. Como T es lineal, entonces $T(t\mathbf{u}) = tT(\mathbf{u})$, que es un punto sobre el segmento de línea entre $\mathbf{0}$ y $T(\mathbf{u})$.



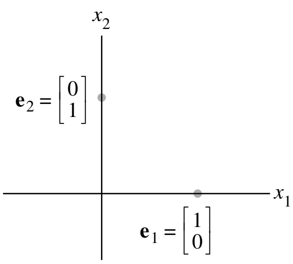
La transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

1.9 MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Siempre que una transformación lineal T se origina geométricamente o se describe con palabras, surge el deseo de tener una "fórmula" para $T(\mathbf{x})$. El análisis que sigue muestra que cada transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ en realidad es una transformación matricial $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, y que importantes propiedades de T están íntimamente relacionadas con propiedades de A. La clave para encontrar A es observar que T está plenamente determinada por su acción sobre las columnas de la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

EJEMPLO 1 Las columnas de $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suponga que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Sin otra información adicional, encuentre una fórmula para la imagen de una $\mathbf{x}$ arbitraria en $\mathbb{R}^2$.

SOLUCIÓN Escriba

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \tag{1}$$

Como T es una transformación *lineal*,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= x_1 T(\mathbf{e}_1) + x_2 T(\mathbf{e}_2) \qquad (2) \\ &= x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

El paso de la ecuación (1) a la ecuación (2) explica por qué el conocimiento de $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$ es suficiente para determinar $T(\mathbf{x})$ para cualquier $\mathbf{x}$. Además, ya que (2) expresa a $T(\mathbf{x})$ como una combinación lineal de vectores, podemos colocar esos vectores en las columnas de una matriz A y así escribir (2) como

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}$$

TEOREMA 10

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Así, existe una única matriz A tal que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n$$

De hecho, A es la matriz de $m \times n$ cuya j-ésima columna es el vector $T(\mathbf{e}_j)$, donde $\mathbf{e}_j$ es la j-ésima columna de la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad \cdots \quad T(\mathbf{e}_n)] \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN Escriba $\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, y utilice la linealidad de T para calcular

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1T(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_nT(\mathbf{e}_n) \\ &= \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x} \end{aligned}$$

En el ejercicio 33 nos ocuparemos de la unicidad de A. ■

La matriz A en (3) se llama **matriz estándar para la transformación lineal** T.

Ahora se sabe que cada transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ puede verse como una transformación matricial, y viceversa. El término *transformación lineal* se enfoca sobre una propiedad de un mapeo, mientras que la *transformación matricial* describe cómo se implementa tal mapeo, lo que se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Encuentre la matriz estándar A para la transformación de dilatación $T(\mathbf{x}) = 3\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$.

SOLUCIÓN Escriba

$$T(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

EJEMPLO 3 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que hace girar a cada punto de $\mathbb{R}^2$ alrededor del origen un ángulo φ, en sentido antihorario, si φ es positivo. Geométricamente, se podría demostrar que esta transformación es lineal. (Véase la figura 6 de la sección 1.8). Encuentre la matriz estándar A de esta transformación.

SOLUCIÓN $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ gira a $\begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi \end{bmatrix}$, y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ gira a $\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$. Véase la figura 1. Por el teorema 10,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

El ejemplo 5 de la sección 1.8 es un caso especial de esta transformación, con $\varphi = \pi/2$. ■

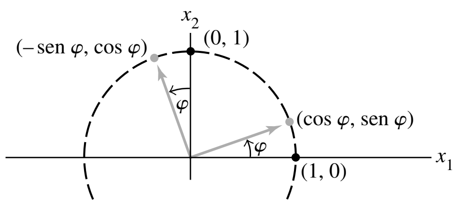


FIGURA 1 Una transformación de rotación.

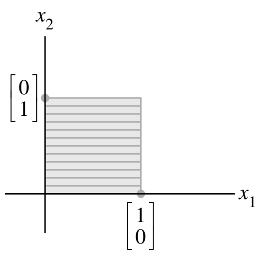


FIGURA 2 El cuadrado unitario.

Transformaciones lineales geométricas de $\mathbb{R}^2$

Los ejemplos 2 y 3 ilustran transformaciones lineales que se describen geométricamente. Las tablas 1 a 4 muestran otras transformaciones lineales geométricas comunes del plano. Como las transformaciones son lineales, estas quedan completamente determinadas por su acción sobre las columnas de I_2. En vez de solo mostrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$, las tablas indican cómo una transformación afecta a un cuadrado unitario (figura 2).

Es posible construir otras transformaciones diferentes a partir de las listadas en las tablas 1 a 4; basta aplicar una transformación tras otra. Por ejemplo, un trasquilado horizontal podría ir seguido de una reflexión en el eje x_2. La sección 2.1 mostrará que tal *composición* de transformaciones lineales es lineal. (También, véase el ejercicio 34).

Preguntas de existencia y unicidad

El concepto de transformación lineal ofrece una nueva manera de entender las preguntas de existencia y unicidad que se plantearon antes. Las dos definiciones que aparecen después de las tablas 1 a 4 aportan una terminología adecuada para las transformaciones.

TABLA 1 Reflexiones

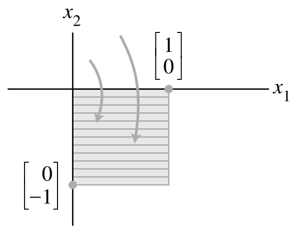
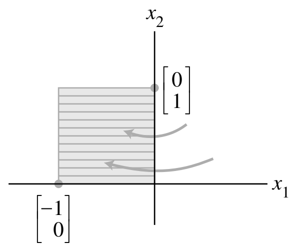
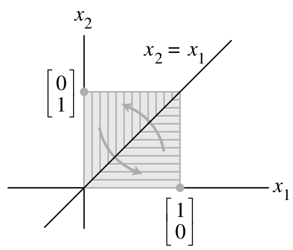
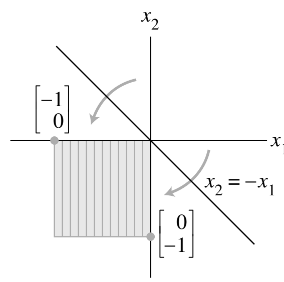
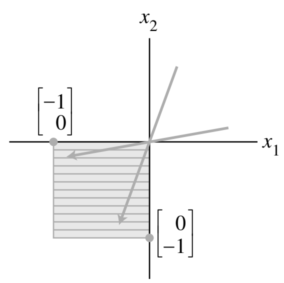
Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Reflexión a través del eje x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflexión a través del eje x_2		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflexión a través de la recta $x_2 = x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexión a través de la recta $x_2 = -x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflexión a través del origen		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

TABLA 2 Contracciones y expansiones

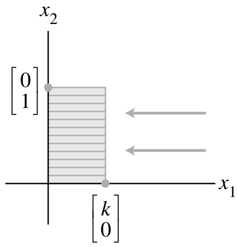
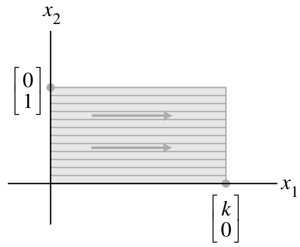
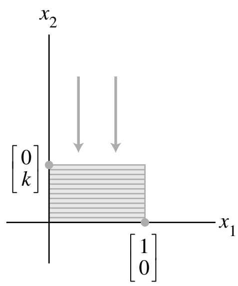
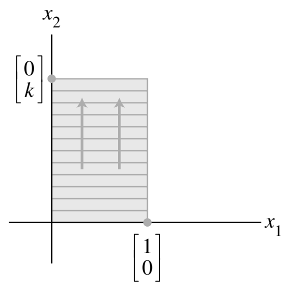
Transformación	Imagen del cuadrado unitario		Matriz estándar
Contracción y expansión horizontal	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Contracción y expansión vertical	 $0 < k < 1$	 $k > 1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

TABLA 3 Trasquilados

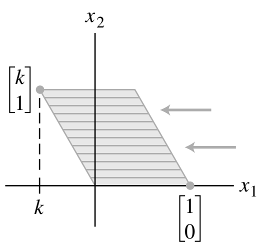
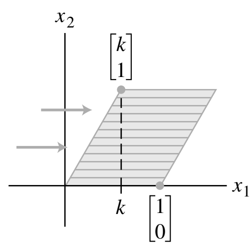
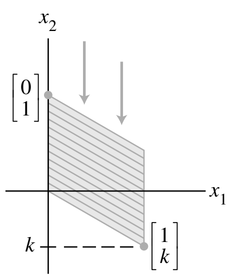
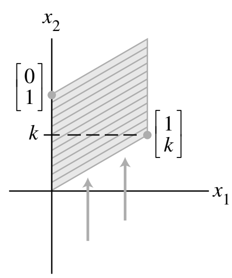
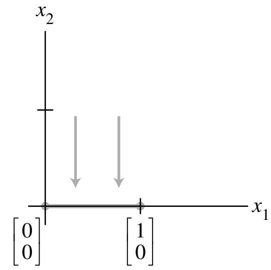
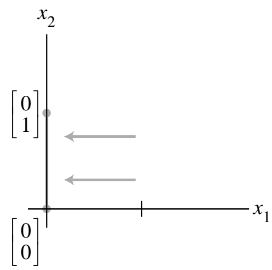
Transformación	Imagen del cuadrado unitario		Matriz estándar
Trasquilado horizontal	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Trasquilado vertical	 $k < 0$	 $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

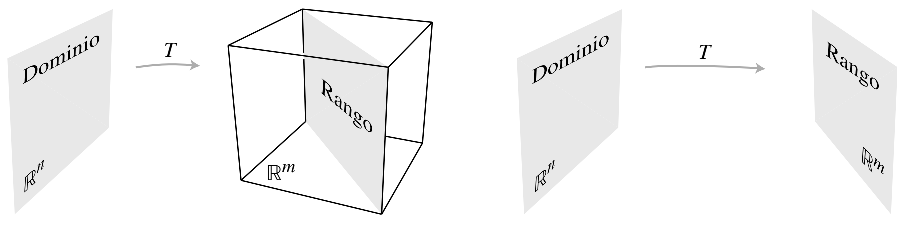
TABLA 4 Proyecciones

Transformación	Imagen del cuadrado unitario	Matriz estándar
Proyección sobre el eje x_1		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Proyección sobre el eje x_2		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

DEFINICIÓN

Se dice que un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **sobre** $\mathbb{R}^m$ si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de *al menos una* $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

De manera equivalente, T es sobre $\mathbb{R}^m$ cuando todo el rango de T es codominio $\mathbb{R}^m$. Es decir, T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si, para cada $\mathbf{b}$ en el codominio $\mathbb{R}^m$, existe al menos una solución de $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. "¿$T$ mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$?" es una pregunta de existencia. El mapeo T *no* es sobre cuando existe alguna $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ para la cual la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ no tiene solución. Véase la figura 3.



T *no* es sobre $\mathbb{R}^m$ $\qquad$ T *es* sobre $\mathbb{R}^m$

FIGURA 3 ¿El rango de T es todo $\mathbb{R}^m$?

DEFINICIÓN

Se dice que un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **uno a uno** si cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de *a lo sumo una* $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.

De manera equivalente, T es uno a uno si, para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tiene una única solución o ninguna solución. "¿T es uno a uno?" es una pregunta de unicidad. El mapeo T *no* es uno a uno cuando algún $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ es la imagen de más de un vector en $\mathbb{R}^n$. Si no existe tal $\mathbf{b}$, entonces T es uno a uno. Véase la figura 4.

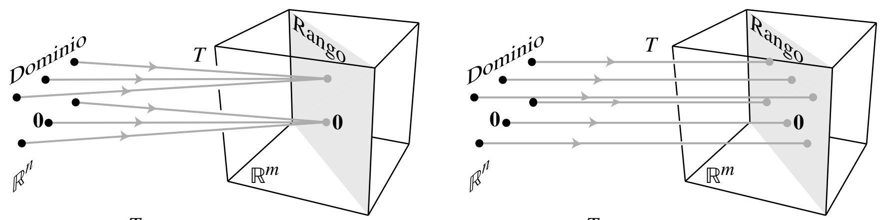


FIGURA 4 ¿Cada **b** es la imagen de a lo sumo un vector?

Las transformaciones de proyección que se ilustran en la tabla 4 *no son* uno a uno y *no* mapean $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Las transformaciones en las tablas 1, 2 y 3 son uno a uno *y* sí mapean $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^2$. Otras posibilidades se muestran en los dos ejemplos siguientes.

El ejemplo 4 y los teoremas que siguen muestran cómo las propiedades funcionales de ser un mapeo sobre y uno a uno están relacionadas con importantes conceptos estudiados antes en este capítulo.

EJEMPLO 4 Sea T la transformación lineal cuya matriz estándar es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

¿T mapea $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}^3$? ¿T es un mapeo uno a uno?

SOLUCIÓN Como A está en forma escalonada, podemos ver a la vez que A tiene una posición pivote en cada fila. De acuerdo con el teorema 4 de la sección 1.4, para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente. En otras palabras, la transformación lineal T mapea $\mathbb{R}^4$ (su dominio) sobre $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, ya que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una variable libre (porque hay cuatro variables y solamente tres variables básicas), cada $\mathbf{b}$ es la imagen de más de una $\mathbf{x}$. Es decir, T *no es* uno a uno. ■

TEOREMA 11

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y solo si la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial.

DEMOSTRACIÓN Como T es lineal, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Si T es uno a uno, entonces la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene a lo sumo una solución y, por lo tanto, solo la solución trivial. Si T no es uno a uno, entonces existe una $\mathbf{b}$ que es la imagen de al menos dos diferentes vectores en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Es decir, $T(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ y $T(\mathbf{v}) = \mathbf{b}$. Pero, como T es lineal,

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

El vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ no es cero porque $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. En consecuencia, la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene más de una solución. Así, las dos condiciones del teorema son ambas verdaderas o ambas son falsas. ■

TEOREMA 12

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y sea A su matriz estándar. De esta forma,

a) T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si y solo si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$;

b) T es uno a uno si y solo si las columnas de A son linealmente independientes.

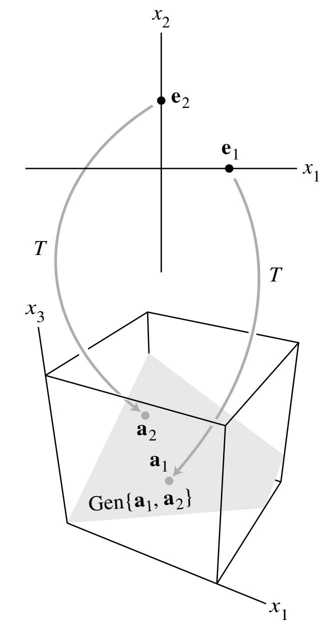
DEMOSTRACIÓN

a) De acuerdo con el teorema 4 de la sección 1.4, las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$ si y solo si para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente; en otras palabras, si y solo si para cada $\mathbf{b}$, la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución. Esto es cierto si y solo si T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$.

b) Las ecuaciones $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son iguales excepto por la notación. Así, de acuerdo con el teorema 11, T es uno a uno si y solo si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Esto ocurre si y solo si las columnas de A son linealmente independientes, como ya se indicó en el enunciado (3) del recuadro en la sección 1.7. ■

El enunciado *a*) del teorema 12 es equivalente al enunciado "T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si y solo si cada vector en $\mathbb{R}^m$ es una combinación lineal de las columnas de A". Véase el teorema 4 de la sección 1.4

En el siguiente ejemplo y en algunos ejercicios posteriores, los vectores columna están escritos en filas, como $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, mientras que $T(\mathbf{x})$ se escribe como $T(x_1, x_2)$ en vez de emplear la manera más formal $T((x_1, x_2))$.



La transformación T no es sobre $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 5 Sea $T(x_1, x_2) = (3x_1 + x_2, 5x_1 + 7x_2, x_1 + 3x_2)$. Demuestre que T es una transformación lineal uno a uno. ¿T mapea $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}^3$?

SOLUCIÓN Cuando $\mathbf{x}$ y $T(\mathbf{x})$ se escriben como vectores columna, es posible determinar por inspección la matriz estándar de T, visualizando el cálculo fila-vector de cada entrada en $A\mathbf{x}$.

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Así, T es claramente una transformación lineal; su matriz estándar A se muestra en (4). Las columnas de A son linealmente independientes porque no son múltiplos entre sí. De acuerdo con el teorema 12*b*), T es uno a uno. Para determinar si T es sobre $\mathbb{R}^3$, examine el espacio generado por las columnas de A. Como A es de 3×2, las columnas de A generan a $\mathbb{R}^3$ si y solo si A tiene 3 posiciones pivote, de acuerdo con el teorema 4. Esto es imposible, ya que A solo tiene 2 columnas. Así, las columnas de A no generan a $\mathbb{R}^3$, y la transformación lineal asociada no es sobre $\mathbb{R}^3$. ■

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación que primero efectúa un trasquilado horizontal que mapea $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_2 - .5\mathbf{e}_1$ (pero deja inalterado a $\mathbf{e}_1$), y después refleja el resultado a través del eje x_2. Suponiendo que T es lineal, encuentre su matriz estándar. [*Sugerencia:* Determine la ubicación final de las imágenes de $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$].

1.9 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 10, suponga que T es una transformación lineal. Encuentre la matriz estándar de T.

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ y $T(\mathbf{e}_2) = (-5, 2, 0, 0)$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

2. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{e}_1) = (1, 4)$, $T(\mathbf{e}_2) = (-2, 9)$ y $T(\mathbf{e}_3) = (3, -8)$, donde $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ son las columnas de la matriz identidad de 3×3.

3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de trasquilado vertical que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, pero deja inalterado a $\mathbf{e}_2$.

4. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de trasquilado horizontal que no altera a $\mathbf{e}_1$ y mapea $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1$.

5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hace girar a los puntos (en torno al origen) a través de un ángulo de $\pi/2$ radianes (en sentido antihorario).

6. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hace girar a los puntos (en torno al origen) a través de un ángulo de $-3\pi/2$ radianes (en el sentido horario).

7. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero hace girar puntos a través de $-3\pi/4$ radianes (en el sentido horario) y después los refleja a través del eje horizontal x_1. [*Sugerencia:* Considere que $T(\mathbf{e}_1) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$].

8. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero realiza una transformación de trasquilado horizontal que transforma a $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1$ (dejando inalterado a $\mathbf{e}_1$) y después refleja los puntos a través de la recta $x_2 = -x_1$.

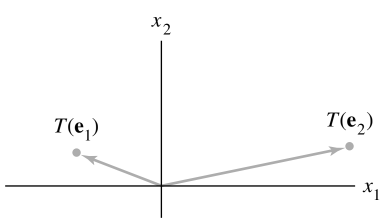
9. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero refleja los puntos a través del eje horizontal x_1 y luego los hace girar $-\pi/2$ radianes.

10. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero refleja los puntos a través del eje horizontal x_1 y luego los refleja a través de la recta $x_2 = x_1$.

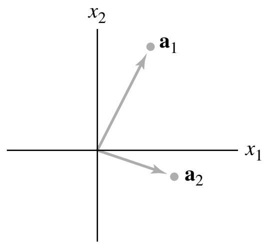
11. Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero refleja los puntos a través del eje x_1 y luego los refleja a través del eje x_2. Demuestre que T también se puede describir como una transformación lineal que hace girar los puntos en torno al origen. ¿Cuál es el ángulo de esa rotación?

12. Demuestre que la transformación del ejercicio 10 es meramente una rotación en torno al origen. ¿Cuál es el ángulo de rotación?

13. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1)$ y $T(\mathbf{e}_2)$ son los vectores que se muestran en la figura. Con base en la figura, dibuje el vector $T(2, 1)$.



14. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con matriz estándar $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$, donde $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ se muestran en la figura, en la parte superior de la columna 2. Utilizando la figura, dibuje la imagen de $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ bajo la transformación T.



En los ejercicios 15 y 16, llene las entradas faltantes de la matriz, suponiendo que la ecuación es válida para todos los valores de las variables.

15. $\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ x_1 - x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 17 a 20, demuestre que T es una transformación lineal encontrando una matriz que implemente el mapeo. Observe que $x_1, x_2, \ldots$ no son vectores, sino entradas en vectores.

17. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_2 + x_4, x_2 - x_4)$

18. $T(x_1, x_2) = (x_1 + 4x_2, 0, x_1 - 3x_2, x_1)$

19. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

20. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + 4x_3 - 2x_4$ (Observe que: $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$)

21. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Encuentre $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

22. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2)$. Encuentre $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (0, -1, -4)$.

En los ejercicios 23 y 24, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

23. *a*) Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está completamente determinada por sus efectos sobre las columnas de la matriz identidad de $n \times n$.

b) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hace girar los vectores un ángulo φ en torno al origen, entonces T es una transformación lineal.

c) Cuando dos transformaciones lineales se realizan una tras otra, el efecto combinado no siempre es una transformación lineal.

d) Un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es sobre $\mathbb{R}^m$ si cada vector $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ se mapea sobre algún vector en $\mathbb{R}^m$.

e) Si A es una matriz de 3×2, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ no puede ser uno a uno.

24. *a*) Si A es una matriz de 4×3, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^4$.

b) Cada transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una transformación matricial.

c) Las columnas de la matriz estándar para una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ son las imágenes de las columnas de la matriz identidad de $n \times n$ bajo T.

d) Un mapeo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es uno a uno si cada vector en $\mathbb{R}^n$ se mapea sobre un único vector en $\mathbb{R}^m$.

e) La matriz estándar de una transformación de trasquilado horizontal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ tiene la forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, donde a y b son ± 1.

En los ejercicios 25 a 28, determine si la transformación lineal especificada es *a*) uno a uno o *b*) sobre. Justifique cada respuesta.

25. La transformación en el ejercicio 17.

26. La transformación en el ejercicio 2.

27. La transformación en el ejercicio 19.

28. La transformación en el ejercicio 14.

En los ejercicios 29 y 30, describa las posibles formas escalonadas de la matriz estándar para una transformación lineal T. Utilice la notación del ejemplo 1 de la sección 1.2

29. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es uno a uno. **30.** $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es sobre.

31. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y sea A su matriz estándar. Complete el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T es uno a uno si y solo si A tiene _____ columnas pivote". Explique por qué el enunciado es verdadero. [*Sugerencia:* Consulte los ejercicios de la sección 1.7].

32. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y sea A su matriz estándar. Complete el siguiente enunciado para hacerlo verdadero: "T mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^m$ si y solo si A tiene _______ columnas pivote". Encuentre algunos teoremas que expliquen por qué el enunciado es verdadero.

33. Verifique la unicidad de A en el teorema 10. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal tal que $T(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ para alguna matriz B de $m \times n$. Demuestre que si A es la matriz estándar de T, entonces $A = B$. [*Sugerencia:* Demuestre que A y B tienen las mismas columnas].

34. Sean $S : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformaciones lineales. Demuestre que el mapeo $\mathbf{x} \mapsto T(S(\mathbf{x}))$ es una transformación lineal (de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}^m$). [*Sugerencia:* Calcule $T(S(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}))$ para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^p$ y escalares c y d. Justifique cada paso del cálculo, y explique por qué este proceso conduce a la conclusión deseada].

35. Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mapea $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^m$, ¿es posible encontrar una relación entre m y n? Si T es uno a uno, ¿qué se puede decir acerca de m y n?

36. ¿Por qué la pregunta "¿La transformación lineal T es sobre?" es una pregunta de existencia?

[**M**] En los ejercicios 37 a 40, sea T la transformación lineal cuya matriz estándar se presenta. En los ejercicios 37 y 38, determine si T es un mapeo uno a uno. En los ejercicios 39 y 40, determine si T mapea $\mathbb{R}^5$ sobre $\mathbb{R}^5$. Justifique sus respuestas.

37. $\begin{bmatrix} -5 & 6 & -5 & -6 \\ 8 & 3 & -3 & 8 \\ 2 & 9 & 5 & -12 \\ -3 & 2 & 7 & -12 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 9 & -9 \\ 5 & 6 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & 0 & 7 \\ -6 & -6 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & -8 & 5 & 12 & -8 \\ -7 & 10 & -8 & -9 & 14 \\ 3 & -5 & 4 & 2 & -6 \\ -5 & 6 & -6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 9 & 43 & 5 & 6 & -1 \\ 14 & 15 & -7 & -5 & 4 \\ -8 & -6 & 12 & -5 & -9 \\ -5 & -6 & -4 & 9 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 3 & 11 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

WEB

Observe lo que ocurre a $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$. Véase la figura 5. Primero, $\mathbf{e}_1$ no sufre alteraciones por el trasquilado y después se refleja en $-\mathbf{e}_1$. Así, $T(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1$. Segundo, $\mathbf{e}_2$ va a $\mathbf{e}_2 - .5\mathbf{e}_1$ por

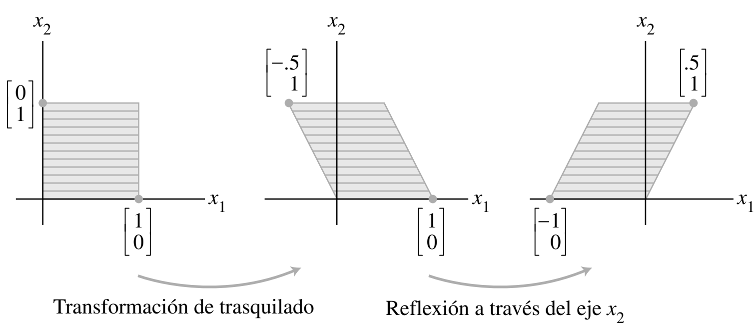


FIGURA 5 Composición de dos transformaciones.

la transformación de trasquilado. Como la reflexión a través del eje x_2 cambia a $\mathbf{e}_1$ en $-\mathbf{e}_1$ y deja inalterado a $\mathbf{e}_2$, el vector $\mathbf{e}_2 - .5\mathbf{e}_1$ va a $\mathbf{e}_2 + .5\mathbf{e}_1$. Así, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + .5\mathbf{e}_1$. Por lo tanto, la matriz estándar de T es

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 + .5\mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & .5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.10 MODELOS LINEALES EN LOS NEGOCIOS, CIENCIA E INGENIERÍA

En esta sección todos los modelos matemáticos son *lineales*; es decir, cada uno de ellos describe un problema mediante una ecuación lineal, por lo general en forma vectorial o matricial. El primer modelo concierne al campo de la nutrición, pero en realidad es representativo de una técnica general en problemas de programación lineal. El segundo modelo pertenece al campo de la ingeniería eléctrica. El tercer modelo introduce el concepto de una *ecuación lineal en diferencias*, una poderosa herramienta matemática para estudiar procesos dinámicos en una amplia variedad de campos, como ingeniería, ecología, economía, telecomunicaciones y ciencias administrativas. Los modelos lineales son importantes porque los fenómenos naturales con frecuencia son lineales o casi lineales cuando las variables implicadas se mantienen dentro de límites razonables. Además, los modelos lineales se adaptan más fácilmente al cálculo computacional que los complejos modelos no lineales.

Conforme estudie cada modelo, preste atención en cómo su linealidad refleja alguna propiedad del sistema que se modela.

Elaboración de una dieta nutritiva para bajar de peso

WEB

La fórmula para la dieta Cambridge, una conocida dieta de la década de 1980, se basó en años de investigación. Un equipo de científicos, encabezados por el doctor Alan H. Howard, desarrollaron esta dieta en la Universidad de Cambridge después de más de ocho años de trabajo clínico con pacientes obesos.[1] La fórmula de la dieta baja en calorías combina un balance preciso de carbohidratos, proteínas de alta calidad y grasa, junto con vitaminas, minerales, oligoelementos y electrolitos. Millones de personas han seguido la dieta para lograr una rápida y sustancial pérdida de peso.

Para alcanzar las cantidades y proporciones deseadas de nutrientes, Howard tuvo que incorporar una gran variedad de alimentos en la dieta. Cada alimento suministraba varios de los ingredientes requeridos, pero no en las proporciones correctas. Por ejemplo, la leche sin grasa (descremada) fue la principal fuente de proteína, pero contenía mucho calcio. De manera que se utilizó harina de soya para aportar proteína porque contiene poco calcio. Sin embargo, proporcionalmente la harina de soya contiene mucha grasa, así que se adicionó suero de leche porque contiene menos grasa en relación con el calcio. Por desgracia, el suero de leche contiene muchos carbohidratos…

El siguiente ejemplo ilustra el problema a pequeña escala. En la tabla 1 se listan tres de los ingredientes en la dieta, junto con las cantidades de ciertos nutrientes aportados por 100 gramos (g) de cada ingrediente.[2]

EJEMPLO 1 Si es posible, encuentre alguna combinación de leche descremada, harina de soya y suero de leche que aporte las cantidades exactas de proteínas, grasas y carbohidratos suministrados por la dieta diaria (tabla 1).

---

[1] El primer anuncio de este rápido régimen para bajar de peso se publicó en el *International Journal of Obesity* (1978) **2**, 321-332.

[2] Ingredientes en la dieta desde 1984; datos de nutrientes en ingredientes adaptados del USDA Agricultural Handbooks, núms. 8-1 y 8-6, 1976.

TABLA 1

	Cantidades (en g) suministradas por 100 g de ingrediente			
Nutriente	**Leche descremada**	**Harina de soya**	**Suero de leche**	**Cantidades (en g) suministradas por la dieta Cambridge en un día**
Proteínas	36	51	13	33
Carbohidratos	52	34	74	45
Grasa	0	7	1.1	3

SOLUCIÓN Dejemos que x_1, x_2 y x_3, respectivamente, denoten el número de unidades (100 g) de esos alimentos. Un enfoque al problema consiste en deducir ecuaciones por separado para cada nutriente. Por ejemplo, el producto

$$\left\{\begin{matrix} x_1 \text{ unidades de} \\ \text{leche descremada} \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} \text{proteínas por unidad} \\ \text{de leche descremada} \end{matrix}\right\}$$

da la cantidad de proteína suministrada por x_1 unidades de leche descremada. A esta cantidad, le agregaríamos productos similares de harina de soya y suero de leche, igualando la suma resultante con la cantidad de proteína que se requiere. Se tendrían que realizar cálculos similares para cada nutriente.

Un método más eficiente, y más sencillo conceptualmente, consiste en considerar un “vector nutriente” para cada alimento y elaborar solo una ecuación vectorial. La cantidad de nutrientes aportados por x_1 unidades de leche descremada es el múltiplo escalar

$$\overset{\text{Escalar}}{\left\{\begin{matrix} x_1 \text{ unidades de} \\ \text{leche descremada} \end{matrix}\right\}} \cdot \overset{\text{Vector}}{\left\{\begin{matrix} \text{nutrientes por unidad} \\ \text{de leche descremada} \end{matrix}\right\}} = x_1\mathbf{a}_1 \tag{1}$$

donde $\mathbf{a}_1$ es la primera columna de la tabla 1. Sean $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ los vectores correspondientes para harina de soya y suero de leche, respectivamente, y sea $\mathbf{b}$ el vector que lista el total de nutrientes requerido (la última columna de la tabla). Luego, $x_2\mathbf{a}_2$ y $x_3\mathbf{a}_3$ dan los nutrientes suministrados por x_2 unidades de harina de soya y x_3 unidades de suero de leche, respectivamente. De esta forma, la ecuación relevante es

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} \tag{2}$$

La reducción por filas de la matriz aumentada del sistema de ecuaciones correspondiente indica que

$$\begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 & 33 \\ 52 & 34 & 74 & 45 \\ 0 & 7 & 1.1 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .277 \\ 0 & 1 & 0 & .392 \\ 0 & 0 & 1 & .233 \end{bmatrix}$$

A tres dígitos significativos, la dieta requiere .277 unidades de leche descremada, .392 unidades de harina de soya y .233 unidades de suero de leche, con el objetivo de aportar las cantidades deseadas de proteínas, carbohidratos y grasa. ■

Es importante que los valores encontrados para x_1, x_2 y x_3 no sean negativos. Esto es necesario para que la solución sea físicamente realizable. (Por ejemplo, ¿cómo se podrían emplear $-.233$ unidades de suero de leche?) Para un gran número de requerimientos nutricionales, será necesario utilizar un mayor número de alimentos para así generar un sistema de ecuaciones con una solución “no negativa”. Por consiguiente, se necesitaría examinar muchísimas combinaciones diferentes de alimentos para encontrar un sistema de ecuaciones con tal solución. De hecho, el diseñador de la dieta Cambridge fue capaz de proporcionar 31 nutrientes en cantidades precisas empleando solo 33 ingredientes.

El problema de la elaboración de la dieta conduce al sistema *lineal* (2) porque la cantidad de nutrientes aportada por cada alimento se puede escribir como un múltiplo escalar de un vector, como en (1). Es decir, los nutrientes suministrados por un alimento son *proporcionales* a la cantidad del alimento agregado a la mezcla de la dieta. Además, cada nutriente en la mezcla es la *suma* de las cantidades de los diversos alimentos.

Los problemas de formulación de dietas especializadas para humanos y ganado ocurren con frecuencia. Por lo regular, dichos problemas se tratan mediante técnicas de programación lineal. Nuestro método de construir ecuaciones vectoriales a menudo simplifica la tarea de formular tales problemas.

Ecuaciones lineales y redes eléctricas

WEB

El flujo de corriente en una red eléctrica sencilla se puede describir por un sistema de ecuaciones lineales. Una fuente de voltaje, como una batería, genera una corriente de electrones que fluye a través de la red. Cuando la corriente pasa por un resistor (ya sea una bombilla o un motor), parte del voltaje se "consume"; de acuerdo con la ley de Ohm, esta "caída de voltaje" en el resistor está dada por

$$V = RI$$

donde el voltaje V se mide en *volts*, la resistencia R en *ohms* (denotados con el símbolo Ω), y el flujo de corriente I en *amperes* (A).

La red de la figura 1 contiene tres circuitos cerrados. Las corrientes que fluyen en los circuitos 1, 2 y 3 se denotan con I_1, I_2 e I_3, respectivamente. Las direcciones asignadas a las *corrientes de circuito* son arbitrarias. Si una corriente resulta negativa, entonces la dirección real del flujo de corriente es opuesta a la que se indica en la figura. Si la dirección de corriente que se muestra se aleja del lado positivo de una batería (⊣⊢), alrededor del lado negativo, entonces el voltaje es positivo; de otra forma, el voltaje es negativo.

El flujo de corriente en un circuito está regido por la siguiente ley.

LEY DE KIRCHHOFF SOBRE EL VOLTAJE

La suma algebraica de las caídas de voltaje RI en una dirección alrededor de un circuito es igual a la suma algebraica de las fuentes de voltaje en la misma dirección alrededor del circuito.

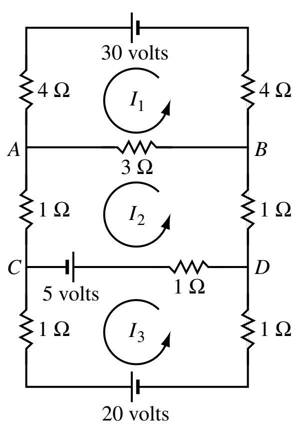


FIGURA 1

EJEMPLO 2 Determine las corrientes de circuito en la red de la figura 1.

SOLUCIÓN Para el circuito 1 la corriente I_1 fluye a través de tres resistores, y la suma de las caídas de voltaje RI es

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = (4 + 4 + 3)I_1 = 11I_1$$

La corriente en el circuito 2 también fluye en parte del circuito 1, por la pequeña *rama* entre A y B. Ahí la caída RI asociada es $3I_2$ volts. Sin embargo, la dirección de corriente para la rama AB en el circuito 1 es opuesta a la elegida para el flujo en el circuito 2, de manera que la suma algebraica de todas las caídas RI para el circuito 1 es $11I_1 - 3I_2$. Como el voltaje en el circuito 1 es $+30$ volts, la ley de voltaje de Kirchhoff implica que

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$

La ecuación para el circuito 2 es

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$$

El término $-3I_1$ viene del flujo de la corriente del circuito 1 por la rama AB (con una caída de voltaje negativa porque ahí el flujo de corriente es opuesto al flujo en el circuito 2). El término $6I_2$ es la suma de todas las resistencias en el circuito 2, multiplicada por la corriente del circuito. El término $-I_3 = -1 \cdot I_3$ proviene de la corriente del circuito 3 que fluye por el resistor de 1 ohm en la rama CD, en la dirección opuesta al flujo en el circuito 2. La ecuación para el circuito 3 es

$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

Observe que la batería de 5 volts en la rama CD se cuenta como parte de los circuitos 2 y 3, pero se considera de -5 volts para el circuito 3 debido a la dirección elegida para la corriente en el circuito 3. La batería de 20 volts es negativa por la misma razón.

Las corrientes de circuito se encuentran resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 11I_1 - 3I_2 \phantom{{}- I_3} &= 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 &= 5 \\ - I_2 + 3I_3 &= -25 \end{aligned} \tag{3}$$

Las operaciones de fila sobre la matriz aumentada conducen a la solución: $I_1 = 3$ A, $I_2 = 1$ A e $I_3 = -8$ A. El valor negativo de I_3 indica que la corriente real en el circuito 3 fluye en la dirección opuesta a la que se muestra en la figura 1. ■

Es conveniente observar el sistema (3) como una ecuación vectorial:

$$\underbrace{I_1\begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_1} + \underbrace{I_2\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_2} + \underbrace{I_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \tag{4}$$

La primera entrada de cada vector concierne al primer circuito, y de manera similar para la segunda y tercera entradas. El primer vector resistor $\mathbf{r}_1$ lista la resistencia en los diversos circuitos por donde fluye la corriente I_1. Una resistencia se registra como negativa cuando I_1 fluye contra la dirección de flujo en otro circuito. Examine la figura 1 y vea cómo calcular las entradas en $\mathbf{r}_1$; luego, haga lo mismo con $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$. La forma matricial de la ecuación (4),

$$R\mathbf{i} = \mathbf{v}, \quad \text{donde,} \quad R = [\,\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3\,] \quad \text{e} \quad \mathbf{i} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

da una versión matricial de la ley de Ohm. Si todas las corrientes de circuito se seleccionan en la misma dirección (por ejemplo, en sentido antihorario), entonces todas las entradas fuera de la diagonal principal de R serán negativas.

De una mirada, la ecuación matricial $R\mathbf{i} = \mathbf{v}$ permite distinguir fácilmente la linealidad de este modelo. Por ejemplo, si se duplica el vector voltaje, entonces lo mismo ocurre con el vector corriente. Además, es válido el *principio de superposición*. Es decir, la solución de la ecuación (4) es la suma de las soluciones de las ecuaciones

$$R\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad R\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Cada ecuación aquí corresponde al circuito con una sola fuente de voltaje (las otras fuentes se remplazan con los alambres que cierran cada circuito). El modelo para el flujo de corriente es *lineal* porque precisamente las leyes de Ohm y de Kirchhoff son lineales. La caída de voltaje en un resistor es *proporcional* a la corriente que fluye por él (Ohm), y la *suma* de las caídas de voltaje en un circuito iguala a la suma de las fuentes de voltaje en el circuito (Kirchhoff).

Las corrientes de circuito en una red se pueden emplear para determinar la corriente en cualquier rama de la red. Si solo una corriente de circuito pasa por una rama, como de B a D en la figura 1, la corriente de la rama es igual a la corriente de circuito. Si más de una corriente de circuito pasan por una rama, como de A a B, la corriente de rama es la suma algebraica de las corrientes de circuito en la rama (*ley de Kirchhoff sobre la corriente*). Por ejemplo, la corriente en la rama AB es $I_1 - I_2 = 3 - 1 = 2$ A, en la dirección de I_1. La corriente en la rama CD es $I_2 - I_3 = 9$ A.

Ecuaciones en diferencias

En muchos campos, como ecología, economía e ingeniería, surge la necesidad de modelar matemáticamente un sistema dinámico que cambia en el tiempo. Diversos aspectos del sistema se miden en intervalos de tiempo discretos, produciendo así una secuencia de vectores $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,… Las entradas en $\mathbf{x}_k$ brindan información sobre el *estado* del sistema en el momento de la k-ésima medición.

Si existe una matriz A tal que $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$ y, en general,

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2,\ldots \tag{5}$$

entonces (5) se llama **ecuación lineal en diferencias** (o **relación de recurrencia**). Con esta ecuación, se pueden calcular $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, y así sucesivamente, si $\mathbf{x}_0$ se conoce. Las secciones 4.8 y 4.9, así como algunas otras del capítulo 5, desarrollarán fórmulas para $\mathbf{x}_k$ y describirán qué ocurre a $\mathbf{x}_k$ conforme k se incrementa indefinidamente. El análisis que se presenta a continuación ilustra cómo puede originarse una ecuación en diferencias.

Un tema de interés para los demógrafos es el movimiento de poblaciones o grupos de gente de una región a otra. El modelo sencillo que se incluye aquí considera los cambios en la población de una cierta ciudad y sus suburbios durante un periodo de años.

Fije un año inicial —por ejemplo, 2000— y denote las poblaciones de la ciudad y los suburbios de ese año mediante r_0 y s_0, respectivamente. Sea $\mathbf{x}_0$ el vector de población

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Población de la ciudad, 2000} \\ \text{Población suburbana, 2000} \end{array}$$

Para 2001 y los años subsiguientes, denote las poblaciones de la ciudad y de los suburbios mediante los vectores

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} r_3 \\ s_3 \end{bmatrix}, \ldots$$

Nuestro objetivo es describir matemáticamente cómo podrían estar relacionados esos vectores.

Suponga que estudios demográficos revelan que, cada año, cerca del 5% de la población de la ciudad se muda a los suburbios (lo que significa que el 95% permanece en la ciudad), mientras que el 3% de la población suburbana cambia su residencia a la ciudad (en tanto que el 97% permanece en los suburbios). Véase la figura 2.

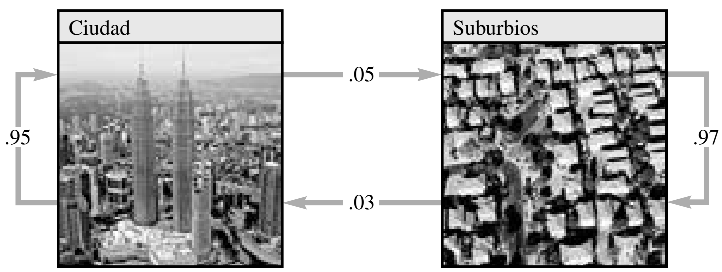


FIGURA 2 Porcentaje anual de migración entre la ciudad y los suburbios.

Después de un año, los habitantes originales de la ciudad, r_0, están ahora distribuidos entre la ciudad y los suburbios como

$$\begin{bmatrix} .95r_0 \\ .05r_0 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} .95 \\ .05 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Permanecen en la ciudad} \\ \text{Se mudan a los suburbios} \end{array} \tag{6}$$

Los habitantes de los suburbios en 2000, s_0, están distribuidos un año después como

$$s_0 \begin{bmatrix} .03 \\ .97 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Se mudan a la ciudad} \\ \text{Permanecen en los suburbios} \end{array} \tag{7}$$

Los vectores en (6) y (7) explican cómo se distribuye la población en 2001.[3] Así,

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = r_0 \begin{bmatrix} .95 \\ .05 \end{bmatrix} + s_0 \begin{bmatrix} .03 \\ .97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\mathbf{x}_1 = M\mathbf{x}_0 \tag{8}$$

donde M es la **matriz de migración** determinada por la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccl} \multicolumn{2}{c}{\text{De:}} & \\ \text{Ciudad} & \text{Suburbios} & \text{A:} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Ciudad} \\ \text{Suburbios} \end{array}$$

La ecuación (8) describe cómo cambió la población de 2000 a 2001. Si los porcentajes de migración permanecen constantes, entonces el cambio de 2001 a 2002 está dado por

$$\mathbf{x}_2 = M\mathbf{x}_1$$

y, de manera similar, de 2002 a 2003 y en los años subsiguientes. En general,

$$\mathbf{x}_{k+1} = M\mathbf{x}_k \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

La secuencia de vectores $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ describe las poblaciones de la ciudad y los suburbios durante un periodo de años.

EJEMPLO 3 Calcule la población de la región que se acaba de describir para los años 2001 y 2002, considerando que la población en el año 2000 era de 600,000 habitantes en la ciudad y de 400,000 en los suburbios.

SOLUCIÓN La población inicial en 2000 es $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 600{,}000 \\ 400{,}000 \end{bmatrix}$. Para 2001,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600{,}000 \\ 400{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 582{,}000 \\ 418{,}000 \end{bmatrix}$$

Para 2002,

$$\mathbf{x}_2 = M\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 582{,}000 \\ 418{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 565{,}440 \\ 434{,}560 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

El modelo para el movimiento poblacional en (9) es *lineal* porque la correspondencia $\mathbf{x}_k \mapsto \mathbf{x}_{k+1}$ es una transformación lineal. La linealidad depende de dos hechos: el número de personas que eligen cambiar su residencia de una área a otra es *proporcional* al número de personas en esa área, como se muestra en (6) y (7), y el efecto acumulativo de esas elecciones se encuentra *sumando* el movimiento de las personas de las diferentes áreas.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Encuentre una matriz A y vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ tales que el problema del ejemplo 1 signifique resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

[3] Para simplificar, se ignoran otros factores que influyen en la población, como nacimientos, muertes y movimientos migratorios hacia la región que comprende la ciudad y los suburbios, así como hacia fuera de ella.

1.10 EJERCICIOS

1. Por lo regular, el empaque de un cereal indica el número de calorías y las cantidades de proteínas, carbohidratos y grasa contenidas en una porción del producto. A continuación se dan las cantidades para dos cereales comunes. Suponga que se preparará una mezcla de esos dos cereales, de manera que contenga exactamente 295 calorías, 9 g de proteínas, 48 g de carbohidratos y 8 g de grasa.

a) Establezca una ecuación vectorial para este problema. Incluya un enunciado que explique el significado de cada variable empleada en la ecuación.

b) Escriba una ecuación matricial equivalente, y determine si es posible preparar la mezcla deseada de los dos cereales.

Información nutricional por cada porción

Nutriente	General Mills Cheerios®	Quaker® 100% Natural Cereal
Calorías	110	130
Proteínas (g)	4	3
Carbohidratos (g)	20	18
Grasa (g)	2	5

2. Una porción de Shredded Wheat aporta 160 calorías, 5 g de proteína, 6 g de fibra y 1 g de grasa. Una porción de Crispix® aporta 110 calorías, 2 g de proteína, .1 g de fibra y .4 g de grasa.

a) Establezca una matriz B y un vector $\mathbf{u}$ tal que $B\mathbf{u}$ dé las cantidades de calorías, proteínas, fibra y grasa contenidas en una mezcla de tres porciones de Shredded Wheat y dos porciones de Crispix.

b) [**M**] Suponga que se desea un cereal con más fibra que Crispix, pero con menos calorías que Shredded Wheat. ¿Es posible que una mezcla de ambos cereales proporcione 130 calorías, 3.20 g de proteína, 2.46 g de fibra y .64 g de grasa? Si es posible, ¿cuál es la mezcla?

3. Después de tomar una clase sobre nutrición, una consumidora asidua de los productos de Annie's®, a quien le gusta el producto Mac and Cheese (macarrones con queso), decide mejorar los niveles de proteína y fibra en su almuerzo favorito agregando brócoli y pollo enlatado. La información nutricional de los alimentos mencionados en este ejercicio se indica en la siguiente tabla.

Información nutricional por cada porción

Nutriente	Mac and Cheese	Brócoli	Pollo	Shells
Calorías	270	51	70	260
Proteína (g)	10	5.4	15	9
Fibra (g)	2	5.2	0	5

a) [**M**] Si ella quiere limitar su almuerzo a 400 calorías, pero desea obtener 30 g de proteína y 10 g de fibra, ¿qué proporciones de Mac and Cheese, brócoli y pollo debería utilizar?

b) [**M**] Ella encontró que no había mucho brócoli en las proporciones del inciso *a*), así que decidió cambiar del clásico Mac and Cheese a Annie's Whole Wheat Shells and White Cheddar (pasta integral y queso cheddar). ¿Qué proporciones de cada alimento debería emplear para lograr los mismos objetivos que en el inciso *a*)?

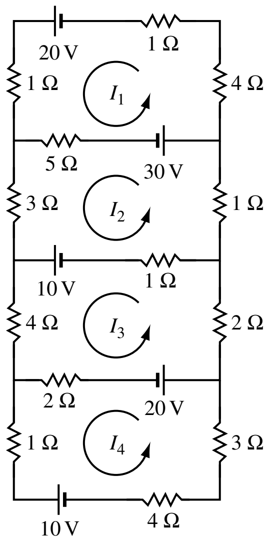
4. La dieta Cambridge aporta .8 g de calcio por día, además de los nutrientes listados en la tabla 1 del ejemplo 1. Las cantidades de calcio por unidad (100 g) que aportan los tres ingredientes en la dieta Cambridge son las siguientes: 1.26 g de leche descremada, .19 g de harina de soya y .8 g de suero de leche. Otro ingrediente en la mezcla de la dieta es proteína aislada de soya, que aporta los siguientes nutrientes en cada unidad: 80 g de proteínas, 0 g de carbohidratos, 3.4 g de grasa y .18 g de calcio.

a) Establezca una ecuación matricial cuya solución determine las cantidades de leche descremada, harina de soya, suero de leche y proteína aislada de soya necesarias para suministrar las cantidades precisas de proteínas, carbohidratos, grasa y calcio en la dieta Cambridge. Indique qué representan las variables de la ecuación.

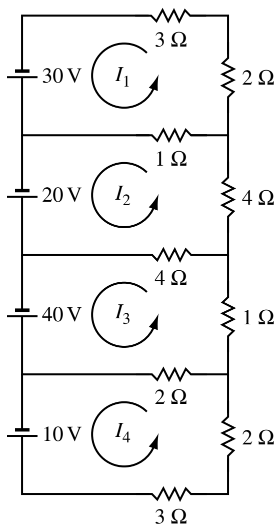
b) [**M**] Resuelva la ecuación en *a*) y analice la respuesta.

En los ejercicios 5 a 8, escriba una ecuación matricial que determine las corrientes del circuito. [**M**] Si dispone de MATLAB o de algún otro programa de matrices, resuelva el sistema para las corrientes del circuito.

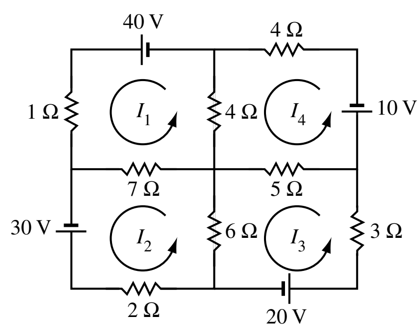
5.



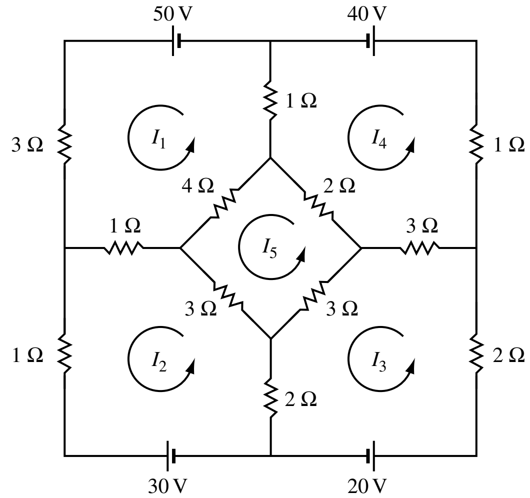
6.



7.



8.



9. En cierta región, cada año, cerca del 7% de la población de una ciudad se muda a los suburbios, y alrededor del 5% de la población suburbana cambia su residencia a la ciudad. En 2010, había 800,000 residentes en la ciudad y 500,000 en los suburbios. Establezca una ecuación en diferencias que describa esta situación, donde $\mathbf{x}_0$ sea la población inicial en 2010. Luego, estime las poblaciones en la ciudad y en los suburbios dos años después, es decir, en 2012. (Ignore otros factores que podrían influir en el tamaño de las poblaciones).

10. Cada año, en cierta región, cerca del 6% de la población de una ciudad se muda a los suburbios, y alrededor del 4% de la población suburbana se muda a la ciudad. En 2010, había 10,000,000 de residentes en la ciudad y 800,000 en los suburbios. Establezca una ecuación en diferencias que describa esta situación, donde $\mathbf{x}_0$ sea la población inicial en 2010. Luego, estime las poblaciones en la ciudad y en los suburbios dos años después, es decir, en 2012.

11. En 1994, la población de California era de 31,524,000 habitantes, y la población que vivía en Estados Unidos, pero *fuera* de California, era de 228,680,000 habitantes. Durante el año, se estimó que 516,100 personas se mudaron de California a otro lugar en Estados Unidos, mientras que 381,262 personas se mudaron a California desde diversos lugares del país.[4]

a) Establezca la matriz de migración para esta situación, utilizando cinco lugares decimales para las tasas de migración entrante y saliente de California. Explique cómo obtuvo la matriz de migración.

b) [**M**] Calcule las poblaciones proyectadas para el año 2000 en California y en otras partes de Estados Unidos, suponiendo que las tasas de migración no cambian durante el periodo de 6 años. (Esos cálculos no toman en cuenta nacimientos, muertes o la migración sustancial de personas a California y a otros lugares de Estados Unidos provenientes de otros países).

[4] Datos de migración suministrados por la Unidad de Investigación Demográfica del Departamento de Finanzas del estado de California.

12. [**M**] Budget® Rent A Car en Wichita, Kansas, tiene una flotilla de 500 vehículos, distribuidos en tres sucursales. Un auto rentado en una sucursal puede devolverse en cualquiera de las tres. Las diversas fracciones de autos devueltos a las tres sucursales se muestran en la matriz que aparece a continuación. Suponga que un lunes hay 295 autos en el aeropuerto (o que se rentan ahí), 55 autos en la sucursal de la zona este, y 150 automóviles en el establecimiento de la zona oeste. ¿Cuál será la distribución aproximada de autos para el miércoles?

$$\begin{array}{cl} \text{Autos rentados en:} & \\ \begin{array}{ccc}\text{Aeropuerto} & \text{Este} & \text{Oeste}\end{array} & \text{Devueltos en:} \\ \begin{bmatrix} .97 & .05 & .10 \\ .00 & .90 & .05 \\ .03 & .05 & .85 \end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{Aeropuerto}\\ \text{Este}\\ \text{Oeste}\end{array} \end{array}$$

13. [**M**] Sean M y $\mathbf{x}_0$ como en el ejemplo 3.

a) Calcule los vectores poblacionales $\mathbf{x}_k$ para $k = 1,\ldots, 20$. Analice sus hallazgos.

b) Repita el inciso *a*) considerando una población inicial de 350,000 en la ciudad y 650,000 en los suburbios. ¿Qué encontró?

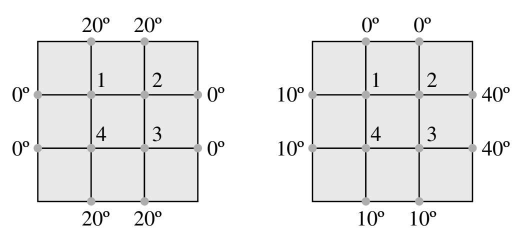
14. [**M**] Estudie cómo los cambios en las temperaturas de los bordes de una placa de acero afectan a las temperaturas en los puntos interiores de la placa.

a) Comience por estimar las temperaturas T_1, T_2, T_3, T_4 en cada uno de los conjuntos de cuatro puntos de la placa que se señalan en la figura. En cada caso, el valor de T_k se aproxima mediante el promedio de las temperaturas en los cuatro puntos más cercanos. Consulte los ejercicios 33 y 34 de la sección 1.1, donde los valores (en grados) son (20, 27.5, 30, 22.5). ¿Cómo se relaciona esta lista de valores con los resultados obtenidos para los puntos en los conjuntos *a*) y *b*)?

b) Sin efectuar cálculos, ¿qué ocurre con las temperaturas interiores en *a*) cuando todas las temperaturas en los bordes se multiplican por 3? Compruebe su suposición.

c) Finalmente, haga una conjetura general sobre la correspondencia de la lista de ocho temperaturas en los bordes con la lista de las cuatro temperaturas interiores.

Placa *A* Placa *B*



a) *b*)

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

$$A = \begin{bmatrix} 36 & 51 & 13 \\ 52 & 34 & 74 \\ 0 & 7 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 33 \\ 45 \\ 3 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO 1 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas. (Si el enunciado es válido, cite hechos o teoremas pertinentes. Si es falso, explique por qué o dé un contraejemplo que muestre por qué el enunciado no es verdadero en cada caso).

a) Cada matriz es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada.

b) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene a lo sumo n soluciones.

c) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones diferentes, debe tener un número infinito de soluciones.

d) Si un sistema de ecuaciones lineales no tiene variables libres, entonces tiene una solución única.

e) Si una matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}]$ se transforma en $[C \quad \mathbf{d}]$ mediante operaciones elementales de fila, entonces las ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tienen exactamente los mismos conjuntos solución.

f) Si un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene más de una solución, entonces lo mismo sucede con el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

g) Si A es una matriz de $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para alguna $\mathbf{b}$, entonces las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.

h) Si una matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}]$ se puede transformar en una forma escalonada mediante operaciones elementales de fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente.

i) Si las matrices A y B son equivalentes por filas, tienen la misma forma escalonada reducida.

j) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial si y solo si no hay variables libres.

k) Si A es una matriz de $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces A tiene m columnas pivote.

l) Si una matriz A de $m \times n$ tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

m) Si una matriz A de $n \times n$ tiene n posiciones pivote, entonces la forma escalonada reducida de A es la matriz identidad de $n \times n$.

n) Si A y B son matrices de 3×3 con tres posiciones pivote cada una, entonces A se puede transformar en B mediante operaciones elementales de fila.

o) Si A es una matriz de $m \times n$, si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos dos soluciones diferentes, y si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ es consistente, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene muchas soluciones.

p) Si A y B son matrices de $m \times n$ equivalentes por filas y si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$, entonces también lo hacen las columnas de B.

q) Si ninguno de los vectores en el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en $\mathbb{R}^3$ es un múltiplo de los otros vectores, entonces S es linealmente independiente.

r) Si $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente, entonces $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ no están en $\mathbb{R}^2$.

s) En algunos casos, es posible que cuatro vectores generen a $\mathbb{R}^5$.

t) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^m$, entonces $-\mathbf{u}$ está en Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

u) Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

v) Si $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{u}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

w) Supongamos que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ están en $\mathbb{R}^5$, $\mathbf{v}_2$ no es múltiplo de $\mathbf{v}_1$, y $\mathbf{v}_3$ no es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Por lo tanto, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

x) Una transformación lineal es una función.

y) Si A es una matriz de 6×5, la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ no puede mapear $\mathbb{R}^5$ sobre $\mathbb{R}^6$.

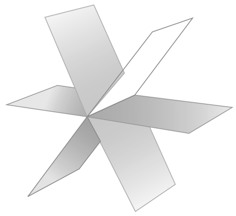
z) Si A es una matriz de $m \times n$ con m columnas pivote, entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es un mapeo uno a uno.

2. Sean a y b números reales. Describa los posibles conjuntos solución de la ecuación (lineal) $ax = b$. [*Sugerencia:* El número de soluciones depende de a y b].

3. Las soluciones (x, y, z) de una sola ecuación lineal

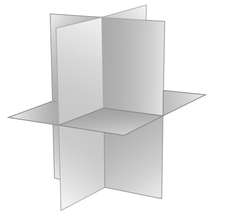
$$ax + by + cz = d$$

forman un plano en $\mathbb{R}^3$ cuando a, b y c no son todos cero. Construya conjuntos de tres ecuaciones lineales cuyas gráficas *a*) se intersecan en una sola recta, *b*) se intersecan en un solo punto, y *c*) no tienen puntos en común. Las siguientes figuras muestran gráficas características.



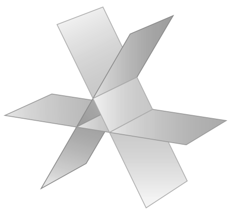
Tres planos se intersecan en una recta

a)



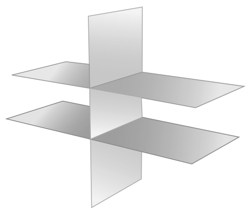
Tres planos se intersecan en un punto

b)



Tres planos sin intersección

c)



Tres planos sin intersección

c')

4. Suponga que la matriz coeficiente de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres variables tiene una posición pivote en cada columna. Explique por qué el sistema tiene una solución única.

5. Determine h y k tales que el conjunto solución del sistema: **i.** es un conjunto vacío, **ii.** contiene una solución única, y **iii.** contiene un número infinito de soluciones.

a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= k \\ 4x_1 + hx_2 &= 8 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} -2x_1 + hx_2 &= 1 \\ 6x_1 + kx_2 &= -2 \end{aligned}$

6. Considere el problema de determinar si el siguiente sistema de ecuaciones es consistente:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= -5 \\ 8x_1 - 3x_2 + 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

a) Defina vectores adecuados, y replantee el problema en términos de combinaciones lineales. Luego, resuélvalo.

b) Defina una matriz adecuada, y replantee el problema utilizando la frase "columnas de A".

c) Defina una transformación lineal T adecuada empleando la matriz en *b*), y exponga el problema en términos de T.

7. Considere el problema de determinar si el siguiente sistema de ecuaciones es consistente para toda b_1, b_2, b_3:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= b_1 \\ -5x_1 + x_2 + x_3 &= b_2 \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

a) Defina vectores adecuados y replantee el problema en términos de Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Luego, resuélvalo.

b) Defina una matriz adecuada y replantee el problema utilizando la frase "columnas de A".

c) Defina una transformación lineal T adecuada utilizando la matriz en *b*), y replantee el problema en términos de T.

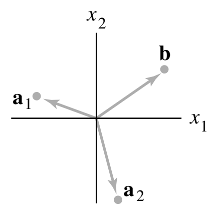
8. Describa las posibles formas escalonadas de la matriz A. Use la notación del ejemplo 1 de la sección 1.2.

a) A es una matriz de 2×3 cuyas columnas generan a $\mathbb{R}^2$.

b) A es una matriz de 3×3 cuyas columnas generan a $\mathbb{R}^3$.

9. Escriba el vector $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ como la suma de dos vectores, uno sobre la recta $\{(x, y): y = 2x\}$ y el otro sobre la recta $\{(x, y): y = x/2\}$.

10. Sean $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}$ los vectores en $\mathbb{R}^2$ que se muestran en la figura, y sea $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$. ¿Tiene solución la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? Si es así, ¿es única la solución? Explique su respuesta.



11. Construya una matriz A de 2×3, que no esté en forma escalonada, de manera que la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea una recta en $\mathbb{R}^3$.

12. Construya una matriz A de 2×3, que no esté en forma escalonada, de manera que la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea un plano en $\mathbb{R}^3$.

13. Escriba la forma escalonada *reducida* de una matriz A de 3×3 de manera que las primeras dos columnas de A sean columnas pivote y

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

14. Determine el valor o valores de a de manera que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a+2 \end{bmatrix} \right\}$ sea linealmente independiente.

15. En *a*) y *b*), suponga que los vectores son linealmente independientes. ¿Qué puede decir acerca de los números $a, \ldots, f$? Justifique sus respuestas. [*Sugerencia:* Utilice un teorema para *b*)].

a) $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$

16. Con base en el teorema 7 de la sección 1.7, explique por qué las columnas de la matriz A son linealmente independientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

17. Explique por qué un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ en $\mathbb{R}^5$ debe ser linealmente independiente cuando $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente y $\mathbf{v}_4$ *no* está en Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

18. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\}$ también es linealmente independiente.

19. Suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ son distintos puntos sobre una línea en $\mathbb{R}^3$. La recta no necesita pasar por el origen. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente.

20. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, y suponga que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$. Demuestre que $T(-\mathbf{u}) = -\mathbf{v}$.

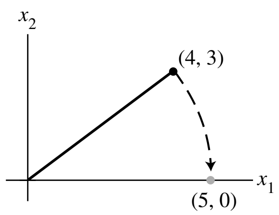
21. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que refleja cada vector a través del plano $x_2 = 0$. Es decir, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3)$. Encuentre la matriz estándar de T.

22. Sea A una matriz de 3×3 con la propiedad de que la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$. Explique por qué la transformación debe ser uno a uno.

23. Una *rotación de Givens* es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ empleada en programas de cómputo para crear una entrada cero en un vector (por lo general, una columna de una matriz). La matriz estándar de una rotación de Givens en $\mathbb{R}^2$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1$$

Encuentre a y b tales que $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ gire a $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.



Una rotación de Givens en $\mathbb{R}^2$.

WEB

24. La siguiente ecuación describe una rotación de Givens en $\mathbb{R}^3$. Encuentre a y b.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1$$

25. Un gran edificio de apartamentos se construirá empleando técnicas de construcción modular. El arreglo de los apartamentos, en cualquier piso en particular, se selecciona a partir de tres planes básicos. El plan A tiene 18 apartamentos en un piso, incluyendo 3 unidades de 3 recámaras, 7 unidades de 2 recámaras, y 8 unidades de 1 recámara. Cada piso del plan B incluye 4 unidades de 3 recámaras, 4 unidades de 2 recámaras, y 8 unidades de 1 recámara. Cada piso del plan C tiene 5 unidades de 3 recámaras, 3 unidades de 2 recámaras, y 9 unidades de 1 recámara. Suponga que el edificio tiene un total de x_1 pisos del plan A, x_2 pisos del plan B, y x_3 pisos del plan C.

a) ¿Qué interpretación puede darse al vector $x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$?

b) Escriba una combinación lineal formal de vectores que exprese el número total de apartamentos de una, dos y tres recámaras del edificio.

c) [**M**] ¿Es posible diseñar el edificio con exactamente 66 unidades de tres recámaras, 74 unidades de dos recámaras, y 136 unidades de una recámara? Si es así, ¿existe más de una forma de hacerlo? Explique su respuesta.

2 Álgebra de matrices

EJEMPLO INTRODUCTORIO

Modelos de computadora en el diseño de aeronaves

Para diseñar la siguiente generación de aeronaves comerciales y militares, los ingenieros de Boeing's Phantom Works usan el modelado tridimensional (3D) y la dinámica de fluidos computacional (DFC). De esta manera, estudian el flujo de aire alrededor de un avión virtual para responder importantes preguntas de diseño antes de crear los modelos físicos. Este método ha reducido en forma drástica los tiempos y costos del ciclo de diseño; y el álgebra lineal desempeña un papel de suma importancia en el proceso.

La aeronave virtual comienza como un modelo matemático "de alambre" que existe solo en la memoria de la computadora y en las terminales de presentación gráfica. (Se muestra el modelo de un Boeing 777). Este modelo matemático organiza e influye en cada paso del diseño y la manufactura de la aeronave, tanto en el exterior como en el interior. El análisis de DFC concierne a la superficie exterior.

Aunque tal vez el acabado exterior de la aeronave parezca liso, la geometría de la superficie es complicada. Además de alas y fuselaje, un avión tiene cabinas, estabilizadores, dispositivos de sustentación, aletas y alerones. La forma en que el aire fluye alrededor de estas estructuras determina cómo se desplaza la aeronave por el cielo. Las ecuaciones que describen el flujo del aire son complicadas y deben tomar en cuenta la admisión de los motores, los gases expelidos y las estelas que dejan las alas de la aeronave. Para estudiar el flujo del aire, los ingenieros necesitan de una descripción sumamente detallada de la superficie de la aeronave.

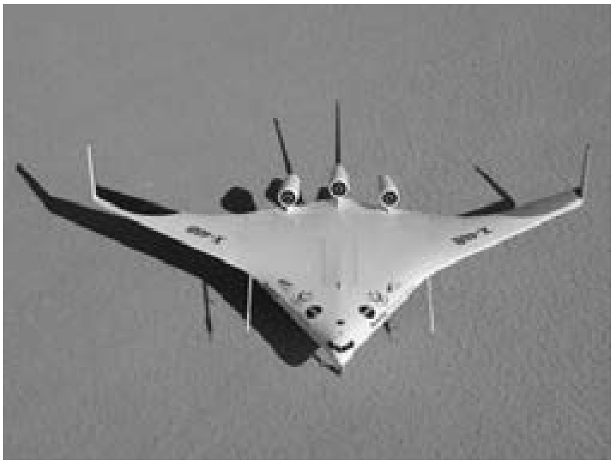
Una computadora crea un modelo de la superficie al superponer, primero, una malla tridimensional de "cuadros" sobre el modelo de alambre original. En esta malla, los cuadros caen completamente dentro o completamente fuera de la aeronave, o se intersecan con la superficie de esta. La computadora selecciona los cuadros que se intersecan con la superficie y los subdivide, reteniendo solo los más pequeños que aún se intersecan con la superficie. El proceso de subdivisión se repite hasta que la malla se vuelve extremadamente fina. Una malla típica puede incluir más de 400,000 cuadros.

El proceso para encontrar el flujo de aire alrededor de la aeronave implica la solución repetida de un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que puede implicar hasta dos millones de ecuaciones y variables. El vector $\mathbf{b}$ cambia a cada momento, con base en datos que provienen de la malla y de las soluciones de ecuaciones previas. Usando las computadoras más rápidas disponibles comercialmente, un equipo de Phantom Works puede tardar desde unas cuantas horas hasta varios días para configurar y resolver un solo problema de flujo de aire. Después de que el equipo analiza la solución, podrá hacer pequeños cambios en la superficie de la aeronave, y comenzar de nuevo todo el proceso. Es posible que se necesiten miles de corridas de DFC.

En este capítulo se presentan dos conceptos importantes que ayudan en la solución de los enormes sistemas de ecuaciones de este tipo:

- *Matrices particionadas:* Un sistema típico de ecuaciones de DFC tiene una matriz de coeficientes "dispersa" con la mayoría de entradas iguales a cero. El agrupar las variables en forma correcta conduce a una matriz particionada con muchos bloques de ceros. En la sección 2.4 se presenta este tipo de matrices y se describen algunas de sus aplicaciones.

- *Factorizaciones de matrices:* El sistema de ecuaciones es complicado, incluso cuando está escrito con matrices particionadas. Para simplificar aún más los cálculos, el programa computacional DFC aplicado en el Boeing utiliza lo que se conoce como factorización LU de la matriz de coeficientes. En la sección 2.5 se analiza la factorización LU y otras factorizaciones matriciales útiles. Más adelante, en varias partes de este libro, aparecen más detalles respecto de las factorizaciones.



La moderna DFC ha revolucionado el diseño de aeronaves. El Boeing Blended Wing Body se encuentra en diseño y entrará en funcionamiento en 2020 o tal vez antes.

Para poder analizar una solución de un sistema de flujo de aire, los ingenieros tienen que visualizar el flujo de aire sobre la superficie de la aeronave; para ello, utilizan gráficos generados por computadora, y el álgebra lineal proporciona las herramientas para trazarlas. El modelo de marco de alambre de la superficie de la aeronave se almacena como datos en muchas matrices. Una vez que se presenta la imagen en una pantalla de computadora, los ingenieros pueden modificarla a escala, hacer acercamientos y alejamientos de zonas pequeñas, y hacerla girar para ver partes que quedan ocultas en determinado ángulo. Cada una de estas operaciones se realiza con una multiplicación adecuada de matrices. En la sección 2.7 se explican las ideas básicas.

WEB

Nuestra capacidad para analizar y resolver ecuaciones aumentará considerablemente al adquirir la habilidad de realizar operaciones algebraicas con matrices. Más aún, las definiciones y los teoremas de este capítulo ofrecen algunas herramientas básicas para manejar las múltiples aplicaciones del álgebra lineal que implican dos o más matrices. Para matrices cuadradas, el teorema de la matriz invertible de la sección 2.3 reúne la mayoría de los conceptos tratados anteriormente en el libro. En las secciones 2.4 y 2.5 se examinan matrices particionadas y factorizaciones de matrices, las cuales aparecen en la mayor parte de los usos modernos del álgebra lineal. En las secciones 2.6 y 2.7 se describen dos aplicaciones interesantes del álgebra de matrices a la economía y a los gráficos generados por computadora.

2.1 OPERACIONES DE MATRICES

Si A es una matriz de $m \times n$, es decir, una matriz con m filas y n columnas, entonces la entrada escalar en la i-ésima fila y la j-ésima columna de A se denota mediante a_{ij} y se llama entrada (i, j) de A. Véase la figura 1. Por ejemplo, la entrada (3, 2) es el número a_{32} en la tercera fila, segunda columna. Cada columna de A es una lista de m números reales, que identifica un vector en $\mathbb{R}^m$. Con frecuencia, estas columnas se denotan mediante $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, y la matriz A se escribe como

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

Observe que el número a_{ij} es la i-ésima entrada (desde arriba) del j-ésimo vector columna $\mathbf{a}_j$.

Las **entradas diagonales** en una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ son $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$, y forman la **diagonal principal** de A. Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada de $n \times n$ cuyas entradas no diagonales son cero. Un ejemplo es la matriz identidad de $n \times n$, I_n. Una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son todas cero es una **matriz cero** o **matriz nula** y se escribe como 0. El tamaño de una matriz cero, por lo general, es evidente a partir del contexto.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c}\text{Columna}\\ j\end{array} \\ \text{Fila } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} = A \\ & \begin{array}{ccccc}\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & & \mathbf{a}_j & & \mathbf{a}_n\end{array}\end{array}$$

FIGURA 1 Notación matricial.

Suma y múltiplos escalares

La aritmética para vectores que se describió anteriormente tiene una extensión natural hacia las matrices. Se dice que dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño (es decir, el mismo número de filas y de columnas) y si sus columnas correspondientes son iguales, lo que equivale a decir que sus entradas correspondientes son iguales. Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces la **suma** $A + B$ es la matriz de $m \times n$ cuyas columnas son las sumas de las columnas correspondientes en A y B. Puesto que la suma vectorial de las columnas se realiza por entradas, cada entrada en $A + B$ es la suma de las entradas correspondientes de A y B. La suma $A + B$ está definida solo cuando A y B son del mismo tamaño.

EJEMPLO 1 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

pero $A + C$ *no* está definida porque A y C tienen diferentes tamaños. ■

Si r es un escalar y A es una matriz, entonces el **múltiplo escalar** rA es la matriz cuyas columnas son r veces las columnas correspondientes de A. Al igual que sucede con los vectores, $-A$ significa $(-1)A$, y $A - B$ es igual que $A + (-1)B$.

EJEMPLO 2 Si A y B son las matrices del ejemplo 1, entonces

$$2B = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -7 & -7 & -12 \end{bmatrix}$$ ■

En el ejemplo 2 no fue necesario calcular $A - 2B$ como $A + (-1)2B$ porque las reglas usuales del álgebra se aplican a las sumas y los múltiplos escalares de matrices, como se verá en el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Sean A, B y C matrices del mismo tamaño, y sean r y s escalares.

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $r(A + B) = rA + rB$

e) $(r + s)A = rA + sA$

f) $r(sA) = (rs)A$

Cada igualdad del teorema 1 se comprueba al mostrar que la matriz del lado izquierdo tiene el mismo tamaño que la del lado derecho y que las columnas correspondientes son iguales. El tamaño no es problema porque A, B y C son del mismo tamaño. La igualdad de columnas es consecuencia inmediata de las propiedades análogas de los vectores. Por ejemplo, si las columnas j-ésimas de A, B y C son $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ y $\mathbf{c}_j$, respectivamente, entonces las columnas j-ésimas de $(A + B) + C$ y de $A + (B + C)$ son

$$(\mathbf{a}_j + \mathbf{b}_j) + c_j \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_j + (\mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j),$$

respectivamente. Ya que estas dos sumas vectoriales son iguales para cada j, la propiedad *b*) queda comprobada.

Debido a la propiedad asociativa de la suma, se puede escribir simplemente $A + B + C$ para la suma, lo cual se calcula como $(A + B) + C$, o bien, como $A + (B + C)$. Lo mismo se aplica a sumas de cuatro o más matrices.

Multiplicación de matrices

Cuando una matriz B multiplica a un vector $\mathbf{x}$, transforma a $\mathbf{x}$ en el vector $B\mathbf{x}$. Si después este vector se multiplica, a la vez, por una matriz A, el vector resultante es $A(B\mathbf{x})$. Véase la figura 2.

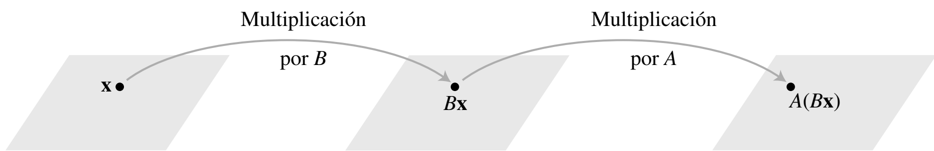


FIGURA 2 Multiplicación por B y luego por A.

Así, $A(B\mathbf{x})$ se produce a partir de $\mathbf{x}$ por una *composición* de mapeos, las transformaciones lineales estudiadas en la sección 1.8. Nuestro objetivo es representar este mapeo compuesto como la multiplicación por una sola matriz, que se denota con AB, de manera que

$$A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} \tag{1}$$

Véase la figura 3.

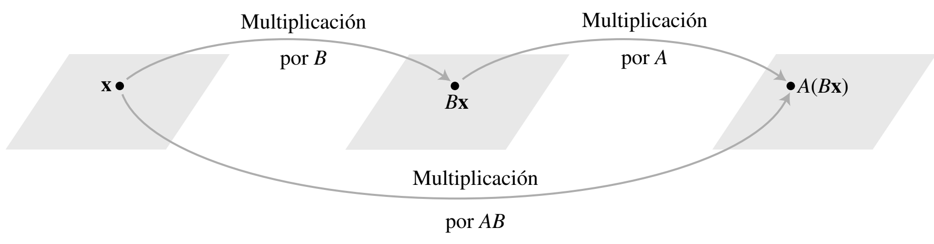


FIGURA 3 Multiplicación por AB.

Si A es de $m \times n$, B es de $n \times p$ y $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{R}^p$, las columnas de B se denotan como $\mathbf{b}_j, \ldots, \mathbf{b}_p$, y las entradas de $\mathbf{x}$ como $x_1, \ldots, x_p$. Por consiguiente,

$$B\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_p\mathbf{b}_p$$

Por la linealidad de la multiplicación por A,

$$\begin{aligned} A(B\mathbf{x}) &= A(x_1\mathbf{b}_1) + \cdots + A(x_p\mathbf{b}_p) \\ &= x_1A\mathbf{b}_1 + \cdots + x_pA\mathbf{b}_p \end{aligned}$$

El vector $A(B\mathbf{x})$ es una combinación lineal de los vectores $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p$, usando las entradas de $\mathbf{x}$ como pesos. En notación matricial, esta combinación lineal se escribe como

$$A(B\mathbf{x}) = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p]\mathbf{x}$$

Así, la multiplicación por $[A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p]$ transforma a $\mathbf{x}$ en $A(B\mathbf{x})$. ¡Ya encontramos la matriz buscada!

DEFINICIÓN

> Si A es una matriz de $m \times n$, y si B es una matriz de $n \times p$ con columnas $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ entonces el producto AB es la matriz de $m \times p$ cuyas columnas son $A\mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{b}_p$. Es decir,
>
> $$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_p] = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_p]$$

Esta definición hace que la ecuación (1) sea verdadera para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^p$. La ecuación (1) demuestra que el mapeo compuesto de la figura 3 es una transformación lineal y que su matriz estándar es AB. *La multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones lineales*.

EJEMPLO 3 Calcule AB, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Escriba $B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$, y calcule:

$$A\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix} \qquad = \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$AB = A[\,\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3\,] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ A\mathbf{b}_1 & A\mathbf{b}_2 & A\mathbf{b}_3 \end{array} \end{array}$$

■

Observe que como la primera columna de AB es $A\mathbf{b}_1$, esta columna es una combinación lineal de las columnas de A usando como pesos las entradas de $\mathbf{b}_1$. Un enunciado similar es verdadero para cada columna de AB.

> Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A usando pesos de la columna correspondiente de B.

Evidentemente, el número de columnas de A debe corresponder al número de filas en B para que una combinación lineal como $A\mathbf{b}_1$ esté definida. Además, la definición de AB muestra que *AB tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B*.

EJEMPLO 4 Si A es una matriz de 3×5 y B una matriz de 5×2, ¿cuáles son los tamaños de AB y de BA, si tales productos están definidos?

SOLUCIÓN Como A tiene 5 columnas y B tiene 5 filas, el producto AB está definido y es una matriz de 3×2:

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & AB \\ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \\ 3 \times 5 & \text{Hay correspondencia} & 5 \times 2 & & 3 \times 2 \end{array}$$

$$\underbrace{3 \times 5 \quad 5 \times 2}_{\text{Tamaño de } AB}$$

El producto BA *n*o está definido, porque las dos columnas de B no se corresponden con las tres filas de A. ■

La definición de AB es importante para el trabajo teórico y las aplicaciones, pero la siguiente regla ofrece un método más eficiente para calcular cada una de las entradas de AB cuando se resuelven a mano problemas sencillos.

> **REGLA FILA-COLUMNA PARA CALCULAR *AB***
>
> Si el producto AB está definido, entonces la entrada en la fila i y la columna j de AB es la suma de los productos de las entradas correspondientes de la fila i de A y la columna j de B. Si $(AB)_{ij}$ denota la entrada (i, j) en AB, y si A es una matriz de $m \times n$, entonces
>
> $$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Para comprobar esta regla, sea $B = [\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_p]$. La columna j de AB es $A\mathbf{b}_j$, y podemos calcular $A\mathbf{b}_j$ usando la regla fila-vector para calcular $A\mathbf{x}$, como vimos en la sección 1.4. La i-ésima entrada de $A\mathbf{b}_j$ es la suma de los productos de entradas correspondientes de la fila i de A y del vector $\mathbf{b}_j$, que es precisamente el cálculo descrito en la regla para calcular la entrada (i, j) de AB.

EJEMPLO 5 Use la regla fila-columna para calcular dos de las entradas de AB para las matrices del ejemplo 3. Una inspección de los números implicados aclarará cómo los dos métodos para calcular AB producen la misma matriz.

SOLUCIÓN Para encontrar la entrada de la fila 1 y la columna 3 de AB, considere la fila 1 de A y la columna 3 de B. Multiplique las entradas correspondientes y sume los resultados, como se muestra a continuación:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & 2(6) + 3(3) \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & 21 \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

Para la entrada en la fila 2 y la columna 2 de AB, use la fila 2 de A y la columna 2 de B:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & 21 \\ \square & 1(3) + -5(-2) & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & 21 \\ \square & 13 & \square \end{bmatrix}$$

■

EJEMPLO 6 Encuentre las entradas de la segunda fila de AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla fila-columna, las entradas de la segunda fila de AB provienen de la fila 2 de A (y de las columnas de B):

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 6 & -8 & -7 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \square & \square \\ -4+21-12 & 6+3-8 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square \\ 5 & 1 \\ \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Observe que puesto que el ejemplo 6 pedía solamente la segunda fila de AB, se podría haber escrito solamente la segunda fila de A a la izquierda de B para calcular

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta observación acerca de las filas de AB es cierta en general, y es consecuencia de la regla fila-columna. Dejemos que $\text{fila}_i\,(A)$ denote la i-ésima fila de una matriz A. De esta forma,

$$\text{fila}_i\,(AB) = \text{fila}_i\,(A) \cdot B \tag{2}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices

El siguiente teorema lista las propiedades estándar de la multiplicación de matrices. Recuerde que I_m representa la matriz identidad de $m \times m$, y que $I_m\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^m$.

TEOREMA 2

Sea A una matriz de $m \times n$, y sean B y C matrices con tamaños para los que las sumas y los productos indicados están definidos.

a) $A(BC) = (AB)C$ (ley asociativa de la multiplicación)

b) $A(B + C) = AB + AC$ (ley distributiva izquierda)

c) $(B + C)A = BA + CA$ (ley distributiva derecha)

d) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$
para cualquier escalar r

e) $I_mA = A = AI_n$ (identidad para la multiplicación de matrices)

DEMOSTRACIÓN Las propiedades *b*) a *e*) se consideran en los ejercicios. La propiedad *a*) es consecuencia de que la multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones lineales (que son funciones) y se sabe (o es fácil comprobar) que la composición de funciones es asociativa. A continuación se presenta otra demostración de *a*) que se basa en la "definición de columna" del producto de dos matrices. Sea

$$C = [\mathbf{c}_1 \ \cdots \ \mathbf{c}_p]$$

Por la definición de multiplicación de matrices,

$$\begin{aligned} BC &= [\, B\mathbf{c}_1 \quad \cdots \quad B\mathbf{c}_p \,] \\ A(BC) &= [\, A(B\mathbf{c}_1) \quad \cdots \quad A(B\mathbf{c}_p)\,] \end{aligned}$$

Recuerde de la ecuación (1) que la definición de AB hace que $A(B\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$, de manera que

$$A(BC) = [(AB)\mathbf{c}_1 \ \cdots \ (AB)\mathbf{c}_p] = (AB)C \qquad \blacksquare$$

Las leyes asociativa y distributiva de los teoremas 1 y 2 expresan, en esencia, que es posible agregar o eliminar parejas de paréntesis en expresiones matriciales de la misma manera que sucede en el álgebra de números reales. En particular, se puede escribir el producto como ABC y calcularlo ya sea como $A(BC)$ o $(AB)C$.[1] De manera similar, un producto de cuatro matrices $ABCD$ se puede calcular como $A(BCD)$ o $(ABC)D$ o $A(BC)D$, y así sucesivamente. No importa cómo se agrupen las matrices al realizar el cálculo de un producto, siempre y cuando se conserve el orden de izquierda a derecha de las matrices.

El orden de izquierda a derecha en productos es importante porque, en general, AB y BA, *n*o son iguales. Esto no es sorprendente, ya que las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A, mientras que las columnas de BA se construyen a partir de las columnas de B. La posición de los factores en el producto AB se enfatiza al decir que A se *multiplica por la derecha* por B o que B *se multiplica por la izquierda* por A. Si $AB = BA$, se dice que A y B **conmutan** una con la otra.

EJEMPLO 7 Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. Muestre que estas matrices no conmutan. Es decir, compruebe que $AB \neq BA$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

El ejemplo 7 ilustra la primera de la siguiente lista de diferencias importantes entre el álgebra de matrices y el álgebra de números reales. Para ver ejemplos de estas diferencias, consulte los ejercicios 9 a 12.

ADVERTENCIAS:

1. En general, $AB \neq BA$.
2. Las leyes de la cancelación *no* se aplican en la multiplicación de matrices. Es decir, si $AB = AC$, en general *no* es cierto que $B = C$. (Véase el ejercicio 10).
3. Si un producto AB es la matriz cero, en general, *no* se puede concluir que $A = 0$ o $B = 0$. (Véase el ejercicio 12).

Potencias de una matriz

WEB

Si A es una matriz de $n \times n$ y k es un entero positivo, entonces A^k denota el producto de k

[1] Cuando B es cuadrada y C tiene menos columnas que las filas de A, es más eficiente calcular $A(BC)$ en vez de $(AB)C$.

copias de A:

$$A^k = \underbrace{A\cdots A}_{k}$$

Si A es diferente de cero y $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{R}^n$, entonces $A^k\mathbf{x}$ es el resultado de multiplicar repetidamente k veces a $\mathbf{x}$ por la izquierda por A. Si $k = 0$, entonces $A^0\mathbf{x}$ debería ser la misma $\mathbf{x}$. Por consiguiente, A^0 se interpreta como la matriz identidad. Las potencias de matrices son útiles tanto en la teoría como en las aplicaciones (secciones 2.6, 4.9, y más adelante en el libro).

La transpuesta de una matriz

Dada una matriz A de $m \times n$, la **transpuesta** de A es la matriz de $n \times m$, que se denota con A^T, cuyas columnas se forman a partir de las filas correspondientes de A.

EJEMPLO 8 Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \\ 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$ ■

TEOREMA 3

Sean A y B matrices cuyos tamaños son adecuados para las siguientes sumas y productos.

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) Para cualquier escalar r, $(rA)^T = rA^T$

d) $(AB)^T = B^TA^T$

Las demostraciones de *a*) a *c*) son directas y se omiten. Para *d*), véase el ejercicio 33. Por lo regular, $(AB)^T$ no es igual a A^TB^T, aun cuando A y B tengan tamaños tales que el producto A^TB^T esté definido.

La generalización del teorema 3*d*) a productos de más de dos factores puede expresarse con palabras de la siguiente forma:

La transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en orden *inverso*.

Los ejercicios incluyen ejemplos numéricos que ilustran las propiedades de las transpuestas.

NOTAS NUMÉRICAS

1. La manera más rápida de obtener AB en una computadora depende de la forma en que la computadora guarde las matrices en su memoria. Los algoritmos estándar de gran eficiencia, tales como los de LAPACK, calculan AB por columnas, como en nuestra definición del producto. (Una versión de LAPACK escrita en C++ calcula AB por filas).
2. La definición de AB se presta en sí misma al procesamiento paralelo en una computadora. Las columnas de B se asignan individualmente o en grupos a diferentes procesadores que, de manera independiente, y por lo tanto simultánea, calculan las columnas correspondientes de AB.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Puesto que los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden considerar como matrices de $n \times 1$, las propiedades de las transpuestas del teorema 3 también se aplican a vectores. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Calcule $(A\mathbf{x})^T$, $\mathbf{x}^TA^T$, $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$ y $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$. ¿Está definida $A^T\mathbf{x}^T$?

2. Sean A una matriz de 4×4 y sea $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbb{R}^4$. ¿Cuál es la forma más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$? Cuente las multiplicaciones.

2.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, calcule cada suma o producto si la matriz está definida. Si alguna expresión no está definida, explique por qué. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. $-2A$, $B - 2A$, AC, CD
2. $A + 3B$, $2C - 3E$, DB, EC

En lo que resta de este conjunto de ejercicios y los que siguen, suponga que todas las expresiones matriciales están definidas. Es decir, los tamaños de las matrices y los vectores implicados "ajustan" de manera correcta.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule $3I_2 - A$ y $(3I_2)A$.
4. Calcule $A - 5I_3$ y $(5I_3)A$, donde
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 5 y 6 calcule el producto AB de dos maneras: *a*) con la definición, donde $A\mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{b}_2$ se calculan por separado, y *b*) por la regla de la fila-columna para obtener AB.

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$
6. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$
7. Si A es una matriz de 5×3 y el producto AB es 5×7, ¿cuál es el tamaño de B?
8. ¿Cuántas filas tiene B si BC es una matriz de 5×4?
9. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k, si los hay, harán que $AB = BA$?
10. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Compruebe que $AB = AC$ y, sin embargo, $B \neq C$.
11. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule AD y DA. Explique cómo cambian las columnas o filas de A cuando se multiplica por D por la derecha o por la izquierda. Encuentre una matriz B de 3×3, que no sea la matriz identidad o la matriz cero, tal que $AB = BA$.
12. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$. Construya una matriz B de 2×2 tal que AB sea igual a la matriz cero. Utilice para B dos diferentes columnas no nulas (distintas de cero).

13. Sean $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_p$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sea Q una matriz de $m \times n$. Escriba la matriz $[Q\mathbf{r}_1 \ \cdots \ Q\mathbf{r}_p]$ como un *producto* de dos matrices (ninguna de ellas igual a la matriz identidad).

14. Sea U la matriz de 3×2 de costos descrita en el ejemplo 6 de la sección 1.8. La primera columna de U lista los costos por dólar de producción para elaborar el producto B, y la segunda columna lista los costos por dólar de producción para el artículo C. (Los costos están por categorías de materiales, mano de obra y gastos indirectos). Sea $\mathbf{q}_1$ un vector en $\mathbb{R}^2$ que liste la producción (medida en dólares) de los productos B y C manufacturados durante el primer trimestre del año, y sean $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ y $\mathbf{q}_4$ los vectores análogos que listan las cantidades de productos B y C manufacturados en el segundo, tercero y cuarto trimestres, respectivamente. Dé una descripción económica de los datos en la matriz UQ, donde $Q = \{\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3 \quad \mathbf{q}_4\}$.

Los ejercicios 15 y 16 tratan de matrices arbitrarias A, B y C para las cuales las sumas y los productos indicados están definidos. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

15. *a*) Si A y B son matrices de 2×2 con columnas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, respectivamente, entonces $AB = [\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2]$.

b) Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de B usando los pesos de la columna correspondiente de A.

c) $AB + AC = A(B + C)$

d) $A^T + B^T = (A + B)^T$

e) La transpuesta de un producto de matrices es igual al producto de sus transpuestas en el mismo orden.

16. *a*) La primera fila de AB es la primera fila de A multiplicada por B por la derecha.

b) Si A y B son matrices de 3×3 y $B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3]$, entonces $AB = [A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3]$.

c) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $(A^2)^T = (A^T)^2$

d) $(ABC)^T = C^TA^TB^T$

e) La transpuesta de una suma de matrices es igual a la suma de sus transpuestas.

17. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$, determine la primera y la segunda columnas de B.

18. Suponga que la tercera columna de B está conformada en su totalidad por ceros. ¿Qué se puede decir acerca de la tercera columna de AB?

19. Suponga que la tercera columna de B es la suma de las dos primeras columnas. ¿Qué se puede decir acerca de la tercera columna de AB? ¿Por qué?

20. Suponga que las dos primeras columnas de B, $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, son guales. ¿Qué se puede decir acerca de las columnas de AB? ¿Por qué?

21. Suponga que la última columna de AB está conformada en su totalidad por ceros, pero B, por sí sola, no tiene columnas de ceros. ¿Qué se puede decir acerca de las columnas de A?

22. Demuestre que si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces también lo son las columnas de AB.

23. Suponga que $CA = I_n$ (la matriz identidad de $n \times n$). Demuestre que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Explique por qué A no puede tener más columnas que filas.

24. Suponga que A es una matriz de $3 \times n$ cuyas columnas generan a $\mathbb{R}^3$. Explique cómo construir una matriz D de $n \times 3$ tal que $AD = I_3$.

25. Suponga que A es una matriz de $m \times n$, y que existan las matrices C y D de $n \times m$, tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Demuestre que $m = n$ y $C = D$. [*Sugerencia:* Piense en el producto CAD].

26. Suponga que $AD = I_m$ (la matriz identidad de $m \times m$). Demuestre que para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. [*Sugerencia:* Piense en la ecuación $AD\mathbf{b} = \mathbf{b}$]. Explique por qué A no puede tener más filas que columnas.

En los ejercicios 27 y 28, considere los vectores en $\mathbb{R}^n$ como matrices de $n \times 1$. Para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, el producto de matrices $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ es una matriz de 1×1, que se llama **producto escalar**, o **producto interno**, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Por lo general, se escribe como un único número real sin corchetes. El producto de matrices $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ es una matriz de $n \times n$, que se llama **producto exterior** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Los productos $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ se presentarán más adelante en el libro.

27. Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ y $\mathbf{v}\mathbf{u}^T$.

28. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^n$, ¿cómo se relacionan $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$? ¿Y cómo se relacionan $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ y $\mathbf{v}\mathbf{u}^T$?

29. Compruebe el teorema 2*b*) y 2*c*). Use la regla fila-columna. La entrada (i, j) de $A(B + C)$ se puede escribir como

$$a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj})$$

o

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

30. Compruebe el teorema 2*d*). [*Sugerencia:* La entrada (i, j) en $(ra_{i1})b_{1j} + \cdots + (ra_{in})b_{nj}$].

31. Demuestre que $I_mA = A$, donde A es una matriz de $m \times n$. Suponga que $I_m\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^m$.

32. Demuestre que $AI = A$ cuando A es una matriz de $m \times n$. [*Sugerencia:* Use la definición (de columna) de AI_n].

33. Demuestre el teorema 3*d*). [*Sugerencia:* Considere la j-ésima fila de $(AB)^T$].

34. Dé una fórmula para $(AB\mathbf{x})^T$, donde $\mathbf{x}$ es un vector, y A y B son matrices con los tamaños adecuados.

35. **[M]** Lea la documentación de su programa de matrices y escriba los comandos que producirían las siguientes matrices (sin introducir cada entrada de la matriz).

a) Una matriz de 4×5 de ceros.

b) Una matriz de 5×3 de unos.

c) La matriz identidad de 5×5.

d) Una matriz diagonal de 4×4, con entradas diagonales 3, 4, 2, 5.

Una forma útil de someter a prueba ideas nuevas o de hacer conjeturas en álgebra de matrices es realizar cálculos con matrices seleccionadas en forma aleatoria. La comprobación de una propiedad para unas cuantas matrices no demuestra que la propiedad sea válida en general, pero permite que la propiedad sea más creíble. Además, es posible descubrir si una propiedad es falsa realizando unos cuantos cálculos.

36. **[M]** Escriba el comando o los comandos necesarios para crear una matriz de 5×6 con entradas aleatorias. ¿Dentro de qué rango de números se encuentran las entradas? Diga cómo crear aleatoriamente una matriz de 4×4 con entradas enteras entre -9 y 9. [*Sugerencia:* Si x es un número aleatorio tal que $0 < x < 1$, entonces $-9.5 < 19(x - .5) < 9.5$].

37. **[M]** Construya matrices aleatorias A y B de 4×4, y compruebe si $AB = BA$. La mejor manera de hacer esto es calcular $AB - BA$ y comprobar si esta diferencia es la matriz cero. Después compruebe $AB - BA$ para tres pares más de matrices aleatorias de 4×4. Escriba un informe de sus conclusiones.

38. **[M]** Construya una matriz aleatoria A de 5×5 y compruebe si $(A + I)(A - I) = A^2 - I$. La mejor manera de hacer esto es calcular $(A + I)(A - I) - (A^2 - I)$, y verificar que esta diferencia sea la matriz cero. Realícelo para tres matrices al azar. Luego, someta a prueba $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ de la misma forma para tres pares de matrices aleatorias de 4×4. Escriba un informe de sus conclusiones.

39. **[M]** Use al menos tres pares de matrices aleatorias A y B de 4×4 para someter a prueba las igualdades $(A + B)^T = A^T + B^T$ y $(AB)^T = B^TA^T$, así como $(AB)^T = A^TB^T$ (Véase el ejercicio 37). Escriba un informe de sus conclusiones. [*Nota:* La mayoría de los programas de matrices usan A' para representar A^T].

40. **[M]** Sea

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule S^k para $k = 2, \ldots, 6$.

41. **[M]** Describa con palabras qué ocurre cuando se calcula A^5, A^{10}, A^{20} y A^{30} para

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/6 & 7/12 \end{bmatrix}$$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$. De manera que $(A\mathbf{x})^T = [-4 \quad 2]$. También,

$$\mathbf{x}^TA^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Las cantidades $(A\mathbf{x})^T$ y $\mathbf{x}^TA^T$ son iguales, por el teorema 3*d*). Después,

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 15 \\ 15 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = [25 + 9] = 34$$

Una matriz de 1×1 como $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ generalmente se escribe sin corchetes. Por último, $A^T\mathbf{x}^T$ no está definida, ya que $\mathbf{x}^T$ no tiene dos filas que correspondan a las dos columnas de A^T.

2. La manera más rápida de calcular $A^2\mathbf{x}$ es calculando $A(A\mathbf{x})$. El producto $A\mathbf{x}$ requiere 16 multiplicaciones, 4 por cada entrada, y $A(A\mathbf{x})$ requiere 16 más. En contraste, el producto A^2 requiere 64 multiplicaciones, 4 por cada una de las 16 entradas en A^2. Después de eso, $A^2\mathbf{x}$ requiere 16 multiplicaciones más, para un total de 80.

2.2 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

El álgebra de matrices brinda herramientas para manejar ecuaciones matriciales y crear diversas fórmulas útiles, de manera similar a lo que sucede en el álgebra con números reales. En esta sección se investiga el análogo matricial del recíproco, o inverso multiplicativo, de un número diferente de cero.

Recuerde que el inverso multiplicativo de un número como 5 es $1/5$ o 5^{-1}. Este inverso satisface la ecuación

$$5^{-1} \cdot 5 = 1 \quad \text{y} \quad 5 \cdot 5^{-1} = 1$$

La generalización matricial requiere *ambas* ecuaciones y evita la notación con diagonales (para división), ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Además, una generalización completa solo es posible si las matrices implicadas son cuadradas.[1]

Se dice que una matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe otra matriz C de $n \times n$ tal que

$$CA = I \quad \text{y} \quad AC = 1$$

donde $I = I_n$, la matriz identidad de $n \times n$. En este caso, C es una **inversa** de A. En efecto, C está determinada únicamente por A, ya que si B fuera otra inversa de A, entonces $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Esta inversa única se denota mediante A^{-1}, tal que,

$$\boxed{A^{-1}A = I \quad \text{y} \quad AA^{-1} = I}$$

Una matriz que *no* es invertible en ocasiones se llama **matriz singular**, y una matriz invertible se llama **matriz no singular**.

EJEMPLO 1 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ entonces

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $C = A^{-1}$. ■

A continuación se presenta una fórmula sencilla para la inversa de una matriz de 2×2, junto con una prueba para saber si existe la inversa.

TEOREMA 4

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces A *no* es invertible.

La sencilla demostración del teorema 4 se esboza en los ejercicios 25 y 26. La cantidad $ad - bc$ se llama **determinante** de A, y se escribe como

$$\boxed{\det A = ad - bc}$$

El teorema 4 establece que una matriz A de 2×2 es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.

[1] Podría decirse que una matriz A de $m \times n$ es invertible si existen matrices C y D de $n \times m$, tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Sin embargo, estas ecuaciones implican que A es cuadrada y $C = D$. Por lo tanto, A es invertible como ya se definió. Véase los ejercicios 23 a 25 en la sección 2.1.

EJEMPLO 2 Encuentre la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Ya que det $A = 3(6) - 4(5) = -2 \neq 0$, A es invertible, y

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/(-2) & -4/(-2) \\ -5/(-2) & 3/(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Las matrices invertibles son indispensables en álgebra lineal, sobre todo para cálculos algebraicos y deducciones de fórmulas, como en el teorema siguiente. En ocasiones, una matriz inversa permite entender mejor un modelo matemático de alguna situación de la vida real, como en el ejemplo 3 que se presenta un poco más adelante.

TEOREMA 5

Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces, para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ tiene la solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN Tome cualquier $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$. Existe una solución porque cuando se sustituye $A^{-1}\mathbf{b}$ por $\mathbf{x}$, se tiene $A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Así que $A^{-1}\mathbf{b}$ es una solución. Para probar que la solución es única, demuestre que si $\mathbf{u}$ es cualquier solución, entonces $\mathbf{u}$ debe ser, de hecho, $A^{-1}\mathbf{b}$. En efecto, si $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, podemos multiplicar ambos miembros por A^{-1} y obtener

$$A^{-1}A\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b}, \quad I\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b} \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Una viga elástica horizontal tiene soportes en cada extremo y está sujeta a fuerzas en los puntos 1, 2 y 3, como indica la figura 1. Sea $\mathbf{f}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que liste las fuerzas en estos puntos, y sea $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que liste las magnitudes de deflexión (es decir, de movimiento) de la viga en los tres puntos. Con base en la ley de Hooke de la física, se puede demostrar que

$$\mathbf{y} = D\mathbf{f}$$

donde D es una *matriz de flexibilidad*. Su inversa se denomina *matriz de rigidez*. Describa el significado físico de las columnas de D y D^{-1}.

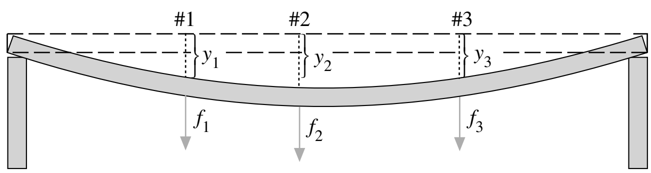


FIGURA 1 Deflexión de una viga elástica.

SOLUCIÓN Escriba $I_3 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3]$ y observe que

$$D = DI_3 = [D\mathbf{e}_1 \quad D\mathbf{e}_2 \quad D\mathbf{e}_3]$$

Interprete el vector $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ como una fuerza unitaria aplicada hacia abajo en el punto 1 (con fuerza cero en los otros dos puntos). De esta forma, $D\mathbf{e}_1$, la primera columna de D, lista las deflexiones de la viga debidas a una fuerza unitaria en el punto 1. Descripciones similares son válidas para la segunda y tercera columnas de D.

Para estudiar la matriz de rigidez D^{-1}, observe que la ecuación $\mathbf{f} = D^{-1}\mathbf{y}$ calcula un vector de fuerza $\mathbf{f}$ cuando se da un vector de deflexión $\mathbf{y}$. Escriba

$$D^{-1} = D^{-1}I_3 = [D^{-1}\mathbf{e}_1 \quad D^{-1}\mathbf{e}_2 \quad D^{-1}\mathbf{e}_3]$$

Ahora interprete $\mathbf{e}_1$ como un vector de deflexión. De esta forma, $D^{-1}\mathbf{e}_1$ lista las fuerzas que crean la deflexión. Es decir, la primera columna de D^{-1} lista las fuerzas que deben aplicarse en los tres puntos para producir una deflexión unitaria en el punto 1 y deflexión cero en los otros puntos. De manera similar, las columnas 2 y 3 de D^{-1} listan las fuerzas requeridas para producir deflexiones unitarias en los puntos 2 y 3, respectivamente. En cada columna, una o dos de las fuerzas deben ser negativas (apuntan hacia arriba) para producir una deflexión unitaria en el punto deseado y deflexiones cero en los otros dos puntos. Si se mide la flexibilidad, por ejemplo, en pulgadas de deflexión por libra de carga, entonces las entradas de la matriz de rigidez están dadas en libras de carga por pulgada de deflexión. ■

La fórmula del teorema 5 se utiliza muy pocas veces para resolver en forma numérica una ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ porque la reducción por filas de $[A \quad \mathbf{b}]$ casi siempre es más rápida. (La reducción por filas también es más precisa, en general, cuando los cálculos requieren el redondeo de los números). Una posible excepción es el caso 2×2, ya que los cálculos mentales para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en ocasiones resultan más fáciles usando la fórmula para A^{-1}, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Use la inversa de la matriz A del ejemplo 2 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 3 \\ 5x_1 + 6x_2 &= 7 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Este sistema es equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, por lo que

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$ ■

El siguiente teorema aporta tres datos útiles acerca de las matrices invertibles.

TEOREMA 6

a) Si A es una matriz invertible, entonces A^{-1} es invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

b) Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces también lo es AB, y la inversa de AB es el producto de las inversas de A y B en el orden opuesto. Es decir,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

c) Si A es una matriz invertible, también lo es A^T, y la inversa de A^T es la transpuesta de A^{-1}. Es decir,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

DEMOSTRACIÓN Para comprobar el enunciado *a*), se debe encontrar una matriz C tal que

$$A^{-1}C = I \quad \text{y} \quad CA^{-1} = I$$

De hecho, estas ecuaciones se satisfacen colocando a A en lugar de C. Por lo tanto, A^{-1} es invertible y A es su inversa. A continuación, para demostrar el enunciado *b*), se calcula:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Un cálculo similar indica que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. En el enunciado *c*) utilice el teorema 3*d*), lea de derecha a izquierda, $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$. De manera similar, $A^T(A^{-1})^T = I^T = I$. Por lo tanto, A^T es invertible, y su inversa es $(A^{-1})^T$. ■

La siguiente generalización del teorema 6*b*) se necesitará más adelante.

El producto de matrices invertibles de $n \times n$ es invertible, y la inversa es el producto de sus inversas en orden opuesto.

Existe una conexión importante entre las matrices invertibles y las operaciones de fila que conduce a un método para calcular inversas. Como se verá, una matriz invertible A es equivalente por filas a una matriz identidad, y es posible encontrar A^{-1} *observando la reducción por filas de A a I*.

Matrices elementales

Una **matriz elemental** es aquella que se obtiene al realizar una única operación elemental de fila sobre una matriz identidad. El siguiente ejemplo ilustra los tres tipos de matrices elementales.

EJEMPLO 5 Sean

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Calcule E_1A, E_2A y E_3A, y describa cómo se pueden obtener estos productos por medio de operaciones elementales de fila sobre A.

SOLUCIÓN Compruebe que

$$E_1A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4a & h-4b & i-4c \end{bmatrix}, \quad E_2A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix},$$

$$E_3A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{bmatrix}.$$

Al sumar a la fila 3 la fila 1 de A multiplicada por -4, se obtiene E_1A. (Esta es una operación de remplazo de filas). Con un intercambio de las filas 1 y 2 de A se obtiene E_2A, y multiplicando la fila 3 de A por 5 se obtiene E_3A. ■

La multiplicación izquierda (es decir, multiplicación por la izquierda) por E_1 en el ejemplo 5 tiene el mismo efecto en cualquier matriz de $3 \times n$. Esta operación suma a la fila 3 la fila 1 multiplicada por -4. En particular, ya que $E_1 \cdot I = E_1$, vemos que E_1 *se autoproduce* mediante esta misma operación de fila sobre la identidad. Así, el ejemplo 5 ilustra la siguiente propiedad general de las matrices elementales. Véase los ejercicios 27 y 28.

> Si se realiza una operación elemental de fila con una matriz A de $m \times n$, la matriz resultante se puede escribir como EA, donde la matriz E de $m \times m$ se crea al realizar la misma operación de fila sobre I_m.

Puesto que las operaciones de fila son reversibles, como se demostró en la sección 1.1, las matrices elementales son invertibles, porque si E se produce aplicando una operación de fila sobre I, entonces existe otra operación de fila del mismo tipo que convierte a E de nuevo en I. Por lo tanto, existe una matriz elemental F tal que $FE = I$. Puesto que E y F corresponden a operaciones inversas, también $EF = I$.

Toda matriz elemental E es invertible. La inversa de E es la matriz elemental del mismo tipo que transforma a E de nuevo en I.

EJEMPLO 6 Encuentre la inversa de $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Para transformar E_1 en I, sume la fila 1 multiplicada por $+4$ a la fila 3. La matriz elemental que hace esto es

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ +4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ■

El siguiente teorema ofrece la mejor manera de "visualizar" una matriz invertible, y conduce de inmediato a un método para encontrar la inversa de una matriz.

TEOREMA 7

Una matriz A de $n \times n$ es invertible si y solo si A es equivalente por filas a I_n, y, en este caso, cualquier secuencia de operaciones elementales de fila que reduzca A a I_n también transforma a I_n en A^{-1}.

DEMOSTRACIÓN Suponga que A es invertible. Entonces, como la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para toda $\mathbf{b}$ (teorema 5), A tiene una posición pivote en cada fila (teorema 4 de la sección 1.4). Puesto que A es cuadrada, las n posiciones pivote deben estar sobre la diagonal, lo que implica que la forma escalonada reducida de A es $\mathrm{I_n}$. Es decir, $A \sim I_n$.

A la inversa, ahora suponga que $A \sim I_n$. Entonces, puesto que cada paso de la reducción por filas de A corresponde a una multiplicación izquierda por una matriz elemental, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_P$ tales que

$$A \sim E_1 A \sim E_2(E_1 A) \sim \cdots \sim E_p(E_{p-1} \cdots E_1 A) = I_n$$

Es decir,

$$E_p \cdots E_1 A = I_n \tag{1}$$

Puesto que el producto $E_p, \ldots, E_1$ de matrices invertibles es invertible, (1) conduce a

$$\begin{aligned} (E_p \cdots E_1)^{-1}(E_p \cdots E_1)A &= (E_p \cdots E_1)^{-1} I_n \\ A &= (E_p \cdots E_1)^{-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es invertible, porque es la inversa de una matriz invertible (teorema 6). También,

$$A^{-1} = [\,(E_p \cdots E_1)^{-1}\,]^{-1} = E_p \cdots E_1$$

Así, $A^{-1} = E_p \cdots E_1 \cdot I_n$, lo que indica que A^{-1} resulta de aplicar $E_1, \ldots, E_P$ sucesivamente a I_n. Esta es la misma secuencia en (1) que redujo A a I_n. ■

Un algoritmo para determinar A^{-1}

Si colocamos A e I lado a lado para formar una matriz aumentada $[A \quad I]$, entonces las operaciones de fila en esta matriz producen operaciones idénticas sobre A e I. De acuerdo con el teorema 7, hay operaciones de fila que transforman a A en I_n y a I_n en A^{-1}, o A no es invertible.

ALGORITMO PARA DETERMINAR A^{-1}

Reduzca por filas la matriz aumentada $[A \quad I]$. Si A es equivalente por filas a I, entonces $[A \quad I]$ es equivalente por filas a $[I \quad A^{-1}]$. De otra manera, A no tiene inversa.

EJEMPLO 7 Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$, si acaso existe.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
[\,A \quad I\,] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

El teorema 7 señala que, como $A \sim I$, A es invertible, y

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

Es buena idea comprobar la respuesta final:

$$
AA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

No es necesario comprobar que $A^{-1}A = I$, ya que A es invertible. ■

Otro punto de vista de la inversión de matrices

Denote las columnas de I_n por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. De esta forma, la reducción por filas de $[A \quad I]$ a $[I \quad A^{-1}]$ se puede ver como la solución simultánea de los n sistemas

$$
A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n \tag{2}
$$

donde todas las "columnas aumentadas" de estos sistemas se han colocado al lado de A para formar $[A \quad \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \;\cdots\; \mathbf{e}_n] = [A \quad I]$. La ecuación $AA^{-1} = I$ y la definición de multiplicación de matrices indican que las columnas de A^{-1} son precisamente las soluciones de los sistemas de (2). Esta observación es útil porque algunos problemas aplicados requieren encontrar solamente una o dos columnas de A^{-1}. En este caso, solo se necesita resolver los sistemas correspondientes en (2).

WEB

NOTAS NUMÉRICAS

En la práctica, rara vez se calcula A^{-1}, a menos que se necesiten las entradas de A^{-1}. Calcular tanto A^{-1} como $A^{-1}\mathbf{b}$ requiere aproximadamente tres veces más operaciones aritméticas que resolver con reducción por filas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y la reducción por filas quizá resulte más precisa.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Utilice determinantes para establecer cuáles de las siguientes matrices son invertibles:

   a) $\begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ *c*) $\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

2. Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 6 \\ 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, si existe.

2.2 EJERCICIOS

Encuentre las inversas de las matrices en los ejercicios 1 a 4.

1. $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

5. Utilice la inversa que encontró en el ejercicio 1 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

6. Utilice la inversa que encontró en el ejercicio 3 para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= -9 \\ -6x_1 - 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

7. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

   a) Determine A^{-1} y utilícela para resolver las ecuaciones

   $$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_4$$

   b) Las cuatro ecuaciones del inciso *a*) se pueden resolver con el *mismo* conjunto de operaciones de fila, ya que la matriz de coeficientes es la misma en cada caso. Resuelva las cuatro ecuaciones del inciso *a*) mediante la reducción por filas de la matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4]$.

8. Suponga que P es invertible y $A = PBP^{-1}$. Determine B en términos de A.

En los ejercicios 9 y 10, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

9. *a*) Para que una matriz B sea la inversa de A, las ecuaciones $AB = I$ y $BA = I$ deben ser verdaderas.

   b) Si A y B son de $n \times n$ e invertibles, entonces $A^{-1}B^{-1}$ es la inversa de AB.

   c) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $ab - cd \neq 0$, entonces A es invertible.

   d) Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para *toda* $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.

   e) Toda matriz elemental es invertible.

10. *a*) Si A es invertible, entonces las operaciones elementales de fila que reducen A a la identidad I_n también reducen A^{-1} a I_n.

    b) Si A es invertible, entonces la inversa A^{-1} es A misma.

    c) Un producto de matrices invertibles de $n \times n$ es invertible, y la inversa del producto es el producto de sus inversas en el mismo orden.

    d) Si A es una matriz de $n \times n$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ es consistente para toda $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces A es invertible. Nota: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ representa las columnas de la matriz identidad.

    e) Si A puede reducirse por filas a la matriz identidad, entonces A debe ser invertible.

11. Sea A una matriz invertible de $n \times n$, y sea B una matriz de $n \times p$. Demuestre que la ecuación $AX = B$ tiene una solución única $A^{-1}B$.

12. Utilice álgebra de matrices para demostrar que si A es invertible y D satisface $AD = I$, entonces $D = A^{-1}$.

13. Suponga que $AB = AC$, donde B y C son matrices de $n \times p$ y A es invertible. Demuestre que $B = C$. ¿Esto es cierto, en general, cuando A no es invertible?

14. Suponga que $(B - C)D = 0$, donde B y C son matrices de $m \times n$ y D es invertible. Demuestre que $B = C$.

15. Sea A una matriz invertible de $n \times n$, y sea B una matriz de $n \times p$. Explique por qué $A^{-1}B$ se puede calcular por reducción de filas:

Si $[A \quad B] \sim \cdots \sim [I \quad X]$, entonces $X = A^{-1}B$.

Si A es mayor de 2×2, entonces la reducción por filas de $[A \quad B]$ es mucho más rápida que calcular a A^{-1} y a $A^{-1}B$.

16. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$, B es invertible y AB es invertible. Demuestre que A es invertible. [*Sugerencia:* Considere que $C = AB$, y despeje A en esta ecuación].

17. Suponga que A, B y C son matrices invertibles de $n \times n$. Demuestre que ABC también es invertible al obtener una matriz D tal que $(ABC)D = I$ y $D(ABC) = I$.

18. Resuelva la ecuación $AB = BC$ para A, suponiendo que A, B y C son matrices cuadradas y B es invertible.

19. Si A, B y C son matrices invertibles $n \times n$, ¿la ecuación $C^{-1}(A + X)B^{-1} = I_n$ tiene una solución, X? Si es así, encuéntrela.

20. Suponga que A, B y X son matrices de $n \times n$ con A, X y $A - AX$ invertibles, y suponga que

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \tag{3}$$

a) Explique por qué B es invertible.

b) Despeje X en la ecuación (3). Si se necesita invertir una matriz, explique por qué esta matriz es invertible.

21. Explique por qué las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes cuando A es invertible.

22. Explique por qué las columnas de una matriz A de $n \times n$ generan a $\mathbb{R}^n$ cuando A es invertible. [*Sugerencia:* Repase el teorema 4 de la sección 1.4].

23. Suponga que A es de $n \times n$ y que la ecuación $A\mathbf{x} = 0$ tiene solamente la solución trivial. Explique por qué A tiene n columnas pivote y es equivalente por filas a I_n. De acuerdo con el teorema 7, esto indica que A debe ser invertible. (Este ejercicio y el 24 se mencionarán en la sección 2.3).

24. Suponga que para una matriz A de $n \times n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$. Explique por qué A debe ser invertible. [*Sugerencia*: ¿A es equivalente por filas a I_n?]

Los ejercicios 25 y 26 demuestran el teorema 4 para $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

25. Demuestre que si $ad - bc = 0$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene más de una solución. ¿Por qué esto implica que A no es invertible? [*Sugerencia:* Primero, considere $a = b = 0$. Después, si a y b no son ambas cero, considere el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$].

26. Demuestre que si $ad - bc \neq 0$, la fórmula para A^{-1} funciona.

Los ejercicios 27 y 28 demuestran casos especiales de los hechos acerca de matrices elementales establecidos en el recuadro que sigue al ejemplo 5. Aquí A es una matriz de 3×3 e $I = I_3$. (Una demostración general requeriría un poco más de notación).

27. Sea A una matriz de 3×3.

a) Use la ecuación (2) de la sección 2.1 para demostrar que $\text{fila}_i(A) = \text{fila}_i(I) \cdot A$, para $i = 1, 2, 3$.

b) Demuestre que si las filas 1 y 2 de A se intercambian, entonces el resultado se puede escribir como EA, donde E es una matriz elemental formada al intercambiar las filas 1 y 2 de I.

c) Demuestre que si la fila 3 de A se multiplica por 5, entonces el resultado se puede escribir como EA, donde E se forma al multiplicar la fila 3 de I por 5.

28. Suponga que se remplaza la fila 2 de A por $\text{fila}_2(A) - 3 \cdot \text{fila}_i(A)$. Demuestre que el resultado es EA, donde E se forma a partir de I al remplazar $\text{fila}_2(I)$ por $\text{fila}_2(I) - 3 \cdot \text{fila}_1(A)$.

Encuentre las inversas de las matrices en los ejercicios 29 a 32, si existen. Use el algoritmo presentado en esta sección.

29. $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -7 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

33. Use el algoritmo de esta sección para encontrar las inversas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea A la matriz de $n \times n$ correspondiente, y sea B su inversa. Infiera la forma de B, y después demuestre que $AB = I$.

34. Repita la estrategia del ejercicio 33 para inferir la inversa B de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & & 0 \\ 3 & 3 & 3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $AB = I$.

35. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.

36. **[M]** Sea $A = \begin{bmatrix} -25 & -9 & -27 \\ 536 & 185 & 537 \\ 154 & 52 & 143 \end{bmatrix}$. Encuentre la segunda y tercera columnas de A^{-1} sin calcular la primera columna.

37. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. Construya una matriz C de 2×3 (por prueba y error) usando sólo 1, -1 y 0 como entradas, de tal forma que $CA = I_2$. Calcule AC y observe que $AC \neq I_3$.

38. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Construya una matriz D, de 4×2, usando solo 1 y 0 como entradas, de tal forma que $AD = I_2$. ¿Es posible que $CA = I_4$ para alguna matriz C de 4×2? ¿Por qué?

39. **[M]** Sea

$$D = \begin{bmatrix} .011 & .003 & .001 \\ .003 & .009 & .003 \\ .001 & .003 & .011 \end{bmatrix}$$

una matriz de flexibilidad, con la flexibilidad medida en pulgadas por libra. Suponga que se aplican fuerzas de 40, 50 y 30 lb sobre los puntos 1, 2 y 3, respectivamente, en la figura 1 del ejemplo 3. Encuentre las deflexiones correspondientes.

40. **[M]** Encuentre la matriz de rigidez D^{-1} para la D del ejercicio 39. Liste las fuerzas que se necesitan para producir una deflexión de .04 pulgadas en el punto 3, con deflexión cero en los otros puntos.

41. **[M]** Sea

$$D = \begin{bmatrix} .0130 & .0050 & .0020 & .0010 \\ .0050 & .0100 & .0040 & .0020 \\ .0020 & .0040 & .0100 & .0050 \\ .0010 & .0020 & .0050 & .0130 \end{bmatrix}$$

la matriz de flexibilidad para una viga elástica, como la del ejemplo 3, con cuatro puntos en los que se aplican fuerzas. Las unidades son centímetros por newton de fuerza. Las mediciones en los cuatro puntos identifican deflexiones de .07, .12, .16 y .12 cm. Determine las fuerzas presentes en los cuatro puntos.

42. **[M]** Con D como en el ejercicio 41, determine las fuerzas que producen una deflexión de .22 cm en el segundo punto de la viga, con deflexión cero en los otros tres puntos. ¿Cómo están relacionadas la respuesta al problema y las entradas de D^{-1}? [*Sugerencia:* Primero conteste la pregunta para una deflexión de 1 cm en el segundo punto].

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. *a*) $\det \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - (-9) \cdot 2 = 18 + 18 = 36$. El determinante es diferente de cero, de manera que la matriz es invertible.

b) $\det \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 4 \cdot 5 - (-9) \cdot 0 = 20 \neq 0$. La matriz es invertible.

c) $\det \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = 6 \cdot 6 - (-9)(-4) = 36 - 36 = 0$. La matriz no es invertible.

2.
$$[\,A \quad I\,] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, $[A \quad I]$ es ahora equivalente por filas a la matriz de la forma $[B\ D]$, donde B es una matriz cuadrada y tiene una fila de ceros. Las operaciones de fila adicionales no van a transformar a B en I, así que el proceso se detiene. A no tiene una inversa.

2.3 CARACTERIZACIONES DE MATRICES INVERTIBLES

Esta sección constituye un repaso de la mayoría de los conceptos estudiados en el capítulo 1, en relación con sistemas de n ecuaciones lineales de n incógnitas y con matrices *cuadradas*. El resultado principal es el teorema 8.

TEOREMA 8

El teorema de la matriz invertible

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes. Es decir, para una A dada, los enunciados son todos ciertos o todos falsos.

a) A es una matriz invertible.

b) A es equivalente por filas a la matriz identidad de $n \times n$.

c) A tiene n posiciones pivote.

d) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

e) Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.

f) La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es uno a uno.

g) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.

h) Las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$.

i) La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

j) Existe una matriz C de $n \times n$ tal que $CA = I$,

k) Existe una matriz D de $n \times n$ tal que $AD = I$.

l) A^T es una matriz invertible.

$$\begin{tikzcd} & (a) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (b) \arrow[ur, Rightarrow] & & (j) \arrow[d, Rightarrow] \\ (c) \arrow[u, Rightarrow] & & (d) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

FIGURA 1

Primero, se necesita alguna notación. Si la veracidad del enunciado *a*) siempre implica que el enunciado *j*) sea cierto, se dice que *a*) *implica* a *j*), y esto se representa como *a*) $\Rightarrow$ *j*). La demostración establecerá el "círculo" de implicaciones que se ilustra en la figura 1. Si cualquiera de estos cinco enunciados es cierto, entonces también lo son los demás. Por último, la demostración relacionará los enunciados restantes del teorema con los enunciados incluidos en este círculo.

DEMOSTRACIÓN Si el enunciado *a*) es cierto, entonces A^{-1} funciona para C en *j*), de manera que *a*) $\Rightarrow$ *j*). Luego, *j*) $\Rightarrow$ *d*) por el ejercicio 23 de la sección 2.1. (Regrese y lea el ejercicio). También, *d*) $\Rightarrow$ *c*) por el ejercicio 23 de la sección 2.2. Si A es cuadrada y tiene n posiciones pivote, entonces los pivotes deben estar sobre la diagonal principal; en tal caso, la forma escalonada reducida de A es I_n. Por lo tanto, *c*) $\Rightarrow$ *b*). También, *b*) $\Rightarrow$ *a*) por el teorema 7 de la sección 2.2. Esto completa el círculo de la figura 1.

$$\begin{tikzcd} & (k) \arrow[dr, Rightarrow] & \\ (a) \arrow[ur, Rightarrow] & & (g) \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

$$(g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)$$

$$(d) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f)$$

$$(a) \Leftrightarrow (l)$$

Ahora, *a*) $\Rightarrow$ *k*) porque A^{-1} funciona para D. También, *k*) $\Rightarrow$ *g*) por el ejercicio 26 de la sección 2.1, y *g*) $\Rightarrow$ *a*) por el ejercicio 24 de la sección 2.2. Así que *g*) y *k*) están vinculados al círculo. Además, *g*), *h*) e *i*) son equivalentes para cualquier matriz, de acuerdo con el teorema 4 de la sección 1.4 y el teorema 12*a*) de la sección 1.9. Por consiguiente, *h*) e *i*) están vinculados al círculo a través de *g*).

Como *d*) está vinculado al círculo, también lo están *e*) y *f*), porque *d*), *e*) y *f*) son todos equivalentes para *cualquier* matriz A. [Véase la sección 1.7 y el teorema 12*b*) de la sección 1.9]. Por último, *a*) $\Rightarrow$ *l*) de acuerdo con el teorema 6*c*) de la sección 2.2, y *l*) $\Rightarrow$ *a*) por el mismo teorema intercambiando A y A^T. Esto completa la demostración. ■

Según el teorema 5 de la sección 2.2, el enunciado *g*) del teorema 8 también se podría escribir como: "La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución *única* para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$". Este enunciado realmente implica a *b*) y, por lo tanto, implica que A es invertible.

El siguiente hecho es consecuencia del teorema 8 y del ejercicio 12 de la sección 2.2.

Sean A y B matrices cuadradas. Si $AB = I$, entonces A y B son invertibles, con $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$.

El teorema de la matriz invertible divide al conjunto de todas las matrices de $n \times n$ en dos clases disjuntas: las matrices invertibles (no singulares) y las matrices no invertibles (singulares). Cada enunciado del teorema describe una propiedad de toda matriz de $n \times n$ invertible. La *negación* de un enunciado del teorema describe una propiedad de toda matriz singular de $n \times n$. Por ejemplo, una matriz singular de $n \times n$ *no* es equivalente por filas a I_n, *no* tiene n posiciones pivote, y tiene columnas linealmente *dependientes*. Las negaciones de los otros enunciados se consideran en los ejercicios.

EJEMPLO 1 Use el teorema de la matriz invertible para determinar si A es invertible:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Por lo que A tiene tres posiciones pivote y, por lo tanto, es invertible, de acuerdo con el enunciado *c*) del teorema de la matriz invertible. ■

El poder del teorema de la matriz invertible radica en las relaciones que establece entre tantos conceptos importantes, tales como la independencia lineal de las columnas de una matriz A y la existencia de soluciones para ecuaciones de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Sin embargo, se debe enfatizar que el teorema de la matriz invertible *se aplica solo a matrices cuadradas*. Por ejemplo, si las columnas de una matriz de 4×3 son linealmente independientes, no puede usarse el teorema de la matriz invertible para obtener cualquier conclusión acerca de la existencia o inexistencia de soluciones a ecuaciones de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Transformaciones lineales invertibles

Recuerde de la sección 2.1 que la multiplicación de matrices corresponde a la composición de transformaciones lineales. Cuando una matriz A es invertible, la ecuación $A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ se puede ver como un enunciado acerca de transformaciones lineales. Véase la figura 2.

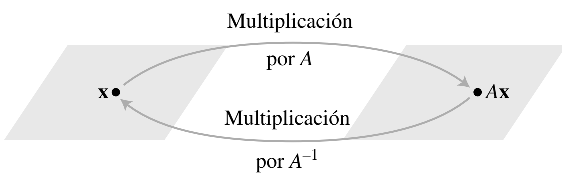


FIGURA 2 A^{-1} transforma $A\mathbf{x}$ de regreso a $\mathbf{x}$.

Se dice que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **invertible** si existe una función $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n \tag{1}$$

$$T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n \tag{2}$$

El siguiente teorema establece que si dicha S existe, es única y debe ser una transformación lineal. Se dice que S es la **inversa** de T y se escribe como T^{-1}.

TEOREMA 9 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea A la matriz estándar para T. Así, T es invertible si y solo si A es una matriz invertible. En tal caso, la transformación lineal S dada por $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ es la única función que satisface las ecuaciones (1) y (2).

DEMOSTRACIÓN Suponga que T es invertible. Entonces (2) indica que T es sobre $\mathbb{R}^n$, porque si $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{x} = S(\mathbf{b})$, entonces $T(\mathbf{x}) = T(S(\mathbf{b})) = \mathbf{b}$, así que toda $\mathbf{b}$ está en el rango de T. Por lo tanto, A es invertible, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible, enunciado *i*).

Por el contrario, suponga que A es invertible y sea $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$. Entonces, S es una transformación lineal y evidentemente satisface (1) y (2). Por ejemplo,

$$S(T(\mathbf{x})) = S(A\mathbf{x}) = A^{-1}(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

Por consiguiente, T es invertible. La demostración de que S es única se describe de manera general en el ejercicio 38. ■

EJEMPLO 2 ¿Qué se puede decir acerca de una transformación lineal T uno a uno de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$?

SOLUCIÓN Las columnas de la matriz estándar A de T son linealmente independientes (según el teorema 12 de la sección 1.9). Por lo que A es invertible, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible, y T mapea $\mathbb{R}^n$ *sobre* $\mathbb{R}^n$. También, T es invertible, según el teorema 9. ■

NOTAS NUMÉRICAS

En la práctica, se puede encontrar ocasionalmente una matriz "casi singular" o **mal condicionada**: una matriz invertible que puede convertirse en singular si algunas de sus entradas se modifican ligeramente. En este caso, es posible que la reducción por filas produzca menos de n posiciones pivote, debido al error de redondeo. Además, los errores de redondeo, algunas veces, hacen que una matriz singular parezca invertible.

WEB

Algunos programas de matrices calculan un **número de condición** para una matriz cuadrada. Cuanto mayor sea el número de condición, más cerca estará la matriz de ser singular. El número de condición de la matriz identidad es 1. Una matriz singular tiene un número de condición infinito. En casos extremos, un programa de matrices podría no distinguir entre una matriz singular y una matriz mal condicionada.

Los ejercicios 41 a 45 ponen de manifiesto que los cálculos de matrices llegan a producir errores sustanciales cuando un número de condición es grande.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Determine si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ es invertible.
2. Suponga que para cierta matriz A de $n \times n$, el enunciado *g*) del teorema de la matriz invertible *no* es verdadero. ¿Qué puede decirse acerca de las ecuaciones de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?
3. Suponga que A y B son matrices de $n \times n$ y que la ecuación $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. ¿Qué puede decirse acerca de la matriz AB?

2.3 EJERCICIOS

A menos que se especifique lo contrario, suponga que en estos ejercicios todas las matrices son de $n \times n$. En los ejercicios 1 a 10, determine cuáles de las matrices son invertibles. Use tan pocos cálculos como sea posible. Justifique sus respuestas.

1. $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 8 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. [**M**] $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & -7 \\ -6 & 9 & 9 & 9 \\ 7 & -5 & 10 & 19 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

10. [**M**] $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 2 & 8 & -8 \\ 7 & 5 & 3 & 10 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & -9 & -5 \\ 8 & 5 & 2 & 11 & 4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12, todas las matrices son $n \times n$. Cada inciso de estos ejercicios es una *implicación* de la forma “si (enunciado 1), entonces (enunciado 2)”. Marque cada implicación como verdadera o falsa, considerando lo siguiente. Una implicación es verdadera si el enunciado 2 es verdadero *siempre* que el enunciado 1 sea cierto. Una implicación es falsa si existe un caso en el que el enunciado 2 es falso, pero el enunciado 1 es verdadero. Justifique sus respuestas.

11. *a*) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial, entonces A es equivalente por filas a la matriz identidad de $n \times n$.

b) Si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$, entonces las columnas son linealmente independientes.

c) Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.

d) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial, entonces A tiene menos de n posiciones pivote.

e) Si A^T no es invertible, entonces A no es invertible.

12. *a*) Si existe una matriz D de $n \times n$ tal que $AD = I$, entonces $DA = I$.

b) Si la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, entonces la forma escalonada reducida de A es I.

c) Si las columnas de A son linealmente independientes, entonces las columnas de A generan a $\mathbb{R}^n$.

d) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ no es uno a uno.

e) Si existe una $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces la solución es única.

13. Una **matriz triangular superior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas *debajo* de la diagonal principal son ceros (como en el ejercicio 8). ¿Cuándo es invertible una matriz triangular superior cuadrada? Justifique su respuesta.

14. Una **matriz triangular inferior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas *arriba* de la diagonal principal son ceros (como en el ejercicio 3). ¿Cuándo es invertible una matriz triangular inferior cuadrada? Justifique su respuesta.

15. ¿Puede ser invertible una matriz de 4×4, cuando sus columnas no generan a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

16. Si una matriz A de $n \times n$ es invertible, entonces las columnas de A^T son linealmente independientes. Explique por qué.

17. ¿Puede una matriz cuadrada con dos columnas idénticas ser invertible? ¿Por qué?

18. ¿Puede una matriz cuadrada con dos filas idénticas ser invertible? ¿Por qué?

19. Si las columnas de una matriz D, de 7×7, son linealmente independientes, ¿qué se puede decir acerca de las soluciones de $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$? ¿Por qué?

20. Si A es una matriz de 5×5 y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^5$, ¿es posible que, para alguna $\mathbf{b}$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga más de una solución? ¿Por qué?

21. Si la ecuación $C\mathbf{u} = \mathbf{v}$ tiene más de una solución para alguna $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, ¿pueden las columnas de la matriz C de $n \times n$ generar a $\mathbb{R}^n$? ¿Por qué?

22. Si las matrices E y F de $n \times n$ tienen la propiedad de que $EF = I$, entonces E y F conmutan. Explique por qué.

23. Suponga que F es una matriz de $n \times n$. Si la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es inconsistente para alguna $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, ¿qué se puede decir acerca de la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{0}$? ¿Por qué?

24. Si una matriz G de $n \times n$ no se puede reducir por filas a I_n, ¿qué se puede decir acerca de las columnas de G? ¿Por qué?

25. Compruebe el enunciado del recuadro antes del ejemplo 1.

26. Explique por qué las columnas de A^2 generan a $\mathbb{R}^n$ siempre que las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes.

27. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, también lo es A. No podrá utilizar el teorema 6*b*), porque no es posible *suponer* que A y B son invertibles. [*Sugerencia:* Existe una matriz W tal que $ABW = I$. ¿Por qué?].

28. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, también B lo es.

29. Si A es una matriz de $n \times n$ y la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es uno a uno, ¿qué más puede decirse acerca de esta transformación? Justifique su respuesta.

30. Si A es una matriz de $n \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene más de una solución para alguna $\mathbf{b}$, entonces la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ no es uno a uno. ¿Qué más se puede decir acerca de esta transformación? Justifique su respuesta.

31. Suponga que A es una matriz de $n \times n$ con la propiedad de que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$. Sin utilizar los teoremas 5 u 8, explique por qué cada ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene, en efecto, exactamente una solución.

32. Suponga que A es una matriz de $n \times n$ con la propiedad de que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial. Sin utilizar el teorema de la matriz invertible, explique directamente por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debe tener una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.

En los ejercicios 33 y 34, T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que T es invertible y encuentre una fórmula para T^{-1}.

33. $T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$

34. $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -2x_1 + 7x_2)$

35. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible. Explique por qué T es tanto uno a uno como sobre $\mathbb{R}^n$. Use las ecuaciones (1) y (2). Después, dé una segunda explicación usando uno o más teoremas.

36. Suponga una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ para algún par de vectores distintos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$. ¿Puede T mapear $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$? ¿Por qué?

37. Suponga que T y U son transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ tales que $T(U(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$. ¿Es cierto que $U(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$? ¿Por qué?

38. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal invertible, y sean S y U funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ y $U(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $U(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v})$ para toda $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$. Esto demostrará que T tiene una inversa única, como se establece en el teorema 9. [*Sugerencia:* Dada cualquier $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, se puede escribir $\boldsymbol{v} = T(\mathbf{x})$ para alguna $\mathbf{x}$. ¿Por qué? Calcule $S(\mathbf{v})$ y $U(\mathbf{v})$].

39. Sea T una transformación lineal que mapea $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$. Demuestre que T^{-1} existe y mapea $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. ¿T^{-1} es también uno a uno?

40. Suponga que T y S satisfacen las ecuaciones de invertibilidad (1) y (2), donde T es una transformación lineal. Demuestre directamente que S es una transformación lineal. [*Sugerencia:* Dadas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $\mathbf{x} = S(\mathbf{u})$, $\mathbf{y} = S(\mathbf{v})$. Entonces, $T(\mathbf{x}) = \boldsymbol{u}$, $T(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. ¿Por qué? Aplique S a ambos miembros de la ecuación $T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x} + \mathbf{y})$. También, considere $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$].

41. **[M]** Suponga que un experimento conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4.5x_1 + 3.1x_2 &= 19.249 \\ 1.6x_1 + 1.1x_2 &= 6.843 \end{aligned} \tag{3}$$

a) Resuelva el sistema (3), y después resuelva el sistema (4) que se presenta a continuación, en el cual los datos a la derecha se redondearon a dos decimales. En cada caso, encuentre la solución *exacta*.

$$\begin{aligned} 4.5x_1 + 3.1x_2 &= 19.25 \\ 1.6x_1 + 1.1x_2 &= 6.84 \end{aligned} \tag{4}$$

b) Las entradas del sistema (4) difieren de las del sistema (3) en menos del .05%. Encuentre el porcentaje de error cuando se utiliza la solución de (4) como una aproximación a la solución de (3).

c) Use un programa de matrices para producir el número de condición de la matriz de coeficientes de (3).

Los ejercicios 42, 43 y 44 ilustran cómo utilizar el número de condición de una matriz A para estimar la exactitud de una solución calculada de $A\mathbf{x} =$ b. Si las entradas de A y $\mathbf{b}$ son exactas con aproximadamente r dígitos significativos, y si el número de condición de A es aproximadamente 10^k (siendo k un entero positivo), entonces la solución calculada de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debería ser exacta hasta al menos $r - k$ dígitos significativos.

42. **[M]** Sea A la matriz del ejercicio 9. Encuentre el número de condición de A. Construya un vector aleatorio $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ y calcule $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$. Después use un programa de matrices para calcular la solución $\mathbf{x}_1$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. ¿En cuántos dígitos concuerdan $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_1$? Encuentre el número de dígitos que el programa de matrices almacena con precisión, e informe cuántos dígitos de exactitud se pierden cuando se usa $\mathbf{x}_1$ en lugar de la solución exacta $\mathbf{x}$.

43. **[M]** Repita el ejercicio 42 para la matriz del ejercicio 10.

44. **[M]** Resuelva la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para obtener una $\mathbf{b}$ que sirva para encontrar la última columna de la inversa de la *matriz de Hilbert de quinto orden*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 \\ 1/5 & 1/6 & 1/7 & 1/8 & 1/9 \end{bmatrix}$$

¿Cuántos dígitos de cada entrada de $\mathbf{x}$ espera que sean correctos? Explique su respuesta. [*Nota:* La solución exacta es (630, -12600, 56700, -88200, 44100)].

45. **[M]** Algunos programas de matrices, como MATLAB, tienen una orden para crear matrices de Hilbert de varios tamaños. Si es posible, use un comando inverso para calcular la inversa de una matriz de Hilbert A de duodécimo orden o mayor. Calcule AA^{-1}. Realice un informe de sus hallazgos.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Es evidente que las columnas de A son linealmente dependientes, ya que las columnas 2 y 3 son múltiplos de la columna 1. Por lo tanto, A *no* puede ser invertible, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible.
2. Si el enunciado *g*) *no* es verdadero, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente para al menos una $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$.
3. Aplique el teorema de la matriz invertible a la matriz AB en lugar de A. Entonces, el enunciado *d*) se convierte en: "$AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial". Esto no es cierto. Por lo tanto, AB no es invertible.

2.4 MATRICES PARTICIONADAS

Una característica clave de nuestro trabajo con matrices ha sido la capacidad para considerar a una matriz A como una lista de vectores columna y no tan solo un arreglo rectangular de números. Este punto de vista ha resultado tan útil que sería deseable considerar otras **particiones** de A, indicadas por las líneas divisorias horizontales y verticales, como en el ejemplo 1 que se presenta a continuación. Las matrices particionadas se presentan en la mayoría de las aplicaciones modernas del álgebra lineal porque la notación resalta la estructura esencial de los cálculos matriciales, como se mostró en el ejemplo introductorio de este capítulo acerca del diseño de aeronaves. Esta sección ofrece una oportunidad para revisar el álgebra matricial y usar el teorema de la matriz invertible.

EJEMPLO 1 La matriz

$$A = \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

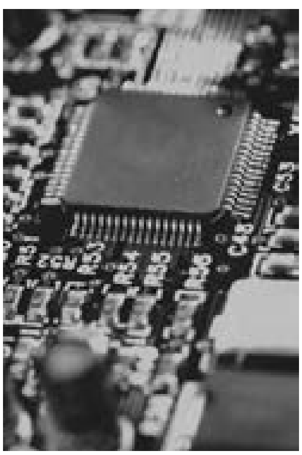
también se puede escribir como la **matriz particionada** de 2×3 (o **por bloques**) de

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

cuyas entradas son los *bloques* (o las *submatrices*)

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -8 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_{23} = \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$$ ■



EJEMPLO 2 Cuando una matriz A se presenta en un modelo matemático de un sistema físico, como en una red eléctrica, un sistema de transporte o una gran compañía, tal vez resulte natural considerar A como una matriz particionada. Por ejemplo, si un tablero de circuitos de microcomputadora consta principalmente de tres microcircuitos VLSI (*very large-scale integrated*, es decir, integrados a escala muy grande), entonces la matriz para el tablero de circuitos podría tener la forma general

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array}\right]$$

Las submatrices en la "diagonal" de A —a saber, A_{11}, A_{22} y A_{33}— se refieren a los tres circuitos VLSI, mientras que las otras submatrices dependen de las interconexiones que haya entre esos microcircuitos. ■

Suma y multiplicación escalar

Si las matrices A y B son del mismo tamaño y están particionadas exactamente en la misma forma, resulta natural efectuar una partición similar de la suma ordinaria matricial $A + B$. En este caso, cada bloque de $A + B$ es la suma (matricial) de los bloques correspondientes de A y B. La multiplicación por un escalar de una matriz particionada también se calcula bloque por bloque.

Multiplicación de matrices particionadas

Las matrices particionadas se pueden multiplicar utilizando la regla fila-columna como si las entradas del bloque fueran escalares, siempre que para un producto AB, la partición por columnas de A equivalga a la partición por filas de B.

EJEMPLO 3 Sean

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Las cinco columnas de A están particionadas en un conjunto de tres columnas y, luego, en uno de dos columnas. Las cinco filas de B están particionadas de igual manera (en un conjunto de tres filas y después en uno de dos filas). Se dice que las particiones de A y B están **conformadas** para la **multiplicación por bloques**. Es posible demostrar que el producto común AB se escribe como

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right]$$

Es importante escribir cada producto menor de la expresión para AB con la submatriz de A a la izquierda, ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Por ejemplo,

$$A_{11}B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el bloque superior es

$$A_{11}B_1 + A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 15 & 12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -20 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

■

La regla fila-columna para la multiplicación de matrices por bloques ofrece la manera más general de considerar un producto de dos matrices. Cada una de las siguientes formas de ver un producto ya se describió mediante particiones sencillas de matrices: **1.** la definición de $A\mathbf{x}$ usando las columnas de A, **2.** la definición de columna de AB, **3.** la regla fila-columna para calcular AB, y **4.** las filas de AB como productos de las filas de A y la matriz B. Una quinta manera de ver AB, usando de nuevo particiones, se presentará más adelante en el teorema 10.

Los cálculos del siguiente ejemplo preparan el camino para el teorema 10. Aquí, $\text{col}_k(A)$ es la k-ésima columna de A, y la $\text{fila}_k(B)$ es la k-ésima fila de B.

EJEMPLO 4 Sea $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$. Compruebe que

$$AB = \text{col}_1(A)\ \text{fila}_1(B) + \text{col}_2(A)\ \text{fila}_2(B) + \text{col}_3(A)\ \text{fila}_3(B)$$

SOLUCIÓN Cada uno de los términos anteriores es un *producto externo*. (Véase los ejercicios 27 y 28 de la sección 2.1). Por la regla fila-columna para calcular un producto matricial,

$$\text{col}_1(A)\ \text{fila}_1(B) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a & -3b \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\text{col}_2(A)\ \text{fila}_2(B) = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ -4c & -4d \end{bmatrix}$$

$$\text{col}_3(A)\ \text{fila}_3(B) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e & 2f \\ 5e & 5f \end{bmatrix}$$

De modo que

$$\sum_{k=1}^{3} \text{col}_k(A)\ \text{fila}_k(B) = \begin{bmatrix} -3a + c + 2e & -3b + d + 2f \\ a - 4c + 5e & b - 4d + 5f \end{bmatrix}$$

Es evidente que esta matriz es AB. Observe que la entrada (1, 1) de AB es la suma de las entradas (1, 1) de los tres productos externos, la entrada (1, 2) en AB es la suma de las entradas (1, 2) de los tres productos externos, y así sucesivamente. ■

TEOREMA 10

Expansión columna-fila de AB

Si A es de $m \times n$ y B es de $n \times p$, entonces

$$AB = \begin{bmatrix} \text{col}_1(A) & \text{col}_2(A) & \cdots & \text{col}_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{fila}_1(B) \\ \text{fila}_2(B) \\ \vdots \\ \text{fila}_n(B) \end{bmatrix} \tag{1}$$
$$= \text{col}_1(A)\ \text{fila}_1(B) + \cdots + \text{col}_n(A)\ \text{fila}_n(B)$$

DEMOSTRACIÓN Para cada índice de fila i e índice columna j, la entrada (i, j) en $\text{col}_k(A)$ $\text{fila}_k(B)$ es el producto de a_{ik} de $\text{col}_k(A)$ y b_{kj} de $\text{fila}_k(B)$. Por lo tanto, la entrada (i, j) de la suma que se muestra en la ecuación (1) es

$$\underset{(k=1)}{a_{i1}b_{1j}} + \underset{(k=2)}{a_{i2}b_{2j}} + \cdots + \underset{(k=n)}{a_{in}b_{nj}}$$

Esta suma también es la entrada (i, j) de AB, por la regla fila-columna. ■

Inversas de matrices particionadas

El siguiente ejemplo ilustra los cálculos relacionados con inversas y matrices particionadas.

EJEMPLO 5 Se dice que una matriz de la forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

es *triangular superior por bloques*. Suponga que A_{11} es de $p \times p$, A_{22} es de $q \times q$, y A invertible. Encuentre una fórmula para A^{-1}.

SOLUCIÓN Denote A^{-1} con B, y efectúe una partición de B para que

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \tag{2}$$

Esta ecuación matricial proporciona cuatro ecuaciones que conducen a los bloques desconocidos $B_{11},\ldots, B_{22}$. Calcule el producto a la izquierda de (2), e iguale cada entrada con el bloque correspondiente en la matriz identidad a la derecha. Es decir, establezca

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \tag{3}$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \tag{4}$$

$$A_{22}B_{21} = 0 \tag{5}$$

$$A_{22}B_{22} = I_q \tag{6}$$

Por sí misma, (6) no establece que A_{22} sea invertible. Sin embargo, ya que A_{22} es cuadrada, el teorema de la matriz invertible y (6), juntos, indican que A_{22} es invertible y $B_{22} = A_{22}^{-1}$. Ahora, al multiplicar por la izquierda ambos lados de (5) por A_{22}^{-1}, se obtiene

$$B_{21} = A_{22}^{-1}0 = 0$$

por lo que (3) se simplifica a

$$A_{11}B_{11} + 0 = I_p$$

Ya que A_{11} es cuadrada, esto demuestra que A_{11} es invertible y $B_{11} = A_{11}^{-1}$. Por último, usando estos resultados con la ecuación (4) se encuentra que

$$A_{11}B_{12} = -A_{12}B_{22} = -A_{12}A_{22}^{-1} \quad \text{y} \quad B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$ ■

Una matriz **diagonal por bloques** es una matriz particionada con bloques cero fuera de la diagonal (de bloques) principal. Una matriz de este tipo es invertible si y solo si cada bloque sobre la diagonal es invertible. Véase los ejercicios 13 y 14.

NOTAS NUMÉRICAS

1. Cuando las matrices son demasiado grandes para caber en la memoria de alta velocidad de una computadora, particionarlas permite trabajar solamente con dos o tres submatrices a la vez. Por ejemplo, un equipo de investigación de programación lineal simplificó un problema al particionar la matriz en 837 filas y 51 columnas. La solución del problema tardó aproximadamente cuatro minutos en una supercomputadora Cray.[1]
2. Algunas computadoras de alta velocidad, en particular aquellas con arquitectura de conducción vectorial, realizan cálculos matriciales con mayor eficiencia cuando los algoritmos usan matrices particionadas.[2]
3. Los programas de computadora profesionales para álgebra lineal numérica de alto desempeño, como LAPACK, utilizan de manera intensiva cálculos de matrices particionadas.

[1] El tiempo de solución no parece muy impresionante hasta saber que cada bloque de las 51 columnas contenía, aproximadamente, 250,000 columnas individuales. ¡El problema original tenía 837 ecuaciones y más de 12,750,000 variables! Casi 100 millones de las más de 10 mil millones de entradas eran diferentes de cero. Véase Robert E. Bixby *et al*., “Very Large-Scale Linear Programming: A Case Study in Combining Interior Point and Simplex Methods”, *Operations Research*, 40, núm. 5 (1992): 885-897.

[2] La importancia de los algoritmos de matrices por bloques para cálculos de computadora se describe en *Matrix Computations*, 3a. ed., de Gene H. Golub y Charles F. van Loan (Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1966).

Los siguientes ejercicios permiten obtener práctica con el álgebra matricial e ilustran los cálculos comunes que se encuentran en aplicaciones.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Demuestre que $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

2. Calcule X^TX, donde X está particionada como $[X_1 \quad X_2]$.

2.4 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 9, suponga que las matrices están particionadas de manera conformada para la multiplicación por bloques. Calcule los productos que se indican en los ejercicios 1 a 4.

1. $\begin{bmatrix} I & 0 \\ E & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -E & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 a 8, encuentre fórmulas para X, Y y Z, en términos de A, B y C, y justifique sus cálculos. En algunos casos, tendrá que hacer suposiciones acerca del tamaño de una matriz para obtener una fórmula. [*Sugerencia:* Calcule el producto a la izquierda e iguálelo al lado derecho].

5. $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ X & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ Z & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} X & 0 \\ Y & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} X & 0 & 0 \\ Y & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & Z \\ 0 & 0 \\ B & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y & Z \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$

9. Suponga que B_{11} es una matriz invertible. Encuentre las matrices A_{21} y A_{31} (en términos de los bloques de B) de tal manera que el producto que aparece a continuación tenga la forma indicada. Además, calcule C_{22} (en términos de los bloques de B). [*Sugerencia:* Calcule el producto a la izquierda e iguálelo al lado derecho].

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A_{21} & I & 0 \\ A_{31} & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \\ 0 & C_{32} \end{bmatrix}$$

10. La inversa de

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \\ B & D & I \end{bmatrix} \text{ es } \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ P & I & 0 \\ Q & R & I \end{bmatrix}$$

Encuentre P, Q y R.

En los ejercicios 11 y 12, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

11. *a*) Si $A = [A_1 \;\; A_2]$ y $B = [B_1 \;\; B_2]$, con A_1 y A_2 de las mismas dimensiones que B_1 y B_2, respectivamente, entonces $A + B = [A_1 + B_1 \;\; A_2 + B_2]$.

b) Si $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, entonces las particiones de A y B están conformadas para la multiplicación por bloques.

12. *a*) Si A_1, A_2, B_1 y B_2 son matrices de $n \times n$, $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, y $B = [B_1 \;\; B_2]$, entonces el producto BA está definido, pero AB no lo está.

b) Si $A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, entonces la transpuesta de A es

$$A^T = \begin{bmatrix} P^T & Q^T \\ R^T & S^T \end{bmatrix}.$$

13. Sea $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, donde B y C son cuadradas. Demuestre que A es invertible si y solo si B y C son invertibles.

14. Demuestre que el bloque de matriz triangular superior A en el ejemplo 5 es invertible si y solo si tanto A_{11} como A_{22} son invertibles. [*Sugerencia:* Si A_{11} y A_{22} son invertibles, la fórmula para A^{-1}, que se dio en el ejemplo 5, en realidad funciona como la inversa de A]. Este hecho de A es una parte importante de varios algoritmos de computadora que estiman valores propios de matrices. Los valores propios se analizan en el capítulo 5.

15. Cuando se lanza una sonda espacial, es necesario hacer algunas correcciones para colocar la nave en una trayectoria exacta. La radio telemetría proporciona un flujo de vectores, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$, que arrojan información en diferentes momentos sobre cómo se compara la posición de la sonda con la trayectoria prevista. Sea X_k la matriz $[\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_k]$. La matriz $G_k = X_kX_k^T$ se calcula conforme se analizan los datos del radar. Cuando llega $\mathbf{x}_{k+1}$, se debe calcular un nuevo G_{k+1}. Como los vectores de datos llegan a alta velocidad, la carga computacional podría ser grande. Pero la multiplicación de la matriz particionada ayuda muchísimo. Calcule las expansiones columna-fila de G_k y G_{k+1}, y describa lo que se debe calcular para *actualizar* G_k a la forma G_{k+1}.

La sonda Galileo fue lanzada el 18 de octubre de 1989 y llegó cerca de Júpiter a principios de diciembre de 1995.

16. Sea $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Si A_{11} es invertible, entonces la matriz $S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ se llama **complemento de Schur** de A_{11}. Por otra parte, si A_{22} es invertible, la matriz $A_{11} - A_{12}A_{11}^{-1}A_{21}$ se llama complemento de Schur de A_{22}. Suponga que A_{11} es invertible. Encuentre X y Y tal que

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{7}$$

17. Suponga que la matriz por bloques A del lado izquierdo de (7) y A_{11} son invertibles. Demuestre que el complemento de Schur S de A_{11} es invertible. [*Sugerencia:* Los factores externos localizados en el lado derecho de (7) siempre son invertibles. Compruebe esto]. Cuando A y A_{11} son ambas invertibles, (7) conduce a una fórmula para A^{-1}, utilizando S^{-1}, A_{11}^{-1} y las otras entradas de A.

18. Sea X una matriz de datos de $m \times n$ tal que X^TX es invertible, y sea $M = I_m - X(X^TX)^{-1}X^T$. Añada una columna $\mathbf{x}_0$ a los datos y forme

$W = [X \quad \mathbf{x}_0]$.

Calcule W^TW. La entrada (1, 1) es X^TX. Demuestre que el complemento de Schur (ejercicio 16) de X^TX se puede escribir en la forma $\mathbf{x}_0^T M\mathbf{x}_0$. Es posible demostrar que la cantidad $(\mathbf{x}_0^T M\mathbf{x}_0)^{-1}$ es la entrada (2, 2) de $(W^TW)^{-1}$. Esta entrada tiene una interpretación estadística útil, a la luz de las hipótesis adecuadas.

En el estudio de ingeniería de control de sistemas físicos, un conjunto estándar de ecuaciones diferenciales se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones lineales por medio de transformadas de Laplace:

$$\begin{bmatrix} A - sI_n & B \\ C & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde A es de $n \times n$, B es de $n \times m$, C es de $m \times n$, y s es una variable. El vector $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^m$ es la "entrada" del sistema, $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^m$ es la "salida" del sistema, y $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ es el vector de "estado". (En realidad, los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{y}$ son funciones de s, pero esto no afecta los cálculos algebraicos de los ejercicios 19 y 20).

19. Suponga que $A - sI_n$ es invertible y considere la ecuación (8) como un sistema de dos ecuaciones matriciales. Resuelva la ecuación superior para $\mathbf{x}$ y sustitúyala en la ecuación inferior. El resultado es una ecuación de la forma $W(s)\mathbf{u} = \mathbf{y}$, donde $W(s)$ es una matriz que depende de s. $W(s)$ se denomina *función de transferencia* del sistema porque transforma la entrada $\mathbf{u}$ en la salida $\mathbf{y}$. Encuentre $W(s)$ y describa cómo está relacionada con el *sistema de matriz* particionada del miembro izquierdo de (8). Véase el ejercicio 16.

20. Suponga que la función de transferencia $W(s)$ del ejercicio 19 es invertible para alguna s. Es posible demostrar que la función de transferencia inversa $W(s)^{-1}$, que transforma salidas en entradas, es el complemento de Schur de $A - BC - sI_n$ para la matriz que se presenta a continuación. Encuentre este complemento de Schur. Véase el ejercicio 16.

$$\begin{bmatrix} A - BC - sI_n & B \\ -C & I_m \end{bmatrix}$$

21. *a*) Compruebe que $A^2 = I$ cuando $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Use matrices particionadas para demostrar que $M^2 = I$ cuando

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Generalice la idea del ejercicio 21 al construir una matriz M de 6×6, $M = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ C & 0 & D \end{bmatrix}$ tal que $M^2 = I$. Haga a C una matriz de 2×2 no nula. Muestre que su construcción funciona.

23. Use matrices particionadas para demostrar, por inducción, que el producto de dos matrices triangulares inferiores también es triangular inferior. [*Sugerencia:* Una matriz A_1 de $(k + 1) \times (k + 1)$ se puede escribir en la forma presentada a continuación, donde a es un escalar, $\mathbf{v}$ está en $\mathbb{R}^k$, y A es una matriz triangular inferior de $k \times k$. [Véase la *Guía de estudio* para obtener ayuda con la inducción].

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{v} & A \end{bmatrix}$$

24. Use matrices particionadas para demostrar por inducción que para $n = 2, 3, \ldots$, la matriz A de $n \times n$ que se presenta a continuación es invertible y que B es su inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para el paso de inducción, suponga que A y B son matrices de $(k+1)\times(k+1)$, y particione A y B de una manera similar a la que se presenta en el ejercicio 23.

25. Sin utilizar reducción por filas, encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

26. **[M]** Para las operaciones de bloque, podría ser necesario introducir o recurrir a submatrices de una matriz grande. Describa las funciones o los comandos de un programa de matrices que realice las siguientes tareas. Suponga que A es una matriz de 20×30.

a) Presente la submatriz de A de las filas 5 a 10 y de las columnas 15 a 20.

b) Inserte una matriz B de 5×10 en una matriz A, comenzando en la fila 5 y la columna 10.

c) Construya una matriz de 50×50 de la forma $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$. [*Nota:* Tal vez no sea necesario especificar los bloques de ceros en C].

27. **[M]** Suponga que debido a restricciones de memoria o al tamaño su programa de matrices no puede trabajar con matrices de más de 32 filas y 32 columnas, y suponga que algún proyecto requiere las matrices A y B de 50×50. Describa los comandos o las operaciones de su programa para matrices que realizan las siguientes tareas.

a) Cálculo de $A+B$.

b) Cálculo de AB.

c) Resolución de $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ para algún vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^{50}$, suponiendo que A se pueda particionar en una matriz por bloques de 2×2 $[A_{ij}]$, con A_{11} una matriz invertible de 20×20, A_{22} una matriz invertible de 30×30, y A_{12} una matriz cero. [*Sugerencia:* Describa sistemas adecuados más pequeños que puedan resolverse sin usar matrices inversas].

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Si $\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}$ es invertible, su inversa tiene la forma $\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix}$. Compruebe que

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W & X \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & X \\ AW+Y & AX+Z \end{bmatrix}$$

Así, W, X, Y, Z deben satisfacer $W=I$, $X=0$, $AW+Y=0$, y $AX+Z=I$. Como consecuencia, $Y=-A$ y $Z=I$. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

El producto en el orden inverso también es la identidad, de modo que la matriz de bloque es invertible, y su inversa es $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{bmatrix}$. (También podría recurrir al teorema de la matriz invertible).

2. $X^TX = \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^TX_1 & X_1^TX_2 \\ X_2^TX_1 & X_2^TX_2 \end{bmatrix}$. Las particiones de X^T y X se conforman de manera automática para la multiplicación por bloques, ya que las columnas de X^T son las filas de X. Esta partición de X^TX se usa en varios algoritmos de computadora para cálculos de matrices.

2.5 FACTORIZACIONES DE MATRICES

Una *factorización* de una matriz A es una ecuación que expresa a A como un producto de dos o más matrices. Mientras que la multiplicación de matrices implica una *síntesis* de datos (combinando el efecto de dos o más transformaciones lineales en una sola matriz), la factorización de matrices es un *análisis* de datos. En el lenguaje de la ciencia computacional, la expresión de A como un producto equivale a un *procesamiento previo* de los datos de A, organizando esos datos en dos o más partes cuyas estructuras son más útiles de algún modo, quizá por ser más accesibles para realizar cálculos.

Las factorizaciones de matrices y, después, las factorizaciones de transformaciones lineales se presentarán en un gran número de secciones clave a lo largo de este libro. Esta sección se enfoca en una factorización que constituye el centro neurálgico de varios importantes programas de cómputo usados ampliamente en aplicaciones, como en el problema de la aeronave descrito en la introducción del capítulo. Algunas otras factorizaciones que se estudiarán después, se presentan en los ejercicios.

La factorización LU

La factorización LU, descrita a continuación, está motivada por el muy frecuente problema industrial y de negocios que consiste en resolver una sucesión de ecuaciones, todas con la misma matriz de coeficientes:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \quad \ldots, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_p \tag{1}$$

Véase el ejercicio 32, por ejemplo. También vea la sección 5.8, donde se usa el método de la potencia inversa para estimar los valores propios de una matriz resolviendo una secuencia de ecuaciones, como en (1), una a la vez.

Cuando A es invertible, se podría calcular A^{-1} y después calcular $A^{-1}\mathbf{b}_1$, $A^{-1}\mathbf{b}_2$, y así sucesivamente. Sin embargo, resulta más eficiente resolver la primera ecuación en la secuencia (1) con reducción por filas y obtener una factorización LU de A al mismo tiempo. Después, las ecuaciones restantes de (1) se resuelven con la factorización LU.

Primero, suponga que A es una matriz de $m \times n$ que se puede reducir por filas a su forma escalonada *sin intercambios de fila*. (Más adelante, se tratará el caso general). Entonces, A se puede escribir en la forma $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior de $m \times m$ con números 1 en la diagonal, y U es una forma escalonada de $m \times n$ de A. Por ejemplo, véase la figura 1. Una factorización de este tipo se llama **factorización LU** de A. La matriz L es invertible y se llama matriz triangular inferior *unitaria*.

$$A = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

FIGURA 1 Una factorización LU.

Antes de estudiar la forma de construir L y U, es necesario examinar la razón de su utilidad. Cuando $A = LU$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se escribe como $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Escribiendo $\mathbf{y}$ en lugar de $U\mathbf{x}$, se puede encontrar $\mathbf{x}$ resolviendo el *par* de ecuaciones

$$\boxed{\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}} \tag{2}$$

Primero se despeja $\mathbf{y}$ de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, y luego se resuelve $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para obtener $\mathbf{x}$. Véase la figura 2. Las dos ecuaciones resultan fáciles de resolver porque L y U son triangulares.

EJEMPLO 1 Es posible comprobar que

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

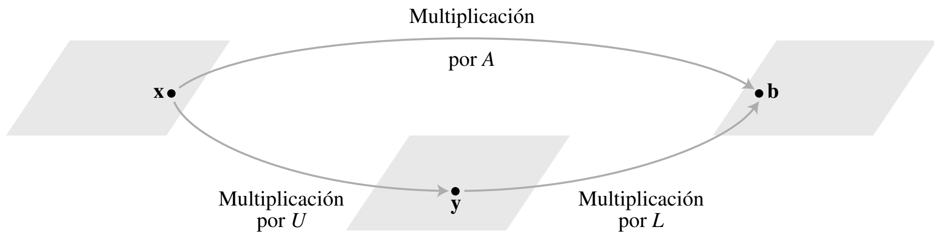


FIGURA 2 Factorización del mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Use esta factorización LU de A para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN La solución de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ requiere únicamente de 6 multiplicaciones y 6 sumas, porque la aritmética ocurre solo en la columna 5. (En L, los ceros debajo de cada pivote se crean automáticamente con la elección de las operaciones de fila).

$$\begin{bmatrix} L & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Entonces, para $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, la fase "regresiva" de la reducción por filas requiere de 4 divisiones, 6 multiplicaciones y 6 sumas. (Por ejemplo, para producir ceros en la columna 4 de $[U \quad \mathbf{y}]$ se requieren una división en la fila 4 y tres pares de multiplicación-suma para sumar múltiplos de la fila 4 a las filas de arriba).

$$\begin{bmatrix} U & \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $\mathbf{x}$ se requieren 28 operaciones aritméticas o "flops" (operaciones de punto flotante), excluyendo el costo de encontrar L y U. En contraste, la reducción por filas de $[A \quad \mathbf{b}]$ a $[I \quad \mathbf{x}]$ requiere de 62 operaciones. ■

La eficiencia computacional de la factorización LU depende de que se conozcan L y U. El siguiente algoritmo muestra que la reducción por filas de A a su forma escalonada U equivale a una factorización LU, porque produce L prácticamente sin trabajo extra. Después de la primera reducción por filas, L y U se obtienen al resolver ecuaciones adicionales cuya matriz de coeficientes es A.

Un algoritmo de factorización LU

Suponga que A se puede reducir a una forma escalonada U utilizando solo remplazos de filas que suman un múltiplo de una fila a otra situada *debajo de esta*. En este caso, existen matrices elementales triangulares inferiores unitarias $E_1, \ldots, E_p$ tales que

$$E_p \cdots E_1 A = U \tag{3}$$

Luego,

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

donde

$$L = (E_p \cdots E_1)^{-1} \tag{4}$$

Es posible demostrar que los productos y las inversas de las matrices triangulares inferiores unitarias también son triangulares inferiores unitarias. (Por ejemplo, véase el ejercicio 19). Así, L es triangular inferior unitaria.

Observe que las operaciones de fila en la ecuación (3), que reducen A *a* U, también reducen la L en la ecuación (4) a I, debido a que $E_p \cdots E_1 L = (E_p \cdots E_1)(E_p \cdots E_1)^{-1} = I$. Esta observación es la clave para *construir* L.

ALGORITMO PARA UNA FACTORIZACIÓN LU

1. Si es posible, reduzca A a una forma escalonada U con una sucesión de operaciones de remplazo de filas.
2. Coloque las entradas de L de tal manera que la *misma secuencia de operaciones de fila* reduzca L a I.

El paso 1 no siempre es posible, pero cuando lo es, el argumento anterior indica que existe una factorización LU. En el ejemplo 2 se mostrará cómo implementar el paso 2. Por construcción, L satisfará

$$(E_p \cdots E_1)L = I$$

donde se usan las mismas $E_1, \ldots, E_p$ que en la ecuación (3). Así, L será invertible, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible, con $(E_p \cdots E_1) = L^{-1}$. A partir de (3), $L^{-1}A = U$, y $A = LU$. Por lo tanto, el paso 2 producirá una L aceptable.

EJEMPLO 2 Encuentre una factorización LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Como A tiene cuatro filas, L debe ser de 4×4. La primera columna de L es la primera columna de A dividida entre la entrada pivote superior:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Compare las primeras columnas de A y L. *Las operaciones de fila que crearon ceros en la primera columna de A también crearán ceros en la primera columna de L.* Para lograr que esta misma correspondencia de operaciones de fila sea válida para el resto de L, se examina una reducción por filas de A a una forma escalonada U. Es decir, *se resaltan las entradas* en cada una de las matrices que se utilizan para determinar la secuencia de las operaciones de fila que transforman A en U. [Véase las entradas resaltadas en la ecuación (5)].

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1 \tag{5}$$

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Las entradas resaltadas de la ecuación (5) determinan la reducción por filas de A a U. En cada columna pivote, divida las entradas resaltadas entre el pivote y coloque el resultado en L:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \div 2 & \div 3 & \div 2 & \div 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Un cálculo fácil comprueba que estas L y U satisfacen que $LU = A$. ■

En el trabajo práctico, casi siempre son necesarios los intercambios de fila, porque se usa el pivoteo parcial para lograr una precisión alta. (Recuerde que este procedimiento selecciona, entre las posibles opciones de pivote, una entrada en la columna que tenga el mayor valor absoluto). Para manejar los intercambios de fila, la factorización LU anterior se puede modificar con facilidad para producir una L que sea *triangular inferior permutada*, en el sentido de que un reordenamiento (llamado permutación) de las filas de L puede hacer que L sea triangular inferior (unitaria). La factorización *LU permutada* resultante resuelve $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en la misma forma que antes, excepto que la reducción de $[L \quad \mathbf{b}]$ a $[I \quad \mathbf{y}]$ es consecuencia del orden de los pivotes de L de izquierda a derecha, empezando con el pivote de la primera columna. Una referencia a una "factorización LU" normalmente incluye la posibilidad de que L pueda ser triangular inferior permutada. Para mayores detalles, véase la *Guía de estudio*.

NOTAS NUMÉRICAS

Los siguientes conteos de operaciones corresponden a una matriz densa A de $n \times n$ (con la mayoría de sus entradas distintas de cero), donde n es moderadamente grande, por ejemplo, $n \geq 30$.[1]

1. El cálculo de una factorización LU de A requiere $2n^3/3$ flops (aproximadamente lo mismo que reducir por filas $[A \quad \mathbf{b}]$), mientras que encontrar A^{-1} requiere alrededor de $2n^3$ flops.
2. Resolver $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ requiere alrededor de $2n^2$ flops, ya que cualquier sistema triangular $n \times n$ se puede resolver en aproximadamente n^2 flops.
3. La multiplicación de $\mathbf{b}$ por A^{-1} también requiere cerca de $2n^2$ flops, pero el resultado quizá no sea tan preciso como el obtenido a partir de L y U (debido al error de redondeo cuando se calculan tanto a A^{-1} como a $A^{-1}\mathbf{b}$).
4. Si A es dispersa (la mayoría de sus entradas son cero), entonces L y U podrían ser dispersas también, pero es probable que A^{-1} sea densa. En este caso, una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con una factorización LU es *mucho* más rápida que usar A^{-1}. Véase el ejercicio 31.

WEB

Factorización de matrices en ingeniería eléctrica

La factorización de matrices está íntimamente relacionada con el problema de construir una red eléctrica de propiedades específicas. El análisis que se presenta a continuación permite vislumbrar la relación entre factorización y diseño de circuitos.

[1] Véase la sección 3.8 de *Applied Linear Algebra*, 3a. ed., de Ben Noble y James W. Daniel (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988). Recuerde que para nuestros propósitos, un *flop* es $+$, $-$, $\times$ o $\div$.

Suponga que el cuadro de la figura 3 representa algún tipo de circuito eléctrico, con una entrada y una salida. El voltaje y la corriente de entrada se registran mediante $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$ (con el voltaje v en volts y la corriente i en amperes), y el voltaje y la corriente de salida se registran como $\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$. Con frecuencia, la transformación $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$ es lineal. Es decir, existe una matriz A, que se llama *matriz de transferencia*, tal que

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ i_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

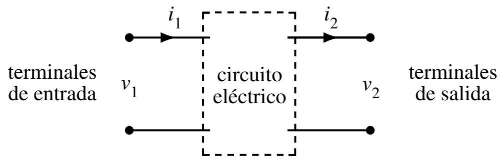


FIGURA 3 Un circuito con terminales de entrada y salida.

En la figura 4 se muestra una *red en escalera*, donde dos circuitos (podría haber más) están conectados en serie, de modo que la salida de un circuito sea la entrada del siguiente circuito. El circuito de la izquierda en la figura 4 es un *circuito en serie*, con resistencia R_1 (en ohms).

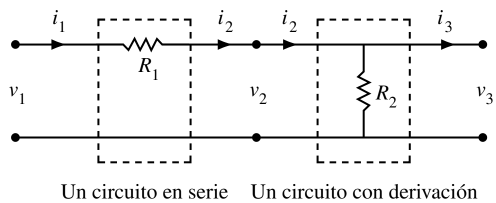


FIGURA 4 Una red en escalera.

El circuito de la derecha en la figura 4 es un *circuito con derivación*, con resistencia R_2. Con base en la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff, es posible demostrar que las matrices de transferencia de los circuitos en serie y con derivación, respectivamente, son,

$$\underset{\text{Matriz de transferencia del circuito en serie}}{\begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \quad \text{y} \quad \underset{\text{Matriz de transferencia del circuito con derivación}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO 3

a) Calcule la matriz de transferencia para la red en escalera de la figura 4.

b) Diseñe una red en escalera cuya matriz es $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -.5 & 5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

a) Sean A_1 y A_2 las matrices de transferencia de los circuitos en serie y con derivación, respectivamente. Entonces, un vector de entrada $\mathbf{x}$ se transforma primero en $A_1\mathbf{x}$ y luego en $A_2(A_1\mathbf{x})$. La conexión en serie de los circuitos corresponde a la composición de transformaciones lineales, y la matriz de transferencia de la red en escalera es (observe el orden)

$$A_2A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1 + R_1/R_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

b) Para factorizar la matriz $\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -.5 & 5 \end{bmatrix}$ en el producto de matrices de transferencia, como en la ecuación (6), se buscan las R_1 y R_2 de la figura 4 que satisfagan

$$\begin{bmatrix} 1 & -R_1 \\ -1/R_2 & 1 + R_1/R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ -.5 & 5 \end{bmatrix}$$

De las entradas (1, 2), se tiene que $R_1 = 8$ ohms, y de las entradas (2, 1), $1/R_2 = .5$ ohm y $R_2 = 1/.5 = 2$ ohms. Con estos valores, la red de la figura 4 tiene la matriz de transferencia deseada. ■

Una matriz de transferencia de red resume el comportamiento de entrada y salida (las especificaciones de diseño) de la red, sin referencia a los circuitos internos. Para construir físicamente una red con propiedades específicas, un ingeniero determina al principio si es posible construir (o *realizar*) dicha red. Después, trata de factorizar la matriz de transferencia para obtener matrices correspondientes a circuitos más pequeños que quizá ya fueron fabricados y estén listos para ensamblarse. En el caso común de la corriente alterna, las entradas de la matriz de transferencia normalmente son funciones con valores complejos. (Véase los ejercicios 19 y 20 de la sección 2.4 y el ejemplo 2 de la sección 3.3). Un problema estándar consiste en encontrar una *realización mínima* que use el menor número de componentes eléctricos.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Encuentre una factorización LU de $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. [*Nota:* Resultará que A tiene solamente tres columnas pivote, de manera que el método del ejemplo 2 solo produce las tres primeras columnas de L. Las dos columnas restantes de L provienen de I_5].

2.5 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, resuelva la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ usando la factorización LU dada para A. En los ejercicios 1 y 2, resuelva también $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por reducción ordinaria de columnas.

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -4 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 6 & -9 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -9 & 0 & -9 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \\ -3 & -6 & 26 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -4 & 12 \\ 3 & 0 & 4 & -36 \\ -5 & -3 & -8 & 49 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una factorización LU de las matrices de los ejercicios 7 a 16 (con L triangular inferior unitaria). Observe que MATLAB generalmente producirá una factorización LU permutada porque utiliza pivoteo parcial para lograr exactitud numérica.

7. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -9 & 0 & -4 \\ 9 & 9 & 14 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 10 & 2 & -5 \\ 10 & 10 & 16 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 6 & 19 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 13 & 9 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & -5 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 20 & 6 & 31 \\ -2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 7 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & 3 & -13 & -3 \\ 4 & 9 & 16 & 17 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 8 & -7 \\ 6 & -5 & 14 \\ -6 & 9 & -12 \\ 8 & -6 & 19 \end{bmatrix}$

17. Cuando A es invertible, MATLAB encuentra A^{-1} al factorizar $A = LU$ (donde L puede ser triangular inferior permutada), invirtiendo L y U, y luego calculando $U^{-1}L^{-1}$. Use este método para calcular la inversa de A en el ejercicio 2. (Aplique el algoritmo de la sección 2.2 a L y a U).

18. Encuentre A^{-1} como en el ejercicio 17, usando A del ejercicio 3.

19. Sea A una matriz de $n \times n$ triangular inferior con entradas diferentes de cero en la diagonal. Demuestre que A es invertible y A^{-1} es triangular inferior. [*Sugerencia:* Explique por qué A puede convertirse en I usando solo remplazos de filas y escalamientos. (¿Dónde están los pivotes?). También, explique por qué las operaciones de fila que reducen A a I transforman a I en una matriz triangular inferior].

20. Sea $A = LU$ una factorización LU. Explique por qué A se puede reducir por filas a U utilizando solamente operaciones de remplazo. (Este hecho es el recíproco de lo que se demostró en el libro).

21. Suponga que $A = BC$, donde B es invertible. Demuestre que cualquier sucesión de operaciones de fila que reduzca B a I también reduce A a C. Lo contrario no es cierto, puesto que la matriz cero puede factorizarse como $0 = B \cdot 0$.

Los ejercicios 22 a 26 ofrecen una visualización de ciertas factorizaciones de matriz ampliamente utilizadas, algunas de las cuales se analizan posteriormente en el libro.

22. (*Factorización LU reducida*). Con A como en el problema de práctica, encuentre una matriz B de 5×3 y una matriz C de 3×4 tales que $A = BC$. Generalice esta idea para el caso donde A es $m \times n$, $A = LU$, y U tiene solamente tres filas diferentes de cero.

23. (*Factorización de rango*). Suponga que una matriz A de $m \times n$ admite una factorización $A = CD$, donde C es de $m \times 4$ y D es de $4 \times n$.

a) Demuestre que A es la suma de cuatro productos exteriores. (Véase la sección 2.4).

b) Sea $m = 400$ y $n = 100$. Explique por qué un programador de computadoras preferiría almacenar los datos de A en forma de dos matrices C y D.

24. (*Factorización QR*). Suponga que $A = QR$, donde Q y R son $n \times n$, R es invertible y triangular superior, y Q tiene la propiedad de que $Q^TQ = I$. Demuestre que para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única. ¿Qué cálculos con Q y R producirán la solución?

WEB

25. (*Descomposición en valores singulares*). Suponga que $A = UDV^T$, donde U y V son matrices de $n \times n$ con la propiedad de que $U^TU = I$ y $V^TV = I$, y donde D es una matriz diagonal con números positivos $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ en la diagonal. Demuestre que A es invertible y encuentre una fórmula para A^{-1}.

26. (*Factorización espectral*). Suponga que una matriz A de 3×3 admite una factorización como $A = PDP^{-1}$, donde P es alguna matriz invertible de 3×3, y D es la matriz diagonal

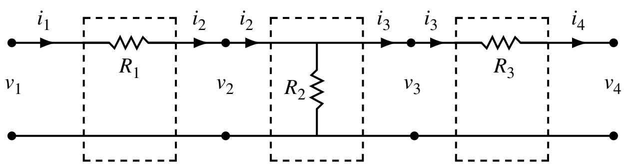
$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que esta factorización es útil cuando se calculan potencias grandes de A. Encuentre fórmulas relativamente sencillas para A^2, A^3 y A^k (k es un entero positivo), usando P y las entradas en D.

27. Diseñe dos redes en escalera diferentes con salida de 9 volts y 4 amperes cuando la entrada sea de 12 volts y 6 amperes.

28. Demuestre que si tres circuitos con derivación (cuyas resistencias son R_1, R_2, R_3) se conectan en serie, la red resultante tiene la misma matriz de transferencia que un único circuito con derivación. Encuentre una fórmula para la resistencia que haya en ese circuito.

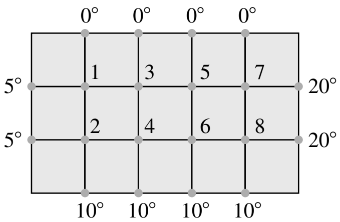
29. *a*) Encuentre la matriz de transferencia de la red que se ilustra en la figura.



b) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$. Diseñe una red en escalera, cuya matriz de transferencia sea A, encontrando una factorización matricial adecuada de A.

30. Encuentre una factorización diferente de la matriz de transferencia A del ejercicio 29 y, a partir de ello, diseñe una red en escalera diferente cuya matriz de transferencia sea A.

31. **[M]** Considere la placa térmica en la siguiente figura (consulte el ejercicio 33 en la sección 1.1).



La solución al problema de flujo de calor en estado estable para la placa de la figura se aproxima al resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (5, 15, 0, 10, 0, 10, 20, 30)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 4 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & & & \\ & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & & \\ & & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & \\ & & & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ & & & & -1 & 0 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

WEB

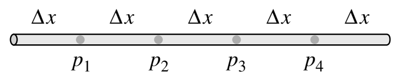
Las entradas faltantes en A son ceros. Las entradas de A diferentes de cero se encuentran dentro de una banda a lo largo de la diagonal principal. Tales *matrices de banda* se presentan en diversas aplicaciones, y con frecuencia son extremadamente grandes (con miles de filas y columnas, pero con bandas relativamente angostas).

a) Utilice el método del ejemplo 2 para construir una factorización LU de A, y observe que ambos factores son matrices de banda (con dos diagonales diferentes de cero abajo o arriba de la diagonal principal). Calcule $LU - A$ para comprobar su trabajo.

b) Use la factorización LU para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

c) Obtenga A^{-1} y observe que A^{-1} es una matriz densa sin estructura de banda. Cuando A es grande, L y U se pueden almacenar en mucho menos espacio que A^{-1}. Este hecho es otra razón para preferir la factorización LU de A en lugar de A^{-1}.

32. **[M]** La matriz de banda A que se ilustra a continuación puede servir para calcular la conducción inestable de calor en una varilla para la cual las temperaturas en los puntos $p_1, \ldots, p_4$ cambian con el tiempo.[2]



La constante C de la matriz depende de la naturaleza física de la varilla, de la distancia Δx entre los puntos de la varilla, y del tiempo Δt que transcurre entre mediciones sucesivas de temperatura. Suponga que para $k = 0, 1, 2, \ldots$, un vector $\mathbf{t}_k$ en $\mathbb{R}^4$ lista las temperaturas en el tiempo $k\Delta t$. Si ambos extremos de la varilla se mantienen a 0°, entonces los vectores de temperatura satisfacen la ecuación $A\mathbf{t}_{k+1} = \mathrm{t}_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} (1+2C) & -C & & \\ -C & (1+2C) & -C & \\ & -C & (1+2C) & -C \\ & & -C & (1+2C) \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la factorización LU de A cuando $C = 1$. Una matriz como A con tres diagonales diferentes de cero se denomina *matriz tridiagonal*. Los factores L y U son *matrices bidiagonales*.

b) Suponga que $C = 1$ y $\mathbf{t}_0 = (10, 15, 15, 10)^T$. Use la factorización LU de A para encontrar las distribuciones de temperatura $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ y $\mathbf{t}_4$.

[2] Véase Biswa N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications* (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1994), pp. 200-201.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 6 & 2 & -7 \\ 0 & -9 & -3 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

Divida las entradas de cada columna resaltada por el pivote en la parte superior. Las columnas resultantes forman las tres primeras columnas de la mitad inferior de L. Esto basta para hacer que la reducción por filas de L a I corresponda a la reducción de A a U. Use las dos últimas columnas de I_5 para hacer que L sea triangular inferior unitaria.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \div 2 & \div 3 & \div 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 2 & 2 & -1 & \\ -3 & -3 & 2 & \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.6 EL MODELO DE LEONTIEF DE ENTRADA Y SALIDA

WEB

El álgebra lineal desempeñó un papel fundamental en el trabajo de Wassily Leontief ganador del Premio Nobel, como se mencionó al principio del capítulo 1. El modelo económico descrito en esta sección es la base de modelos más complejos usados en muchas partes del mundo.

Suponga que la economía de una nación se divide en n sectores que producen bienes o servicios, y sea $\mathbf{x}$ un **vector de producción** en $\mathbb{R}^n$ que lista la producción de cada sector en un año. También, suponga que otra parte de la economía (que se llama *sector abierto*) no produce bienes ni servicios, sino que solamente los consume, y sea $\mathbf{d}$ un **vector de demanda final** (o **cuenta de demandas finales**) que lista los valores de los bienes y servicios demandados a los diversos sectores por la parte no productiva de la economía. El vector $\mathbf{d}$ puede representar la demanda del consumidor, el consumo del gobierno, el superávit de producción, las exportaciones u otras demandas externas.

Conforme los diversos sectores elaboran bienes para satisfacer la demanda del consumidor, los productores crean por sí mismos una **demanda intermedia** adicional de bienes que necesitan como insumos para su propia producción. Las interrelaciones de los sectores son muy complejas, y la conexión entre la demanda final y la producción es poco clara. Leontief se preguntó si hay un nivel de producción $\mathbf{x}$ tal que las cantidades producidas (o "suministradas") equilibran exactamente la demanda total de esa producción, de modo que

$$\left\{\begin{matrix} \text{cantidad} \\ \text{producida} \\ \mathbf{x} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \text{demanda} \\ \text{intermedia} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \text{demanda} \\ \text{final} \\ \mathbf{d} \end{matrix}\right\} \tag{1}$$

La suposición básica del modelo de Leontief de entrada y salida es que, para cada sector, hay un **vector de consumo unitario** en $\mathbb{R}^n$ que lista los insumos necesarios *por unidad de producción* del sector. Todas las unidades de entrada y salida se miden en millones de dólares, y no en cantidades como toneladas o fanegas. (Los precios de los bienes y servicios se mantienen constantes).

Como un ejemplo sencillo, suponga que la economía consiste en tres sectores —manufactura, agricultura y servicios—, con los vectores unitarios de consumo $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{c}_3$ que se muestran en la siguiente tabla.

	Insumos consumidos por unidad de producción		
Comprados por:	**Manufactura**	**Agricultura**	**Servicios**
Manufactura	.50	.40	.20
Agricultura	.20	.30	.10
Servicios	.10	.10	.30
	↑	↑	↑
	$\mathbf{c}_1$	$\mathbf{c}_2$	$\mathbf{c}_3$

EJEMPLO 1 ¿Qué cantidades consumirá el sector de manufactura si decide producir 100 unidades?

SOLUCIÓN Calcule

$$100\mathbf{c}_1 = 100\begin{bmatrix} .50 \\ .20 \\ .10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Para producir 100 unidades, manufactura ordenará (es decir, "demandará") y consumirá 50 unidades de otras partes del sector de manufactura, 20 unidades de agricultura y 10 unidades de servicios. ■

Si manufactura decide producir x_1 unidades, entonces $x_1\mathbf{c}_1$ representa las *demandas intermedias* de manufactura, porque las cantidades de $x_1\mathbf{c}_1$ se consumirán en el proceso de creación de las x_1 unidades de producción. De la misma forma, si x_2 y x_3 denotan las producciones planeadas de los sectores de agricultura y servicios, $x_2\mathbf{c}_2$ y $x_3\mathbf{c}_3$, listan las demandas intermedias correspondientes. La demanda intermedia total de los tres sectores está dada por

$$\begin{aligned}\{\text{demanda intermedia}\} &= x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + x_3\mathbf{c}_3 \\ &= C\mathbf{x}\end{aligned} \tag{2}$$

donde C es la **matriz de consumo** $[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$, a saber,

$$C = \begin{bmatrix} .50 & .40 & .20 \\ .20 & .30 & .10 \\ .10 & .10 & .30 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (2) producen el modelo de Leontief.

EL MODELO DE LEONTIEF DE ENTRADA Y SALIDA, O ECUACIÓN DE PRODUCCIÓN

$$\underset{\substack{\text{Cantidad}\\\text{producida}}}{\mathbf{x}} = \underset{\substack{\text{Demanda}\\\text{intermedia}}}{C\mathbf{x}} + \underset{\substack{\text{Demanda}\\\text{final}}}{\mathbf{d}} \tag{4}$$

La ecuación (4) también se puede escribir como $I\mathbf{x} - C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, o

$$(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d} \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Considere la economía cuya matriz de consumo está dada por (3). Suponga que la demanda final es de 50 unidades para manufactura, 30 unidades para agricultura, y 20 unidades para servicios. Encuentre el nivel de producción $\mathbf{x}$ que satisfará esta demanda.

SOLUCIÓN La matriz de coeficientes en (5) es

$$I - C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .5 & .4 & .2 \\ .2 & .3 & .1 \\ .1 & .1 & .3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .5 & -.4 & -.2 \\ -.2 & .7 & -.1 \\ -.1 & -.1 & .7 \end{bmatrix}$$

Para resolver (5), reduzca por filas la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} .5 & -.4 & -.2 & 50 \\ -.2 & .7 & -.1 & 30 \\ -.1 & -.1 & .7 & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & 500 \\ -2 & 7 & -1 & 300 \\ -1 & -1 & 7 & 200 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 226 \\ 0 & 1 & 0 & 119 \\ 0 & 0 & 1 & 78 \end{bmatrix}$$

La última columna se redondea a la unidad más cercana. El área de manufactura debe producir aproximadamente 226 unidades, agricultura 119 unidades, y servicios únicamente 78 unidades. ■

Si la matriz $I - C$ es invertible, entonces se puede aplicar el teorema 5 de la sección 2.2 con A remplazada *por* $(I - C)$, y a partir de la ecuación $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ se obtiene $\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d}$. El siguiente teorema indica que, en la mayoría de los casos prácticos, $I - C$ *es* invertible y el vector de producción $\mathbf{x}$ es económicamente factible, en el sentido de que las entradas de $\mathbf{x}$ son no negativas.

En el teorema, el término **suma de columna** denota la suma de las entradas en una columna de una matriz. En circunstancias ordinarias, las sumas de columna de una matriz de consumo son menores que 1 porque un sector debería requerir menos de una unidad de insumos para generar una unidad de producción.

TEOREMA 11

Sea C la matriz de consumo de una economía, y sea $\mathbf{d}$ la demanda final. Si C y $\mathbf{d}$ tienen entradas no negativas, y si cada suma de columna de C es menor que uno, entonces $(I - C)^{-1}$ existe y el vector de producción

$$\mathbf{x} = (I - C)^{-1}\mathbf{d}$$

tiene entradas no negativas y es la solución única de

$$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

El siguiente análisis sugerirá por qué el teorema es cierto, y conducirá a una nueva manera de calcular $(I - C)^{-1}$.

Una fórmula para $(I - C)^{-1}$

Imagine que la demanda representada por $\mathbf{d}$ se propone a las distintas industrias al inicio del año, y que estas responden estableciendo sus niveles de producción en $\mathbf{x} = \mathbf{d}$, lo cual satisfará exactamente la demanda final. Conforme las industrias se preparan para producir $\mathbf{d}$, emiten órdenes solicitando materia prima y otros insumos. Esto crea una demanda intermedia de insumos de $C\mathbf{d}$.

Para satisfacer la demanda adicional de $C\mathbf{d}$, las industrias necesitarán como insumos adicionales las cantidades de $C(C\mathbf{d}) = C^2\mathbf{d}$. Desde luego, esto crea una segunda ronda de demanda intermedia, y cuando las industrias deciden producir aún más para satisfacer esta nueva demanda, se genera una tercera ronda de demanda, a saber, $C(C^2\mathbf{d}) = C^3\mathbf{d}$, y así sucesivamente.

En teoría, este proceso podría continuar de manera indefinida, aunque en la vida real no ocurriría en una sucesión tan rígida de acontecimientos. Podemos elaborar un diagrama de esta situación hipotética de la siguiente forma:

	Demanda que debe satisfacerse	**Insumos necesarios para satisfacer esta demanda**
Demanda final	$\mathbf{d}$	$C\mathbf{d}$
Demanda intermedia		
1a. ronda	$C\mathbf{d}$	$C(C\mathbf{d}) = C^2\mathbf{d}$
2a. ronda	$C^2\mathbf{d}$	$C(C^2\mathbf{d}) = C^3\mathbf{d}$
3a. ronda	$C^3\mathbf{d}$	$C(C^3\mathbf{d}) = C^4\mathbf{d}$
	$\vdots$	$\vdots$

El nivel de producción $\mathbf{x}$ que satisfará toda esta demanda es

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{d} + C\mathbf{d} + C^2\mathbf{d} + C^3\mathbf{d} + \cdots \\ &= (I + C + C^2 + C^3 + \cdots)\mathbf{d} \end{aligned} \tag{6}$$

Para que la ecuación (6) tenga sentido, considere la siguiente identidad algebraica:

$$(I - C)(I + C + C^2 + \cdots + C^m) = I - C^{m+1} \tag{7}$$

Es posible demostrar que si las sumas de columna en C son todas menores que 1, entonces $1 - C$ es invertible, C^m se aproxima a la matriz cero cuando m crece de manera arbitraria, e $I - C^{m+1} \to I$. (Esto es análogo al hecho de que si un número positivo t es menor que 1, entonces $t^m \to 0$ conforme m aumenta). Con base en la ecuación (7), se escribe

$$\begin{gathered} (I - C)^{-1} \approx I + C + C^2 + C^3 + \cdots + C^m \\ \text{cuando las sumas de columna de } C \text{ son menores que 1.} \end{gathered} \tag{8}$$

La aproximación en (8) significa que el miembro derecho puede acercarse a $(I - C)^{-1}$ tanto como se desee al hacer a m suficientemente grande.

En los modelos de entrada y salida reales, las potencias de la matriz de consumo se aproximan a la matriz cero con cierta rapidez. Así, (8) realmente ofrece una manera práctica de calcular $(I - C)^{-1}$. De la misma forma, para cualquier $\mathbf{d}$, los vectores $C^m\mathbf{d}$ se aproximan al vector cero rápidamente, y (6) es una manera práctica de resolver $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Si las entradas de C y $\mathbf{d}$ son no negativas, entonces (6) indica que las entradas de $\mathbf{x}$ también son no negativas.

Importancia económica de las entradas de $(I - C)^{-1}$

Las entradas de $(I - C)^{-1}$ son significativas porque pueden servir para predecir cómo tendrá que cambiar la producción $\mathbf{x}$ conforme cambie la demanda final $\mathbf{d}$. De hecho, las entradas de la columna j de $(I - C)^{-1}$ son las cantidades *aumentadas* que los diversos sectores tendrán que producir para satisfacer un *aumento de 1 unidad* en la demanda final de producción del sector j. Véase el ejercicio 8.

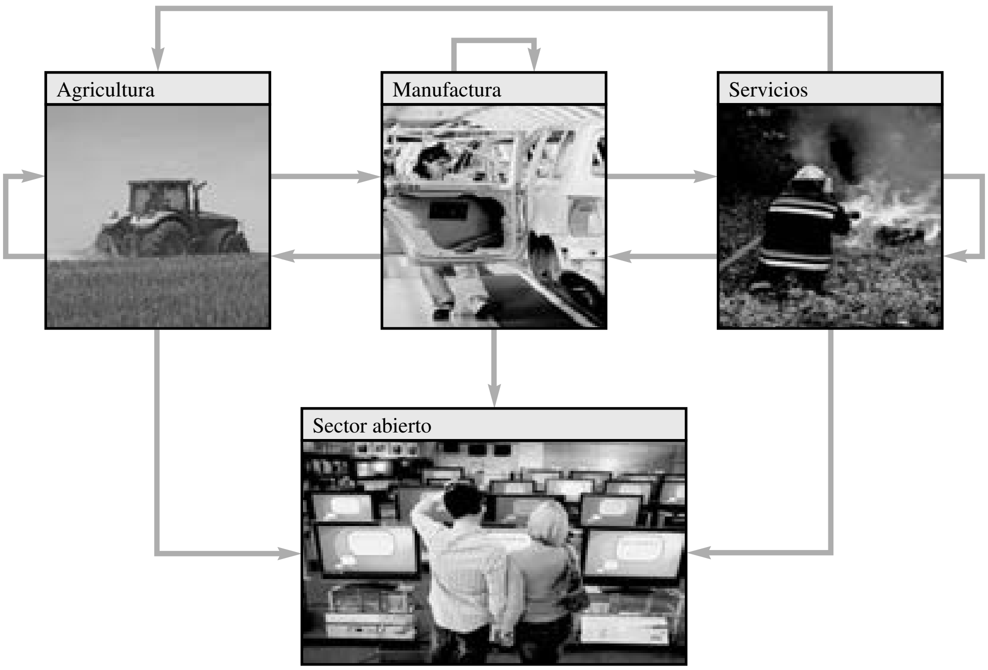
NOTA NUMÉRICA

En cualquier problema de aplicación (no solo en economía), una ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede escribir siempre como $(I - C)\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $C = I - A$. Si el sistema es grande y *disperso* (con cero en la mayoría de sus entradas), es posible que las sumas de columna de los valores absolutos en C sean menores que 1. En este caso, $C^m \to 0$. Si C^m tiende a cero con la suficiente rapidez, (6) y (8) representarán fórmulas prácticas para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y encontrar A^{-1}.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Suponga que una economía tiene dos sectores: bienes y servicios. Una unidad de producción de bienes requiere insumos de .2 unidades de bienes y .5 unidades de servicios. Una unidad de producción de servicios requiere insumos de .4 unidades de bienes y .3 unidades de servicios. Existe una demanda final de 20 unidades de bienes y 30 unidades de servicios. Implemente el modelo de Leontief de entrada y salida para esta situación.

2.6 EJERCICIOS



Los ejercicios 1 a 4 se refieren a una economía dividida en tres sectores: manufactura, agricultura y servicios. Por cada unidad de producción, manufactura requiere de .10 unidades de otras compañías pertenecientes a ese mismo sector, de .30 unidades del sector agricultura y de .30 unidades de servicios. Por cada unidad de producción, agricultura usa .20 unidades de su propia producción, .60 unidades de manufactura y .10 unidades de servicios. Por cada unidad de producción, el sector de servicios consume .10 unidades de servicios, .60 unidades de manufactura, pero ningún producto de agricultura.

1. Construya la matriz de consumo adecuada para esta economía, y determine cuáles demandas intermedias se crean si agricultura planea producir 100 unidades.

2. Determine los niveles de producción que se necesitan para satisfacer una demanda final de 20 unidades para agricultura, sin demanda final para los otros sectores. (No calcule una matriz inversa).

3. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda final de 20 unidades para manufactura, sin demanda final para los otros sectores. (No calcule una matriz inversa).

4. Determine los niveles de producción necesarios para satisfacer una demanda final de 20 unidades para manufactura, 20 para agricultura y 0 unidades para servicios.

5. Considere el modelo de producción $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ para una economía con dos sectores, donde

$$C = \begin{bmatrix} .0 & .5 \\ .6 & .2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

   Use una matriz inversa y determine el nivel de producción necesario para satisfacer la demanda final.

6. Repita el ejercicio 5 con $C = \begin{bmatrix} .2 & .5 \\ .6 & .1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}$.

7. Sean C y $\mathbf{d}$ como en el ejercicio 5.

   a) Determine el nivel de producción necesario para satisfacer una demanda final para una unidad de producción del sector 1.

   b) Con base en una matriz inversa, determine el nivel de producción necesario para satisfacer una demanda final de $\begin{bmatrix} 51 \\ 30 \end{bmatrix}$.

c) Con base en el hecho de que $\begin{bmatrix} 51 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, explique cómo y por qué están relacionadas las respuestas a los incisos *a*) y *b*) y al ejercicio 5.

8. Sea C una matriz de consumo de $n \times n$ cuyas sumas de columna son menores a 1. Sea $\mathbf{x}$ el vector de producción que satisface la demanda final $\mathbf{d}$, y sea $\Delta\mathbf{x}$ un vector de producción para satisfacer una demanda final diferente $\Delta\mathbf{d}$.

a) Demuestre que si la demanda final cambia de $\mathbf{d}$ a $\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$, entonces el nuevo nivel de producción debe ser $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$. Así, $\Delta\mathbf{x}$ indica las cantidades en que debe *cambiar* la producción para compensar el *cambio* $\Delta\mathbf{d}$ en la demanda.

b) Sea $\Delta\mathbf{d}$ el vector en $\mathbb{R}^n$ con 1 en la primera entrada y ceros en las demás. Explique por qué la producción correspondiente $\Delta\mathbf{x}$ es la primera columna de $(I - C)^{-1}$. Esto muestra que la primera columna de $(I - C)^{-1}$ indica las cantidades que deben producir los diversos sectores para satisfacer un aumento de una unidad en la demanda final para la producción del sector 1.

9. Resuelva la ecuación de producción de Leontief para una economía con tres sectores, considerando que

$$C = \begin{bmatrix} .2 & .2 & .0 \\ .3 & .1 & .3 \\ .1 & .0 & .2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 80 \end{bmatrix}$$

10. La matriz de consumo C para la economía de Estados Unidos en 1972 tiene la propiedad de que *cada entrada* de la matriz $(I - C)^{-1}$ es diferente de cero (y positiva).[1] ¿Qué dice esto acerca del efecto de aumentar la demanda de la producción solamente en un sector de la economía?

11. La ecuación de producción de Leontief, $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$, generalmente está acompañada por una **ecuación de precio** dual,

$$\mathbf{p} = C^T\mathbf{p} + \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{p}$ es un **vector de precio** cuyas entradas listan el precio por unidad de producción de cada sector, y $\mathbf{v}$ es un **vector de valor agregado** cuyas entradas listan el valor agregado por unidad de producción. (El valor agregado incluye salarios, utilidades, depreciación, etcétera). Un hecho importante en economía es que el producto interno bruto (PIB) se puede expresar de dos maneras:

$$\{\text{producto interno bruto}\} = \mathbf{p}^T\mathbf{d} = \mathbf{v}^T\mathbf{x}$$

Compruebe la segunda igualdad. [*Sugerencia:* Calcule $\mathbf{p}^T\mathbf{x}$ de dos maneras].

12. Sea C una matriz de consumo tal que $C^m \to 0$ cuando $m \to \infty$, y para $m = 1, 2, \ldots$, sea $D_m = I + C + \cdots + C^m$. Encuentre una ecuación en diferencias que relacione D_m y D_{m+1} y, a partir de ella, obtenga un procedimiento iterativo con la finalidad de calcular la fórmula (8) para $(I - C)^{-1}$.

13. **[M]** La siguiente matriz de consumo C está basada en datos de entrada y salida para la economía de Estados Unidos en 1958, con datos para 81 sectores agrupados en 7 sectores de mayores dimensiones: **1.** productos no metálicos personales y domésticos, **2.** productos metálicos finales (como vehículos motorizados), **3.** productos básicos de metal y minería, **4.** productos básicos no metálicos y de agricultura, **5.** energía, **6.** servicios, y **7.** entretenimiento y productos diversos.[2] Encuentre los niveles de producción necesarios para satisfacer la demanda final $\mathbf{d}$. (Las unidades están en millones de dólares).

$$\begin{bmatrix} .1588 & .0064 & .0025 & .0304 & .0014 & .0083 & .1594 \\ .0057 & .2645 & .0436 & .0099 & .0083 & .0201 & .3413 \\ .0264 & .1506 & .3557 & .0139 & .0142 & .0070 & .0236 \\ .3299 & .0565 & .0495 & .3636 & .0204 & .0483 & .0649 \\ .0089 & .0081 & .0333 & .0295 & .3412 & .0237 & .0020 \\ .1190 & .0901 & .0996 & .1260 & .1722 & .2368 & .3369 \\ .0063 & .0126 & .0196 & .0098 & .0064 & .0132 & .0012 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 74{,}000 \\ 56{,}000 \\ 10{,}500 \\ 25{,}000 \\ 17{,}500 \\ 196{,}000 \\ 5{,}000 \end{bmatrix}$$

14. **[M]** El vector de demanda del ejercicio 13 es razonable para los datos de 1958, pero el análisis de Leontief de la economía mencionado en el mismo ejercicio utilizó un vector de demanda más cercano a los datos de 1964:

$$\mathbf{d} = (99640, 75548, 14444, 33501, 23527, 263985, 6526)$$

Encuentre los niveles de producción necesarios para satisfacer esta demanda.

15. **[M]** Use la ecuación (6) para resolver el problema del ejercicio 13. Considere que $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}$, y para $k = 1, 2, \ldots$, calcule $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{d} + C\mathbf{x}^{(k-1)}$. ¿Cuántos pasos se necesitan para obtener una respuesta al ejercicio 13 con cuatro cifras significativas?

[1] Wassily W. Leontief, “The World Economy of the Year 2000”, *Scientific American*, septiembre de 1980, pp. 206-231.

[2] Wassily W. Leontief, “The Structure of the U.S. Economy”, *Scientific American*, abril de 1965, pp. 30-32.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Se cuenta con los siguientes datos:

	Insumos necesarios por unidad de producción		
Comprados por:	**Bienes**	**Servicios**	**Demanda externa**
Bienes	.2	.4	20
Servicios	.5	.3	30

El modelo de entrada y salida de Leontief es $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$, donde

$$C = \begin{bmatrix} .2 & .4 \\ .5 & .3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

2.7 APLICACIONES A LOS GRÁFICOS POR COMPUTADORA

Los gráficos por computadora son imágenes desplegadas o animadas en una pantalla de computadora. Las aplicaciones de los gráficos por computadora están ampliamente difundidas y proliferan con rapidez. Por ejemplo, el diseño asistido por computadora (CAD) es una parte integral de muchos procesos de ingeniería, como el proceso de diseño de aeronaves descrito en la introducción de este capítulo. La industria del entretenimiento ha realizado el uso más espectacular de los gráficos por computadora: desde los efectos especiales en las películas *Matrix* a la Xbox de PlayStation 2.

La mayoría de los programas interactivos de cómputo diseñados para los negocios y la industria utilizan gráficos por computadora en los despliegues de pantalla y en otras funciones, como el despliegue gráfico de datos, la autoedición, y la producción de diapositivas para presentaciones comerciales y educativas. Por consiguiente, cualquier persona que estudie un lenguaje de computadora siempre pasa algún tiempo aprendiendo a usar gráficos de, por lo menos, dos dimensiones (2D).

En esta sección se examinará algo de las matemáticas básicas que se usan para manipular y desplegar imágenes gráficas, como el modelo de alambre de un avión. Una imagen (o dibujo) de ese tipo consta de varios puntos, líneas rectas o curvas conectados, e información sobre cómo llenar regiones cerradas delimitadas por esas rectas y curvas. Con frecuencia, las líneas curvas se aproximan utilizando segmentos de línea recta cortos, y una figura se define matemáticamente por medio de una lista de puntos.

Entre los símbolos gráficos más sencillos utilizados en 2D están las letras usadas como etiquetas en la pantalla. Algunas letras se guardan como objetos de alambre; otras, con porciones curvas, se almacenan con fórmulas matemáticas adicionales para las curvas.

EJEMPLO 1 La letra N mayúscula de la figura 1 está determinada por ocho puntos o *vértices*. Las coordenadas de los puntos se pueden almacenar en una matriz de datos, D.

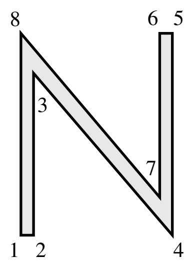


FIGURA 1
N regular.

$$\begin{array}{r c} & \text{Vértice:} \\ & \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{coordenada } x \\ \text{coordenada } y \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & .5 & .5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix} = D \end{array}$$

Además de D, es necesario especificar cuáles vértices están conectados con líneas, pero aquí se omite este detalle. ■

La principal razón para describir los objetos gráficos por medio de segmentos de líneas rectas es que las transformaciones estándar en los gráficos por computadora mapean segmentos de línea sobre otros segmentos de línea. (Por ejemplo, véase el ejercicio 26 de la sección 1.8). Una vez transformados los vértices que describen un objeto, es posible conectar sus imágenes con las líneas rectas adecuadas para producir la imagen completa del objeto original.

EJEMPLO 2 A partir de $A = \begin{bmatrix} 1 & .25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, describa el efecto de la transformación de trasquilado $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ sobre la letra N del ejemplo 1.

SOLUCIÓN Por la definición de multiplicación de matrices, las columnas del producto AD contienen las imágenes de los vértices de la letra N.

$$\begin{array}{c} \\ AD = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & .5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.420 & 0 & 8 & 8 & 1.580 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

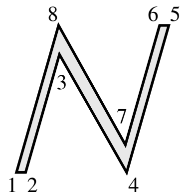


FIGURA 2
N inclinada.

Los vértices transformados se dibujan en la figura 2, junto con los segmentos de línea conectores que corresponden a los de la figura original. ■

La *N* cursiva de la figura 2 se ve demasiado ancha. Para compensar ese hecho, se puede reducir la anchura mediante una transformación de escala que afecta las coordenadas x de los puntos.

EJEMPLO 3 Calcule la matriz de la transformación que realiza una transformación de trasquilado, como en el ejemplo 2, y que después modifica a escala todas las coordenadas x por un factor de .75.

SOLUCIÓN La matriz que multiplica la coordenada x de un punto por .75 es

$$S = \begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

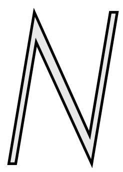


FIGURA 3
Transformación compuesta de *N*.

Así que la matriz de la transformación compuesta es

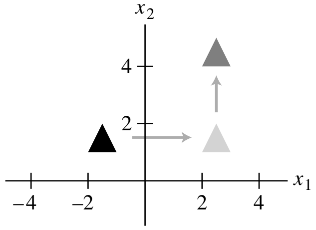
$$\begin{aligned} SA &= \begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & .25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} .75 & .1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El resultado de esta transformación compuesta se muestra en la figura 3. ■

Las matemáticas de los gráficos por computadora están íntimamente relacionadas con la multiplicación de matrices. Por desgracia, trasladar un objeto a una pantalla no corresponde directamente a la multiplicación de matrices porque la traslación no es una transformación lineal. La manera estándar de evitar esta dificultad es introducir lo que se conoce como *coordenadas homogéneas*.

Coordenadas homogéneas

Cada punto (x, y) en $\mathbb{R}^2$ se puede identificar con el punto $(x, y, 1)$ en el plano en $\mathbb{R}^3$ que se encuentra una unidad por encima del plano xy. Se dice que (x, y) tiene *coordenadas homogéneas* $(x, y, 1)$. Por ejemplo, el punto $(0, 0)$ tiene coordenadas homogéneas $(0, 0, 1)$. Las coordenadas homogéneas de puntos no se suman ni se multiplican por escalares, pero se pueden transformar mediante multiplicación por matrices de 3×3.



Traslación por $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

EJEMPLO 4 Una traslación de la forma $(x, y) \mapsto (x + h, y + k)$ se escribe en coordenadas homogéneas como $(x, y, 1) \mapsto (x + h, y + k, 1)$. Esta transformación se puede calcular mediante la multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{bmatrix}$$ ■

EJEMPLO 5 Cualquier transformación lineal sobre $\mathbb{R}^2$ se representa con respecto a las coordenadas homogéneas por medio de una matriz particionada de la forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, donde A es una matriz de 2×2. Ejemplos típicos son:

$$\underset{\substack{\text{Rotación en sentido}\\ \text{antihorario en torno}\\ \text{al origen, ángulo } \varphi}}{\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \underset{\substack{\text{Reflexión}\\ \text{a través de } y = x}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}, \quad \underset{\substack{\text{Escala de } x \text{ por } s\\ \text{y de } y \text{ por } t}}{\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

■

Transformaciones compuestas

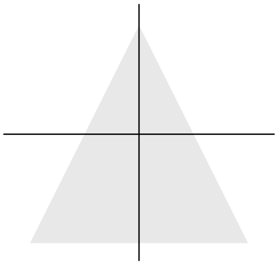
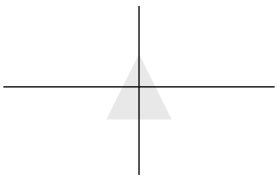
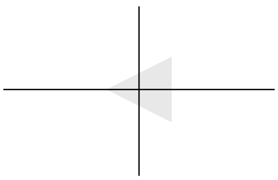


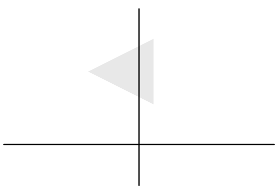
Figura original



Después del escalamiento



Después de la rotación



Después de la traslación

El movimiento de una figura en la pantalla de una computadora a menudo requiere de dos o más transformaciones básicas. La composición de tales transformaciones corresponde a la multiplicación de matrices cuando se usan coordenadas homogéneas.

EJEMPLO 6 Encuentre la matriz de 3×3 que corresponde a la transformación compuesta de un escalamiento por .3, una rotación de 90° en torno al origen y, por último, una traslación que suma $(-.5, 2)$ a cada punto de una figura.

SOLUCIÓN Si $\varphi = \pi/2$, entonces $\operatorname{sen}\varphi = 1$ y $\cos\varphi = 0$. A partir de los ejemplos 4 y 5, se tiene que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Escalamiento}} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Rotación}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Traslación}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz para la transformación compuesta es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -.5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -.3 & -.5 \\ .3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Gráficos 3D por computadora

Algunos de los más recientes y estimulantes trabajos en gráficos por computadora se relacionan con el modelado molecular. Un biólogo tiene la posibilidad de examinar una molécula simulada de proteína utilizando gráficos tridimensionales (3D), y así buscar los sitios activos que pueden aceptar la molécula de un medicamento. El biólogo podrá hacer girar y trasladar un medicamento experimental para tratar de unirlo a la proteína. Esta capacidad de *visualizar* reacciones químicas potenciales es vital para la investigación de medicamentos modernos y del cáncer. De hecho, los avances en el diseño de medicamentos dependen, en cierta medida, del progreso que se logre en la capacidad de los gráficos por computadora para construir simulaciones realistas de las moléculas y sus interacciones.[1]

La investigación actual en el modelado de moléculas se enfoca en la *realidad virtual*, un entorno en el que un investigador puede ver y *sentir* la molécula de medicamento deslizarse dentro de la proteína. En la figura 4 se ilustra el proceso de retroalimentación táctil con un manipulador remoto que despliega la fuerza.

FIGURA 4 Modelado molecular en realidad virtual. (Departamento de Ciencias de la Computación, University of North Carolina en Chapel Hill. Fotografía de Bo Strain).

Otro diseño de realidad virtual consiste en un casco y un guante que detectan los movimientos de la cabeza, la mano y los dedos. El casco incluye dos pequeñas pantallas de computadora, una para cada ojo. Hacer que este medio virtual sea más realista es un desafío para ingenieros, científicos y matemáticos. Las matemáticas que se manejan aquí apenas abren la puerta a este campo de la investigación.

Coordenadas 3D homogéneas

Por analogía con el caso bidimensional, se dice que $(x, y, z, 1)$ son las coordenadas homogéneas para el punto (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$. En general, (X, Y, Z, H) son las **coordenadas homogéneas** para (x, y, z) si $H \neq 0$ y

$$x = \frac{X}{H}, \qquad y = \frac{Y}{H} \quad \text{y} \quad z = \frac{Z}{H} \tag{1}$$

Cada múltiplo escalar diferente de cero de $(x, y, z, 1)$ proporciona un conjunto de coordenadas homogéneas para (x, y, z). Por ejemplo, $(10, -6, 14, 2)$ y $(-15, 9, -21, -3)$ son coordenadas homogéneas para $(5, -3, 7)$.

El siguiente ejemplo ilustra las transformaciones utilizadas en el modelado molecular para introducir un medicamento en una molécula de proteína.

EJEMPLO 7 Encuentre las matrices de 4×4 para las siguientes transformaciones:

a) Rotación en torno al eje y a través de un ángulo de 30°. (Por convención, un ángulo positivo es un giro en sentido antihorario cuando se ve hacia el origen desde la mitad positiva del eje de rotación, en este caso, el eje y).

[1] Robert Pool, "Computing in Science", *Science* **256**, 3 de abril de 1992, p. 45.

b) Traslación mediante el vector $\mathbf{p} = (-6, 4, 5)$.

SOLUCIÓN

a) Primero, construya la matriz de 3×3 para la rotación. El vector $\mathbf{e}_1$ gira hacia abajo en la dirección del eje z negativo, y se detiene en $(\cos 30°, 0, -\text{sen } 30°) = (\sqrt{3}/2, 0, -.5)$. El vector $\mathbf{e}_2$ sobre el eje y no se mueve, pero $\mathbf{e}_3$ sobre el eje z gira hacia abajo en dirección del eje x positivo, hasta detenerse en $(\text{sen } 30°, 0, \cos 30°) = (.5, 0, \sqrt{3}/2)$. Véase la figura 5. De acuerdo con la sección 1.9, la matriz estándar para esta rotación es

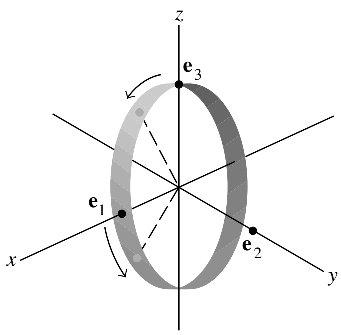


FIGURA 5

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & .5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -.5 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de rotación para las coordenadas homogéneas es

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & .5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -.5 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Se desea que $(x, y, z, 1)$ mapee a $(x - 6, y + 4, z + 5, 1)$. La matriz que logra esto es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Proyecciones en perspectiva

Un objeto tridimensional se representa en la pantalla de dos dimensiones de una computadora proyectándolo sobre un *plano visual*. (Se omiten otros pasos importantes, como la selección de la parte del plano visual que se desplegará en la pantalla). Para simplificar, considere que el plano xy representa la pantalla de la computadora e imagine que el ojo de un observador está sobre el eje positivo z, en un punto $(0, 0, d)$. Una *proyección en perspectiva* mapea cada punto (x, y, z) sobre un punto de imagen $(x^*, y^*, 0)$ de manera que los dos puntos y la posición del ojo, llamada **centro de proyección**, estén sobre una recta. Véase la figura 6*a*).

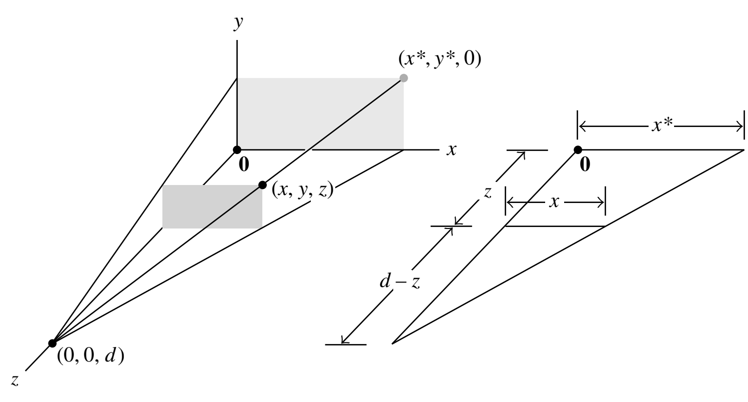


FIGURA 6 Proyección en perspectiva de (x, y, z) sobre $(x^*, y^*, 0)$.

El triángulo en el plano xz de la figura 6*a*) se vuelve a trazar en el inciso *b*) mostrando la longitud de los segmentos de recta. Con triángulos similares se muestra que

$$\frac{x^*}{d} = \frac{x}{d-z} \quad \text{y} \quad x^* = \frac{dx}{d-z} = \frac{x}{1-z/d}$$

De manera análoga,

$$y^* = \frac{y}{1-z/d}$$

Usando coordenadas homogéneas, es posible representar la proyección en perspectiva mediante una matriz, por ejemplo, P. Se desea que $(x, y, z, 1)$ se mapee en $\left(\frac{x}{1-z/d}, \frac{y}{1-z/d}, 0, 1\right)$. Al modificar a escala estas coordenadas por $1 - z/d$, también se puede utilizar $(x, y, 0, 1 - z/d)$ como coordenadas homogéneas para la imagen. Ahora resulta fácil desplegar P. De hecho,

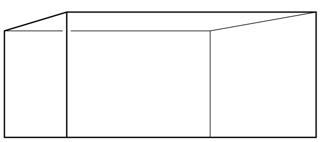
$$P\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-z/d \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 8 Sea S la caja con vértices (3, 1, 5), (5, 1, 5), (5, 0, 5), (3, 0, 5), (3, 1, 4), (5, 1, 4), (5, 0, 4) y (3, 0, 4). Encuentre la imagen de S bajo la proyección en perspectiva con centro de proyección en (0, 0, 10).

SOLUCIÓN Sean P la matriz de proyección y D la matriz de datos para S usando coordenadas homogéneas. La matriz de datos para la imagen de S es

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{Vértice:} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .5 & .5 & .5 & .5 & .6 & .6 & .6 & .6 \end{bmatrix}$$



S bajo la transformación de perspectiva.

Para obtener las coordenadas en $\mathbb{R}^3$, use la ecuación (1) que está antes del ejemplo 7 y divida las tres entradas superiores de cada columna entre la entrada correspondiente de la cuarta fila:

$$\begin{array}{c} \text{Vértice:} \\ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 10 & 10 & 6 & 5 & 8.3 & 8.3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1.7 & 1.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

■

WEB

En el sitio Web de este libro se presentan algunas aplicaciones interesantes de los gráficos por computadora, incluyendo un análisis más profundo de las proyecciones en perspectiva. Uno de los proyectos para computadora presentados en el sitio Web implica una animación sencilla.

NOTA NUMÉRICA

El movimiento continuo de objetos gráficos en 3D requiere de cálculo intenso con matrices de 4×4, en especial cuando las superficies deben parecer realistas, con la textura e iluminación adecuadas. Las *estaciones de trabajo para gráficos por computadora de acabado fino* realizan operaciones con matrices de 4×4 y algoritmos de gráficos integrados en sus microchips y circuitos. Estas estaciones son capaces de realizar miles de millones de multiplicaciones de matrices por segundo necesarias para presentar la animación realista en color en los programas de juegos 3D.[2]

Lectura adicional

James D. Foley, Andries van Dam, Steven K. Feiner y John F. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice*, 3a. ed. (Boston, MA: Addison-Wesley, 2002), capítulos 5 y 6.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

La rotación de una figura alrededor de un punto $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^2$ se logra primero con una traslación de la figura mediante $-\mathbf{p}$, luego con una rotación alrededor del origen, y finalmente trasladándola de regreso mediante $\mathbf{p}$. Véase la figura 7. Construya la matriz de 3×3 que hace girar puntos en un ángulo de $-30°$ en torno al punto $(-2, 6)$, usando coordenadas homogéneas.

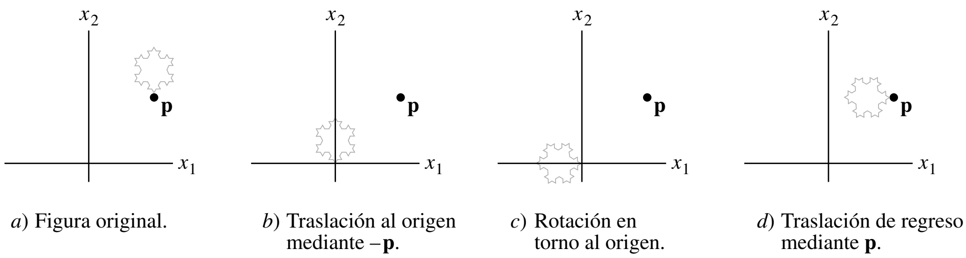


FIGURA 7 Rotación de la figura con respecto al punto $\mathbf{p}$.

2.7 EJERCICIOS

1. ¿Qué matriz de 3×3 tendrá el mismo efecto en las coordenadas homogéneas para $\mathbb{R}^2$ que la matriz de corte A del ejemplo 2?

2. Utilice multiplicación de matrices para encontrar la imagen del triángulo con datos $D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ bajo la transformación que refleja los puntos a través del eje y. Bosqueje tanto el triángulo original como su imagen.

En los ejercicios 3 a 8, determine las matrices de 3×3 que producen las transformaciones 2D compuestas, usando coordenadas homogéneas.

3. Traslade con (2, 1), y después haga girar 90° con respecto al origen.

4. Traslade con $(-1, 4)$, y después modifique a escala la coordenada x por 1/2 y la coordenada y por 3/2.

5. Refleje los puntos a través del eje x, y después hágalos girar 45° con respecto al origen.

6. Haga girar los puntos 45° con respecto al origen, después refléjelos a través del eje x.

7. Haga girar los puntos un ángulo de 60° con respecto al punto (6, 8).

8. Haga girar los puntos un ángulo de 45° con respecto al punto (3, 7).

9. Una matriz de datos de 2×100 contiene las coordenadas de 100 puntos. Calcule el número de multiplicaciones necesarias para transformar estos puntos usando dos matrices arbitrarias A y B de 2×2. Considere las dos posibilidades $A(BD)$ y $(AB)D$. Analice las implicaciones de sus resultados con los cálculos de los gráficos por computadora.

[2] Véase Jan Ozer, "High-Performance Graphics Boards", *PC Magazine* **19**, 1 de septiembre de 2000, pp. 187-200. También "The Ultimate Upgrade Guide: Moving On Up", *PC Magazine* **21**, 29 de enero de 2002, pp. 82-91.

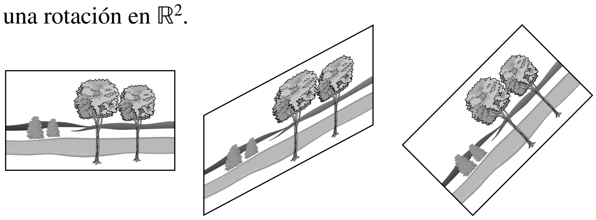
10. Considere las siguientes transformaciones geométricas 2D: D, una dilatación (en la que se modifica la escala de las coordenadas x y y por el mismo factor); R, una rotación; y T, una traslación. ¿*Conmuta* D con R? Es decir, ¿es $D(R(\mathbf{x})) = R(D(\mathbf{x}))$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$? ¿Conmuta D con T? ¿Conmuta R con T?

11. Una rotación en la pantalla de una computadora a veces se implementa como el producto de dos transformaciones de trasquilado y escalamiento, que pueden acelerar los cálculos para determinar cómo se presenta en realidad una imagen gráfica en términos de los pixeles de la pantalla. (La pantalla consiste en filas y columnas de puntos pequeños, llamados *pixeles*). La primera transformación A_1 trasquila verticalmente y después comprime cada columna de pixeles; la segunda transformación A_2 trasquila horizontalmente y después estira cada fila de pixeles. Sean

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \sec\varphi & -\tan\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y muestre que la composición de las dos transformaciones es una rotación en $\mathbb{R}^2$.



12. Una rotación en $\mathbb{R}^2$, por lo general, requiere cuatro multiplicaciones. Calcule el siguiente producto y demuestre que la matriz para una rotación se puede factorizar en tres transformaciones de trasquilado (cada una de las cuales requiere de tan solo una multiplicación).

$$\begin{bmatrix} 1 & -\tan\varphi/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\tan\varphi/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

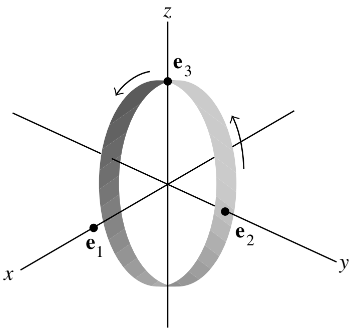
13. Las transformaciones usuales en coordenadas homogéneas para gráficos 2D por computadora implican matrices de 3×3 en la forma $\begin{bmatrix} A & \mathbf{p} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ donde A es una matriz de 2×2 y $\mathbf{p}$ está en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que una transformación de este tipo equivale a una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ seguida por una traslación. [*Sugerencia*: Encuentre una factorización de matrices adecuada en la que intervengan matrices particionadas].

14. Demuestre que la transformación del ejercicio 7 es equivalente a una rotación con respecto al origen seguida por una traslación mediante $\mathbf{p}$. Encuentre $\mathbf{p}$.

15. ¿Qué vector en $\mathbb{R}^3$ tiene las coordenadas homogéneas $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{24})$?

16. ¿Son $(1, -2, -3, 4)$ y $(10, -20, -30, 40)$ coordenadas homogéneas para el mismo punto en $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

17. Proporcione la matriz de 4×4 que hace girar puntos en $\mathbb{R}^3$ con respecto al eje x a través de un ángulo de 60°. (Véase la figura).



18. Encuentre la matriz de 4×4 que hace girar puntos en $\mathbb{R}^3$ con respecto al eje z a través de un ángulo de $-30°$, y después los traslada mediante $\mathbf{p} = (5, -2, 1)$.

19. Sea S el triángulo con vértices $(4.2, 1.2, 4)$, $(6, 4, 2)$ y $(2, 2, 6)$. Encuentre la imagen de S bajo la proyección en perspectiva con centro de proyección en $(0, 0, 10)$.

20. Sea S el triángulo con vértices $(7, 3, -5)$, $(12, 8, 2)$, $(1, 2, 1)$. Encuentre la imagen de S bajo la proyección en perspectiva con centro de proyección en $(0, 0, 10)$.

Los ejercicios 21 y 22 se refieren a la manera en que se especifica el color para mostrarse en gráficos por computadora. En una pantalla de computadora, el color se codifica utilizando tres números (R, G, B) para indicar la cantidad de energía que un cañón debe transmitir a los puntos fosforescentes rojos, verdes y azules sobre la pantalla de la computadora. (Un cuarto número especifica la luminosidad o intensidad del color).

21. **[M]** El color real que ve un observador en una pantalla está influido por el tipo específico y la cantidad de material fosforescente en la pantalla. De esta manera, cada fabricante de pantallas de computadora debe hacer la conversión entre los datos (R, G, B) y un estándar internacional para color, CIE, que usa tres colores primarios llamados X, Y y Z. Una conversión típica para el material fosforescente de persistencia breve es

$$\begin{bmatrix} .61 & .29 & .150 \\ .35 & .59 & .063 \\ .04 & .12 & .787 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Un programa de computadora envía un flujo de información acerca del color a la pantalla usando datos del estándar CIE (X, Y, Z). Encuentre la ecuación que convierte esta información en los datos (R, G, B) que necesita el cañón de electrones de la pantalla.

22. **[M]** La señal transmitida por la televisión comercial describe cada color por medio de un vector (Y, I, Q). Si la pantalla es en blanco y negro, solo se utiliza la coordenada Y. (Esto da una mejor imagen monocromática que si se usa el estándar CIE para los colores). La correspondencia entre YIQ y un color "estándar" RGB está dada por

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .299 & .587 & .114 \\ .596 & -.275 & -.321 \\ .212 & -.528 & .311 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

(Un fabricante de pantallas cambiaría las entradas de la matriz para que funcionaran con sus pantallas *RGB*). Encuentre la ecuación que convierte los datos *YIQ* transmitidos por la estación de televisión a los datos *RGB* necesarios para la pantalla del televisor.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Acomode las matrices de derecha a izquierda para las tres operaciones. Usando $\mathbf{p} = (-2, 6)$, $\cos(-30°) = \sqrt{3}/2$ y $\text{sen}(-30°) = -.5$, se tiene:

$$\underset{\text{regreso mediante } p}{\overset{\text{Traslación de}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \underset{\text{respecto al origen}}{\overset{\text{Rotación con}}{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \underset{\text{mediante } -p}{\overset{\text{Traslación}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & \sqrt{3}-5 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & -3\sqrt{3}+5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^n$

Esta sección se concentra en los importantes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^n$ llamados *subespacios*. Con frecuencia surgen subespacios conectados con alguna matriz A, los cuales brindan información útil acerca de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Los conceptos y la terminología de esta sección se usarán repetidamente a lo largo del libro.[1]

DEFINICIÓN

Un **subespacio** de $\mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto H en $\mathbb{R}^n$ que tenga tres propiedades:

a) El vector cero está en H.

b) Para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en H, la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en H.

c) Para cada $\mathbf{u}$ en H y cada escalar c, el vector $c\mathbf{u}$ está en H.

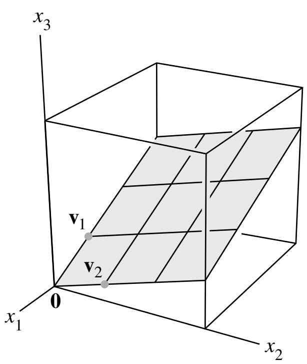


FIGURA 1 Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tiene un plano a través del origen.

Dicho con palabras, un subespacio es *cerrado* bajo la suma y la multiplicación escalar. Como se verá en los siguientes ejemplos, casi todos los conjuntos de vectores analizados en el capítulo 1 son subespacios. Por ejemplo, un plano que pasa por el origen es la manera estándar de visualizar el subespacio del ejemplo 1. Véase la figura 1.

EJEMPLO 1 Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están en $\mathbb{R}^n$ y $H = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, entonces H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Para comprobar este enunciado, observe que el vector cero está en H (porque $0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Ahora tome dos vectores arbitrarios en H, por ejemplo,

$$\mathbf{u} = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

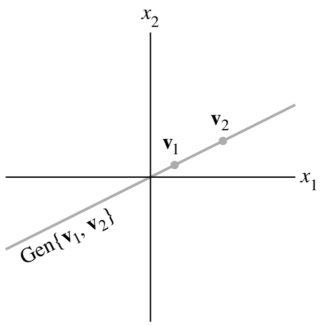
Luego,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (s_1 + t_1)\mathbf{v}_1 + (s_2 + t_2)\mathbf{v}_2$$

lo que demuestra que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ y, por lo tanto, está en H. Además, para cualquier escalar c, el vector $c\mathbf{u}$ está en H, ya que $c\mathbf{u} = c(s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2) = (cs_1)\mathbf{v}_1 + (cs_2)\mathbf{v}_2$. ■

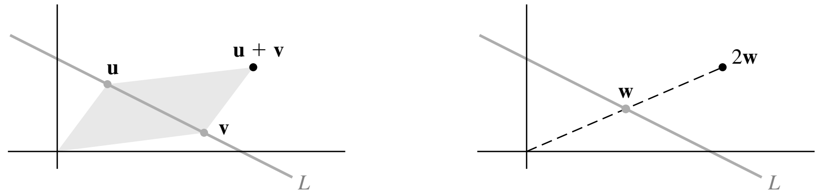
[1] Las secciones 2.8 y 2.9 se incluyen aquí para permitir que los lectores pospongan el estudio de la mayor parte o el total de los siguientes dos capítulos y vayan directamente al capítulo 5, si así lo desean. *Omita* estas dos secciones si planea estudiar el capítulo 4 antes que el capítulo 5.

Si $\mathbf{v}_1$ no es cero, y si $\mathbf{v}_2$ es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$, entonces $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ simplemente generan una *recta* que pasa a través del origen. Por lo tanto, una recta que pasa por el origen es otro ejemplo de un subespacio.



$\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 2 Una recta L que *no* pasa por el origen *no* es un subespacio, porque no contiene al origen, como se requiere. Además, la figura 2 muestra que L no es cerrada bajo la suma o la multiplicación escalar. ■



$\mathbf{u} + \mathbf{v}$ no está sobre L $\qquad$ $2\mathbf{w}$ no está sobre L

FIGURA 2

EJEMPLO 3 Para $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. La comprobación de este enunciado es similar al argumento dado en el ejemplo 1. Ahora nos referimos a Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ como el **subespacio generado** por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$. ■

Observe que $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo porque tiene las tres propiedades requeridas para un subespacio. Otro subespacio especial es el conjunto que consta exclusivamente del vector cero en $\mathbb{R}^n$. Este conjunto, llamado **subespacio cero**, también satisface las condiciones de un subespacio.

Espacio de columnas y espacio nulo de una matriz

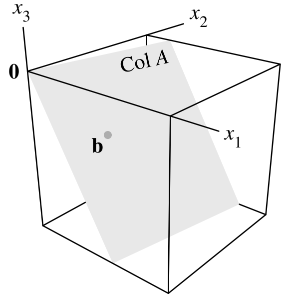
Los subespacios de $\mathbb{R}^n$ generalmente se presentan en aplicaciones y en la teoría en una de dos formas. En ambos casos, es posible relacionar el subespacio con una matriz.

DEFINICIÓN

El **espacio de columnas** de una matriz A es el conjunto Col A de todas las combinaciones de las columnas de A.

Si $A = [\mathbf{a}_1 \; \cdots \; \mathbf{a}_n]$, con las columnas en $\mathbb{R}^m$, entonces Col A es lo mismo que Gen $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$. En el ejemplo 4 se muestra que el **espacio columna de una matriz de** $\boldsymbol{m \times n}$ **es un subespacio de** $\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$. Observe que Col A es igual a $\mathbb{R}^m$ solo cuando las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$. Si no la generan, Col A es solo una parte de $\mathbb{R}^m$.

EJEMPLO 4 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{b}$ es el espacio columna de A.



SOLUCIÓN El vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A si y solo si $\mathbf{b}$ se puede escribir como $A\mathbf{x}$ para alguna $\mathbf{x}$, es decir, si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. Reduciendo por filas a la matriz aumentada $[A \quad \mathbf{b}]$, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se concluye que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, y $\mathbf{b}$ está en Col A. ■

La solución del ejemplo 4 indica que cuando un sistema de ecuaciones lineales está escrito en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, el espacio columna de A es el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ para las que el sistema tiene una solución.

DEFINICIÓN

El **espacio nulo** de una matriz A es el conjunto Nul A de todas las soluciones posibles para la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Cuando A tiene n columnas, las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, y el espacio nulo de A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. De hecho, Nul A tiene las propiedades de un *subespacio* de matrices de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 12

El espacio nulo de una matriz A de $m \times n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. De manera equivalente, el conjunto de todas las soluciones posibles para un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de m ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN El vector cero está en Nul A (porque $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$). Para demostrar que Nul A satisface las otras dos propiedades requeridas para conformar un subespacio, tome cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en Nul A. Es decir, se supone que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así, por una propiedad de la multiplicación de matrices,

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ satisface $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, y así $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en Nul A. Además, para cualquier escalar c, $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, lo que demuestra que $c\mathbf{u}$ está en Nul A. ■

Para saber si un vector dado $\mathbf{v}$ está en Nul A, solo se calcula $A\mathbf{v}$ para ver si $A\mathbf{v}$ es el vector cero. Puesto que Nul A se describe por medio de una condición que debe comprobarse para cada vector, se dice que el espacio nulo está definido *implícitamente*. En contraste, el espacio columna se define *explícitamente*, ya que los vectores en Col A se pueden construir (con combinaciones lineales) a partir de las columnas de A. Para crear una descripción explícita de Nul A, se resuelve la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y se escribe la solución en forma vectorial paramétrica. (Véase el ejemplo 6 que se presenta más adelante).[2]

Base para un subespacio

Como, por lo general, un subespacio contiene un número infinito de vectores, algunos problemas relacionados con subespacios se manejan mejor trabajando con un conjunto finito y pequeño de vectores que genere el subespacio. Cuanto menor sea el conjunto, será mejor. Es factible demostrar que el conjunto generador más pequeño posible debe ser linealmente independiente.

DEFINICIÓN

Una **base** de un subespacio H de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto linealmente independiente en H, que genera a H.

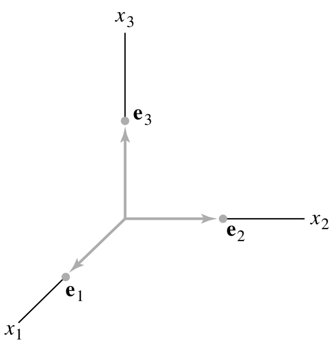


FIGURA 3
La base estándar para $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 5 Las columnas de una matriz invertible de $n \times n$ forman una base para toda $\mathbb{R}^n$ ya que son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^n$, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible. Una matriz de este tipo es la matriz identidad de $n \times n$. Sus columnas se denotan mediante $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es la base estándar para $\mathbb{R}^n$. Véase la figura 3. ■

[2] El contraste entre Nul A y Col A se analiza con mayor detalle en la sección 4.2.

El siguiente ejemplo muestra que el procedimiento estándar para escribir el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en la forma vectorial paramétrica en realidad identifica una base para Nul A. Este hecho se utilizará en todo el capítulo 5.

EJEMPLO 6 Encuentre una base para el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma vectorial paramétrica:

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

La solución general es $x_1 = 2x_2 + x_4 - 3x_5$, $x_3 = -2x_4 + 2x_5$, con x_2, x_4 y x_5 libres.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underset{\uparrow \atop \mathbf{u}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_4 \underset{\uparrow \atop \mathbf{v}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} + x_5 \underset{\uparrow \atop \mathbf{w}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w} \tag{1}$$

La ecuación (1) indica que Nul A coincide con el conjunto de todas las combinaciones lineales de **u**, **v** y **w**. Es decir, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ genera Nul A. De hecho, esta construcción de **u**, **v** y **w** automáticamente las hace linealmente independientes, ya que (1) muestra que $\mathbf{0} = x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w}$ solamente si todos los pesos x_2, x_4 y x_5 son cero. (Examine las entradas 2, 4 y 5 del vector $x_2\mathbf{u} + x_4\mathbf{v} + x_5\mathbf{w}$). Así, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es una *base* para Nul A. ■

Encontrar una base para el espacio columna de una matriz, en realidad, representa menos trabajo que encontrar una base para el espacio nulo. Sin embargo, el método requiere cierta explicación. Comencemos con un caso sencillo.

EJEMPLO 7 Encuentre una base para el espacio columna de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Denote las columnas de B mediante $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ y observe que $\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, y que $\mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. El hecho de que $\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}_4$ sean combinaciones de las columnas pivote significa que cualquier combinación de $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ es en realidad solo una combinación de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_5$. Efectivamente, si **v** es cualquier vector en Col B, por ejemplo,

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4 + c_5\mathbf{b}_5$$

entonces, al sustituir $\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}_4$, se puede escribir **v** en la forma

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + c_4(5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + c_5\mathbf{b}_5$$

que es una combinación lineal de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_5$. Así, $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5]$ genera Col B. También, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_5$ son linealmente independientes, porque son columnas de una matriz identidad. Por lo tanto, las columnas pivote de B forman una base para Col B. ■

La matriz B del ejemplo 7 está en forma escalonada reducida. Para manejar una matriz general A, recuerde que las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de A se pueden expresar en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para alguna $\mathbf{x}$. (Si algunas columnas no intervienen en una relación de dependencia particular, entonces las entradas correspondientes de $\mathbf{x}$ son cero). Cuando A se reduce por filas a la forma escalonada B, las columnas cambian en forma drástica, pero las ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tienen el mismo conjunto de soluciones. Es decir, las columnas de A tienen *exactamente las mismas relaciones de dependencia lineal* que las columnas de B.

EJEMPLO 8 Es posible comprobar que la matriz

$$A = [\,\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_5\,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$$

es equivalente por filas a la matriz B del ejemplo 7. Encuentre una base para Col A.

SOLUCIÓN A partir del ejemplo 7, las columnas pivote de A son las columnas 1, 2 y 5. También, $\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$. Puesto que las operaciones de fila no afectan las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de la matriz, deberíamos tener que

$$\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_4 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

Compruebe que ¡esto es cierto! Por el argumento del ejemplo 7, $\mathbf{a}_3$ y $\mathbf{a}_4$ no son necesarias para generar el espacio columna de A. Además, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ debe ser linealmente independiente, ya que cualquier relación de dependencia entre $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_5$ implicaría la misma relación de dependencia entre $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_5$. Puesto que $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5\}$ es linealmente independiente, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ también lo es y, por lo tanto, es una base para Col A. ■

El argumento del ejemplo 8 se puede adaptar para demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 13

Las columnas pivote de una matriz A forman una base para el espacio columna de A.

Advertencia: Tenga cuidado de utilizar las *columnas pivote de la misma* A para la base de Col A. Con frecuencia, las columnas de una forma escalonada B no están en el espacio columna de A. (Como se observa en los ejemplos 7 y 8, todas las columnas de B tienen ceros en sus últimas entradas y no pueden generar las columnas de A).

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en Nul A? ¿Está $\mathbf{u}$ en Col A? Justifique sus respuestas.

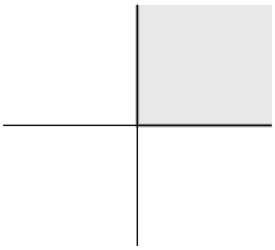
2. Dada $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, encuentre un vector en Nul A y un vector en Col A.

3. Suponga que una matriz A de $n \times n$ es invertible. ¿Qué se puede decir acerca de Col A? ¿Y de Nul A?

2.8 EJERCICIOS

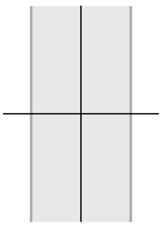
En los ejercicios 1 a 4 se muestran conjuntos en $\mathbb{R}^2$. Suponga que los conjuntos incluyen las líneas de frontera. En cada caso, dé una razón específica por la cual el conjunto H *no* es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. (Por ejemplo, encuentre dos vectores en H cuya suma *no* esté en H, o encuentre un vector en H con un múltiplo escalar que no esté en H. Trace un dibujo).

1.

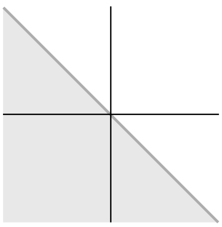


2.

3.



4.



5. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 10 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{w}$ está en el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

6. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{u}$ está en el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

7. Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix} \text{ y } A = [\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\,].$$

a) ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$?

b) ¿Cuántos vectores hay en Col A?

c) ¿Está $\mathbf{p}$ en Col A? ¿Por qué?

8. Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 17 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{p}$ está en Col A, donde $A = [\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2\ \ \mathbf{v}_3]$.

9. Con A y $\mathbf{p}$ como en el ejercicio 7, determine si $\mathbf{p}$ está en Nul A.

10. Con $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ y A como en el ejercicio 8, determine si $\mathbf{u}$ está en Nul A.

En los ejercicios 11 y 12, dé enteros p y q tales que Nul A sea un subespacio de $\mathbb{R}^p$ y Col A sea un subespacio de $\mathbb{R}^q$.

11. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -5 \\ -9 & -4 & 1 & 7 \\ 9 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ -5 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 11 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

13. Para A como en el ejercicio 11, encuentre un vector diferente de cero en Nul A y un vector diferente de cero en Col A.

14. Para A como en el ejercicio 12, encuentre un vector diferente de cero en Nul A y un vector diferente de cero en Col A.

Determine cuáles conjuntos de los ejercicios 15 a 20 son bases para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Justifique sus respuestas.

15. $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22 marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

21. *a*) Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es cualquier conjunto H tal que: **i.** el vector cero está en H, **ii.** $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ están en H, y **iii.** c es un escalar y $c\mathbf{u}$ está en H.

b) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es el mismo que el espacio columna de la matriz $[\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_p]$.

c) El conjunto de todas las soluciones de un sistema de m ecuaciones homogéneas con n incógnitas es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

d) Las columnas de una matriz invertible de $n \times n$ forman una base para $\mathbb{R}^n$.

e) Las operaciones de fila no afectan las relaciones de dependencia lineal entre las columnas de una matriz.

22. *a*) Un subconjunto H de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio si el vector cero está en H.

b) Si B es la forma escalonada de una matriz A, entonces las columnas pivote de B forman una base para Col A.

c) Dados los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

d) Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{x}$ está en H, y $\mathbf{y}$ está en $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ está en H.

e) El espacio columna de una matriz A es el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

En los ejercicios 23 a 26 se presenta una matriz A y una forma escalonada de A. Encuentre una base para Col A y una base para Nul A.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & 9 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

27. Construya una matriz A de 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ diferente de cero en forma tal que $\mathbf{b}$ esté en Col A, pero $\mathbf{b}$ no sea igual que alguna de las columnas de A.

28. Construya una matriz A de 3×3 y un vector $\mathbf{b}$ en forma tal que $\mathbf{b}$ *no* esté en Col A.

29. Construya una matriz A de 3×3 no nula y un vector $\mathbf{b}$ diferente de cero en forma tal que $\mathbf{b}$ esté en Nul A.

30. Suponga que las columnas de una matriz $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_p]$ son linealmente independientes. Explique por qué $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ es una base para Col A.

En los ejercicios 31 a 36, responda de manera tan amplia como sea posible y justifique sus respuestas.

31. Suponga que F es una matriz de 5×5 cuyo espacio columna no es igual a $\mathbb{R}^5$. ¿Qué se puede decir acerca de Nul F?

32. Si B es una matriz de 7×7 y Col $B = \mathbb{R}^7$, ¿qué se puede decir acerca de las soluciones de las ecuaciones de la forma $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^7$?

33. Si C es una matriz de 6×6 y Nul C es el subespacio cero, ¿qué se puede decir acerca de las soluciones a ecuaciones de la forma $C\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^6$?

34. ¿Qué se puede decir acerca de la forma de una matriz A de $m \times n$ cuando las columnas de A forman una base para $\mathbb{R}^m$?

35. Si B es una matriz de 5×5 y Nul B *no* es el subespacio cero, ¿qué se puede decir acerca de Col B?

36. ¿Qué se puede decir acerca de Nul C cuando C es una matriz de 6×4 con columnas linealmente independientes?

[M] En los ejercicios 37 y 38, construya bases para el espacio columna y para el espacio nulo de la matriz A dada. Justifique su trabajo.

37. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & -1 & 3 \\ -7 & 9 & -4 & 9 & -11 \\ -5 & 7 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & -7 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & -6 & -8 \\ 4 & 1 & 3 & -8 & -7 \\ 5 & 1 & 4 & 5 & 19 \\ -7 & -5 & -2 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

WEB Espacio columna y espacio nulo

WEB Una base para Col A

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Para determinar si $\mathbf{u}$ está en Nul A, simplemente calcule

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \\ -3 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado indica que $\mathbf{u}$ está en Nul A. Para decidir si $\mathbf{u}$ está en Col A se requiere más trabajo. Reduzca la matriz aumentada $[A \quad \mathbf{u}]$ a la forma escalonada para determinar si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es consistente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -7 \\ 2 & 0 & 7 & 3 \\ -3 & -5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 17 \\ 0 & -8 & 12 & -19 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & -3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$$

La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ no tiene solución, por lo tanto, $\mathbf{u}$ no está en Col A.

2. En contraste con el problema de práctica 1, encontrar un vector en Nul A requiere más trabajo que probar si un vector específico está en Nul A. Sin embargo, como A ya está en forma escalonada reducida, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ indica que si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, entonces $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, y x_1 es una variable libre. Por lo tanto, una base para Nul A es $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$. Encontrar solo un vector en Col A es trivial, puesto que cada columna de A está en Col A. En este caso particular, el mismo vector $\mathbf{v}$ se encuentra tanto en Nul A como en Col A. Para la mayoría de las matrices de $n \times n$, el vector cero de $\mathbb{R}^n$ es el único vector que se encuentra tanto en Nul A como en Col A.

3. Si A es invertible, entonces las columnas de A generan $\mathbb{R}^n$, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible. Por definición, las columnas de cualquier matriz siempre generan el espacio columna, así que, en este caso, Col A es toda de $\mathbb{R}^n$. En forma simbólica, Col $A = \mathbb{R}^n$. Además, como A es invertible, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial. Esto significa que Nul A es el subespacio cero. En forma simbólica, Nul $A = \{\mathbf{0}\}$.

2.9 DIMENSIÓN Y RANGO

En esta sección se continúa el análisis de los subespacios y las bases para subespacios comenzando con el concepto de un sistema coordenado. La definición y el ejemplo presentados a continuación pretenden que un término nuevo y útil, *dimensión*, parezca bastante natural, al menos para los subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Sistemas coordenados

La razón principal para seleccionar la base de un subespacio H, en lugar de simplemente un conjunto generador, es que cada vector en H se puede escribir solo de una manera como combinación lineal de los vectores de la base. Para ver por qué, suponga que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ es una base de H, y que un vector $\mathbf{x}$ en H se puede generar de dos maneras, por ejemplo,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = d_1\mathbf{b}_1 + \cdots + d_p\mathbf{b}_p \tag{1}$$

Después, al restar se obtiene

$$\mathbf{0} = \mathbf{x} - \mathbf{x} = (c_1 - d_1)\mathbf{b}_1 + \cdots + (c_p - d_p)\mathbf{b}_p \tag{2}$$

Como $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, los pesos en (2) deben ser todos cero. Es decir, $c_j = d_j$ para $1 \le j \le p$, lo que indica que las dos representaciones en (1), en realidad, son iguales.

DEFINICIÓN

Suponga, que el conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ es la base de un subespacio H. Para cada $\mathbf{x}$ en H, **las coordenadas de x respecto de la base** $\mathcal{B}$ son los pesos $c_1, \ldots, c_p$ tales que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p$, y el vector en $\mathbb{R}^p$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$$

se llama **vector de coordenadas de x (respecto de** $\mathcal{B}$**)** o **vector de** $\mathcal{B}$**-coordenadas de x**.[1]

EJEMPLO 1 Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $H = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ porque $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes. Determine si $\mathbf{x}$ está en H y, si lo está, encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de $\mathcal{B}$.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{x}$ está en H, entonces la siguiente ecuación vectorial es consistente:

$$c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Los escalares c_1 y c_2, si existen, son las $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{x}$. Usando operaciones de fila, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ y $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. La base $\mathcal{B}$ determina un "sistema de coordenadas" en H, lo que puede visualizarse por medio de la malla que se ilustra en la figura 1. ■

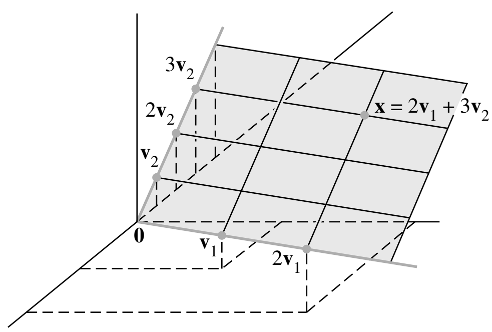


FIGURA 1 Un sistema de coordenadas sobre un plano H en $\mathbb{R}^3$.

[1] Es importante que los elementos de $\mathcal{B}$ estén numerados, ya que las entradas de $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ dependen del orden de los vectores en $\mathcal{B}$.

Observe que a pesar de que los puntos de H también se encuentran en $\mathbb{R}^3$, están completamente determinados por sus vectores de coordenadas, los cuales pertenecen a $\mathbb{R}^2$. La malla en el plano de la figura 1 hace que H "se vea" como $\mathbb{R}^2$. La correspondencia $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una correspondencia uno a uno entre H y $\mathbb{R}^2$ que conserva las combinaciones lineales. A una correspondencia de este tipo se le llama *isomorfismo*, y se dice que H es *isomorfo* a $\mathbb{R}^2$.

En general, si $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ es una base para H, entonces el mapeo $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es una correspondencia uno a uno que permite a H verse y actuar igual que R^p (aunque los propios vectores de H puedan tener más de p entradas). (En la sección 4.4 se presentan más detalles).

Dimensión de un subespacio

Es posible demostrar que si un subespacio H tiene una base de p vectores, entonces cualquier base de H debe consistir en exactamente p vectores. (Véase los ejercicios 27 y 28). Por lo tanto, la siguiente definición tiene sentido.

DEFINICIÓN La **dimensión** de un subespacio H diferente de cero, que se denota mediante dim H, es el número de vectores en cualquier base para H. La dimensión del subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$ es, por definición, cero.[2]

El espacio $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n. Cada base para $\mathbb{R}^n$ consiste en n vectores. Un plano a través de $\mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$ es bidimensional, y una recta que pasa a través de $\mathbf{0}$ es unidimensional.

EJEMPLO 2 Recuerde que el espacio nulo de la matriz A vista en el ejemplo 6, sección 2.8, tenía una base de tres vectores. Así que la dimensión de Nul A en este caso es 3. Observe cómo cada vector básico corresponde a una variable libre en la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La construcción realizada aquí siempre produce una base de este modo. Así, para encontrar la dimensión de Nul A, basta con identificar y contar el número de variables libres en $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

DEFINICIÓN El **rango** de una matriz A, que se denota como rango A, es la dimensión del espacio columna de A.

Puesto que las columnas pivote de A forman una base para Col A, el rango de A es simplemente el número de columnas pivote en A.

EJEMPLO 3 Determine el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Reduzca A a la forma escalonada:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 & 14 & -20 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Columnas pivote

La matriz A tiene 3 columnas pivote, así que rango $A = 3$. ■

[2] El subespacio cero *no* tiene base (porque el vector cero forma, por sí mismo, un conjunto linealmente dependiente).

La reducción por filas del ejemplo 3 revela que hay dos variables libres en $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, porque dos de las cinco columnas de A *no* son columnas pivote. (Las columnas que no son pivote corresponden a las variables libres de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Como el número de columnas pivote más el número de columnas que no son pivote es exactamente el número de columnas, las dimensiones de Col A y Nul A guardan la siguiente relación útil. (Para más detalles, véase el teorema del rango en la sección 4.6).

TEOREMA 14

El teorema del rango

Si una matriz A tiene n columnas, entonces rango A + dim Nul $A = n$.

El siguiente teorema es importante para las aplicaciones y se necesitará en los capítulos 5 y 6. El teorema (demostrado en la sección 4.5) es verdaderamente superior, si se piensa en un subespacio p-dimensional como isomorfo a $\mathbb{R}^p$. El teorema de la matriz invertible establece que p vectores de $\mathbb{R}^p$ son linealmente independientes si y solo si también generan a $\mathbb{R}^p$.

TEOREMA 15

El teorema de la base

Sea H un subespacio p-dimensional de $\mathbb{R}^n$. Cualquier conjunto linealmente independiente de exactamente p elementos en H de forma automática es una base de H. Además, cualquier conjunto de p elementos de H que genere a H es automáticamente una base para H.

Rango y el teorema de la matriz invertible

Los diversos conceptos de espacio vectorial asociados con una matriz proporcionan varios enunciados más para el teorema de la matriz invertible. Estos enunciados se presentan como una continuación del teorema original presentado en la sección 2.3.

TEOREMA

El teorema de la matriz invertible (continuación)

Sea A una matriz de $n \times n$. En tal caso, cada uno de los siguientes enunciados es equivalente al enunciado de que A es una matriz invertible.

m) Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

n) Col $A = \mathbb{R}^n$

o) dim Col $A = n$

p) rango $A = n$

q) Nul $A = \{\mathbf{0}\}$

r) dim Nul $A = 0$

DEMOSTRACIÓN El enunciado *m*) es, por lógica, equivalente a los enunciados *e*) y *h*) que consideran independencia lineal y generación. Los otros cinco enunciados se vinculan a los primeros del teorema por medio de la siguiente cadena de implicaciones casi triviales.

$$g) \Rightarrow n) \Rightarrow o) \Rightarrow p) \Rightarrow r) \Rightarrow q) \Rightarrow d)$$

El enunciado *g*), que establece que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, implica al enunciado *n*), porque Col A es precisamente el conjunto de todas las $\mathbf{b}$ tales que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea consistente. Las implicaciones $n) \Rightarrow o) \Rightarrow p)$ se desprenden de las definiciones de *dimensión* y *rango*. Si el rango de A es n, el número de columnas de A, entonces dim Nul $A = 0$, de acuerdo con el teorema del rango, y así Nul $A = \{\mathbf{0}\}$. Por lo tanto,

$p) \Rightarrow r) \Rightarrow q)$. Además, el enunciado q) implica que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial, que es el enunciado d). Puesto que ya se sabe que los enunciados d) y g) son equivalentes al enunciado de que A es invertible, la prueba está completa. ■

NOTAS NUMÉRICAS

Muchos de los algoritmos analizados en este libro resultan útiles para entender conceptos y realizar a mano cálculos sencillos. Sin embargo, con frecuencia los algoritmos no son aplicables a problemas de gran escala en la vida real.

Un buen ejemplo de lo anterior es la determinación del rango. Tal vez parezca sencillo reducir una matriz a su forma escalonada y contar los pivotes. Pero, a menos que se realicen cálculos matemáticos precisos sobre una matriz cuyas entradas estén especificadas de manera exacta, las operaciones de fila pueden cambiar el rango aparente de una matriz. Por ejemplo, si el valor de x en la matriz $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & x \end{bmatrix}$ no se almacena exactamente como 7 en una computadora, entonces el rango puede ser 1 o 2, dependiendo de si la computadora considera a $x - 7$ como cero.

WEB

En las aplicaciones prácticas, es frecuente que el rango efectivo de una matriz A se determine a partir de la descomposición del valor singular de A, que se estudiará en la sección 7.4.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Determine la dimensión del subespacio H de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. (Primero, encuentre una base para H).

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

2. Considere la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para $\mathbb{R}^2$. Si $[\,\mathbf{x}\,]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, ¿qué es $\mathbf{x}$?

3. ¿Podría $\mathbb{R}^3$ contener un subespacio cuatridimensional (o tetradimensional)? Explique su respuesta.

2.9 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 y 2, encuentre el vector $\mathbf{x}$ determinado por el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ y la base $\mathcal{B}$ dados. Ilustre cada respuesta con una figura, como en la solución al problema de práctica 2.

1. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 3 a 6, el vector $\mathbf{x}$ está en un subespacio H con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{x}$.

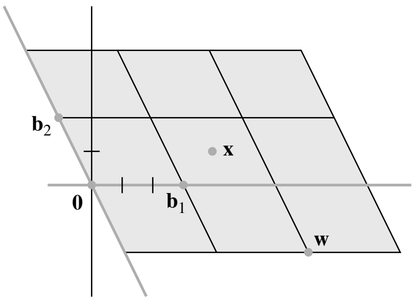
3. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$

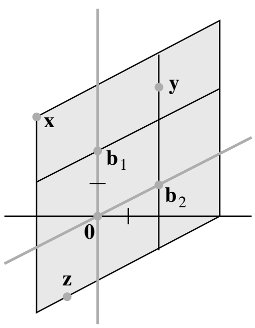
6. $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

7. Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Use la figura para estimar $[\mathbf{w}]_\mathcal{B}$ y $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$. Confirme su estimación de $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ usándola junto con $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ para calcular $\mathbf{x}$.



8. Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$

$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2.5 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Use la figura para estimar $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$, $[\mathbf{y}]_\mathcal{B}$ y $[\mathbf{z}]_\mathcal{B}$. Confirme sus estimaciones de $[\mathbf{y}]_\mathcal{B}$ y $[\mathbf{z}]_\mathcal{B}$ usándolas junto con $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ para calcular $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$.



En los ejercicios 9 a 12 se presenta una matriz A y una forma escalonada de A. Encuentre bases para Col A y Nul A, y después establezca las dimensiones de estos subespacios.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -6 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 & 9 \\ 5 & 15 & 0 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -8 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ -3 & -6 & -7 & -3 & -10 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -9 & 2 & 10 \\ 4 & 6 & -9 & 12 & 15 \\ 3 & 4 & -5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 y 14, encuentre una base para el subespacio que generan los vectores dados. ¿Cuál es la dimensión del subespacio?

13. $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix}$

15. Suponga una matriz A de 4×6 tiene cuatro columnas pivote. ¿Es Col $A = \mathbb{R}^4$? ¿Es Nul $A = \mathbb{R}^2$? Explique sus respuestas.

16. Suponga una matriz A de 4×7 tiene tres columnas pivote. ¿Es Col $A = \mathbb{R}^3$? ¿Cuál es la dimensión de Nul A? Explique sus respuestas.

En los ejercicios 17 y 18, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas. Aquí A es una matriz de $m \times n$.

17. *a*) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es una base para un subespacio H, y si $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$, entonces $c_1, \ldots, c_p$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

b) Cada recta en $\mathbb{R}^n$ es un subespacio unidimensional de $\mathbb{R}^n$.

c) La dimensión de Col A es el número de columnas pivote de A.

d) Las dimensiones de Col A y Nul A suman el número de columnas de A.

e) Si un conjunto de p vectores generan un subespacio p-dimensional H de $\mathbb{R}^n$, entonces estos vectores forman una base para H.

18. *a*) Si $\mathcal{B}$ es una base para un subespacio H, entonces cada vector en H se puede escribir solamente de una forma como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$.

b) La dimensión de Nul A es el número de variables en la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

c) La dimensión del espacio columna de A es rango A.

d) Si $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es una base del subespacio H de $\mathbb{R}^n$, entonces la correspondencia $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ hace que H sea vea y actúe como $\mathbb{R}^p$.

e) Si H es un subespacio p-dimensional de R^n, entonces un conjunto linealmente independiente de p vectores en H es una base para H.

En los ejercicios 19 a 24 justifique cada respuesta o construcción.

19. Si el subespacio de todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una base que consiste en tres vectores, y si A es una matriz de 5×7, ¿cuál es el rango de A?

20. ¿Cuál es el rango de una matriz de 6×8 cuyo espacio nulo es tridimensional?

21. Si el rango de una matriz A de 9×8 es 7, ¿cuál es la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

22. Demuestre que un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente si dim Gen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5\} = 4$.

23. Si es posible, construya una matriz A de 3×5 tal que dim Nul $A = 3$ y dim Col $A = 2$.

24. Construya una matriz de 3×4 con rango 1.

25. Sea A una matriz de $n \times p$ cuyo espacio columna es p-dimensional. Explique por qué las columnas de A deben ser linealmente independientes.

26. Suponga que las columnas 1, 3, 4, 5 y 7 de una matriz A son linealmente independientes (pero no son necesariamente columnas pivote), y que el rango de A es 5. Explique por qué las cinco columnas mencionadas deben ser una base para el espacio columna de A.

27. Suponga que los vectores $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_p$ generan un subespacio W, y sea $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ cualquier conjunto en W que contenga más de p vectores. Complete los detalles del siguiente argumento para demostrar que $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_q\}$ debe ser linealmente dependiente. Primero, sea $B = [\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_p]$ y $A = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{a}_q]$.

a) Explique por qué para cada vector $\mathbf{a}_j$, existe un vector $\mathbf{c}_j$ en $\mathbb{R}^p$ tal que $\mathbf{a}_j = B\mathbf{c}_j$.

b) Sea $C = [\mathbf{c}_1 \ \cdots \ \mathbf{c}_q]$. Explique por qué existe un vector diferente de cero tal que $C\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

c) Utilice B y C para demostrar que $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Esto muestra que las columnas de A son linealmente dependientes.

28. Use el ejercicio 27 para demostrar que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$, entonces $\mathcal{A}$ no puede contener más vectores que $\mathcal{B}$ y, a la inversa, que $\mathcal{B}$ no puede contener más vectores que $\mathcal{A}$.

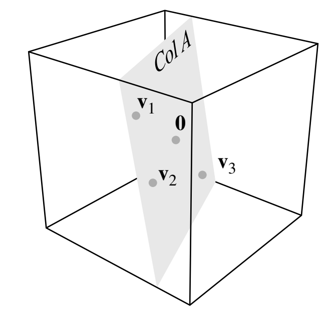
29. **[M]** Sean $H = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Demuestre que $\mathbf{x}$ está en H, y encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{x}$, cuando

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 14 \\ -10 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

30. **[M]** Sean $H = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Demuestre que $\mathcal{B}$ es una base para H y que $\mathbf{x}$ está en H, y encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $\mathbf{x}$, cuando

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ -2 \\ 17 \\ -8 \end{bmatrix}$$

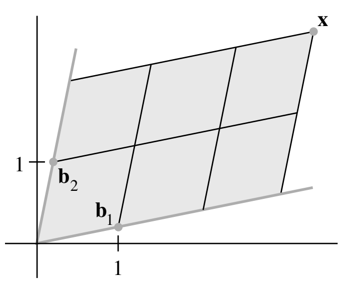
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA



1. Construya $A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ de manera que el subespacio generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sea el espacio columna de A. Las columnas pivote de A proporcionan una base para este espacio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -8 & -7 & 6 \\ 6 & -1 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -10 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las primeras dos columnas de A son columnas pivote y forman una base para H. Por lo tanto, dim $H = 2$.



2. Si $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{x}$ se forma a partir de una combinación lineal de los vectores básicos usando los pesos 3 y 2:

$$\mathbf{x} = 3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} .2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

La base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ determina un *sistema de coordenadas* para $\mathbb{R}^2$, que se ilustra con la malla de la figura. Observe cómo $\mathbf{x}$ tiene 3 unidades en la dirección $\mathbf{b}_1$ y 2 unidades en la dirección $\mathbf{b}_2$.

3. Un subespacio cuatridimensional contendría una base de cuatro vectores linealmente independientes. Esto es imposible en $\mathbb{R}^3$. Como cualquier conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$ no contiene más de tres vectores, cualquier subespacio de $\mathbb{R}^3$ tiene una dimensión no mayor a 3. El propio espacio $\mathbb{R}^3$ es el único subespacio tridimensional de $\mathbb{R}^3$. Los otros subespacios de $\mathbb{R}^3$ tienen dimensión 2, 1 o 0.

CAPÍTULO 2 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Suponga que las matrices mencionadas en los siguientes enunciados tienen los tamaños adecuados. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.
   a) Si A y B son de $m \times n$, entonces tanto AB^T como A^TB están definidas.
   b) Si $AB = C$ y C tiene dos columnas, entonces A tiene dos columnas.
   c) Al multiplicar por la izquierda una matriz B por una matriz diagonal A, con entradas distintas de cero en la diagonal, se modifica la escala de las filas de B.
   d) Si $BC = BD$, entonces $C = D$.
   e) Si $AC = 0$, entonces $A = 0$ o $C = 0$.
   f) Si A y B son de $n \times n$, entonces $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
   g) Una matriz elemental de $n \times n$ tiene n o $n + 1$ entradas diferentes de cero.
   h) La transpuesta de una matriz elemental es una matriz elemental.
   i) Una matriz elemental debe ser cuadrada.
   j) Toda matriz cuadrada es un producto de matrices elementales.
   k) Si A es una matriz de 3×3 con tres posiciones pivote, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_p$ tales que $E_p \cdots E_1 A = I$.
   l) Si $AB = I$, entonces A es invertible.
   m) Si A y B son cuadradas e invertibles, entonces AB es invertible, y $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
   n) Si $AB = BA$ y A es invertible, entonces $A^{-1}B = BA^{-1}$.
   o) Si A es invertible y $r \neq 0$, entonces $(rA)^{-1} = rA^{-1}$.
   p) Si A es una matriz de 3×3 y la ecuación $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tiene una sola solución, entonces A es invertible.

2. Encuentre la matriz C cuya inversa es $C^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Demuestre que $A^3 = 0$. Utilice álgebra de matrices para calcular el producto $(I - A)(I + A + A^2)$.

4. Suponga que $A^n = 0$ para alguna $n > 1$. Encuentre una inversa para $I - A$.

5. Suponga que una matriz A de $n \times n$ satisface la ecuación $A^2 - 2A + I = 0$. Demuestre que $A^3 = 3A - 2I$, y que $A^4 = 4A - 3I$.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Estas son *matrices de espín de Pauli* y se usan en el estudio del espín de electrones en mecánica cuántica. Demuestre que $A^2 = I$, $B^2 = I$ y $AB = -BA$. Las matrices del tipo $AB = -BA$ se llaman *anticonmutativas*.

7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule $A^{-1}B$ sin calcular A^{-1}. [*Sugerencia:* $A^{-1}B$ es la solución de la ecuación $AX = B$].

8. Encuentre una matriz A tal que la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mapee $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. [*Sugerencia:* Escriba una ecuación de matrices que implique a A, y despeje A].

9. Suponga que $AB = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre A.

10. Suponga que A es invertible. Explique por qué A^TA también es invertible. Después demuestre que $A^{-1} = (A^TA)^{-1}A^T$.

11. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números fijos. La siguiente matriz, llamada una *matriz de Vandermonde*, se presenta en aplicaciones como procesamiento de señales, códigos correctores de errores e interpolación de polinomios.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

A partir de $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, suponga que $\mathbf{c} = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ en $\mathbb{R}^n$ satisface $V\mathbf{c} = \mathbf{y}$, y defina el polinomio

$p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots + c_{n-1}t^{n-1}$

   a) Demuestre que $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$. Denominamos a $p(t)$ un *polinomio de interpolación para los puntos* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ porque la gráfica de $p(t)$ pasa por estos puntos.
   b) Suponga que $x_1, \ldots, x_n$ son números distintos. Demuestre que las columnas de V son linealmente independientes. [*Sugerencia:* Piense en cuántos ceros puede tener un polinomio de grado $n - 1$].
   c) Demuestre que: "Si $x_1, \ldots, x_n$, son números distintos $y_1, \ldots, y_n$ son números arbitrarios, entonces hay un polinomio de interpolación de grado $\leq n - 1$ para $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$".

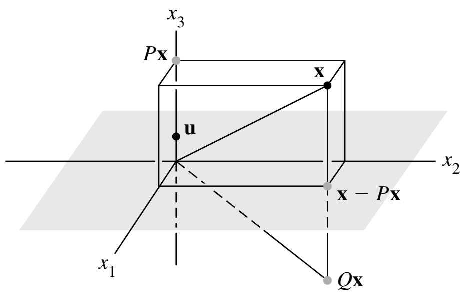
12. Sea $A = LU$, donde L es una matriz triangular inferior invertible y U es triangular superior. Explique por qué la primera columna de A es un múltiplo de la primera columna de L. ¿Cómo se relaciona la segunda columna de A con las columnas de L?

13. Dada $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$, sea $P = \mathbf{u}\mathbf{u}^T$ (un producto exterior) y $Q = 1 - 2P$. Justifique los enunciados *a*), *b*) y *c*).

a) $P^2 = P$ *b*) $P^T = P$ *c*) $Q^2 = I$

La transformación $\mathbf{x} \mapsto P\mathbf{x}$ es una *proyección*, y $\mathbf{x} \mapsto Q\mathbf{x}$ se llama *reflexión de Householder*. Dichas reflexiones se usan en programas de computadora para crear múltiples ceros en un vector (por lo general, una columna de una matriz).

14. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine P y Q como en el ejercicio 13, y calcule $P\mathbf{x}$ y $Q\mathbf{x}$. La figura muestra que $Q\mathbf{x}$ es la reflexión de $\mathbf{x}$ a través del plano x_1x_2.



Una reflexión de Householder a través del plano $x_3 = 0$.

15. Suponga que $C = E_3E_2E_1B$, donde E_1, E_2 y E_3 son matrices elementales. Explique por qué C es equivalente por filas a B.

16. Sea A una matriz singular de $n \times n$. Describa cómo se puede construir una matriz B de $n \times n$ no nula tal que $AB = 0$.

17. Sean A una matriz de 6×4 y B una matriz de 4×6. Demuestre que la matriz AB de 6×6 no puede ser invertible.

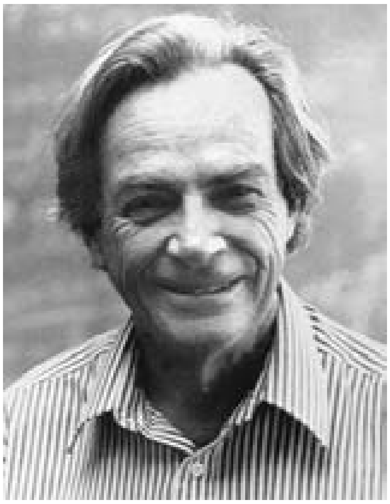
18. Suponga que A es una matriz de 5×3 y que existe una matriz C de 3×5 tal que $CA = I_3$. Suponga además que para alguna $\mathbf{b}$ dada en $\mathbb{R}^5$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene por lo menos una solución. Demuestre que esta solución es única.

19. **[M]** Ciertos sistemas dinámicos se pueden estudiar examinando las potencias de una matriz, como las que se presentan a continuación. Determine qué ocurre a A^k y B^k conforme k se incrementa (por ejemplo, pruebe con $k = 2,\ldots, 16$). Trate de identificar qué tienen de especial A y B. Investigue potencias grandes de otras matrices de este tipo y haga una conjetura acerca de dichas matrices.

$$A = \begin{bmatrix} .4 & .2 & .3 \\ .3 & .6 & .3 \\ .3 & .2 & .4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & .2 & .3 \\ .1 & .6 & .3 \\ .9 & .2 & .4 \end{bmatrix}$$

20. **[M]** Sea A_n una matriz de $n \times n$ con ceros en la diagonal principal y números 1 en el resto. Calcule A_n^{-1} para $n = 4, 5$ y 6, y haga una conjetura acerca de la forma general de A_n^{-1} para valores más grandes de n.

3 Determinantes



WEB

EJEMPLO INTRODUCTORIO

Trayectorias aleatorias y distorsión

En su libro autobiográfico *¿Está usted de broma, Sr. Feynman?*, el Premio Nobel de Física 1965, Richard P. Feynman, comenta que en su estancia universitaria de posgrado en Princeton solía observar a las hormigas. Estudió su comportamiento al proporcionarles un "transbordador" de pedazos de papel que podía trasladarlas hacia el terrón de azúcar que colgaba de una cuerda, donde las hormigas jamás podrían encontrarlo accidentalmente. Cuando una hormiga se paraba sobre el papel, entonces Feynman la transportaba hacia la comida y la traía de regreso al punto inicial. Después de que las hormigas aprendieron a utilizar el transbordador de papel, Feynman reubicó el punto de aterrizaje de retorno. Esto pronto generó confusión en la colonia de hormigas, lo que indicaba que el "aprendizaje" de las hormigas había consistido en crear y seguir rutas. Feynman confirmó esta conjetura colocando placas de vidrio sobre el piso. Una vez que las hormigas establecieron rutas sobre los trozos de vidrio, Feynman los reacomodó y, por consiguiente, las rutas que estos indicaban. Las hormigas siguieron las rutas reposicionadas y así Feynman podía dirigir a las hormigas adonde él quisiera.

Supongamos que Feynman hubiera deseado realizar investigaciones adicionales utilizando un globo, fabricado con una malla de alambre; las hormigas deberían seguir cada alambre y elegir entre dirigirse a la izquierda o a la derecha en cada intersección. Si varias hormigas y un número igual de fuentes de alimento se colocan sobre el globo, ¿qué tan probable sería que cada hormiga encontrara su propia fuente de alimento en lugar de utilizar la ruta de otra hormiga y seguirla hasta una fuente compartida?[1]

Para registrar las rutas reales de las hormigas y comunicar los resultados a otros, es conveniente utilizar un mapa rectangular del globo. Existen muchas maneras de trazar dichos mapas. Una manera sencilla es utilizar la latitud y longitud sobre el globo como coordenadas x y y en el mapa. Como ocurre con todos los mapas, el resultado no sería una representación totalmente fiel del globo. Los detalles cerca del "ecuador" se ven prácticamente iguales tanto sobre el globo como en el mapa, pero las regiones cercanas a los "polos" del globo están distorsionadas. Las imágenes de regiones polares son mucho más grandes que las imágenes de regiones ecuatoriales de tamaño similar. Para ajustarse a sus alrededores en el mapa, la imagen de una hormiga cerca de uno de los polos debería ser más grande que la de una cercana al ecuador. ¿Cuánto más de grande?

De manera sorprendente, los problemas de la trayectoria de las hormigas y la distorsión del área se contestan mejor utilizando determinantes, el tema de este capítulo. De hecho, el determinante tiene tantos usos que un resumen de sus aplicaciones a principios del siglo XX ocupó cuatro volúmenes del tratado que escribió Thomas Muir. Ante la trascendencia y el tamaño crecientes de las matrices en las aplicaciones modernas, muchos usos de los determinantes que antes eran importantes ahora ya no lo son. Sin embargo, los determinantes aún desempeñan un papel importante.

[1] La solución al problema de la trayectoria de las hormigas (y otras dos aplicaciones) se puede encontrar en el artículo de Arthur Benjamin y Naomi Cameron, publicado en la edición de *Mathematical Monthly*, de junio 2005.

Además de introducir el tema de determinantes en la sección 3.1, este capítulo presenta dos ideas importantes. La sección 3.2 deduce, para una matriz cuadrada, un criterio de invertibilidad que desempeña un papel importante en el capítulo 5. La sección 3.3 muestra cómo el determinante mide cuánto cambia una transformación lineal al área de una figura. Cuando esta técnica se aplica localmente, entonces se responde a la pregunta de la tasa de expansión de un mapa cerca de los polos. Esta idea desempeña un papel fundamental en cálculo multivariado en la forma del jacobiano.

3.1 INTRODUCCIÓN A LOS DETERMINANTES

Recuerde de la sección 2.2 que una matriz de 2×2 es invertible si y solo si su determinante es diferente de cero. Para extender este útil resultado a matrices más grandes, se necesita una definición para el determinante de una matriz de $n \times n$. Se puede descubrir la definición para el caso 3×3 observando qué ocurre cuando una matriz invertible A de 3×3 se reduce por filas.

Considere $A = [a_{ij}]$ con $a_{11} \neq 0$. Si la segunda y tercera filas de A se multiplican por a_{11}, y luego se restan múltiplos adecuados de la primera fila de las otras dos filas, se encuentra que A es equivalente por filas a las dos matrices siguientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}a_{23} \\ a_{11}a_{31} & a_{11}a_{32} & a_{11}a_{33} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Puesto que A es invertible, entonces la entrada (2, 2) o la entrada (3, 2) en el lado derecho de (1) es diferente de cero. Supongamos que la entrada (2, 2) es diferente de cero. (De otra forma, se puede realizar un intercambio de filas antes de proceder). Se multiplica la fila 3 por $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, y luego a la nueva fila 3 se le suma la fila 2 multiplicada por $-(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$. Esto mostrará que

$$A \sim \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21} \\ 0 & 0 & a_{11}\Delta \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{2}$$

Puesto que A es invertible, Δ debe ser diferente de cero. En la sección 3.2 se verá que lo contrario también es verdad. A Δ de la ecuación (2) se le llama el **determinante** de la matriz A de 3×3.

Recuerde que el determinante de una matriz de 2×2, $A = [a_{ij}]$, es el número

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para una matriz de 1×1, por ejemplo, $A = [a_{11}]$, se define $\det A = a_{11}$. Para generalizar la definición del determinante a matrices más grandes, se utilizarán determinantes de 2×2 para rescribir el determinante Δ de 3×3 descrito anteriormente. Puesto que los términos en Δ se pueden agrupar como $(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31})$,

$$\Delta = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Por brevedad, se escribe

$$\Delta = a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} \tag{3}$$

donde A_{11}, A_{12} y A_{13} se obtienen de A eliminando la primera fila y una de las tres columnas. Para cualquier matriz cuadrada A, sea A_{ij} la submatriz formada al eliminar la i-ésima fila y la

j-ésima columna de A. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

entonces A_{32} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 2,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

de manera que

$$A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se puede dar una definición *recursiva* de un determinante. Cuando $n = 3$, det A se define utilizando los determinantes de las submatrices A_{1j} de 2×2, como en la ecuación (3). Cuando $n = 4$, det A utiliza los determinantes de las submatrices A_{1j} de 3×3. En general, un determinante $n \times n$ se define mediante determinantes de submatrices de $(n - 1) \times (n - 1)$.

DEFINICIÓN

Para $n \geq 2$, el **determinante** de una matriz $A = [a_{ij}]$ de $n \times n$ es la suma de n términos de la forma $\pm a_{1j}$ det A_{1j}, con signos más y menos alternados, donde las entradas a_{11}, $a_{12}, \ldots, a_{1n}$ son de la primera fila de A. En símbolos,

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Calcule $\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= 1(0 - 2) - 5(0 - 0) + 0(-4 - 0) = -2 \end{aligned}$$

■

Otra notación común para el determinante de una matriz utiliza un par de rectas verticales en lugar de corchetes. Así, el cálculo del ejemplo 1 se puede representar como

$$\det A = 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -2$$

Para establecer el siguiente teorema, es conveniente escribir la definición de det A en una forma ligeramente distinta. Dada $A = [a_{ij}]$, el **cofactor** $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ de A es el número C_{ij} definido por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} \tag{4}$$

Entonces

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

Esta fórmula se conoce como **desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila** de A. Se omite la demostración del siguiente teorema fundamental para así evitar una larga digresión.

TEOREMA 1 El determinante de una matriz A de $n \times n$ se puede calcular mediante un desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier fila o columna. El desarrollo a lo largo de la i-ésima fila utilizando los cofactores de la ecuación (4) es

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

El desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna es

$$\det A = a_{ij}C_{ij} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

El signo más o menos en el cofactor (i, j) depende de la posición de a_{ij} en la matriz, sin importar el signo de a_{ij}. El factor $(-1)^{i+j}$ genera el siguiente patrón de signos:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 Utilice un desarrollo por cofactores a lo largo de la tercera fila para calcular el det A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Calcule

$$\begin{aligned} \det A &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= (-1)^{3+1}a_{31}\det A_{31} + (-1)^{3+2}a_{32}\det A_{32} + (-1)^{3+3}a_{33}\det A_{33} \\ &= 0\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2(-1) + 0 = -2 \end{aligned}$$

■

El teorema 1 es útil para calcular el determinante de una matriz que contiene muchos ceros. Por ejemplo, si en una fila hay una mayoría de ceros, entonces el desarrollo por cofactores a lo largo de esa fila tiene muchos términos iguales a cero, y no se necesita calcular los cofactores en estos términos. El mismo enfoque funciona con una columna que contiene muchos ceros.

EJEMPLO 3 Calcule det A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN El desarrollo por cofactores a lo largo de la primera columna tiene todos los términos iguales a cero, excepto el primero. Así,

$$\det A = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot C_{21} + 0 \cdot C_{31} - 0 \cdot C_{41} + 0 \cdot C_{51}$$

De aquí en adelante se omitirán los términos iguales a cero en el desarrollo por cofactores. Después, desarrolle este determinante de 4×4 a lo largo de la primera columna para tomar ventaja de los ceros que están ahí. Se tiene

$$\det A = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

Este determinante de 3×3 se calculó en el ejemplo 1 y se encontró que su valor es -2. Por lo tanto, $\det A = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$. ■

La matriz en el ejemplo 3 era casi triangular. El método en ese ejemplo se adapta fácilmente para demostrar el siguiente teorema.

TEOREMA 2

Si A es una matriz triangular, entonces $\det A$ es el producto de las entradas sobre la diagonal principal de A.

La estrategia en el ejemplo 3 para detectar ceros funciona muy bien cuando una fila o columna completa consiste en ceros. En tal caso, el desarrollo por cofactores a lo largo de tal fila o columna ¡es una suma de ceros! Así, el determinante es cero. Por desgracia, la mayoría de los desarrollos por cofactores no son tan rápidos de evaluar.

NOTA NUMÉRICA

En la actualidad, una matriz de 25×25 se considera pequeña. Sin embargo, sería imposible calcular un determinante de 25×25 con un desarrollo por cofactores. En general, un desarrollo por cofactores requiere alrededor de $n!$ multiplicaciones, y $25!$ es aproximadamente 1.5×10^{25}.

Si una computadora efectúa un billón de multiplicaciones por segundo, tendría que trabajar unos 500,000 años para calcular un determinante de 25×25 utilizando este método. Por fortuna, hay métodos más rápidos, como pronto se verá.

Los ejercicios 19 a 38 exploran importantes propiedades de los determinantes, sobre todo para el caso de 2×2. Los resultados de los ejercicios 33 a 36 se utilizarán en la próxima sección con la finalidad de deducir propiedades análogas para matrices de $n \times n$.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Calcule $\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix}$.

3.1 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 8 obtenga los determinantes utilizando un desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila. En los ejercicios 1 a 4, también calcule el determinante mediante un desarrollo por cofactores a lo largo de la segunda columna.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 9 a 14 calcule los determinantes mediante desarrollo por cofactores. En cada paso, seleccione una fila o columna que implique la menor cantidad de operaciones.

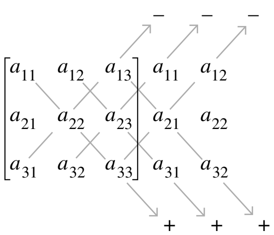
9. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & -8 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

El desarrollo de un determinante de 3×3 se puede recordar mediante el siguiente recurso. A la derecha de la matriz escriba una segunda copia de las primeras dos columnas, y calcule el determinante multiplicando las entradas sobre las seis diagonales:



Sume los productos de las diagonales hacia abajo y reste los productos de las diagonales hacia arriba. Utilice este método para obtener los determinantes en los ejercicios 15 a 18. ***Advertencia:*** *Este truco no se generaliza de manera razonable a matrices* de 4×4 *o mayores*.

15. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ **16.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ **18.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 19 a 24, explore el efecto de una operación elemental de fila sobre el determinante de una matriz. En cada caso, establezca la operación de fila y describa cómo afecta al determinante.

19. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5+3k & 6+4k \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k & k & k \\ -3 & 8 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 25 a 30, calcule los determinantes de las matrices elementales dadas. (Véase la sección 2.2).

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Con base en los ejercicios 25 a 28, conteste las preguntas de los ejercicios 31 y 32. Exprese las razones de sus respuestas.

31. ¿Cuál es el determinante de una matriz con remplazo elemental de fila?

32. ¿Cuál es el determinante de una matriz de escalamiento elemental con k en la diagonal?

En los ejercicios 33 a 36, compruebe que $\det EA = (\det E)(\det A)$, donde E es la matriz elemental mostrada y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

37. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Escriba $5A$. ¿$\det 5A = 5 \det A$?

38. Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y k un escalar. Encuentre una fórmula que relacione al $\det kA$ con k y $\det A$.

En los ejercicios 39 y 40, A es una matriz de $n \times n$. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

39. *a*) Un determinante de $n \times n$ está definido por determinantes de submatrices de $(n-1) \times (n-1)$.

b) El cofactor (i, j) de una matriz A es la matriz A_{ij} obtenida al eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna.

40. *a*) El desarrollo por cofactores de $\det A$ a lo largo de una columna es el negativo del desarrollo por cofactores a lo largo de una fila.

b) El determinante de una matriz triangular es la suma de las entradas sobre la diagonal principal.

41. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$, y obtenga el determinante de $[\mathbf{u} \quad \mathbf{v}]$. ¿Hay comparación entre ambos resultados? Remplace la primera entrada de $\mathbf{v}$ por un número arbitrario x, y repita el problema. Realice un esquema y explique lo que haya encontrado.

42. Sean $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, donde a, b, c son positivos (para simplificar). Calcule el área del paralelogramo definido por $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{0}$, y obtenga los determinantes de las matrices $[\mathbf{u} \quad \mathbf{v}]$ y $[\mathbf{v} \quad \mathbf{u}]$. Realice un esquema y explique sus resultados.

43. [**M**] ¿Es verdad que $\det(A + B) = \det A + \det B$? Para averiguarlo, genere matrices aleatorias A y B de 5×5, y calcule $\det(A + B) - \det A - \det B$. (Consulte el ejercicio 37 de la sección 2.1). Repita los cálculos para otros tres pares de matrices de $n \times n$, con diversos valores de n. Informe sus resultados.

44. [**M**] ¿Es cierto que $\det AB = (\det A)(\det B)$? Experimente con cuatro pares de matrices aleatorias, como en el ejercicio 43, y haga una conjetura.

45. [**M**] Construya una matriz aleatoria A de 4×4, con entradas enteras entre -9 y 9, y compare $\det A$ con $\det A^T$, $\det(-A)$, $\det(2A)$ y $\det(10A)$. Repita el ejercicio con otras dos matrices aleatorias de 4×4, y haga conjeturas acerca de cómo se relacionan esos determinantes. (Véase el ejercicio 36 de la sección 2.1). Luego, compruebe sus conjeturas con varias matrices enteras aleatorias de 5×5 y de 6×6. Si es necesario, modifique sus conjeturas e informe sus resultados.

46. [**M**] ¿Cómo se relaciona $\det A^{-1}$ con $\det A$? Experimente con matrices enteras aleatorias de $n \times n$, para $n = 4$, 5 y 6, y haga una conjetura. *Nota:* En el improbable caso de que se encuentre con una matriz con determinante cero, redúzcala a una forma escalonada y analice su resultado.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Aproveche los ceros. Inicie con un desarrollo por cofactores a lo largo de la tercera columna para obtener una matriz de 3×3, que se puede evaluar con un desarrollo a lo largo de su primera columna.

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}2\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^{2+1}(-5)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 20$$

El $(-1)^{2+1}$ en el penúltimo cálculo viene de la posición (2, 1) del -5 en el determinante de 3×3.

3.2 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El secreto de los determinantes reside en cómo cambian cuando se efectúan operaciones de fila. El siguiente teorema generaliza los resultados de los ejercicios 19 a 24 de la sección 3.1. La demostración se encuentra al final de esta sección.

TEOREMA 3 **Operaciones de fila**

Sea A una matriz cuadrada.

a) Si un múltiplo de una fila de A se suma a otra fila para producir una matriz B, entonces $\det B = \det A$.

b) Si dos filas de A se intercambian para producir B, entonces $\det B = -\det A$.

c) Si una fila de A se multiplica por k para producir B, entonces $\det B = k \cdot \det A$.

Los siguientes ejemplos muestran cómo utilizar el teorema 3 para calcular determinantes con eficiencia.

EJEMPLO 1 Calcule det A, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN La estrategia es reducir A a una forma escalonada y luego utilizar el hecho de que el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas diagonales. Los primeros dos remplazos de fila en la columna 1 no alteran al determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Un intercambio de las filas 2 y 3 invierte el signo del determinante, de manera que

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -(1)(3)(-5) = 15 \qquad \blacksquare$$

Un uso común del teorema 3c) en cálculos a mano es *factorizar un múltiplo común de una fila* de una matriz. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} * & * & * \\ 5k & -2k & 3k \\ * & * & * \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} * & * & * \\ 5 & -2 & 3 \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

donde las entradas con asterisco quedan inalteradas. Este paso se emplea en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Calcule det A, donde $A = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Para simplificar la aritmética, se desea un 1 en la esquina superior izquierda. Se podrían intercambiar las filas 1 y 4. Pero, en vez de ello, se saca el factor 2 de la fila superior, y luego se procede con remplazos de fila en la primera columna:

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Después, se podría sacar otro factor 2 de la fila 3 o utilizar como pivote el 3 en la segunda columna. Seleccionamos la última operación, sumando a la fila 3 la fila 2 multiplicada por 4:

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Por último, sumando la fila 3 multiplicada por $-1/2$ a la fila 4, y calculando el determinante "triangular", se encuentra que

$$\det A = 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (1)(3)(-6)(1) = -36 \qquad \blacksquare$$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}$$
$\det U \neq 0$

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$\det U = 0$

FIGURA 1
Formas escalonadas típicas de matrices cuadradas.

Suponga que una matriz cuadrada A se redujo a una forma escalonada U mediante remplazos de fila e intercambios de fila. (Esto siempre es posible. Véase el algoritmo de reducción por filas en la sección 1.2). Si hay r intercambios, entonces el teorema 3 indica que:

$$\det A = (-1)^r \det U$$

Como U está en forma escalonada, es triangular, y así $\det U$ es el producto de las entradas diagonales $u_{11}, \ldots, u_{nn}$. Si A es invertible, las entradas u_{ii} son todas pivotes (porque $A \sim I_n$ y las u_{ii} no se han escalado a 1). De otra forma, al menos u_{nn} es cero, y el producto $u_{11} \cdots u_{nn}$ es cero. Véase la figura 1. Por lo tanto,

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot \begin{pmatrix} \text{producto de} \\ \text{pivotes en } U \end{pmatrix} & \text{cuando } A \text{ es invertible} \\ 0 & \text{cuando } A \text{ no es invertible} \end{cases} \tag{1}$$

Es interesante hacer notar que aunque la forma escalonada U que se acaba de describir no es única (porque no está completamente reducida por filas), y los pivotes no son únicos, el *producto* de los pivotes *es* único, excepto por un posible signo menos.

La fórmula (1) no solo da una interpretación concreta de $\det A$, sino que también demuestra el principal teorema de esta sección:

TEOREMA 4 Una matriz cuadrada A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.

El teorema 4 agrega el enunciado "$\det A \neq 0$" al teorema de la matriz invertible. Un útil corolario es que $\det A = 0$ cuando las columnas de A son linealmente dependientes. Además, $\det A = 0$ cuando las *filas* de A son linealmente dependientes. (Filas de A son columnas de A^T, y columnas linealmente dependientes de A^T hacen que A^T sea singular. Cuando A^T es singular, también lo es A, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible). En la práctica, la dependencia lineal es evidente cuando dos columnas o dos filas son iguales, o una columna o fila es cero.

EJEMPLO 3 Calcule $\det A$, donde $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Sume la fila 1 multiplicada por 2 a la fila 3 para obtener

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

ya que la segunda y tercera filas de la segunda matriz son iguales. ■

NOTA NUMÉRICA

1. La mayoría de los programas de cómputo que calculan $\det A$ para una matriz general A utilizan el método de la fórmula (1) anterior.
2. Es posible demostrar que la evaluación de un determinante de $n \times n$, utilizando operaciones de fila, requiere cerca de $2n^3/3$ operaciones aritméticas. Cualquier microcomputadora moderna es capaz de calcular un determinante de 25×25 en una fracción de segundo, porque solo necesita realizar unas 10,000 operaciones.

WEB

Las computadoras también pueden manejar grandes matrices “dispersas”, con rutinas especiales que aprovechan la presencia de muchos ceros. Desde luego, las entradas cero también aceleran los cálculos a mano. Los cálculos en el siguiente ejemplo combinan el poder de las operaciones de fila con la estrategia de la sección 3.1, consistente en utilizar entradas nulas en los desarrollos por cofactores.

EJEMPLO 4 Calcule det A, donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ -2 & -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Una buena forma de comenzar es utilizar como pivote el 2 en la columna 1, eliminando el -2 que está debajo de este. Después se utiliza un desarrollo por cofactores para reducir el tamaño del determinante, y luego otra operación de remplazo de fila. De esta forma,

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Un intercambio de las filas 2 y 3 producirían un “determinante triangular”. Otro enfoque consiste en efectuar un desarrollo en cofactores a lo largo de la primera columna:

$$\det A = (-2)(1)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (15) = -30 \qquad \blacksquare$$

Operaciones de columna

Es posible realizar operaciones sobre las columnas de una matriz en forma análoga a las operaciones de fila que hemos estudiado. El siguiente teorema indica que las operaciones de columna y las operaciones de fila tienen los mismos efectos sobre los determinantes.

TEOREMA 5 Si A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det A^T = \det A$.

DEMOSTRACIÓN El teorema es evidente para $n = 1$. Suponga que el teorema es verdadero para determinantes de $k \times k$, y sea $n = k + 1$. Entonces el cofactor de a_{1j} en A es igual al cofactor de a_{j1} en A^T, porque los cofactores implican determinantes de $k \times k$. Así que el desarrollo por cofactores de det A a lo largo de la primera *fila* es igual al desarrollo por cofactores de det A^T a lo largo de la primera *columna*. Es decir, A y A^T tienen determinantes iguales. Por lo tanto, el teorema es válido para $n = 1$, y la veracidad del teorema para un valor de n implica su veracidad para el siguiente valor de n. Por el principio de inducción, el teorema es verdadero para toda $n \geq 1$. $\blacksquare$

De acuerdo con el teorema 5, cada enunciado en el teorema 3 es válido cuando en todas partes la palabra *fila* se remplaza por *columna.* Para comprobar esta propiedad, basta aplicar a A^T el teorema 3 original. Una operación de fila sobre A^T significa una operación de columna sobre A.

Las operaciones de columna son útiles tanto para fines teóricos como para realizar cálculos a mano. Sin embargo, para simplificar solo se efectuarán operaciones de fila en cálculos numéricos.

Determinantes y productos matriciales

La demostración del siguiente útil teorema se encuentra al final de la sección. Las aplicaciones se exponen en los ejercicios.

TEOREMA 6

Propiedad multiplicativa

Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces $\det AB = (\det A)(\det B)$.

EJEMPLO 5 Compruebe el teorema 6 para $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$$

y

$$\det AB = 25 \cdot 13 - 20 \cdot 14 = 325 - 280 = 45$$

Como $\det A = 9$ y $\det B = 5$,

$$(\det A)(\det B) = 9 \cdot 5 = 45 = \det AB$$

■

Advertencia: Un error común es pensar que el teorema 6 tiene un análogo para *sumas* de matrices. Sin embargo, en general, $\det(A + B)$ *no es* igual a $\det A + \det B$.

Propiedad de linealidad de la función determinante

Para una matriz A de $n \times n$, podemos considerar a $\det A$ como una función de los n vectores columna en A. Se demostrará que si todas las columnas se mantienen fijas, excepto una, entonces $\det A$ es una *función lineal* de una variable (vectorial).

Suponga que a la j-ésima columna de A se le permite variar, lo que se escribe como

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Defina una transformación T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ mediante

$$T(\mathbf{x}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{j-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{j+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$$

Así,

$$T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x}) \quad \text{para todos los escalares } c\text{, y todas las } \mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \quad \text{para toda } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ en } \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

La propiedad (2) es el teorema 3*c*) aplicado a las columnas de A. Una demostración de la propiedad (3) es consecuencia de un desarrollo por cofactores a lo largo de la j-ésima columna de $\det A$. (Véase el ejercicio 43). Esta propiedad de (multi)linealidad del determinante tiene muchas consecuencias útiles que se estudian en cursos más avanzados.

Demostraciones de los teoremas 3 y 6

Es conveniente someter a prueba el teorema 3 cuando se enuncia en términos de las matrices elementales analizadas en la sección 2.2. Una matriz elemental E se denomina *matriz de remplazo de fila* si E se obtiene a partir de la identidad I al sumar un múltiplo de una fila a otra; E es un *intercambio* si E se obtiene mediante el intercambio de dos filas de I; y E es una *escala por r* si E se obtiene al multiplicar una fila de I por un escalar r diferente de cero. Con esta terminología, el teorema 3 se puede reformular de la siguiente manera:

Si A es una matriz de $n \times n$ y E es una matriz elemental de $n \times n$, entonces

$$\det EA = (\det E)(\det A)$$

donde

$$\det E = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ es un remplazo de fila} \\ -1 & \text{si } E \text{ es un intercambio} \\ r & \text{si } E \text{ es una escala por } r \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3 La demostración es por inducción sobre el tamaño de A. El caso de una matriz de 2×2 se comprobó en los ejercicios 33 a 36 de la sección 3.1. Suponga que el teorema se ha comprobado para determinantes de matrices de $k \times k$, con $k \geq 2$; sea $n = k + 1$ y sea A de $n \times n$. La acción de E sobre A implica a dos filas o solamente a una. Así, se puede desarrollar det EA a lo largo de una fila que es inalterada por la acción de E, por ejemplo, la fila i. Sea A_{ij} (respectivamente, B_{ij}) la matriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de A (respectivamente, EA). Luego, las filas de B_{ij} se obtienen de las filas de A_{ij} por el mismo tipo de operación elemental de fila que E efectúa sobre A. Como esas submatrices son únicamente de $k \times k$, la suposición de inducción implica que

$$\det B_{ij} = \alpha \cdot \det A_{ij}$$

donde $\alpha = 1, -1$, o r, dependiendo de la naturaleza de E. El desarrollo por cofactores a lo largo de la fila i es

$$\begin{aligned} \det EA &= a_{i1}(-1)^{i+1} \det B_{i1} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n} \det B_{in} \\ &= \alpha a_{i1}(-1)^{i+1} \det A_{i1} + \cdots + \alpha a_{in}(-1)^{i+n} \det A_{in} \\ &= \alpha \cdot \det A \end{aligned}$$

En particular, tomando $A = I_n$, se observa que det $E = 1, -1$, o r, dependiendo de la naturaleza de E. Así, el teorema es válido para $n = 2$, y la veracidad del teorema para un valor de n implica su veracidad para el siguiente valor de n. Por el principio de inducción, el teorema debe ser válido para $n \geq 2$. El teorema es trivialmente verdadero para $n = 1$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6 Si A no es invertible, entonces AB tampoco lo es, de acuerdo con el ejercicio 27 de la sección 2.3. En este caso, det AB = (det A)(det B), porque ambos lados valen cero, por el teorema 4. Si A es invertible, entonces A y la matriz identidad I_n son equivalentes por filas de acuerdo con el teorema de matriz invertible. Así, existen matrices elementales $E_1, \ldots, E_p$ tales que

$$A = E_p E_{p-1} \cdots E_1 \cdot I_n = E_p E_{p-1} \cdots E_1$$

Por brevedad, escribimos $|A|$ en vez de det A. De esta forma, la repetida aplicación del teorema 3, como se acaba de reformular, muestra que

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_p \cdots E_1 B| = |E_p||E_{p-1} \cdots E_1 B| = \cdots \\ &= |E_p| \cdots |E_1||B| = \cdots = |E_p \cdots E_1||B| \\ &= |A||B| \end{aligned}$$

■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Calcule $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{vmatrix}$ en el menor número de pasos que sea posible.

2. Utilice un determinante para decidir si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son linealmente independientes, cuando

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3.2 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4 cada ecuación ilustra una propiedad de los determinantes. Enuncie la propiedad.

1. $\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 5 a 10 encuentre los determinantes por reducción de filas a una forma escalonada.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 13 & -7 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

En los ejercicios 11 a 14 calcule los determinantes combinando los métodos de reducción por filas y desarrollo por cofactores.

11. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 4 & 10 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

En los ejercicios del 15 al 20, calcule los determinantes, donde

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7.$$

15. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

En los ejercicios 21 a 23, use determinantes para saber si la matriz es invertible.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 24 a 26, utilice determinantes para saber si el conjunto de vectores es linealmente independiente.

24. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 27 y 28, A y B son matrices de $n \times n$. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

27. *a*) Una operación de remplazo por filas no afecta al determinante de una matriz.

b) El determinante de A es el producto de los pivotes en cualquier forma escalonada U de A, multiplicada por $(-1)^r$, donde r es el número de intercambios de fila realizados durante la reducción por filas de A a U.

c) Si las columnas de A son linealmente dependientes, entonces $\det A = 0$.

d) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

28. *a*) Si dos intercambios de fila se realizan en secuencia, entonces el nuevo determinante es igual al determinante original.

b) El determinante de A es el producto de las entradas diagonales en A.

c) Si $\det A$ es cero, entonces dos filas o dos columnas son iguales, o una fila o una columna es cero.

d) $\det A^T = (-1)\det A$.

29. Calcule $\det B^5$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

30. Utilice el teorema 3 (pero no el teorema 4) para demostrar que si dos filas de una matriz cuadrada A son iguales, entonces $\det A = 0$. Lo mismo es válido para dos columnas. ¿Por qué?

En los ejercicios 31 a 36, su explicación debe mencionar un teorema pertinente.

31. Demuestre que si A es invertible, entonces $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

32. Obtenga una fórmula para $\det(rA)$ cuando A es una matriz de $n \times n$.

33. Sean A y B matrices cuadradas. Demuestre que aun cuando AB y BA pueden no ser iguales, siempre es verdad que $\det AB = \det BA$.

34. Sean A y P matrices cuadradas, con P invertible. Demuestre que $\det(PAP^{-1}) = \det A$.

35. Sea U una matriz cuadrada tal que $U^TU = I$. Demuestre que $\det U = \pm 1$.

36. Suponga que A es una matriz cuadrada tal que $\det A^4 = 0$. Explique por qué A no puede ser invertible.

En los ejercicios 37 y 38, compruebe que $\det AB = (\det A)(\det B)$ para las matrices dadas. (No utilice el teorema 6).

37. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

39. Sean A y B matrices de 3×3, con $\det A = 4$ y $\det B = -3$. Con base en propiedades de determinantes (en el libro y en los ejercicios anteriores), calcule:

a) $\det AB$ *b*) $\det 5A$ *c*) $\det B^T$

d) $\det A^{-1}$ *e*) $\det A^3$

40. Sean A y B matrices de 4×4, con $\det A = -1$ y $\det B = 2$. Calcule:

a) $\det AB$ *b*) $\det B^5$ *c*) $\det 2A$

d) $\det A^TA$ *e*) $\det B^{-1}AB$

41. Compruebe que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} e & f \\ c & d \end{bmatrix}$$

42. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Demuestre que $\det(A + B) = \det A + \det B$ si y solo si $a + d = 0$.

43. Compruebe que $\det A = \det B + \det C$, donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 + v_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 + v_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 + v_3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & u_3 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & v_1 \\ a_{21} & a_{22} & v_2 \\ a_{31} & a_{32} & v_3 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, observe, que A *no* es igual a $B + C$.

44. La multiplicación por la derecha por una matriz elemental E afecta a las *columnas* de A en la misma forma que la multiplicación por la izquierda afecta a las *filas*. Utilice los teoremas 3 y 5, así como el evidente resultado de que E^T es otra matriz elemental, para demostrar que

$\det AE = (\det E)(\det A)$

No utilice el teorema 6.

45. [**M**] Calcule $\det A^TA$ y $\det AA^T$ para varias matrices de 4×5 aleatorias y diversas matrices de 5×6, también aleatorias. ¿Qué puede decirse acerca de A^TA y AA^T cuando A tiene más columnas que filas?

46. [**M**] Si $\det A$ es cercano a cero, ¿la matriz A es casi singular? Experimente con la matriz A de 4×4 casi singular del ejercicio 9 de la sección 2.3. Calcule los determinantes de A, $10A$ y $0.1A$. Por otra parte, calcule los números de condición de esas matrices. Repita los cálculos cuando A es la matriz identidad de 4×4. Analice sus resultados.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Realice remplazos de fila para crear ceros en la primera columna y así obtener una fila de ceros.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ -3 & 10 & -6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. $\det[\,\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\,] = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -7 & 3 & -7 \\ 9 & -5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -5 \\ 9 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ Fila 1 sumada a la fila 2

$$= -(-3)\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$ Cofactores de la columna 2

$$= 3 \cdot (35) + 5 \cdot (-21) = 0$$

Según el teorema 4, la matriz $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$ no es invertible. Las columnas son linealmente dependientes, de acuerdo con el teorema de la matriz invertible.

3.3 REGLA DE CRAMER, VOLUMEN Y TRANSFORMACIONES LINEALES

Esta sección aplica la teoría de las secciones anteriores para obtener importantes fórmulas teóricas y una interpretación geométrica del determinante.

Regla de Cramer

La regla de Cramer es necesaria en una variedad de cálculos teóricos. Por ejemplo, se puede utilizar para estudiar cómo resulta afectada la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por cambios en las entradas de $\mathbf{b}$. Sin embargo, la fórmula es ineficiente para cálculos a mano, excepto para matrices de 2×2, o quizá de 3×3.

Para cualquier matriz A de $n \times n$ y cualquier $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $A_i(\mathbf{b})$ la matriz obtenida a partir de A al remplazar la columna i por el vector $\mathbf{b}$.

$$A_i(\mathbf{b}) = [\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{col } i}}{\mathbf{b}} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

TEOREMA 7

Regla de Cramer

Sea A una matriz invertible *de* $n \times n$. Para cualquier $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^n$, la única solución $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene entradas dadas por

$$x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN Denote las columnas de A por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ y las columnas de la matriz identidad I de $n \times n$ por $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, la definición de multiplicación matricial indica que

$$\begin{aligned} A \cdot I_i(\mathbf{x}) &= A\left[\,\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x} \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n\,\right] = \left[\,A\mathbf{e}_1 \quad \cdots \quad A\mathbf{x} \quad \cdots \quad A\mathbf{e}_n\,\right] \\ &= \left[\,\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n\,\right] = A_i(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Por la propiedad multiplicativa de determinantes,

$$(\det A)(\det I_i(\mathbf{x})) = \det A_i(\mathbf{b})$$

El segundo determinante a la izquierda es simplemente x_i. (Realice un desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila). Así, $(\det A) \cdot x_i = \det A_i(\mathbf{b})$. Esto demuestra (1), ya que A es invertible y $\det A \neq 0$. ■

EJEMPLO 1 Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 6 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 8 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Vea el sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Utilizando la notación ya presentada,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

Como $\det A = 2$, el sistema tiene una solución única. Por la regla de Cramer,

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 16}{2} = 20$$
$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{24 + 30}{2} = 27$$

■

Aplicación a la ingeniería

Un gran número de importantes problemas de ingeniería, particularmente en teoría del control e ingeniería eléctrica, se pueden analizar con las *transformadas de Laplace*. Este enfoque convierte un adecuado sistema de ecuaciones diferenciales lineales a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales cuyos coeficientes implican un parámetro. El siguiente ejemplo ilustra el tipo de sistema algebraico que puede presentarse.

EJEMPLO 2 Considere el siguiente sistema, en el cual s es un parámetro no especificado. Determine los valores de s para los cuales el sistema tiene una solución única, y utilice la regla de Cramer para describir la solución.

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN Vea el sistema como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De esta forma,

$$A = \begin{bmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{bmatrix}, \quad A_1(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}, \quad A_2(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que

$$\det A = 3s^2 - 12 = 3(s + 2)(s - 2)$$

el sistema tiene una solución única precisamente cuando $s \neq \pm 2$. Para tal s, la solución es (x_1, x_2), donde

$$x_1 = \frac{\det A_1(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{4s + 2}{3(s + 2)(s - 2)}$$
$$x_2 = \frac{\det A_2(\mathbf{b})}{\det A} = \frac{3s + 24}{3(s + 2)(s - 2)} = \frac{s + 8}{(s + 2)(s - 2)}$$

■

Una fórmula para A^{-1}

La regla de Cramer conduce fácilmente a una fórmula general para la inversa de una matriz A de $n \times n$. La j-ésima columna de A^{-1} es un vector $\mathbf{x}$ que satisface

$$A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$$

donde $\mathbf{e}_j$ es la j-ésima columna de la matriz identidad, y la i-ésima entrada de $\mathbf{x}$ es la entrada (i, j) de A^{-1}. De acuerdo con la regla de Cramer,

$$\{\text{entrada } (i, j) \text{ de } A^{-1}\} = x_i = \frac{\det A_i(\mathbf{e}_j)}{\det A} \tag{2}$$

Recuerde que A_{ji} denota la submatriz de A formada al eliminar la fila j y la columna i. Un desarrollo por cofactores a lo largo de la columna i de $A_i(\mathbf{e}_j)$ muestra que

$$\det A_i\,(\mathbf{e}_j) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = C_{ji} \tag{3}$$

donde C_{ji} es un cofactor de A. De acuerdo con la expresión (2), la entrada (i, j) de A^{-1} es el cofactor C_{ji} dividido entre $\det A$. [Observe que los subíndices en C_{ji} son los inversos de (i, j)]. Por consiguiente,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

La matriz de cofactores en el miembro derecho de (4) se llama la **adjunta** de A, que se denota con adj A. (El término *adjunta* también tiene otro significado en libros avanzados de transformaciones lineales). El siguiente teorema reformula la expresión (4).

TEOREMA 8

Una fórmula para la inversa

Sea A una matriz invertible de $n \times n$. Así,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}\,A$$

EJEMPLO 3 Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Los nueve cofactores son

$$C_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad C_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 14, \quad C_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$C_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad C_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

La matriz adjunta es la *transpuesta* de la matriz de cofactores. [Por ejemplo, C_{12} va a la posición (2, 1).] Así,

$$\mathrm{adj}\,A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

Se podría calcular $\det A$ directamente, pero el siguiente cálculo ofrece una comprobación de las operaciones anteriores *y* produce $\det A$:

$$(\mathrm{adj}\,A)\cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = 14I$$

Puesto que $(\mathrm{adj}\,A)A = 14I$, el teorema 8 indica que $\det A = 14$ y

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \\ 3 & -7 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/7 & 1 & 2/7 \\ 3/14 & -1/2 & 1/14 \\ 5/14 & -1/2 & -3/14 \end{bmatrix}$$

■

NOTA NUMÉRICA

El teorema 8 es útil principalmente para cálculos teóricos. La fórmula para A^{-1} permite deducir propiedades de la inversa sin calcularla en realidad. Excepto para casos especiales, el algoritmo de la sección 2.2 ofrece una forma mucho mejor de calcular A^{-1}, si la inversa es realmente necesaria.

La regla de Cramer también es una herramienta teórica. Se puede emplear para estudiar qué tan sensible es la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ante cambios en una entrada de $\mathbf{b}$ o de $\mathbf{A}$ (quizá debido al error experimental cuando se obtienen las entradas para $\mathbf{b}$ o A). Cuando A es una matriz de 3×3 con entradas *complejas*, entonces algunas veces la regla de Cramer se utiliza en cálculos a mano porque la reducción por filas de $[A \quad \mathbf{b}]$ con aritmética compleja puede resultar confusa, y los determinantes son bastante fáciles de calcular. Para grandes matrices de $n \times n$ (reales o complejas), la regla de Cramer es irremediablemente ineficiente. Para calcular solo *un* determinante se requiere tanto trabajo como resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por reducción de filas.

Determinantes como área o volumen

En la siguiente aplicación, se comprueba la interpretación geométrica de determinantes descrita en la introducción de este capítulo. Aunque en el capítulo 6 se hará un análisis general de longitud y distancia en $\mathbb{R}^n$, aquí se supone que los conceptos euclidianos usuales de longitud, área y volumen ya se entienden para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 9

Si A es una matriz de 2×2, el área del paralelogramo definido por las columnas de A es $|\det A|$. Si A es una matriz de 3×3, el volumen del paralelepípedo definido por las columnas de A es $|\det A|$.

DEMOSTRACIÓN Como es evidente, el teorema es cierto para cualquier matriz diagonal de 2×2:

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right| = |ad| = \left\{\begin{matrix}\text{área del} \\ \text{rectángulo}\end{matrix}\right\}$$

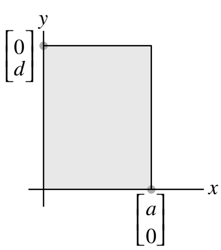


FIGURA 1
Área $= |ad|$.

Véase la figura 1. Será suficiente demostrar que cualquier matriz de 2×2, $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$, se puede transformar a una matriz diagonal de tal manera que no cambie el área del paralelogramo asociado ni tampoco $|\det A|$. De la sección 3.2, se conoce que el valor absoluto del determinante es inalterado cuando dos columnas se intercambian, o un múltiplo de una columna se suma a otra. Es fácil ver que tales operaciones son suficientes para transformar a A en una matriz diagonal. Los intercambios de columnas no modifican el paralelogramo. Así, es suficiente probar la siguiente sencilla observación geométrica que se aplica a vectores en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$:

Sean $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ vectores diferentes de cero (no nulos). Luego, para cualquier escalar c, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$.

Para demostrar este enunciado, se supone que $\mathbf{a}_2$ no es un múltiplo de $\mathbf{a}_1$, ya que, de otra forma, los dos paralelogramos serían degenerados y tendrían área igual a cero. Si L es la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{a}_1$, entonces $\mathbf{a}_2 + L$ es la recta que pasa por $\mathbf{a}_2$ paralela a L, y $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ está sobre esta recta. Véase la figura 2. Los puntos $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ tienen la misma distancia perpendicular a L. Por eso, los dos paralelogramos en la figura 2 tienen la misma área porque comparten la base de $\mathbf{0}$ a $\mathbf{a}_1$. Esto completa la demostración para $\mathbb{R}^2$.

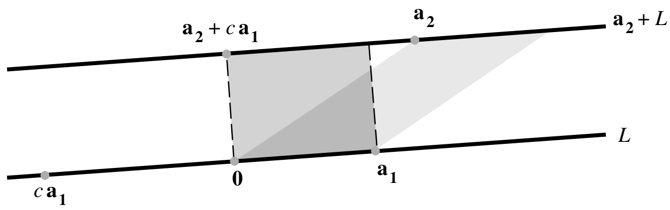


FIGURA 2 Dos paralelogramos de igual área.

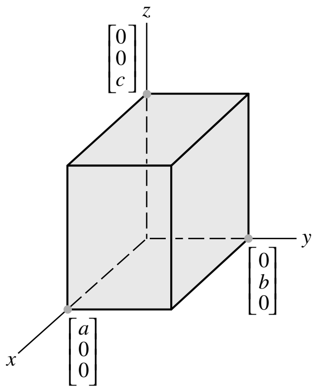


FIGURA 3
Volumen $= |abc|$.

La demostración para $\mathbb{R}^3$ es similar. Como es evidente, el teorema es cierto para una matriz diagonal de 3×3. Véase la figura 3. Y cualquier matriz A de 3×3 se puede transformar en una matriz diagonal utilizando operaciones de columna que no cambian a $|\det A|$. (Piense en efectuar operaciones de fila sobre A^T). Así, es suficiente demostrar que esas operaciones no afectan el volumen del paralelepípedo definido por las columnas de A.

La figura 4 muestra un paralelepípedo como una caja sombreada con dos lados inclinados. Su volumen es el área de la base en el plano Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ multiplicada por la altura de $\mathbf{a}_2$ sobre Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. Cualquier vector $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ tiene la misma altura porque $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ está en el plano $\mathbf{a}_2$ + Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$, el cual es paralelo a Gen $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$. Así que el volumen del paralelepípedo queda inalterado cuando $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3]$ se cambia a $[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_3]$. Por consiguiente, una operación de remplazo de columna no afecta el volumen del paralelepípedo. Como el intercambio de columnas no tiene efecto sobre el volumen, la demostración se completa. ■

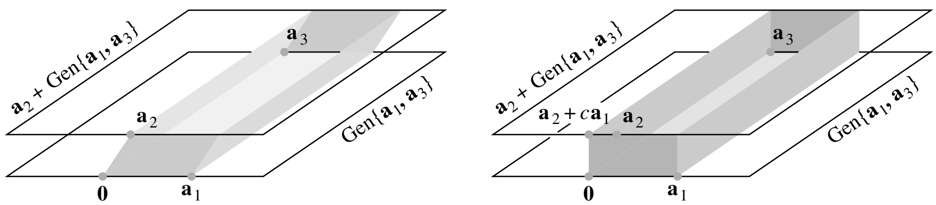


FIGURA 4 Dos paralelepípedos de igual volumen.

EJEMPLO 4 Calcule el área del paralelogramo definido por los puntos $(-2, -2)$, $(0, 3)$, $(4, -1)$ y $(6, 4)$. Véase la figura 5*a*).

SOLUCIÓN Primero el paralelogramo se traslada de manera que un vértice esté en el origen. Por ejemplo, reste el vértice $(-2, -2)$ de cada uno de los cuatro vértices. El nuevo paralelogramo tiene la misma área, y sus vértices son $(0, 0)$, $(2, 5)$, $(6, 1)$ y $(8, 6)$. Véase la figura 5*b*).

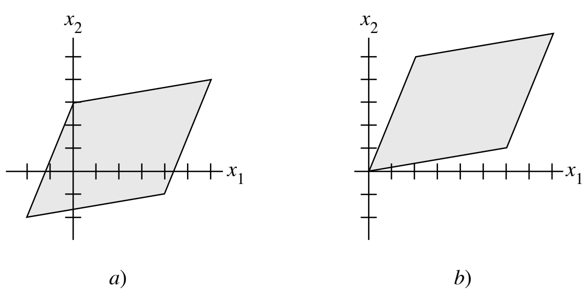


FIGURA 5 Trasladar un paralelogramo no cambia su área.

Este paralelogramo está definido por las columnas de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $|\det A| = |-28|$, entonces el área del paralelogramo es 28. ■

Transformaciones lineales

Los determinantes se pueden usar para describir una importante propiedad geométrica de transformaciones lineales en el plano y en $\mathbb{R}^3$. Si T es una transformación lineal y S es un conjunto en el dominio de T, entonces $T(S)$ denota el conjunto de imágenes de puntos en S. Nos interesa conocer cómo se compara el área (o volumen) de $T(S)$ con el área (o volumen) del conjunto original S. Por conveniencia, cuando S es una región acotada por un paralelogramo, también nos referimos a S como un paralelogramo.

TEOREMA 10

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal determinada por una matriz A de 2×2. Si S es un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\{\text{área de } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{área de } S\} \tag{5}$$

Si T está determinada por una matriz A de 3×3, y si S es un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\{\text{volumen de } T(S)\} = |\det A| \cdot \{\text{volumen de } S\} \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN Considere el caso de 2×2, con $A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$. Un paralelogramo en el origen en $\mathbb{R}^2$ definido por los vectores $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ tiene la forma

$$S = \{s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 : 0 \le s_1 \le 1,\ 0 \le s_2 \le 1\}$$

La imagen de S bajo T consiste en puntos de la forma

$$\begin{aligned} T(s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2) &= s_1T(\mathbf{b}_1) + s_2T(\mathbf{b}_2) \\ &= s_1A\mathbf{b}_1 + s_2A\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

donde $0 \le s_1 \le 1$, $0 \le s_2 \le 1$. De ello se sigue que $T(S)$ es el paralelogramo determinado por las columnas de la matriz $[A\mathbf{b}_1 \ \ A\mathbf{b}_2]$. Esta matriz se puede escribir como AB, donde $B = [\mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2]$. De acuerdo con el teorema 9 y el teorema del producto para determinantes,

$$\begin{aligned} \{\text{área de } T(S)\} &= |\det AB| = |\det A| \cdot |\det B| \\ &= |\det A| \cdot \{\text{área de } S\} \end{aligned} \tag{7}$$

Un paralelogramo arbitrario tiene la forma $\mathbf{p} + S$, donde $\mathbf{p}$ es un vector y S es un paralelogramo en el origen, como antes. Es fácil ver que T transforma a $\mathbf{p} + S$ en $T(\mathbf{p}) + T(S)$. (Véase el ejercicio 26). Puesto que la traslación no afecta el área de un conjunto,

$$\begin{aligned} \{\text{área de } T(\mathbf{p} + S\} &= \{\text{área de } T(\mathbf{p}) + T(S)\} \\ &= \{\text{área de } T(S)\} && \text{Traslación} \\ &= |\det A| \cdot \{\text{área de } S\} && \text{Por la ecuación (7)} \\ &= |\det A| \cdot \{\text{área de } \mathbf{p} + S\} && \text{Traslación} \end{aligned}$$

Esto demuestra que (5) es válida para todos los paralelogramos en $\mathbb{R}^2$. Es análoga la demostración de (6) para el caso 3×3. ■

Cuando se intenta generalizar el teorema 10 a una región en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ que no está acotada por líneas rectas o planos, se debe enfrentar el problema de cómo definir y calcular su área o volumen. Este es un tema estudiado en cálculo, y solamente se indicará la idea básica para $\mathbb{R}^2$. Si R es una región plana que tiene área finita, entonces R se puede aproximar por una rejilla de pequeños cuadrados que están dentro de R. Haciendo los cuadrados suficientemente pequeños, el área de R se puede aproximar tanto como se quiera mediante la suma de las áreas de los pequeños cuadrados. Véase la figura 6.

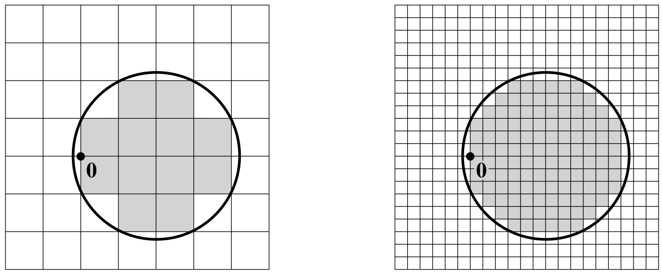


FIGURA 6 Aproximación de una región plana mediante la unión de cuadrados. La aproximación mejora conforme la rejilla se hace más fina.

Si T es una transformación lineal asociada con una matriz A de 2×2, entonces la imagen de la región plana R bajo T se aproxima mediante las imágenes de los pequeños cuadrados dentro de R. La demostración del teorema 10 señala que cada imagen es un paralelogramo cuya área es $|\det A|$ por el área del cuadrado. Si R' es la unión de los cuadrados dentro de R, entonces el área de $T(R')$ es $|\det A|$ por el área de R'. Véase la figura 7. También, el área de $T(R')$ es cercana al área de $T(R)$. Se puede dar un argumento que implique un proceso de cálculo de un límite, para justificar la siguiente generalización del teorema 10.

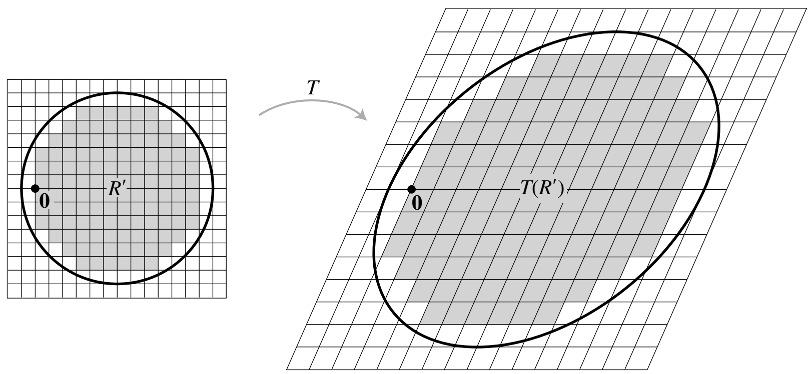
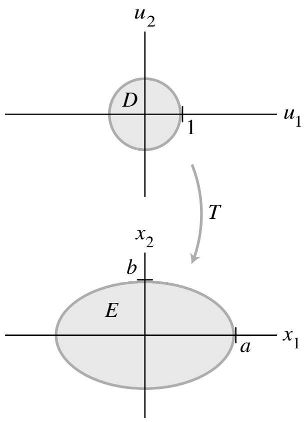


FIGURA 7 Aproximación de $T(R)$ mediante la unión de paralelogramos.

> Las conclusiones del teorema 10 son válidas si S es una región en $\mathbb{R}^2$ con área finita o una región en $\mathbb{R}^3$ con volumen finito.

EJEMPLO 5 Sean a y b números positivos. Encuentre el área de la región E acotada por la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$



SOLUCIÓN Se afirma que E es la imagen del disco unitario D bajo la transformación lineal T determinada por la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, porque si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = A\mathbf{u}$, entonces

$$u_1 = \frac{x_1}{a} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{x_2}{b}$$

De ello se sigue que $\mathbf{u}$ está en el disco unitario, con $u_1^2 + u_2^2 \le 1$, si y solo si $\mathbf{x}$ está en E, con $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 \le 1$. Al generalizar el teorema 10,

$$\begin{aligned} \{\text{área de la elipse}\} &= \{\text{área de } T(D)\} \\ &= |\det A| \cdot \{\text{área de } D\} \\ &= ab \cdot \pi(1)^2 = \pi ab \end{aligned}$$

■

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Sea S el paralelogramo definido por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -.1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

3.3 EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 6, utilice la regla de Cramer para calcular las soluciones de los sistemas.

1. $\begin{aligned} 5x_1 + 7x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 1 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 5x_1 + 2x_2 &= 7 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 7 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} -5x_1 + 3x_2 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 7 \\ -3x_1 + x_3 &= -8 \\ x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$

En los ejercicios 7 a 10, determine los valores del parámetro s para los cuales el sistema tiene una solución única, y describa la solución.

7. $\begin{aligned} 6sx_1 + 4x_2 &= 5 \\ 9x_1 + 2sx_2 &= -2 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3sx_1 - 5x_2 &= 3 \\ 9x_1 + 5sx_2 &= 2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} sx_1 - 2sx_2 &= -1 \\ 3x_1 + 6sx_2 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2sx_1 + x_2 &= 1 \\ 3sx_1 + 6sx_2 &= 2 \end{aligned}$

En los ejercicios 11 a 16, calcule la adjunta de la matriz dada, y utilice el teorema 8 para dar la inversa de la matriz.

11. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. Demuestre que si A es 2×2, entonces el teorema 8 da la misma fórmula para A^{-1} que el teorema 4 de la sección 2.2.

18. Suponga que todas las entradas en A son enteros y $\det A = 1$. Explique por qué todas las entradas en A^{-1} son enteros.

En los ejercicios 19 a 22, encuentre el área del paralelogramo cuyos vértices se indican.

19. (0, 0), (5, 2), (6, 4), (11, 6)

20. (0, 0), (−1, 3), (4, −5), (3, −2)

21. (−1, 0), (0, 5), (1, −4), (2, 1)

22. (0, −2), (6, −1), (−3, 1), (3, 2)

23. Encuentre el volumen del paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en (1, 0, −2), (1, 2, 4) y (7, 1, 0).

24. Encuentre el volumen del paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en (1, 4, 0), (−2, −5, 2) y (−1, 2, −1).

25. Utilice el concepto de volumen para explicar por qué el determinante de una matriz A de 3×3 es cero si y solo si A no es invertible. No recurra al teorema 4 de la sección 3.2. [*Sugerencia:* Piense en las columnas de A].

26. Sean $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, $\mathbf{p}$ un vector y S un conjunto en $\mathbb{R}^m$. Demuestre que la imagen de $\mathbf{p} + S$ bajo T es el conjunto trasladado $T(\mathbf{p}) + T(S)$ en $\mathbb{R}^n$.

27. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

28. Repita el ejercicio 27 con $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

29. Encuentre una fórmula para el área del triángulo cuyos vértices son $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$, y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$.

30. Sea R el triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que

$$\{\text{área del triángulo}\} = \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

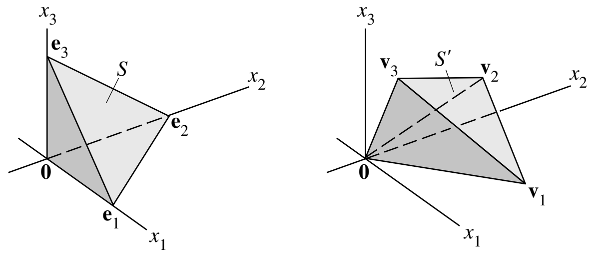
[*Sugerencia:* Traslade R al origen restando uno de los vértices, y considere el ejercicio 29].

31. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal determinada por la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, donde a, b y c son números positivos. Sea S la bola unitaria, cuya superficie frontera tiene la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

a) Demuestre que $T(S)$ está acotada por el elipsoide con la ecuación $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$.

b) Con base en el hecho de que el volumen de la bola unitaria es $4\pi/3$, obtenga el volumen de la región acotada por el elipsoide en el inciso *a*).

32. Sea S el tetraedro en $\mathbb{R}^3$ con vértices en los vectores $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$, y sea S' el tetraedro con vértices en los vectores $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Véase la figura.



a) Describa una transformación lineal que mapee a S sobre S'.

b) Encuentre una fórmula para el volumen del tetraedro S' considerando el hecho de que

$\{\text{volumen de } S\} = (1/3)\{\text{área de la base}\} \cdot \{\text{altura}\}$

33. [**M**] Pruebe la fórmula del teorema 8 para la inversa con una matriz aleatoria A de 4×4. Utilice un programa de matrices para calcular los cofactores de las submatrices 3×3, construya la adjunta, y establezca que $B = (\text{adj } A)/(\det A)$. Luego, encuentre $B - \text{inv}(A)$, donde $\text{inv}(A)$ es la inversa de A calculada por el programa de matrices. Utilice aritmética de punto flotante con el número máximo posible de lugares decimales. Informe sus resultados.

34. [**M**] Pruebe la regla de Cramer con una matriz A de 4×4 y un vector aleatorio $\mathbf{b}$, 4×1. Calcule cada entrada en la solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y compare esas entradas con las correspondientes en $A^{-1}\mathbf{b}$. Escriba el comando (u oprima las teclas) para su programa de matrices que emplea la regla de Cramer para producir la segunda entrada de $\mathbf{x}$.

35. [**M**] Si su versión de MATLAB tiene el comando `flops`, úselo para contar el número de operaciones de punto flotante para calcular A^{-1} considerando una matriz aleatoria de 30×30. Compare este número con el número de flops necesarios para construir $(\text{adj } A)/(\det A)$.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

El área de S es $\left|\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right| = 14$, y $\det A = 2$. De acuerdo con el teorema 10, el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es

$$|\det A| \cdot \{\text{área de } S\} = 2 \cdot 14 = 28$$

CAPÍTULO 3 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

1. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas. Suponga que todas las matrices son cuadradas.

a) Si A es una matriz de 2×2 con determinante cero, entonces una columna de A es un múltiplo de la otra.

b) Si dos filas de una matriz A de 3×3 son iguales, entonces $\det A = 0$.

c) Si A es una matriz de 3×3, entonces $\det 5A = 5 \det A$.

d) Si A y B son matrices de $n \times n$, con $\det A = 2$ y $\det B = 3$, entonces $\det(A + B) = 5$.

e) Si A es de $n \times n$ con $\det A = 2$, entonces $\det A^3 = 6$.

f) Si B se obtiene al intercambiar dos filas de A, entonces $\det B = \det A$.

g) Si B se obtiene multiplicando la fila 3 de A por 5, entonces $\det B = 5 \cdot \det A$.

h) Si B se forma sumando a una fila de A una combinación lineal de las otras filas, entonces $\det B = \det A$.

i) $\det A^T = -\det A$.

j) $\det(-A) = -\det A$.

k) $\det(A^TA) \geq 0$.

l) Cualquier sistema de n ecuaciones lineales en n variables se puede resolver con la regla de Cramer.

m) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^2$ y $\det[\mathbf{u} \quad \mathbf{v}] = 10$, entonces el área del triángulo en el plano con vértices en $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es 10.

n) Si $A^3 = 0$, entonces $\det A = 0$.

o) Si A es invertible, entonces $\det A^{-1} = \det A$.

p) Si A es invertible, entonces $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$.

En los ejercicios 2 a 4, utilice operaciones de fila para demostrar que todos los determinantes son cero.

2. $\begin{vmatrix} 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \end{vmatrix}$

En los ejercicios 5 y 6, calcule los determinantes.

5. $\begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

7. Demuestre que la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se puede escribir como

$$\det\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = 0$$

8. Encuentre una ecuación de determinantes de 3×3, similar a la del ejercicio 7, que describa la ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por (x_1, y_1).

Los ejercicios 9 y 10 se relacionan con los determinantes de las siguientes *matrices de Vandermonde*.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}, \quad V(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{bmatrix}$$

9. Utilice operaciones de fila para demostrar que

$$\det T = (b-a)(c-a)(c-b)$$

10. Sea $f(t) = \det V$, con x_1, x_2, x_3 todos distintos. Explique por qué $f(t)$ es un polinomio cúbico, demuestre que el coeficiente de t^3 es diferente de cero, y encuentre tres puntos sobre la gráfica de f.

11. Calcule el área del paralelogramo definido por los puntos $(1, 4)$, $(-1, 5)$, $(3, 9)$ y $(5, 8)$. ¿Cómo comprobar que el cuadrilátero determinado por estos puntos es realmente un paralelogramo?

12. Con base en el concepto de área de un paralelogramo, escriba un enunciado sobre una matriz A de 2×2, que sea válido si y solo si A es invertible.

13. Demuestre que si A es invertible, entonces adj A es invertible, y

$$(\operatorname{adj} A)^{-1} = \frac{1}{\det A}A$$

[*Sugerencia:* Dadas las matrices B y C, ¿con qué cálculo(s) se demostraría que C es la inversa de B?].

14. Sean A, B, C, D e I matrices de $n \times n$. Utilice la definición o las propiedades de un determinante para justificar las siguientes fórmulas. El inciso *c*) es útil en aplicaciones de valores propios (capítulo 5).

a) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det A$ *b*) $\det\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det D$

c) $\det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D) = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$

15. Sean A, B, C y D matrices de $n \times n$ con A invertible.

a) Encuentre las matrices X y Y para producir el bloque de factorización LU

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & Y \end{bmatrix}$$

y entonces demuestre que

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$$

b) Demuestre que si $AC = CA$, entonces

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB)$$

16. Sea J la matriz de $n \times n$ con solo números 1, y considere $A = (a-b)I + bJ$; es decir,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Confirme que $\det A = (a-b)^{n-1}[a + (n-1)b]$ como sigue:

a) Reste la fila 2 de la fila 1, la fila 3 de la fila 2, y así sucesivamente, y explique por qué esto no cambia el determinante de la matriz.

b) Con la matriz resultante del inciso *a*), sume la columna 1 a la columna 2, después sume esta nueva columna 2 a la columna 3, y así sucesivamente, y explique por qué esto no cambia el determinante.

c) Encuentre el determinante de la matriz resultante en *b*).

17. Sea A la matriz original del ejercicio 16, y sean

$$B = \begin{bmatrix} a-b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Observe que A, B y C son muy semejantes excepto que la primera columna de A es igual a la suma de las primeras columnas de B y C. Una *propiedad de linealidad* de la función determinante, analizada en la sección 3.2, dice que $\det A = \det B + \det C$. Utilice este hecho para probar la fórmula del ejercicio 16 mediante inducción sobre el tamaño de la matriz A.

18. [**M**] Aplique el resultado del ejercicio 16 para encontrar los determinantes de las siguientes matrices, y confirme sus respuestas utilizando un programa de matrices.

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 3 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 3 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

19. [**M**] Utilice un programa de matrices para calcular los determinantes de las siguientes matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Utilice los resultados para hacer una conjetura sobre el determinante de la matriz que se presenta a continuación, y confirme la conjetura utilizando operaciones de fila para evaluar ese determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

20. [**M**] Aplique el método del ejercicio 19 para hacer una conjetura sobre el determinante de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1) \end{bmatrix}$$

Justifique su conjetura. [*Sugerencia:* Considere el ejercicio 14*c*) y el resultado del ejercicio 19].