Funciones de Varias Variables:

Sabemos cómo maximizar la ganancia de una compañía, cuando tanto los ingresos como los costos están escritos como función de una única variable (el número de unidades producidas) Pero, por supuesto, el nivel de producción en sí, está determinado por otros factores, y en general, ninguna variable sola puede representarlo.

Por ejemplo, la cantidad de petróleo que se bombea cada semana desde un campo petrolero depende del número de bombas y del número de horas que las bombas están funcionando. El número de bombas en el campo dependerá de la cantidad de capital disponible originalmente para construir las bombas, así como del tamaño y forma del campo. El número de horas que las bombas pueden ser operadas depende de la mano de obra disponible para hacer funcionar y dar mantenimiento a las bombas. Además, la cantidad de petróleo que se deseará bombear desde el campo petrolero dependerá de la demanda actual de petróleo, que está relacionada con el precio del petróleo.

La maximización de la ganancia semanal de un campo petrolero requerirá de un balance entre el número de bombas y la cantidad de tiempo que cada bomba pueda ser operada. La utilidad máxima no se alcanzará construyendo mas bombas de las que pueden ser operadas ni poniendo a trabajar pocas bombas todo el tiempo.

Este es un ejemplo del problema general de maximización de ganancias cuando la producción depende de varios factores. La solución incluye un análisis de la función producción que relaciona la producción con la asignación de recursos para la misma. En general, como son necesarias varias variables para describir la asignación de recursos, la asignación que da mayores ganancias no puede encontrarse por medio de la diferenciación con respecto a una sola variable.

Enseguida presentaremos el estudio de funciones que dependen de dos o más variables.

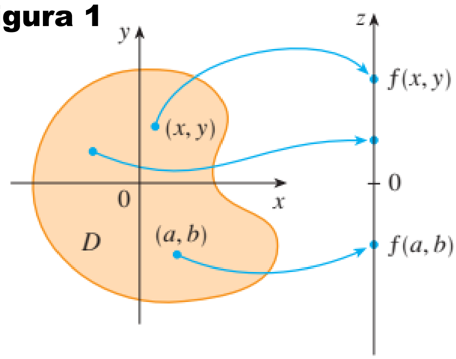
Definición:

Una función f de dos variables, es una ley que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se denota con $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su conjunto imagen es el conjunto de valores que devuelve f, es decir: $\{f(x, y)/(x, y) \epsilon D\}$

A menudo escribimos $z = f(x, y)$ para hacer explícito el valor que asume f en un punto (x, y). Las variables x y y son variables independientes y z es la variable dependiente.

Una función de dos variables es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo conjunto imagen (o rango) es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Figura 1



Una manera de representar la función es mediante un diagrama de flechas (**Figura 1**) donde el dominio D se representa como un subconjunto del plano xy y el rango es un conjunto de números sobre una recta real, que se muestra como un eje z.

Por ejemplo, si $f(x,y)$ representa la temperatura en un punto (x,y) en una placa metálica plana con la forma de D, podemos considerar al eje z como un termómetro que va mostrando el registro de temperaturas.

Si una función f está dada por su ley y no se especifica un determinado dominio, entonces se entiende, que el dominio de f será el conjunto de puntos del plano (x,y) para el cual la expresión dada tiene sentido y devuelve un número real.

Ejemplo 1:

Para las siguientes funciones, evalúe $f(3,2)$. Determine y grafique el dominio.

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ b) $g(x,y) = x.ln(y^2 - x)$

Solución:

a) $f(3,2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

La expresión para f tiene sentido si el denominador no es cero y la cantidad dentro del signo raíz cuadrada no es negativa. Entonces, el dominio de f es:

$D = \{(x,y)/x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$

La desigualdad $x + y + 1 \geq 0$, o $y \geq -x - 1$, describe los puntos que quedan en o por encima de la recta $y = -x - 1$, mientras que $x \neq 1$ significa que los puntos sobre la recta $x = 1$ tienen que ser excluidos del dominio (**Figura 2**)

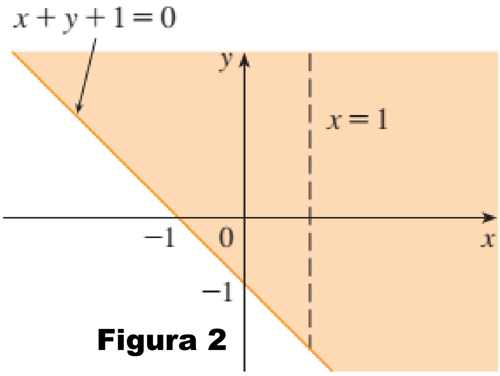
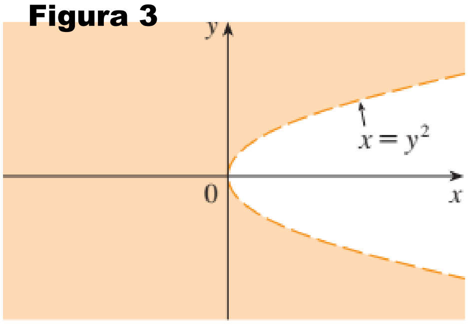


Figura 2

Figura 3



b) $g(3,2) = 3\ln(2^2 - 3)\, 3\ln(1) = 0$

Puesto que $\ln(y^2 - x)$ se define sólo cuando $y^2 - x > 0$, es decir, $x < y^2$, el dominio de f es $D = \{(x,y) \,/\, x < y^2\}$. Este es el conjunto de puntos del plano que se encuentra a la izquierda de la parábola $x = y^2$ (**Figura 3**)

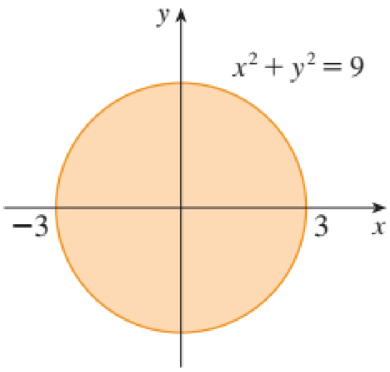
Ejemplo 2:

Determine el dominio y el rango de $h(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solución:

El dominio de h es: $D = \{(x,y)/9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 9\}$

Que es el disco con centro en $(0,0)$ y radio 3 (Figura 4).



El rango de h es: $\left\{z/z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x,y)\,\epsilon\ D\right\}$ Puesto que z es una raíz cuadrada positiva, $z \geq 0$. Asimismo, como $9 - x^2 - y^2 \leq 9$ tenemos: $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$, de manera que el rango de z nos queda: $\{z\ /\ 0 \leq z \leq 3\} = [0,3]$

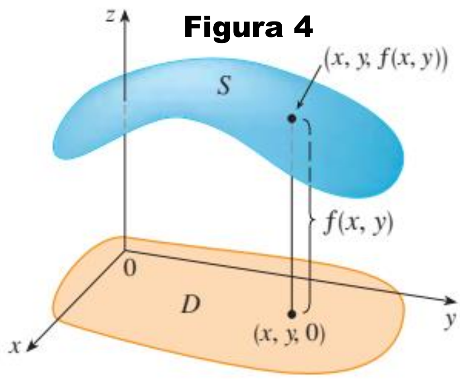
Graficas:

Otro modo de visualizar el comportamiento de una función de dos variables es considerar su representación gráfica.

Definición:

Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x,y)$ y (x,y) está en D.

Figura 4



Así como la representación gráfica de una función f es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la representación gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x,y)$.

Podemos visualizar la gráfica S de$f$ directamente sobre o debajo de su dominio D en el pano xy como se muestra en la **Figura 4.**

Funciones de 3 o más variables:

Una función de tres variables, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x,y,z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x,y,z)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto sobre la superficie de la tierra depende de la longitud x, la latitud y, y del tiempo t, de modo que se puede escribir $T = f(x,y,t)$

Ejemplo 3:

Encuentre el dominio de f si $f(x,y,z) = \ln(z - y) + xy.sen(z)$

Solución:

La expresión para $f(x, y, z)$ está definida siempre que $z - y > 0$, de modo que el dominio de f es: $D = \{(x, y, z) \epsilon \mathbb{R}^3 \ / \ z > y\}$. Es un **semiespacio** formado por todos los puntos que se ubican por arriba del plano $z = y$.

Nota: Es muy difícil imaginara una función f de tres variables mediante su gráfica, ya que se localizaría es un espacio de cuatro dimensiones. No obstante, es posible saber más a cerca de f examinando sus **superficies de nivel**, que son las superficies cuyas ecuaciones son: $f(x, y, z) = k$ (donde k es una constante). Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel el valor de $f(x, y, z)$ es fijo.

Ejemplo 4:

Determine las superficies de nivel de la función: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solución:

Las superficies de nivel son $x^2 + y^2 + z^2 = k$, donde $k \geq 0$. Esto es una familia de esferas concéntricas con radio $\sqrt{k}$ (**Figura 5**). Así cuando (x, y, z) varía sobre cualquier esfera con centro en O, el valor de $f(x, y, z)$ es siempre el mismo.

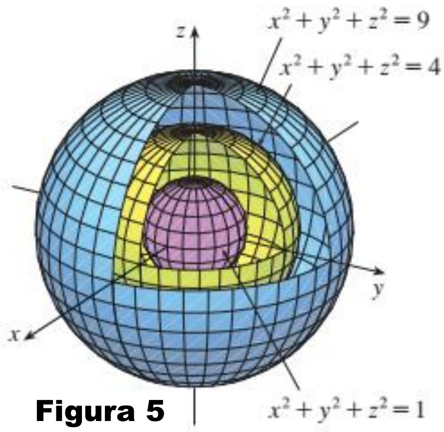


Figura 5

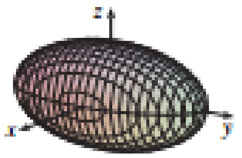
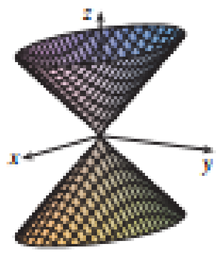
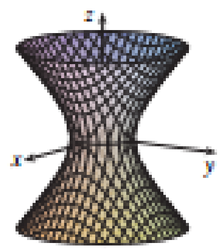
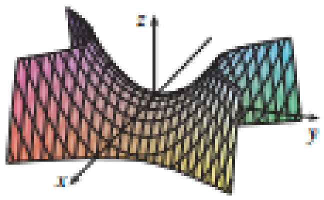
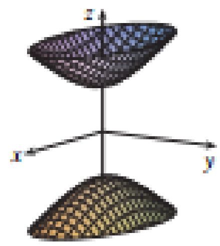
También se pueden considerar funciones de cualquier número de variables. Una **función de *n* variables** es una regla que asigna a un número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una *n-ada* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales. Denotamos con $\mathbb{R}^n$ el conjunto de todas las *n-adas.*

Por ejemplo, si una compañía utiliza n ingredientes distintos al elaborar un producto alimenticio, C_i es el costo por unidad del *i-ésimo* ingrediente y si se utiliza x_i unidades de *i-ésimo* ingrediente, entonces el costo total C de los ingredientes es una función de *n* variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A saber: $C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1. x_1 + c_2. x_2 + \cdots + c_3. x_3$.

La función f es una función de valores reales cuyo dominio es un conjunto de $\mathbb{R}^n$.

Analicemos y estudiemos, para poder identificar y reconocer, algunas superficies comunes con las que vamos a trabajar en esta unidad, por ejemplo, podemos analizar:

- Sus simetrías (con respecto a los ejes coordenados, a los planos coordenados y al origen de coordenadas)
- Sus intersecciones (con los planos coordenados, con los ejes coordenados y con planos paralelos a los planos coordenados (Trazas)
- Si es una superficie de revolución o no.
- Si es una superficie cilíndrica o no.
- Si es una superficie acotada o no.

Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Todas las trazas son elipses. Si $a=b=c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x=k$ y $y=k$ son hipérbolas si $k\neq 0$ pero son pares de rectas si $k=0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico 	$\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas Se ilustra el caso donde $c<0$.	Hiperboloide de dos hojas 	$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ Las trazas horizontales en $z=k$ son elipses si $k>c$ o $k<-c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

Curvas de Nivel:

Hemos visto dos métodos para representar funciones: diagrama de flechas y gráficas. Una tercera opción tomada prestada de los cartógrafos, es un mapa de curvas de nivel en el cual puntos de igual elevación se unen para formar *líneas de contorno* o *curvas de nivel*.

<u>Definición</u>:

Las **curvas de nivel** de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x,y)=k$, donde k es una constante (en el rango de f).

Una curva de nivel $f(x,y)=k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En otras palabras señala donde tiene una altura k la gráfica de f.

Observe en la **Figura 6** la relación entre curvas de nivel y trazas horizontales. Las curvas de nivel $f(x,y) = k$ son justamente las trazas de la gráfica de f en el plano horizontal $z = k$ proyectadas en el plano xy. Entonces, si dibujamos las curvas de nivel de una función y las representamos como elevaciones de la superficie a la altura indicada, entonces podemos formar mentalmente una imagen de la representación gráfica de la función. La superficie tendrá pendiente abrupta donde las curvas de nivel están más cercanas entre sí y será algo más plana donde las curvas se separan.

Figura 6

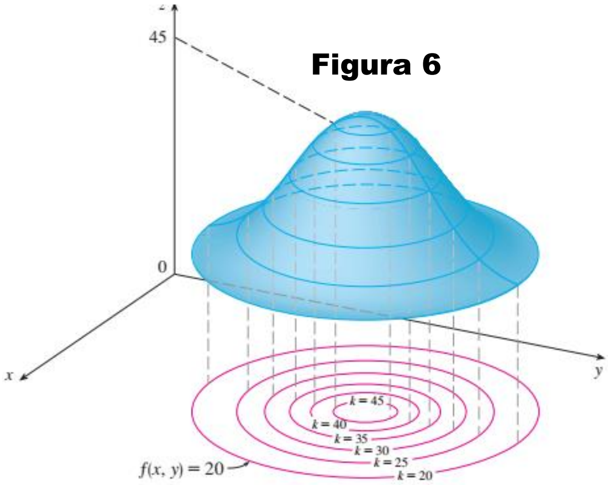
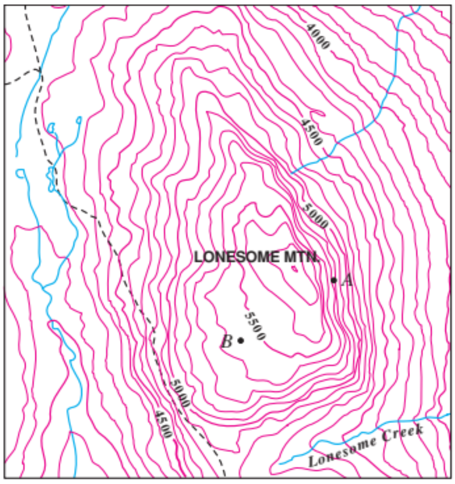


Figura 7



Un ejemplo común de las curvas de nivel son los mapas topográficos de regiones montañosas, como el mapa que se muestra en la **Figura 7**. Las curvas de nivel son curvas de elevación constante por arriba del nivel del mar. Si caminásemos por una de esas curvas de nivel, nunca ascenderíamos ni descenderíamos.

<u>Ejemplo 5</u>:

Grafique las curvas de nivel de la función $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para $k = 0{,}1{,}2$ y 3.

<u>Solución</u>:

Las curvas de nivel son: $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$, o bien: $x^2 + y^2 = 9 - k^2$.

Esto es una familia de circunferencias concéntricas con centro en el origen de coordenadas y radio $\sqrt{9 - k^2}$. Los casos $k = 0{,}1{,}2\ y\ 3$ se ilustran en la **Figura 8**, intente imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie y compare con la gráfica de g (un hemisferio) que también se muestra en la **Figura 8**.

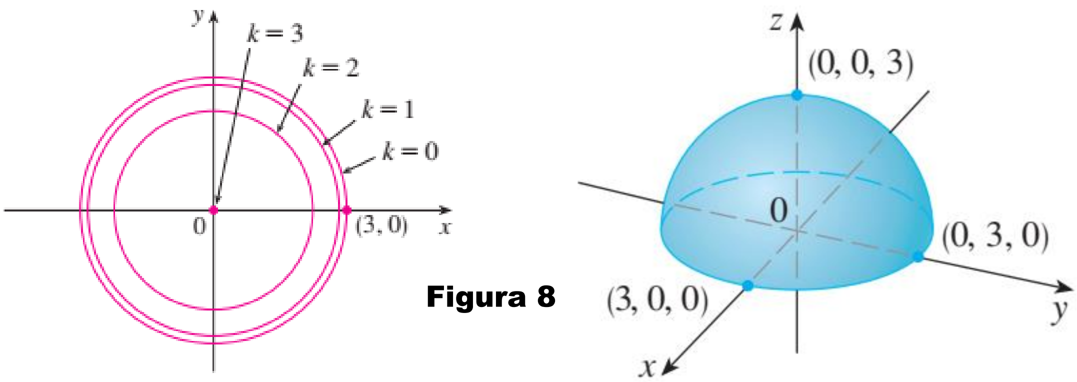
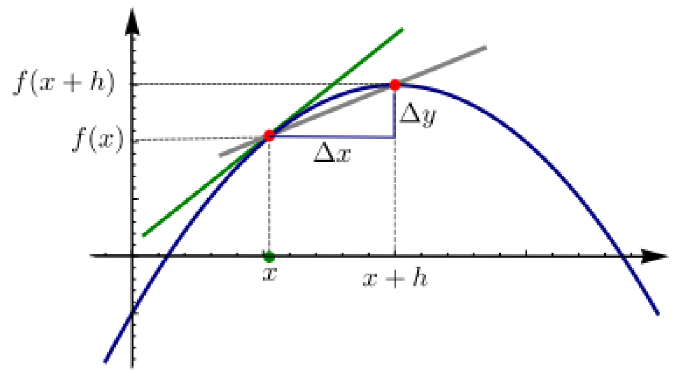


Figura 8

Derivadas Parciales:

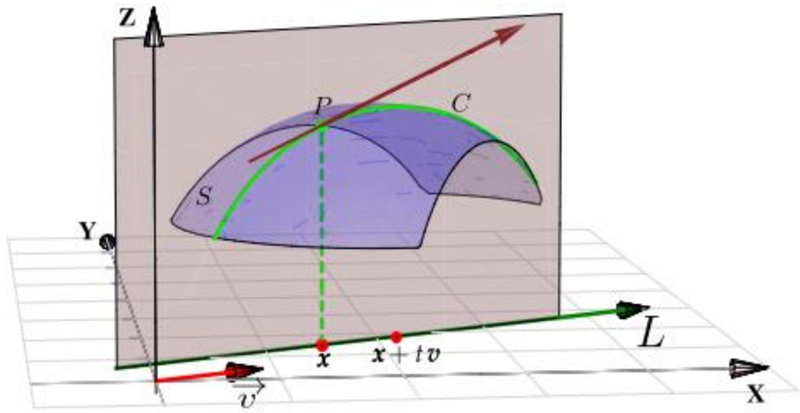
La derivada de una función de una variable mide la tasa de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente. La derivada de la función $y = f(x)$ en x es, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ siempre y cuando este límite exista.



Geométricamente la derivada de f en x es la pendiente de la recta tangente a f en x.

Si $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la derivada de f en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, en la dirección de un vector unitario $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mide la tasa instantánea de cambio de f en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$

cuando $h \to 0$ que nuevamente se obtiene como un límite:

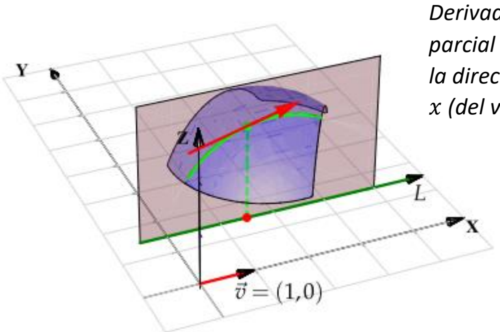


$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_o + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

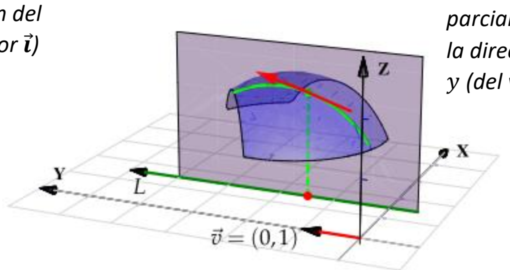
Figura 9

Geométricamente, esta derivada es la pendiente a la curva C que resulta de hacer la intersección entre la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ con el plano generado por la recta L que tiene la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ y contiene al punto de coordenadas $P_0(x_0, y_0)$ (**Figura 9**)

De particular interés son la derivada en la dirección del eje x, denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}$, y la derivada en la dirección del eje y, denotada con $\frac{\partial f}{\partial y}$, llamadas *derivadas parciales* respecto a x e y respectivamente.



Derivada parcial de f en la dirección del x (del vector $\vec{\imath}$)



Derivada parcial de f en la dirección del y (del vector $\vec{\jmath}$)

Derivadas Parciales:

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f: A \to \mathbb{R}$. Entonces la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f respecto de la variale x_i en el punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

siempre que este límite exista.

Para una función de dos variables, cuando $z = f(x, y)$ es común denotar las derivadas parciales como: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, z_x$ o f_x y según la definición sería:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Es decir para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ derivamos de manera ordinaria f respecto de x (pensando en y como una constante) y para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ derivamos de manera ordinaria f respecto de y (pensando a x como una constante). Esto es válido siempre y cuando se puedan aplicar las reglas de derivación (como vimos para las derivadas ordinarias en funciones que dependen sólo de una variable)

Ejemplo 6: Cálculo directo y por definición.

Sea $f(x, y) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ entonces aplicando la reglas de derivación tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\right) = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

Esta es la manera de calcular las derivadas parciales de f respecto de x e y usando los teoremas que nos permiten aplicar las reglas de derivación. Sin embargo esto no nos permite decidir si la función es derivable o no en el origen. Para saber si estas derivadas existen o no en $(0,0)$ debemos aplicar la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0+h}.\sqrt[3]{0} - \sqrt[3]{0}.\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0}.\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}.\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Es decir que en este caso tanto la derivada parcial de f repecto de x como la derivada parcial de f respecto de y existen y valen ambas 0.

Ejemplo 7:

Veamos como calcular derivadas parciales utilizando las reglas de derivación:

a. $z = x^2y^2 + y \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 0$
b. $z = \frac{x^3}{y^5} = \frac{1}{y^5}.x^3 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y^5}.3x^2$
c. $z = \frac{x^3}{y^5} = x^3.y^{-5} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -5x^3.y^{-6}$
d. $z = x^y$ (con $x > 0$) Recordemos que: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\ln(a) \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = x^y.\ln(x)$
e. $z = x^y$ (con $x > 0$) Recordemos que: $\frac{d}{dx}(x^n) = n.a^{x-1} \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y.x^{y-1}$
f. Si $C(r,\theta) = r^n.cos(n\theta)$ (con n cte., $n \in \mathbb{N}$). Entonces: $\frac{\partial C}{\partial r} = nr^{n-1}$ y $\frac{\partial c}{\partial \theta} = -nr^n sen(n\theta)$

Nota: Recordemos que en una variable, si $u = g(x)$ entonces: $[f(u)]' = f'(u).u'$, de manera que:

g. Si $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(x/y)^2}.\frac{-y.1}{x^2}$
h. Si $z = \frac{\cos(xy)+xsen(2y)}{2}$, entonces
$$\frac{\partial z}{\partial x}(\pi,\pi/2) = \frac{-ysen(xy) + sen(2y)}{2}\bigg|_{x=\pi,y=\pi/2} = \frac{-\pi sen(\pi^2/2)}{4}$$
i. Sea f una función derivable que depende de una única variable y sea $z = f(u)$ con $u = x^5 + y^3$, entonces:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u).5x^4 \qquad y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u).3y^2$$
j. Sean f y g funciones derivables de una variable y $z = \frac{f(u)}{g(u)}$ con $u = x^5 + y^3$, entonces:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}[f(u)].g(u) - \frac{\partial}{\partial x}[g(u)].f(u)}{g^2(u)} = \frac{f'(u).5x^4.g(u) - g'(U).5x^4.f(u)}{g^2(u)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}[f(u)].g(u) - \frac{\partial}{\partial y}[g(u)].f(u)}{g^2(u)} = \frac{f'(u).3y^2.g(u) - g'(U).3y^2.f(u)}{g^2(u)}$$

¡Importante!

- Una función de dos variables puede ser continua en un punto y no ser derivable parcialmente en dicho punto.
- La existencia de las derivadas parciales para las funciones de varias variables en un punto del dominio no implica la continuidad de la función en el punto.

Derivadas parciales de orden superior:

Si f es una función de dos variables x e y, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y también son funciones de dos variables, de modo que podemos considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_x, (f_y)_y$ las que llamaremos segundas derivadas parciales de f. Si $z = f(x, y)$ se utilizan diferentes notaciones para estas derivadas parciales:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

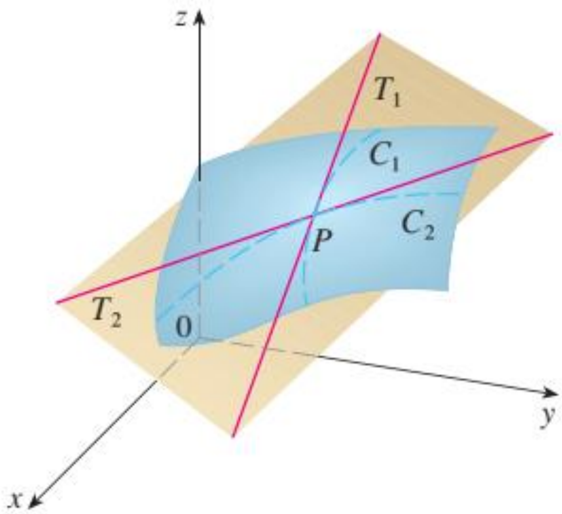
Nota: La notación f_{xy} o $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ significa que primero derivamos con respecto a x y luego con respecto a y, mientras que para calcular f_{yx} el orden se invierte.

Teorema de Clairaut (también conocido como Teorema de Schwarz)

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde D es un disco abierto con centro en (a, b) y radio δ, si las funciones f_{xy} y y f_{yx} son continuas en D, entonces: $f_{xy} = f_{yx}$.

Aproximación lineal y cuadrática de funciones de dos variables:

Una de las ideas más importantes en el calculo de una variable, es que a medida que se acerca a un punto de la gráfica de una función derivables, la gráfica se vuelve indistinguible desde su tangente y puede aproximarse a la función mediante una función lineal. Ahora bien, desarrollando una idea similar en tres dimensiones. A medida que sea acerca hacia un punto sobre la superficie (que es la gráfica de una función derivable de dos variables, la superficie se parece más y más a un plano, su plano tangente y es posible aproximarse a la función



mediante una función lineal de dos variables (el plano en cuestión). También se generaliza la idea de diferencial a funciones de dos o más variables.

Planos tangentes:

Suponga que una superficie S tiene por ecuación $z = f(x, y)$, donde las primeras derivadas parciales de f son continuas, y sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre S. Sean C_1 y C_2 las curvas que se obtienen al intersecar los planos verticales $y = y_0$ y $x = x_0$ con la superficie S. Entonces el punto P se encuentra tanto en C_1 como en C_2. Sean T_1 y T_2 las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2 en el punto P. Entonces el plano tangente a la superficie S en el punto P se define como el plano que contiene a las rectas tangentes T_1 y T_2.

Se puede comprobar (no lo haremos en este momento) que si C es cualquier otra curva contenida en S que contiene al punto P, entonces su tangente en P también está en el plano tangente, por lo tanto, podemos pensar que el plano tangente a S en P consiste de todas las tangentes posibles en P a curvas que quedan en S y pasar por P. El plano tangente en P es el plano que más se aproxima a la superficie S cerca de P.

Sabemos que cualquier plano que contiene al punto $P(x_0, y_0, z_0)$ tiene una ecuación de la forma: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Al dividir ambos miembros por C y hacer $a = -A/C$ y $b = -B/C$, podemos escribirla en la forma: $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$. **(*)** Si esta ecuación representa el plano tangente en P, entonces su intersección con el plano $y = y_0$ debe ser la recta tangente T_1, entonces al hacer $y = y_0$ en la ecuación **(*)** obtenemos: $z - z_0 = a(x - x_0)$ donde $y = y_0$ e identificamos estas expresiones como la ecuación de una recta (en la forma punto-pendiente) con pendiente a. Sabemos que la pendiente de la recta tangente T_1 es $f_x(x_0, y_0)$ por lo que $a = f_x(x_0, y_0)$.

De manera similar al hacer $x = x_0$ en la ecuación **(*)**, $z - z_0 = b(y - y_0)$ la que representa a la recta tangente T_2, de modo que $b = f_y(x_0, y_0)$.

Supongamos que las derivadas parciales de f son continuas. Una ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ejemplo 9:

Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $P(1,1,3)$

Solución:

Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, tenemos: $f_x(x, y) = 4x \Longrightarrow f_x(1,1) = 4$ y $f_y(x, y) = 2y \Longrightarrow f_y(1,1) = 2$. De manera que podemos escribir la ecuación del plano tangente en $P(1,1,3)$ como: $z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$ o bien: $z = 4x + 2y - 3$.

En la **figura 10** se muestra el paraboloide elíptico y su plano tangente en $(1,1,3)$ con dos acercamientos al punto restringiendo el dominio de la función. Observe que a medida que se acerca parece más plana la gráfica y más se asemeja a su plano tangente.

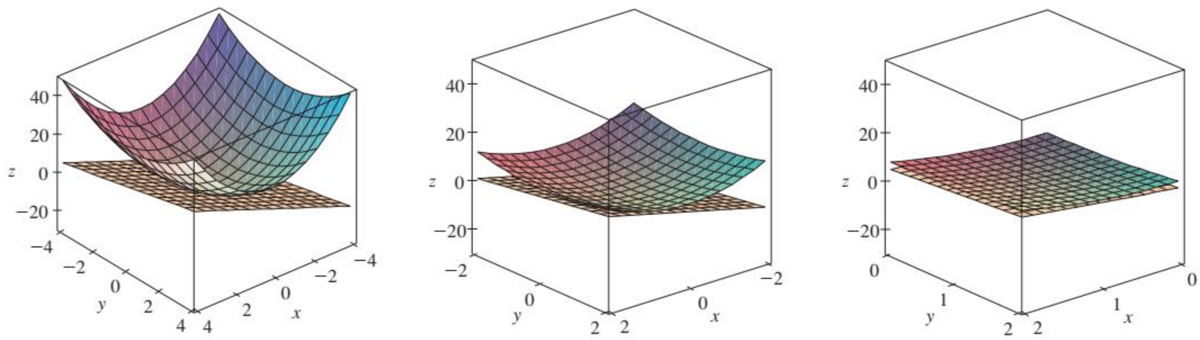


Figura 10

Aproximaciones lineales:

En el ejemplo anterior hemos encontrado una ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1,1,3)$ es $z = 4x + 2y - 3$. Por lo tanto, en vista de la evidencia de mostrada en la figura 10, la función lineal de dos variables:

$$L(x,y) = 4x + 2y - 3$$

es una buena aproximación a $f(x,y)$ cuando (x,y) está cerca de $(1,1)$. La función L se conoce como linealización de f en $(1,1)$ y la aproximación $f(x,y) \approx 4x + 2y - 3$ recibe el nombre de ***aproximación lineal***, o bien, *aproximación del plano tangente* de f en $(1,1)$.

Por ejemplo, en el punto $(1.1, 0.95)$ la aproximación lineal da:

$f(1.1{,}0.95) \approx 4.(1.1) + 2.(0.95) - 3 = 3.3$ que es muy cercano al valor verdadero de la función en el punto, a saber: $f(1.1{,}0.95) = 2.(1.1)^2 + (0.95)^2 = 3.3225$. Pero si tomamos un punto alejado del (1.1), tal como el $(2,3)$ ya no conseguimos una buena aproximación. En efecto, $L(2,3) = 11$ y $f(2,3) = 17$.

En general podemos decir que una ecuación del plano tangente a la gráfica de una función f de dos variables en el punto $(a, b, f(a,b))$ es:

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

La función cuya gráfica es este plano tangente es:

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

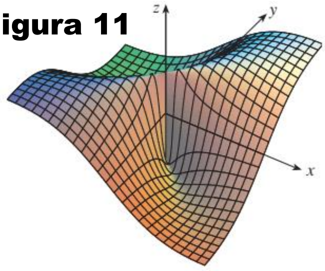
Y se llama ***linealización*** de f en (a,b) y la aproximación:

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Se llama ***aproximación lineal*** o aproximación del plano tangente de f en (a,b).

Hemos definido planos tangentes para superficies $z = f(x, y)$ donde las primeras derivadas parciales de f son continuas. ¿Qué sucede si f_x y f_y no son continuas? En la **figura 11** se ilustra la función cuya ecuación es:

Figura 11



$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Se puede comprobar que existen sus derivadas parciales en el origen y, de hecho, $f_x(0,0) = 0$ y $f_y(0,0) = 0$, pero f_x y f_y no son continuas en el origen. La aproximación lineal sería $f(x, y) \approx 0$ y sin embargo $f(x, y) = \frac{1}{2}$ en todos los puntos sobre la recta $y = x$. Vemos que una función de dos variables se puede comportar erráticamente aún cuando ambas derivadas parciales existan. Entonces se plantea cuál es la idea de una función ***diferenciable*** de dos variables.

Recordemos que en una función de una variable, $y = f(x)$ si x pasa de a a $a + \Delta x$, se define el incremente de y como: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ y decimos que si f es ***diferenciable*** en $x = a$ entonces: $\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta\varepsilon$ donde $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Ahora, si consideramos una función de 2 variables, $z = f(x, y)$ y supongamos que x cambia de a a $a + \Delta x$ y que y pasa de b a $b + \Delta y$, entonces el incremento correspondiente de z es: $\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$. Por lo que el incremento Δz representa el cambio del valor de f cuando (x, y) pasa de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ y por analogía definimos la diferenciabilidad para una función de dos variables.

<u>Definición</u>: Si $z = f(x, y)$, entonces f es diferenciable en (a, b) si Δz se puede expresar en la forma: $\Delta z = f_x(a, b)\Delta x + f_y(a, b)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_1\Delta y$ donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

En la definición se establece que una función es diferenciable si su aproximación lineal es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). Esto quiere decir que la gráfica de la función se parece a la representación gráfica de su plano tangente cerca del punto de tangencia.

En general es difícil aplicar la definición para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema que sigue proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

<u>Teorema</u>: Si las derivadas parciales f_x y f_y, existen cerca de (a, b) y son continuas en (a, b), entonces f es diferenciable en (a, b).

<u>Ejemplo 10</u>:

Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1,0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$

Solución:

Las derivadas parciales son: $f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \Longrightarrow f_x(1,0) = 1$ y $f_y(x,y) = x^2e^{xy} \Longrightarrow f_y(1,0) = 1$, ambas son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, en particular son continuas en las cercanías de $(1,0)$, de manera que según el teorema de acabamos de ver la función es diferenciable. La linealización de f en $(1,0)$ es:

$$L(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0).(y-0) = 1 + 1(x-1) + 1.y = x + y$$

La aproximación lineal correspondiente es: $xe^{xy} \approx x + y$, de manera que: $f(1.1,-0.1) \approx 1.1 - 0.1 = 1$ siendo el valor real de $f(1.1,-0.1) = 1.1e^{-0.1.1.1} \approx 0.98542$.

Fórmula de Taylor para dos variables:

Vamos a generalizar la fórmula de Taylor que ya hemos visto para funciones de una variable.

Repasemos, si $y = f(x)$ es una función de una variable con derivadas de cualquier orden en un entorno del punto $x = a$ la fórmula de Taylor en ese punto es:

$$f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}.(x-a)^n + R_n$$

Donde $\mathbb{R}_n$ es un infinitésimo de orden superior a $(x-a)^n$, es decir: $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n}{(x-a)^n} = 0$

Utilizando la expresión del resto de Lagrange se tiene que:

$$R_n = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}.(x-a)^{n+1}$$

Siendo c un punto intermedio entre a y x.

La generalizacón de la fórmula anterior para una función de dos variables, $z = f(x,y)$ que admite derivadas parciales de cualquier orden en un entorno de (a,b) viene dada por[1]:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\ & + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)\right] + R_2 \end{aligned}$$

Donde R_2 es un infinitésimo verificando:

[1] Con objeto de no complicar la notación se ha considerado únicamente la fórmula de Taylor de orden 2 pudiendo generalizarse fácilmente a cualquier orden.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{R_2}{(x-a,y-b)^2} = 0$$

Siendo $x = a + \Delta x \Leftrightarrow x - a = \Delta x$ y $y = b + \Delta y \Leftrightarrow y - b = \Delta y$

La expresión de Taylor de orden 2 nos queda:

$$\begin{aligned} f(a+\Delta x, b+\Delta y) \\ &= f(a,b) + f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)\Delta x^2 + f_{yy}(a,b)\Delta y^2 + 2f_{xy}(a,b)\Delta x\Delta y\right] + R_2 \end{aligned}$$

Gradiente. Aplicaciones:

Definición: Sea $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces el vector gradiente de f es: $\nabla f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por: $\vec{\nabla} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}\right)$.

En el caso que $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\vec{\nabla}(x,y) = \left(f_x, f_y\right) = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{\jmath}$

En el caso que: $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\vec{\nabla}(x,y,z) = \left(f_x, f_y, f_z\right) = \frac{\partial f}{\partial x}.\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}.\vec{k}$

Interpretación geométrica del campo gradiente:

El gradiente $\vec{\nabla}_z\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial (campo gradiente). Por ejemplo, consideremos el paraboliode $z - 1 = x^2 + y^2$, de manera que campo gradiente de z es: $\vec{\nabla z} = (2x, 2y)$ una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se muestran en la **figura 12**. Los vectores apuntan en la dirección de máximo crecimiento del paraboliode y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la "intensidad" de esta razón de cambio. Ahora consideremos el paraboloide $z - 3 = -x^2 - y^2$, el campo gradiente de z es: $\vec{\nabla z} = (-2x, -2y)$ una representación gráfica de esta superficie y de algunos vectores (trasladados) se muestran en la **figura**

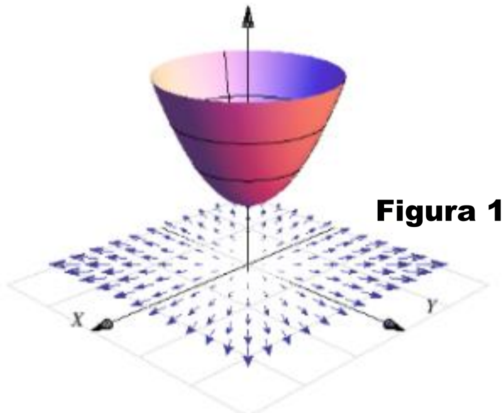


Figura 12

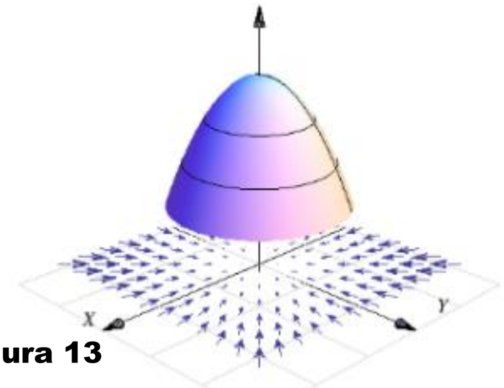


Figura 13

13. Los vectores apuntan en la dirección de máximo crecimiento del paraboliode y la magnitud de estos vectores nos dan una medida de la "intensidad" de esta razón de cambio.

Ejemplo 11:

Si $f(x,y) = sen(xy) + x^2y^2$, calcule $\overrightarrow{\nabla f}(\pi, 1)$

Solución:

El gradiente está dado por: $\overrightarrow{\nabla f}(x,y) = \big((y.cos(xy) + 2xy^2), (x.cos(xy) + 2x^2y)\big)$ y evaluado sería: $\overrightarrow{\nabla f}(\pi, 1) = \big((2\pi - 1), (2\pi^2 - \pi)\big)$

Ejemplo 12:

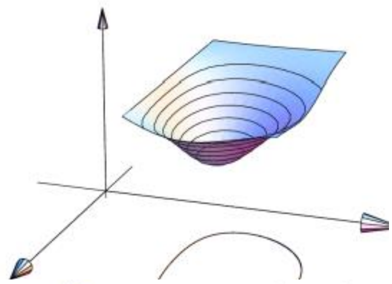
Si $G(x,y,z) = x^2z + z^3y + xyz$, calcule $\overrightarrow{\nabla G}(x,y,z)$

Solución:

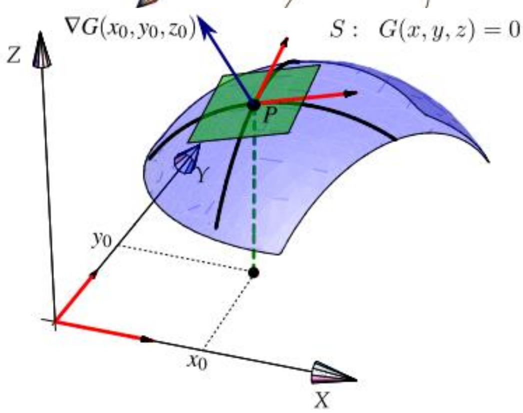
$$\overrightarrow{\nabla G}(x,y,z) = \left(G_x, G_y, G_z\right) = (2xz + yz).\vec{\boldsymbol{\imath}} + (z^3 + xz).\vec{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2 + 3z^2y + xz).\vec{\boldsymbol{k}}$$

Gradiente, curvas y superficie de nivel:

Recordemos que si $z = f(x,y)$ entonces la curva $z = c$ (es decir, $c = f(x,y)$) la llamamos "curva de nivel". Si tenemos $w = g(x,y,z)$, la superficie $w = 0$ (es decir $0 = g(x,y,z)$ se denomina ***superficie de nivel*** $w = 0$. Si S es una superficie de ecuación $G(x,y,z) = 0$ con derivadas continuas en $P(x_0, y_0, z_0)\ \epsilon\ S$, entonces:



1. Si se cumplen las condiciones para poder derivar implícitamente en P se tiene: $\overrightarrow{\nabla \boldsymbol{z}}(x,y) = \left(-\frac{G_x}{G_z}, -\frac{G_y}{G_z}\right)$, el vector $\overrightarrow{\nabla \boldsymbol{z}}(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $z = z_0$, es decir $\overrightarrow{\nabla \boldsymbol{z}}(x_0, y_0)$ es perpendicular al vector tangente en (x_0, y_0) si necesitamos un vector perpendicular podríamos usar solamente $\left(-G_x, -G_y\right)$. Por supuesto si la superficie es $z = f(x,y)$, podemos calcular el gradiente de la manera usual tomando $G = z - f(x,y) = 0$ y entonces $G_z = 1$



2. El vector $\overrightarrow{\nabla \boldsymbol{G}}(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $w = 0$, es decir

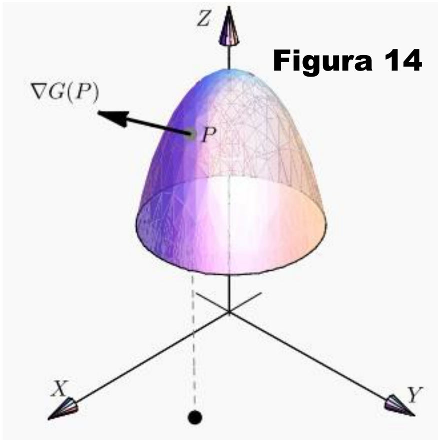
$\overrightarrow{\nabla G}(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a cada curva de la superficie S, que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$.

Ejemplo 13:

Considere la superficie S de ecuación: $\frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 = 0$ y sea $P(3,2,1+3\sqrt{3})$. Observe que $P \epsilon S$. Calcule el vector perpendicular a la superficie S en P.

Solución:

De acuerdo a lo visto el vector $\overrightarrow{\nabla G}(P)$ es perpendicular a la curva de nivel S en P donde $G(x,y,z) = \frac{1}{9}(z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4$.

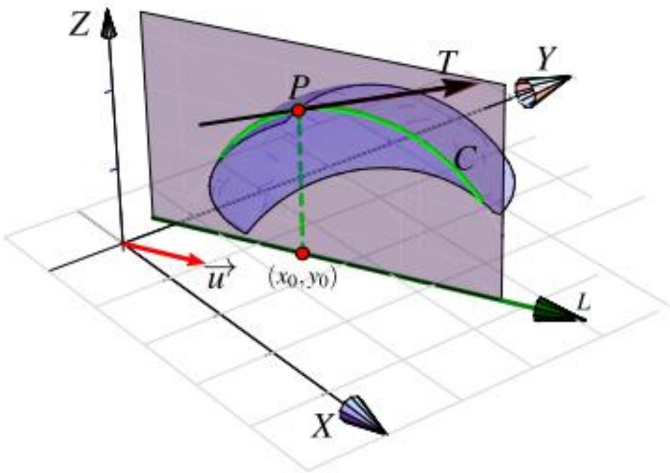


$$\overrightarrow{\nabla G}(x,y,z) = (G_x, G_y, G_z)$$
$$= \left(2(x-2), 2(y-2), \frac{2}{9}(z-1)\right)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\nabla G}(P) == \left(2,0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

En la **figura 14** se muestra la situación.

Derivada Direccional:

Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de $z = f(x,y)$ en el punto de coordenadas (x_0, y_0) en la dirección de un vector arbitrario unitario $\vec{u} = (a,b)$, para esto consideremos la superficie S con ecuación $z = f(x,y)$ (la gráfica de f), y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)\ \epsilon S$, el plano vertical generado por la recta L que contiene al punto de coordenadas $(x_0, y_0, 0)$ en la dirección del vector $\vec{u}$, interseca a la superficie S en la curva C la pendiente de la recta



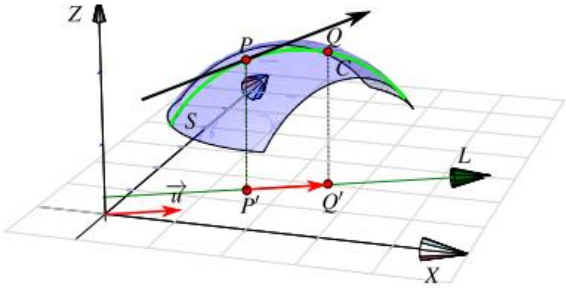
tangente T a la curva C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}}$. Sea $Q(x, y, z)$ otro punto sobre la curva C, y sean $P'(x_0, y_0)$ y $\overrightarrow{\boldsymbol{OQ'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OP'}} + h\vec{\boldsymbol{u}}$ las proyecciones ortogonales sobre el plano xy de los puntos P y Q, entonces: $\overrightarrow{\boldsymbol{P'Q'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OQ'}} - \overrightarrow{\boldsymbol{OP'}} = h\vec{\boldsymbol{u}}$ para algún escalar h, así entonces: $x - x_0 = ha \Rightarrow x = x_0 + ha$ y $y - y_0 = hb \Rightarrow y = y_0 + hb$.

El cambio sobre la recta L es $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P'Q'}}\right| = h|\vec{\boldsymbol{u}}| = h$ ($\vec{u}$ es unitario), por lo que la razón de cambio está dada por:

$$\frac{\Delta z}{h|\vec{\boldsymbol{u}}|} = \frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Y al tomar el límite cuando $h \to 0$ (siempre que este límite exista) obtenemos la tasa de cambio instantánea de z, en la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$ que se llama ***derivada direccional*** de f en la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$.

Definición: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en su dominio, entonces f tiene ***derivada direccional*** en la dirección de cualquier vector no nulo $\vec{\boldsymbol{u}} = (a, b)$ y está dada por:



$$D_{\vec{\boldsymbol{u}}} f(x, y) = \nabla f(x, y).\frac{\vec{u}}{|\vec{\boldsymbol{u}}|}$$
$$= f_x(x, y).\frac{a}{|\vec{\boldsymbol{u}}|} + f_y(x, y).\frac{b}{|\vec{\boldsymbol{u}}|}$$

Ejemplo 14:

Calcule la derivada direccional $D_{\vec{\boldsymbol{u}}} f(x, y)$ si $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ y $\vec{\boldsymbol{u}} = (\sqrt{3}, 1)$. Calcule $D_{\vec{\boldsymbol{u}}}(1,2)$.

Solución:

Tenemos $\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, -3x + 8y)$, entonces $\nabla f(1,2) = (-3,13)$, además $|\vec{u}| = 2$, de manera que: $D_{\vec{\boldsymbol{u}}}(1,2) = \nabla f(1,2).\overrightarrow{\boldsymbol{u_0}} = (3,13).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2}$.

Ejemplo 15:

Calcule la derivada direccional de $f(x, y, z) = xsen(yz)$, en el punto $P(1,3,0)$ en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{\imath}} + 2\vec{\jmath} - \vec{\boldsymbol{k}}$

Solución:

El gradiente de la función f está dado por: $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla f}}(x, y, z) = (sen(xy), xzcos(yz), xycos(yz)$ y al evaluarlo en P obtenemos: $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla f}}(1,3,0) = (0,0,3)$.

Por otro lado, como $|\vec{\boldsymbol{u}}| = 6$, el vector unitario en la dirección de $\vec{\boldsymbol{u}}$ es: $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ por lo que la derivada direccional será:

$$D_{\vec{u}}f(1,3,0) = \vec{\nabla f}(1,3,0).\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (0,0,3).\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{6}}$$

<u>Teorema</u>: Si f es una función diferenciable existe la derivada direccional en cualquier dirección.

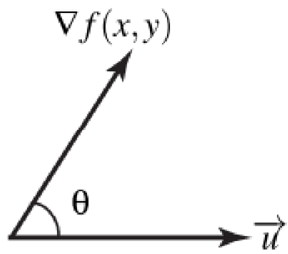
Dirección de máximo y mínimo cambio:

Suponga que tenemos un función f de dos o tres variables y consideramos todas las posibles derivadas direccionales de f en un punto P dado. Esto proporciona las tasas de cambio de f en todas las posibles direcciones. De modo que nos podemos plantear la siguiente pregunta: ¿En cuál de estas direcciones f cambia con mayor velocidad? Y, ¿cuál es la máxima razón de cambio?

<u>Teorema</u>:

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f$ en (x,y) es $|\vec{\nabla f}(x,y)|$y se presenta cuando el vector no nulo $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente $\vec{\nabla f}(x,y)$

Podemos justificar esto de la siguiente manera, primero recordemos la definición de producto escalar, si llamamos $\theta = (\widehat{\vec{u}\vec{v}})$, entonces: $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\theta)$. Ahora bien:



$D_{\vec{u}}f(x,y) = \vec{\nabla f}(x,y).\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = |\vec{\nabla f}(x,y)|.\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre el vector unitario $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ y el vector gradiente $\vec{\nabla f}(x,y)$.

De manera que el valor de $D_{\vec{u}}f(x,y)$ aumenta o disminuye sólo si cambia el valor del $\cos(\theta)$, de manera que el máximo valor se obtendrá cuando $\cos(\theta) = 1$ (es decir $\theta = 0$), es ese caso $\vec{u}$ y $\vec{\nabla f}(x,y)$ son paralelos.

El valor mínimo de la derivada direccional en (x,y) es $-|\vec{\nabla f}(x,y)|$ y ocurre cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que $-\vec{\nabla f}(x,y)$.

<u>Observación</u>: f se mantiene constante sobre las curvas de nivel; la dirección (un vector $\vec{u}$) en la que el cambio (instantáneo) de f respecto a P es nulo es la dirección de un vector perpendicular a $\vec{\nabla f}(P)$. Que la derivada direccional se anule en P en la dirección de $\vec{u}$ no significa que en esta dirección la función se mantenga constante (esto sólo pasa sobre las curvas de nivel) excepto que la curva de nivel sea una recta.

<u>Ejemplo 16</u>:

Suponga que la temperatura en un punto (x,y,z) en el espacio está dada por:

$T(x,y,z)=\frac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$ donde T está medida en grados centígrados y x,y y z están medidas en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápido la temperatura respecto del punto $(1,1,-2)$?¿Cuál es la máxima tasa de incremento?

Solución:

El gradiente de T es:

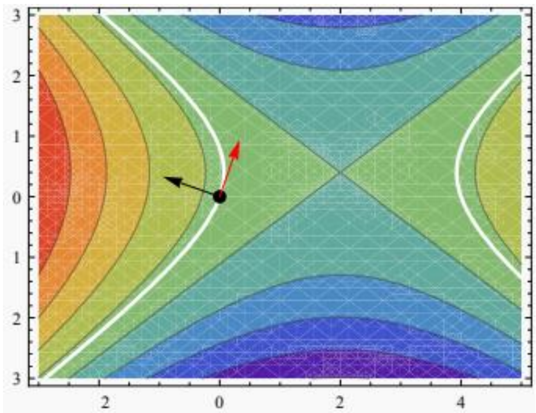
$$\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla T}}(x,y,z)=-\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}.\vec{\imath}-\frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}.\vec{\jmath}-\frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}.\vec{k}$$

Evaluado en el punto $P(1,1,-2)$ obtenemos: $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla T}}(1,1,-2)=\frac{5}{8}\left(-\vec{\boldsymbol{\imath}}-2\vec{\boldsymbol{\jmath}}+6\vec{\boldsymbol{k}}\right)$ por lo tanto la temperatura se incrementa con mayor rapidez en la dirección del vector gradiente $\vec{v}=-\vec{\boldsymbol{\imath}}-2\vec{\boldsymbol{\jmath}}+6\vec{\boldsymbol{k}}$.

La tasa máxima de incremento es la longitud del vector gradiente $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla T}}(1,1,-2)\right|=\frac{5}{8}\left|-\vec{\boldsymbol{\imath}}-2\vec{\boldsymbol{\jmath}}+6\vec{\boldsymbol{k}}\right|=\frac{5\sqrt{41}}{8}$

Ejemplo 17:

Considere la placa rectangular que se muestra en la figura. Si la temperatura en un punto (x,y) de la placa está dada por $T(x,y)=4(x-2)^2-7(y-0.4)^2$ determine la dirección en la que se debe mover un insecto que está en un punto $P(0,0)$, para que se caliente lo más rápidamente y ¿qué debe hacer el insecto si desea ir por un camino en el que la temperatura se mantenda constante?



Solución:

La dirección en la que la temperatura aumenta más rápidamente respecto a P es la dirección del gradiente (vector negro en la figura) $\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla T}}(x,y)=(8(x-2),-14(y-0.4))\Rightarrow\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla T}}(0,0)=(-16{,}5.6)$.

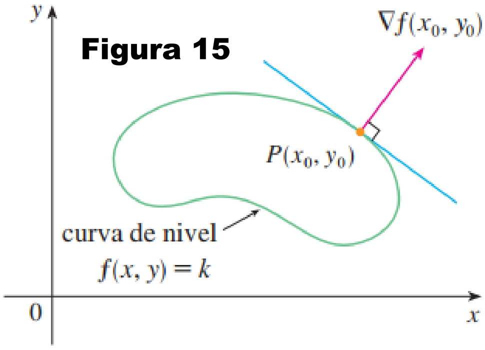
En cuanto a la otra pregunta, aunque la derivada direccional es nula en la dirección de un vector perpendicular al gradiente (vector rojo en la figura) esto sólo dice que la dirección de cambio instantáneo en esa dirección es cero. La trayectoria en la que la temperatura se mantiene constante es la curva de nivel $T(x,y)=T(0,0)$ (curvas blancas marcadas en la figura) y es por allí por donde debería caminar el insecto.

Importancia del vector gradiente:

Considere una función f de tres variables y un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en su dominio, sabemos que el vector gradiente $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0)$ indica la dirección del incremento más rápido de f. Además, también conocemos que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal a la superficie de nivel S de f que pasa por P. Estas dos propiedades son compatibles intuitivamente porque a medida que se aleja de P en la superficie de nivel S, el valor de f no cambia, así parece razonable que si nos movemos en dirección perpendicular se consigue el incremento máximo.

De manera similar se considera una función f de dos variables y un punto $P(x_0, y_0)$ en su dominio. Una vez más, el vector gradiente $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0)$ señala la dirección del incremento más rápido de f. Asimismo, mediante consideraciones similares al análisis de los planos tangentes, se puede demostrar que $\overrightarrow{\nabla f}(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por P. Otra vez es intuitivamente posible porque los valores de f siguen siento constantes a medida que se mueve a lo largo de la curva (**Figura 15**).

Figura 15



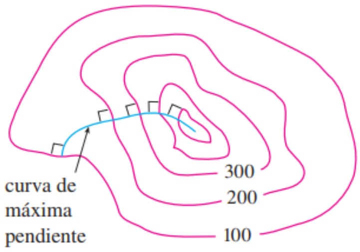


Figura 16

Si consideramos el mapa topográfico de una colina y representamos con $f(x, y)$ la altura por sobre el nivel del mar de un punto de coordenadas (x, y) entonces se puede dibujar una curva de máxima pendiente (como se muestra en la **figura 16**) haciéndola perpendicular a todas las curvas de nivel.

Los softwares específicos poseen comandos para representar muestras de vectores gradientes. Cada vector gradiente $\overrightarrow{\nabla f}(a, b)$ se grafica de tal manera que inicie en el punto (a, b). En la **figura 17** se muestra un ejemplo (que se denomina ***campo de vector gradiente***) para la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobrepuesta en un mapa de contorno de f. Como era de esperarse los vectores gradientes apuntan "pendiente arriba" y son perpendiculares a las curvas de nivel.

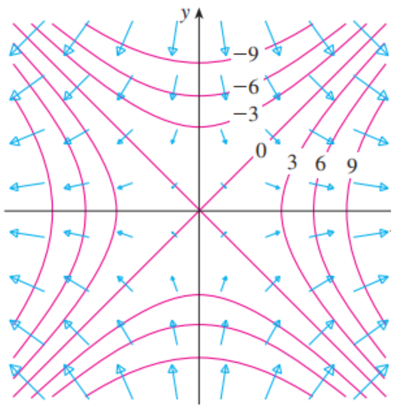


Figura 17

Resumen de las propiedades del gradiente:

Sea f una función diferenciable en el punto (a, b), se cumplen las siguientes propiedades:

- ✓ Si el vector gradiente de f en (a, b) es el vector nulo, entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es 0.
- ✓ La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\overrightarrow{\nabla f}(x, y)$ y el valor máximo de la derivada direccional es $\left|\overrightarrow{\nabla f}(a, b)\right|$.
- ✓ La dirección mínima de crecimiento de f viene dada por $-\overrightarrow{\nabla f}(x, y)$ y el valor mínimo de la derivada direccional es $-\left|\overrightarrow{\nabla f}(a, b)\right|$.
- ✓ El vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.

Bibliografía:

- Ernest F. Haeussler, Jr – Richard S. Paul. (2003) Matemática para Administración y Economía (10ma. ed.) México: Pearson. Prentice Hall.
- Stewart, James. (2008) Cálculo de una variable- Trascendentes Tempranas. (6ta. ed.) México: Cengage Learning.
- Thomas, George B, Jr. (2006). Cálculo una variable. (11ma. ed.) México: Pearson.
- Mora Flores, Walter (2012). Cálculo en Varias Variables. (1era. ed.) Escuela de matemática – Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Elena Álvarez Sáiz. Fundamentos Matemáticos I. Ingeniería de Telecomunicaciones. Dpto. de Matemática Aplicada y C. Computación. Universidad de Cantabria.