Funciones de Varias Variables:

1. La altura h de las olas en mar abierto depende de la rapidéz v del viento y cel tiempo t en que el viento ha estado soplando con esa rapidéz. Los valores de la función $h = f(v,t)$ se registran en pies en la tabla siguiente:

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

a. ¿Cuál es el valor de $f(40, 15)$?¿Qué significa?
b. ¿Cuál es el significado $h = f(30, t)$?. Describa el comportamiento de esta función.
c. ¿Cuál es el significado de $h = f(v, 30)$? Describa el comportamiento de esta función.

2. Sea $g(x, y) = \cos(x + 2y)$
   a. Evalúe $g(2, -1)$.
   b. Encuentre el dominio de g.
   c. Determine el conjunto imagen de g.

3. Sea $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$
   a. Evalúe $F(3,1)$.
   b. Determine y represente gráficamente el dominio de F.
   c. Halle el conjunto imagen de F.

4. Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$
   a. Evalúe $f(1,1,1)$.
   b. Determine y describa el dominio de f.

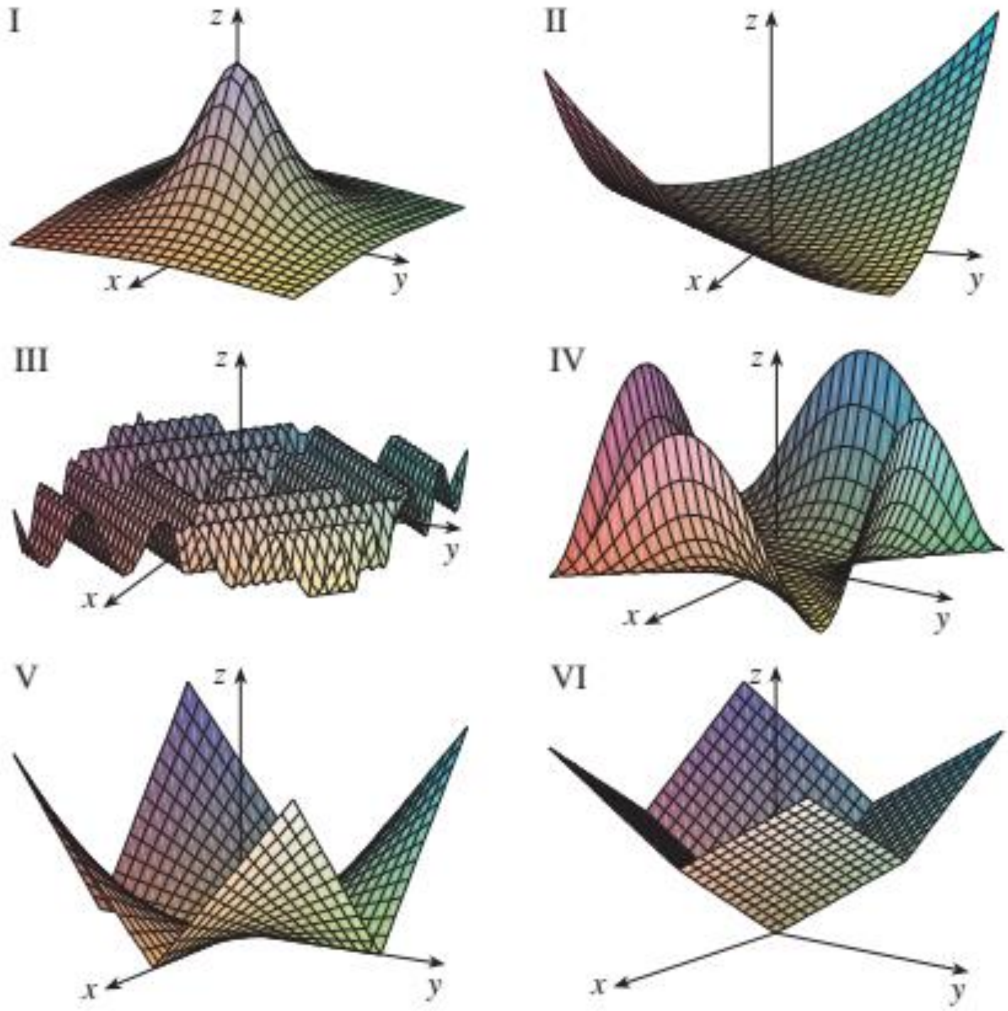
5. Sea $gx, y, z) = x^3 y^2 z\sqrt{10 - x - y - z}$
   a. Evalúe $g(1,2,3)$.
   b. Determine y describa el dominio de g.

6. Haga corresponder la función con su grafica (marcadas de I a IV). Dé las razones para su elección:

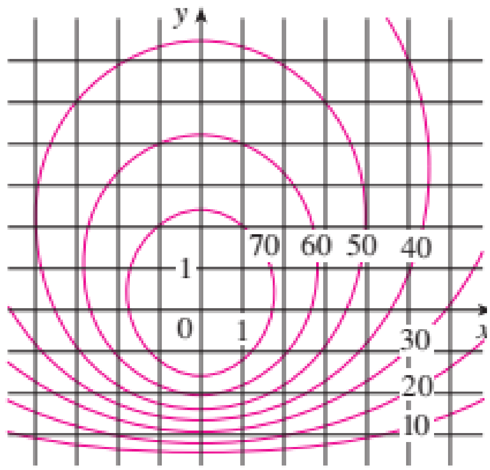
   a. $f(x, y) = |x| + |y|$
   b. $f(x, y) = |xy|$
   c. $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
   d. $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

e. $f(x,y) = (x-y)^2$

f. $f(x,y) = sen(|x| + |y|)$

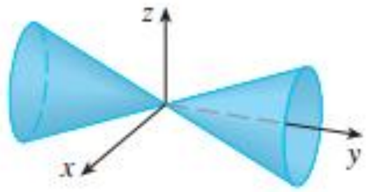


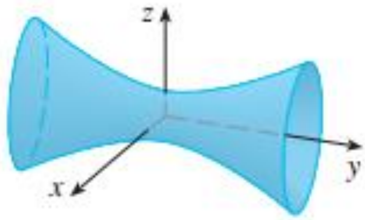
7. Se proporciona un mapa de contorno para la función f. Con el mismo estime los valores de $f(-3,3)$ Y $F(3,-2)$. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?

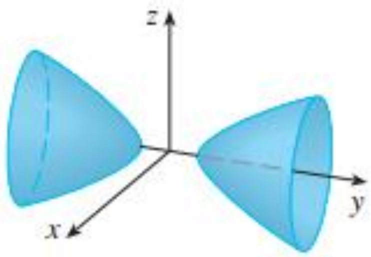


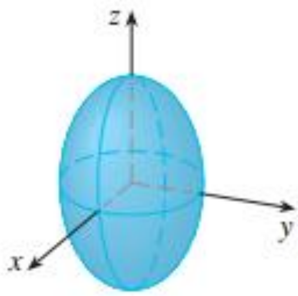
8. Relacione la ecuación con su gráfica (marcadas de I a VIII). Dé razones por para sus elecciones:

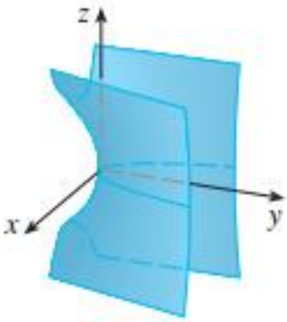
   a. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
   b. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$
   c. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
   d. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$
   e. $y = 2x^2 + z^2$
   f. $y^2 = x^2 + 2z^2$
   g. $x^2 + 2z^2 = 1$
   h. $y = x^2 - z^2$

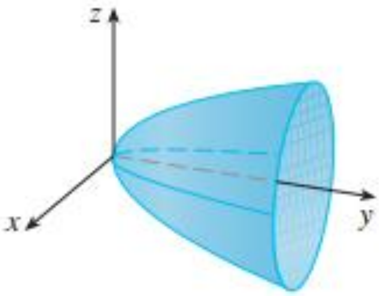
I


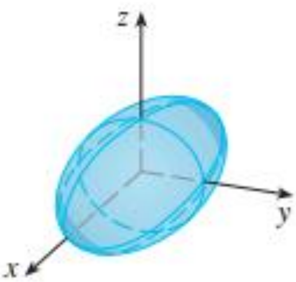
II


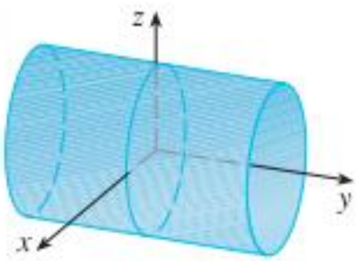
III


IV


V


VI


VII


VIII


9. Reduzca la ecuación a un de las formas estándar, clasifique la superficie y bosquéjela.
   a. $y^2 = x^2 + \frac{1}{9}z^2$
   b. $4x^2 - y + 2z^2 = 0$

c. $x^2 + 2y - 2z^2 = 0$
d. $y^2 = x^2 + 4z^2 + 4$
e. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$
f. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$
g. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$
h. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

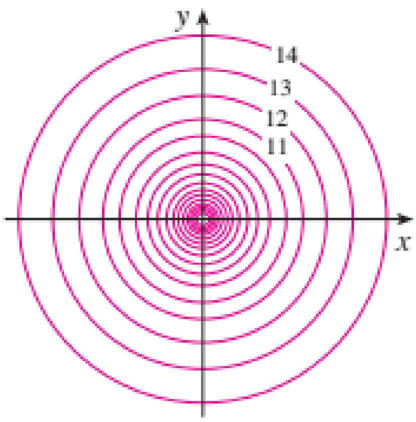
10. Utilice algún software de graficación para dibujar la superficie:

a. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$
b. $x^2 - y^2 - z = 0$
c. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$
d. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

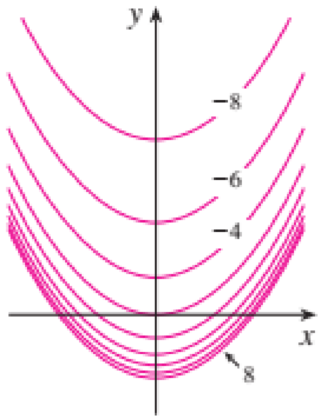
Curvas de Nivel:

11. Se muestra un mapa de contorno de una función. Apóyese en el para elaborar un esquema aproximado de la gráfica de f.

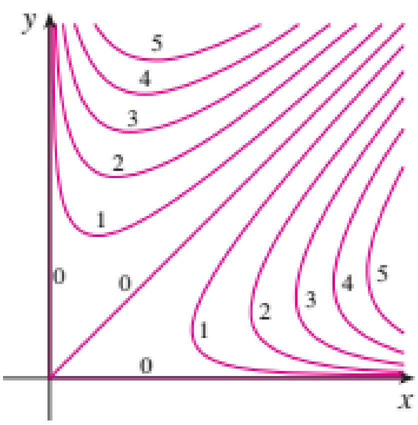
39.



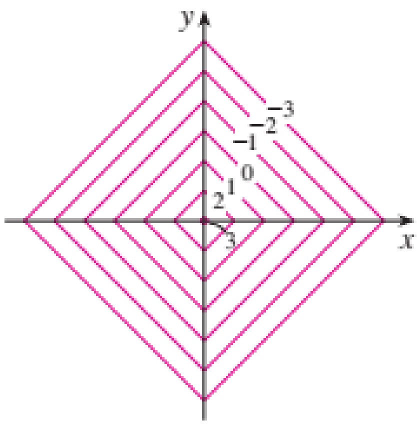
40.



41.



42.



12. Dibuje un mapa de contorno de la función mostrando varias curvas de nivel:

a. $f(x,y) = (y - 2x)^2$

b. $f(x,y) = x^3 - y$

c. $f(x,y) = \sqrt{x} + y$
d. $f(x,y) = ln(x^2 + 4y^2)$
e. $f(x,y) = ye^x$
f. $f(x,y) = ysec(x)$
g. $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$
h. $f(x,y) = y/(x^2 + y^2)$

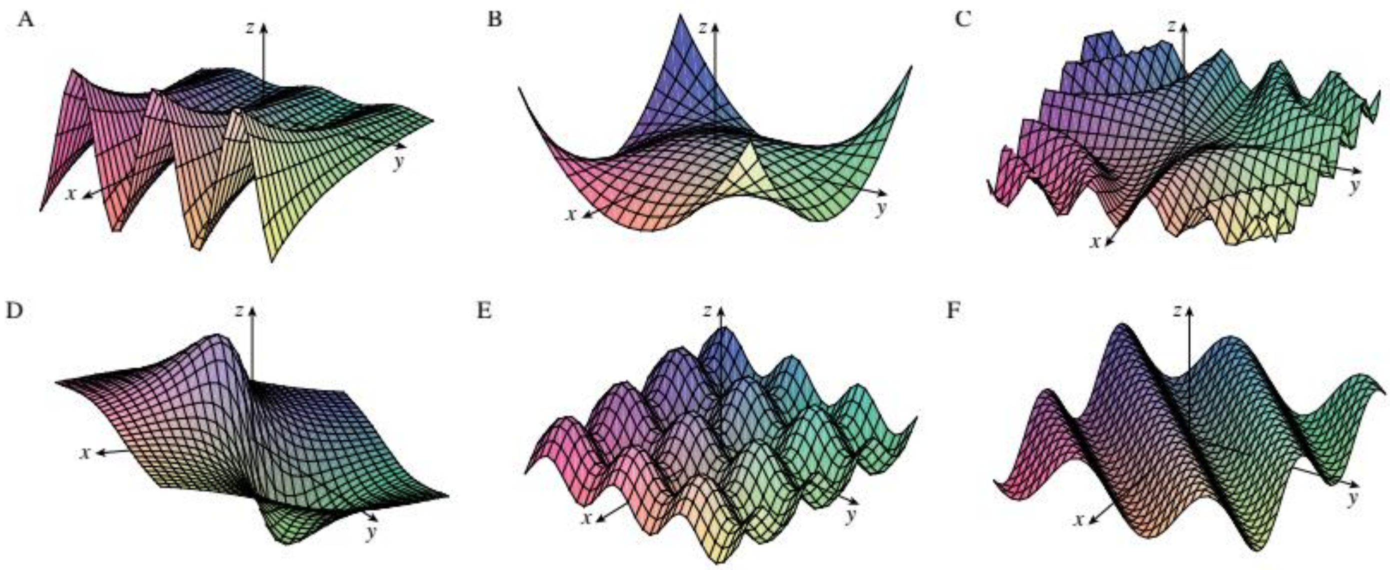
13. Una plancha delgada de metal, situada en el plano xy, está a una temperatura $T(x,y)$ en el punto (x,y). Las curvas de nivel de T se llamas *isotermas* porque la temperatura es igual en todos los puntos sobre la curva. Trace algunas isotermas si la función de temperatura está dad por $T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}$

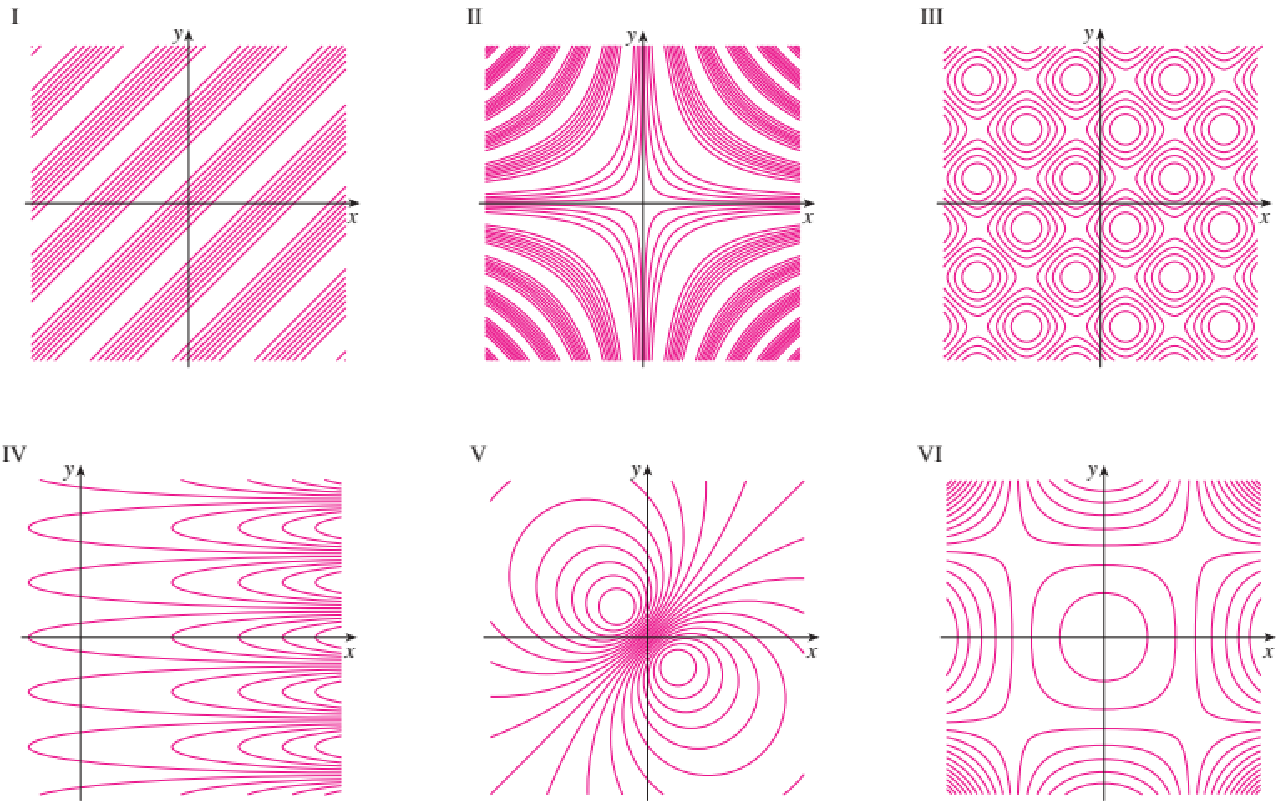
14. Si $V(x,y)$ es el potencial eléctrico en un punto (x,y) del plano xy, entonces las curvas de nivel de V se llaman *curvas equipotenciales*, porque en todos los puntos de dicha curva el potencial eléctrico es el mismo. Trace algunas curvas equipotenciales si $V(x,y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, donde c es una constante positiva.

15. Relacione la función y de razones por las cuales hizo la elección:

    i. con su gráfica (graficas marcadas con las letras A a F)
    ii. con su mapa de contorno (mapas marcados de I a VI)

a. $z = sen(xy)$
b. $z = e^x \cos(y)$
c. $z = sen(x - y)$
d. $z = sen(x) - sen(y)$
e. $z = (1 - x^2).(1 - y^2)$
f. $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$





16. Use trazas para bosquejar e identificar la superficie.

a. $x = y^2 + 4z^2$
b. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$
c. $x^2 = y^2 + 4z^2$
d. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$
e. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$
f. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$
g. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$
h. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$
i. $y = z^2 - x^2$
j. $x = y^2 - z^2$

Derivadas Parciales:

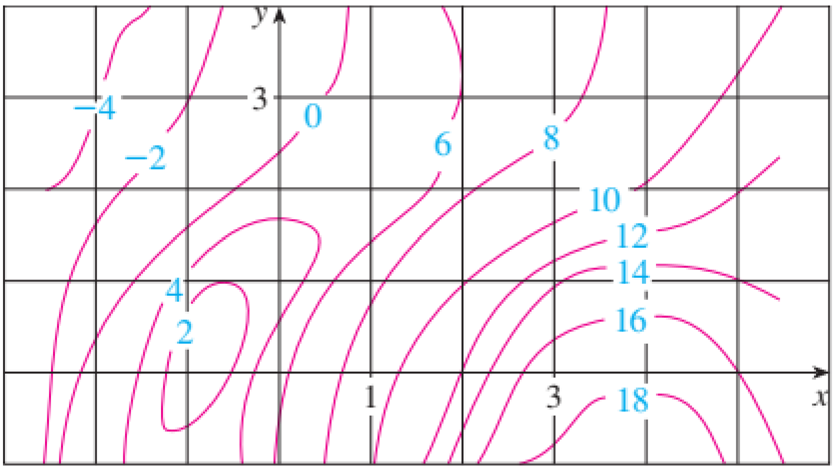
17. La altura h de una ola en mar abierto depende de la rapidez v del viento y de la cantidad de tiempo t que el viento ha estado soplando a esa rapidez. En la siguiente tabla se registraron valores de la función $h = f(v,t)$ en pies.
   a. ¿Cuáles son los significados de las derivadas parciales $\partial h/\partial v$ y $\partial h/\partial t$?
   b. Estime los valores de $f_v(40{,}15)$ y $f_t(40{,}15)$? ¡Cuáles son las interpretaciones prácticas de estos valores?
   c. ¿Cuál parece ser el valor límite siguiente?

$$\lim_{h \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

18. Se presenta un mapa de contorno de una función f. Utilícela para estimar $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$.



19. Si $f(x,y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$ e interprete estos números como pendientes. Ilustre con gráficas elaboradas mediante una computadora.

20. Calcule las primeras derivadas parciales de la función:

a. $f(x,y) = x^4y^3 + 8x^2y$
b. $f(x,t) = \sqrt{x}.\ln(t)$
c. $z = (2x + 3y1)^{10}$
d. $z = \tan(x.y)$
e. $f(x.y) = \frac{x}{y}$
f. $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$
g. $w = \frac{e^v}{u+v^2}$
h. $u(r,\theta) = sen(r.\cos(\theta))$
i. $R(p.q) = tan^{-1}(p.q^2)$
j. $f(x,y) = x^y$
k. $f(x,y) = \int_y^x \cos(e^t)\,dt$
l. $f(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3+1}\,dt$
m. $f(x,y,z) = xz - 5x^2y^3z^4$
n. $f(x,y,z) = x.sen(y-z)$
o. $w = \ln(x + 2y + 3z)$
p. $w = z.e^{x.y.z}$
q. $u = xy.sen^{-1}(y.z)$
r. $u = x^{y/z}$

21. Determine las derivadas parciales indicadas:

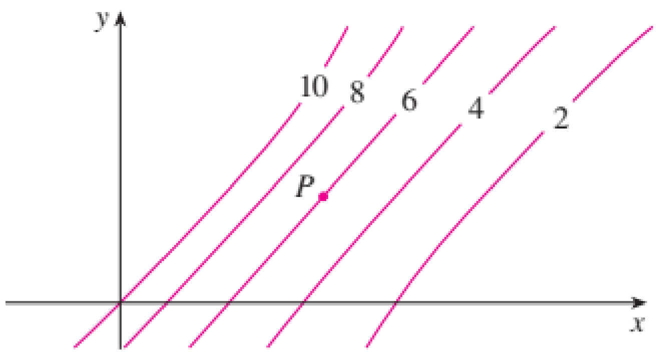
a. $f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; $\quad f_x(3,4)$
b. $f(x,y) = arctan(y/x)$; $\quad f_x(2,3)$
c. $f(x,y,z) = \frac{y}{x+y+z}$; $\quad f_y(2,1,-1)$
d. $f(x,y,z) = \sqrt{sen^2x + sen^2y + sen^2z}$; $\quad f_z(0,0,\pi/4)$

22. Con la tabla de valores de $f(x,y)$ estime los valores de $f_x(3,2)$, $f_x(3,2.2)$ y $f_{xy}(3,2)$

x \ y	1.8	2.0	2.2
2.5	12.5	10.2	9.3
3.0	18.1	17.5	15.9
3.5	20.0	22.4	26.1

23. Se muestran las curvas de nivel para una función f. Determine si las siguientes derivadas parciales son positivas o negativas en el punto P.

a. f_x
b. f_y
c. f_{xx}
d. f_{xy}
e. f_{yy}



24. La temperatura en un punto (x,y) en una plancha de metal plana, está dada por $T(x,y) = 60/(1+x^2+y^2)$, donde T se mide en $°C$ y x e y en metros. Calcule la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia en el punto $(2,1)$ en la dirección:
   a. del eje x.
   b. del eje y.

25. Le dicen que hay una función f cuyas derivadas parciales son $f_x(x,y) = x + 4y$ y $f_y(x,y) = 3x - y$. ¿Es eso posible? ¿Debe creerlo?

Aproximación lineal y cuadrática de funciones de dos variables:

26. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

a. $z = 3y^2 - 2x^2 + x,\ (2, -1, -3)$
b. $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7, (2, -2, 12)$
c. $z = \sqrt{x.y}, (1, 1, 1)$
d. $z = xe^{xy}, (2, 0, 2)$
e. $z = x.sen(x+y), (-1, 1, 0)$
f. $z = ln(x - 2y), (3, 1, 0)$

27. Justifique la diferenciabilidad de la función en el punto dado. Luego determine la linealización $L(x, y)$ de la función en ese punto:

a. $f(x, y) = 1 + x.\ln(xy - 5), (2, 3)$
b. $f(x, y) = x^3y^4, (1,1)$
c. $f(x, y) = \frac{x}{x+y}, (2,1)$
d. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, (3,0)$

28. Verifique la aproximación lineal en $(0, 0)$:

a. $\frac{2x+3}{4y+1} \approx 3 + 2x - 12y$
b. $\sqrt{y + cos^2x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

29. Dado que f es una función diferenciable en $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$ y $f_y(2,5) = -1$, utilice una aproximación lineal para estimar $f(2.2, 4.9)$.

30. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = 1 - x.y.cos(\pi.y)$ en $(1, 1)$ y utilícela para aproximar $f(1.02, 0.97)$. Grafique f y su plano tangente.

31. Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $(3, 2, 6)$ y con ella aproxime el número $\sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$.

32. La altura h de una ola en el mar abierto, depende de la rapidéz v del viento y del tiempo t en que ha estado soplando el aire a esa rapidez. Los valores de la función $h = f(v, t)$ se registran en la tabla siguiente. Con ayuda de la tabla determine una aproximación lineal a la función de la altura de la ola cuando v está cerca de 40 nudos y t es casi de 20 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 24 horas a 43 nudos.

Duración (horas)

Velocidad del viento (nudos)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Gradiente. Aplicaciones:

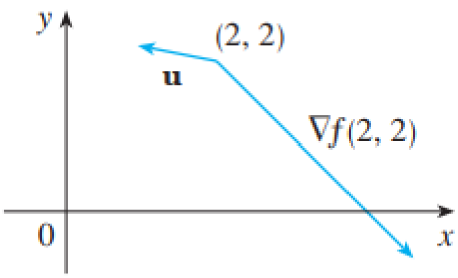
33. En cada uno de los siguientes ejercicios:
    i. Calcule el gradiente de f.
    ii. Evalúe el gradiente en el punto P.
    iii. Encuentre la razón de cambio de f en P en la dirección del vector $\vec{u}$.

    a. $f(x,y) = sen\,(2x+3y), P(-6,4), \vec{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{\imath} - \vec{\jmath})$
    b. $f(x,y) = y^2/x\,, P(1,2), \vec{u} = \frac{1}{3}(2\vec{\imath} + \sqrt{5}\vec{\jmath})$
    c. $f(x,y,z) = x^2yz - xyz^3, P(2,-1,1), \vec{u} = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$
    d. $f(x,y,z) = y^2e^{xyz}, P(0,1,-1), \vec{u} = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)$

34. Calcule la derivada direccional de la función en el punto dado en la dirección del vector $\vec{v}$.

    a. $f(x,y) = e^x.sen(y), \quad (0,\pi/3), \quad \vec{v} = (-6,8)$
    b. $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (1,2), \quad \vec{v} = (3,5)$
    c. $g(p,q) = p^4 - p^2q^3, \quad (2,1), \quad \vec{v} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$
    d. $g(r,s) = \arctan\,(r.s), \quad (1,2), \quad \vec{v} = 5\vec{\imath} + 10\vec{\jmath}$
    e. $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0,0,0), \quad \vec{v} = (5,1,-2)$
    f. $f(x,y,z) = \sqrt{x.y.z}, \quad (3,2,6), \quad \vec{v} = (-1,-2,2)$
    g. $h(r,s,t) = \ln(3r+6s+9t), \quad (1,1,1), \quad \vec{v} = 4\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 6\vec{k}$

35. Utilice la figura para estimar el valor de $D_uf(2,2)$.



36. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = \sqrt{x.y}$ en $P(2,8)$ en la dirección de $Q(5,4)$.

37. Encuentre la derivada direccional de $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ en $P(1,-1,3)$ en la dirección de $Q(2,4,5)$.

38. Determine la máxima razón de cambio de f en el punto dado y la dirección en la cual se presenta.

    a. $f(x,y) = 4y\sqrt{x}, \quad (4,1)$
    b. $f(s,t) = t.e^{s.t}, \quad (0,2)$
    c. $f(x,y) = sen(x.y), \quad (1,0)$
    d. $f(x,y,z) = \frac{(x+y)}{z}, \quad (1,1,-1)$
    e. $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad (3,6,-2)$

39. Encuentre las direcciones en las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = y.e^{-xy}$ en el punto de coordenadas $(0,2)$ vale 1.

40. Encuentre todos los puntos en los cuales la dirección del cambio más rápido de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ es $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

41. En las cercanías de una boya, la profundidad de un lago en el punto de coordenadas (x,y) es $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, donde x, y y z se miden en metros. Un pescador en un bote pequeño parte del punto $(80,60)$ y se dirige hacia la boya, la cual se ubica en $(0,0)$. ¿El agua bajo el bote se hace más superficial o más profunda cuando el pescador parte? Explique.

42. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $(1,2,2)$ es 120°:

    a. Determine la razón de cambio de T en $(1,2,2)$ en la dirección hacia el punto $(1,2,3)$.
    b. Demuestre que en cualquier punto sobre la bola la dirección de incremento más grande de temperatura está dado por un vector que apunta hacia el origen.

43. La temperatura en un punto (x,y,z) está dada por

$$T(x,y,z) = 200.e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

donde T se mide en °C y x, y, z en metros.

a. Determine la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(2,-1,2)$ en la dirección hacia el punto $(3,-3,3)$.
b. ¿En qué dirección la temperatura se incrementa más rápido en P?
c. Encuentre la razón máxima de incremento de P.

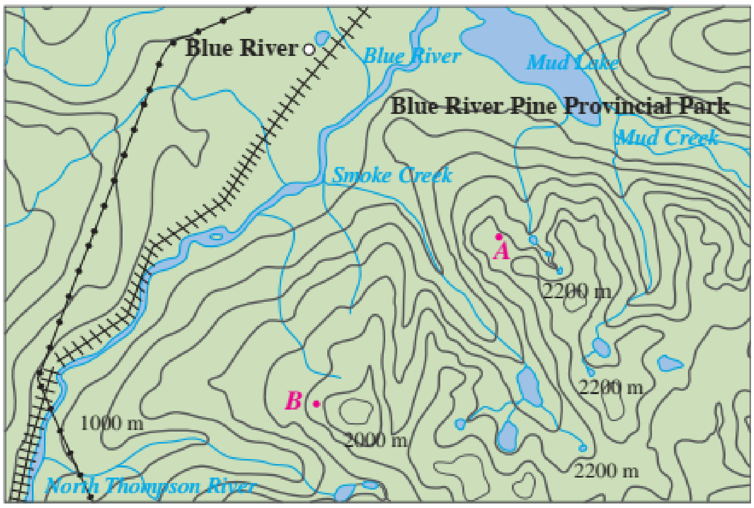
44. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está dado por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

    a. Determine la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}$.
    b. ¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?.
    c. ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

45. Suponga que escala una montaña cuya forma la da la ecuación $z = 1000 - 0.005 - 0.01y^2$, donde x, y, z se miden en metros, y usted está parado en un punto cuyas coordenadas son $(60, 40, 966)$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el semieje positivo de las y apunta hacia el norte.
    a. Si camina directo hacia el sur, ¿empezará a ascender o a descender? ¿Con qué rapidez?
    b. Si camina hacia el noroeste, ¿empezará a ascender o a descender? ¿Con qué rapidez?
    c. ¿En qué dirección es la máxima pendiente? ¿Cuál es la razón de cambio en esa dirección? ¿En qué ángulo por arriba de la horizontal la trayectoria inicia en esa dirección?

46. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1,3), B(3,3), C(1,7)$ y $D(6,15)$. La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$.

47. Se muestra un mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park en British Columbia. Dibuje curvas de mayor descenso a partir del punto A (descendiendo a Mud Lake) y desde el punto B.



48. Sea $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ la ecuación de una superficie S.

a. Calcule la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{\boldsymbol{u}} = (-2, 1)$ en el punto $Q(1, 1, 2)$.
b. Determine el punto $P(x_P, y_P, z_P) \in S$ para el cual la derivada direccional de f en P es $\sqrt{2}$ en dirección de $\vec{\boldsymbol{u}} = (-2, 1)$ y $\sqrt{5}$ en la dirección de $\vec{\boldsymbol{v}} = (1, 1)$.
c. Encuentre la ecuación cartesiana del plano tangente a S en el punto $R(1, -1, 2) \in S$.
d. Determine un vector $\vec{\boldsymbol{r}}$ para el cual la derivada direccional en $R(1, -1, 2) \in S$ es máxima y calcule su valor.

Bibliografía:

- Stewart, James. (2008) Cálculo de una variable- Trascendentes Tempranas. (6ta. ed.) México: Cengage Learning.
- Thomas, George B, Jr. (2006). Cálculo una variable. (11ma. ed.) México: Pearson.
- Mora Flores, Walter (2012). Cálculo en Varias Variables. (1era. ed.) Escuela de matemática – Instituto Tecnológico de Costa Rica.