Cálculo de Primitivas Elementales:

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$ encuentre una primitiva suya, $F(x)$ tal que $F(0) = 4$.

2. Determina una primitiva de la función $f(x) = 3x - 2$ que pase por el punto de coordenadas $(1,0)$.

3. La velocidad de un móvil viene dada por $v(t) = t^2 + 4t + 2$ y en el instante inicial $t = 0$ el automóvil ha recorrido 0 metros.
   a. Encuentre la función espacio.
   b. ¿Qué espacio ha recorrido el móvil entre $t = 1seg.$ y $t = 3seg.$?

4. La aceleración de un móvil en caída libre, debida a la gravedad, es constante y aproximadamente $9{,}8\frac{m}{seg^2}$.
   a. Halle la velocidad de un objeto que dejamos caer libremente desde una cierta altura y con velocidad inicial nula.
   b. Halle la función velocidad si la velocidad inicial fuese de $2\ \frac{m}{seg.}$

5. Si un objeto en caída libre tiene una velocidad inicial v_0, al cabo de t segundos, la velocidad del objeto viene dada por $v = 4{,}9t + v_0$
   a. Halle la función espacio recorrido, ¿es única?
   b. ¿Y si en el instante inicial el móvil se encuentra a una altura de h metros?

6. Calcule las siguientes primitivas:

a. $\int (x^3 - 4x + 2)\ dx$
b. $\int (x-1)^3\ dx$
c. $\int \sqrt[3]{x}\ dx$
d. $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}\ dx$
e. $\int (x-1)(x^2 + x + 1)\ dx$
f. $\int (x^2 + 4x)(x^2 - 1)\ dx$
g. $\int (sen(x) + e^x)\ dx$
h. $\int (\cos(x) - 5e^x)\ dx$
i. $\int (e^x + 3e^{-x})\ dx$
j. $\int \frac{1}{2x+7}\ dx$
k. $\int \frac{2}{1+4x^2}\ dx$
l. $\int (2^x - x^2)\ dx$
m. $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\ dx$
n. $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$
o. $\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\ dx$
p. $\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\ dx$
q. $\int \frac{2x}{1+x^4}\ dx$
r. $\int sen(2-3x)dx$
s. $\int \frac{-3x}{2-6x^2}\ dx$
t. $\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\ dx$

7. Encuentra una primitiva utilizando el método de sustitución:

a. $\int \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\ dx$
b. $\int sen(x)cos^4(x)dx$
c. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}$
d. $\int tg(x)dx$
e. $\int e^{-2x+3}\ dx$
f. $\int xe^{x^2}dx$
g. $\int xsen(x^2+4)\ dx$

h. $\int \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx$
i. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
j. $\int \frac{dx}{1+4x^2}$
k. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^4}}$
l. $\int \frac{dx}{cos^2(3x)}$
m. $\int \frac{1+\cos(x)}{x+sen(x)}dx$
n. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$
o. $\int 5xe^{3x^2+3}\,dx$

8. Encuentra una primitiva utilizando el método de integración de partes o sustitución según le parezca conveniente:

a. $\int xsen(x)dx$
b. $\int x^2\cos(x)\,dx$
c. $\int x^3e^x\,dx$
d. $\int e^x\cos(x)\,dx$
e. $\int \ln(x)\,dx$
f. $\int xln(x)dx$
g. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,dx$
h. $\int x^3\sqrt[3]{x+12}\,dx$
i. $\int x(2x^2-7)^{99}dx$
j. $\int \frac{dx}{(3x+1)^5}$
k. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+12}}\,dx$
l. $\int \cos(5x)\,dx$
m. $\int sen(2x)\cos(2x)\,dx$
n. $\int e^{sen(x)}\cos(x)\,dx$
o. $\int e^{-5x}\,dx$
p. $\int tgx^2sec^2x\,dx$
q. $\int \frac{e^{-2x}e^{2x}}{2}\,dx$
r. $\int \frac{x^2-4}{x-3}dx$
s. $\int (2^x+x^2)dx$
t. $\int x^2senx^3dx$
u. $\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx$
v. $\int (x^2+2x-1)e^{2x}dx$
w. $\int 4xsec^2(2x)dx$

9. Encuentre una primitiva para las siguientes funciones utilizando sustitución e integración por partes:

a. $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx$
b. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

10. Calcula la ecuación de la curva que pasa por el punto de coordenadas $(1,5)$ y cuya pendiente (en cualquier punto) es $3x^2+5x-2$.

11. Halla la primitiva de la función $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$ que se anula para $x=2$.

12. Halla la función que toma el valor 10 para $x=2$ y cuya pendiente está dada por la función $y=x^2-4x+25$.

Suma de Riemann:

13. Estime el área bajo la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ desde $x=0$ y hasta $x=4$ usando 4 rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Trace la gráfica y los rectángulos ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación? Repita el proceso utilizando los puntos extremos de la izquierda.

14. Estime el área bajo la gráfica de $f(x)=1+x^2$ de $x=-1$ y hasta $x=2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Después

mejore su estimación utilizando 6 rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación. Repita el proceso utilizando los puntos extremos de la izquierda. Luego utilizando los puntos medios. En base a sus respuestas; ¿cuál le parece ser la mejor estimación?

15. Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

a. $lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5+\frac{2i}{n}\right)^{10}$

b. $lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} tan\left(\frac{i\pi}{4n}\right)$

16. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x, 2 \leq x \leq 14$ con 6 subintervalos, tomando los puntos extremos de la izquierda como puntos muestras. Con la ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

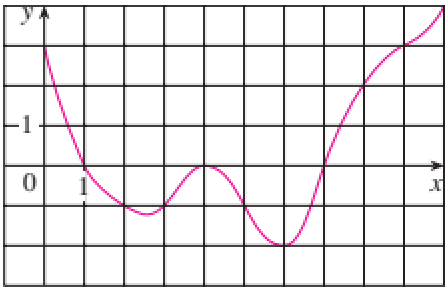
17. Si $f(x) = x^2 - 2x, 0 \leq x \leq 3,$ evalúe la suma de Riemann con $n = 6$ tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann?

18. Si $f(x) = e^x - 2, 0 \leq x \leq 2,$ encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta 6 cifras decimales, tomando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann?

19. Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = sen(x), 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$, con 6 términos, tomando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (de su respuesta con una aproximación de seis cifras decimales)

20. Se muestra la gráfica de una función. Estime la suma de Riemann desde $x = 0$ a $x = 10$ usando 5 subintervalos con:

a. Los puntos extremos de la derecha.
b. Los puntos extremos de la izquierda.
c. Los puntos medios.



21. Se presenta una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hacer estimaciones inferiores y superiores para la suma de Riemann desde $x = 10$ y hasta $x = 30$.

x	10	14	18	22	26	30
$f(x)$	−12	−6	−2	1	3	8

Integral Definida:

22. Exprese cada uno de los siguientes límites como una integral definida sobre el intervalo dado:

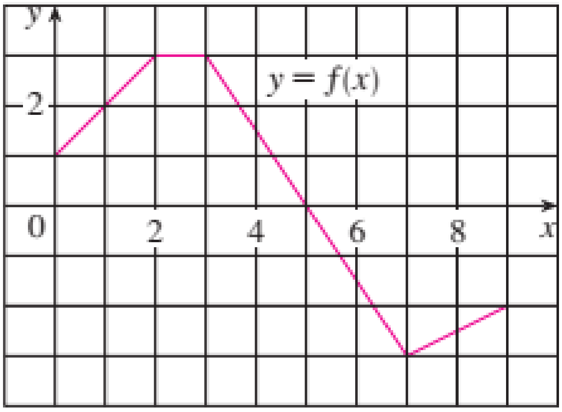
a. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1+x_i^2)\,\Delta_x,\ [2,6]$

b. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{cosx_i}{x_i}\Delta_x,\ [\pi, 2\pi]$

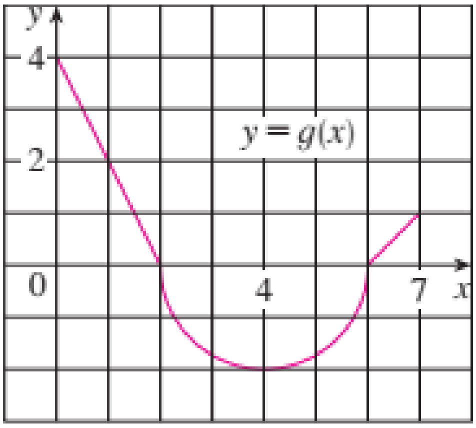
c. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\Delta_x,\ [2,7]$

d. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{(x_i^*)^2+4}\Delta_x,\ [1,3]$

23. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de áreas:



a. $\int_0^2 f(x)dx =$
b. $\int_0^5 f(x)dx =$
c. $\int_5^7 f(x)dx =$
d. $\int_0^9 f(x)dx =$



24. La gráfica de g consiste en dos rectas y una semicircunferencia, tal cómo se muestra en la figura. Úsela para evaluar cada una de las siguientes integrales:

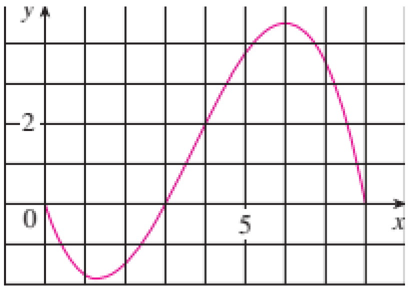
a. $\int_0^2 g(x)dx$
b. $\int_2^6 g(x)dx$
c. $\int_0^7 g(x)dx$

25. Evalúe cada una de las siguientes integrales interpretándola en términos de área:

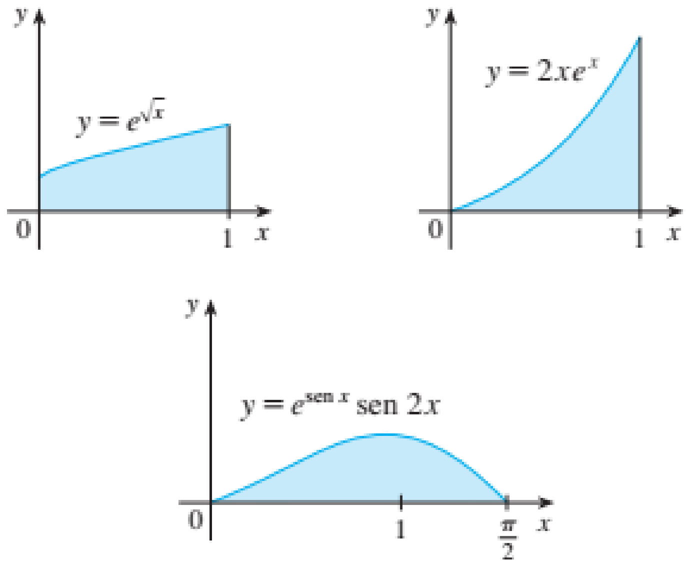
a. $\int_{-1}^{2} (1-x)dx =$
b. $\int_0^9 \left(\frac{1}{3}x - 2\right)dx =$
c. $\int_{-3}^{0} \left(1-\sqrt{9-x^2}\right)dx =$
d. $\int_{-5}^{5} \left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx =$
e. $\int_{-1}^{2} |x|dx =$
f. $\int_0^{10} |x-5|dx =$

26. Para la función f, cuya gráfica se muestra, enlista las siguientes cantidades en orden creciente, de menor a mayor, y explique su razonamiento.

a. $\int_0^8 f(x)dx$
b. $\int_0^3 f(x)dx$
c. $\int_3^8 f(x)dx$
d. $\int_4^8 f(x)dx$
e. $f'(1)$

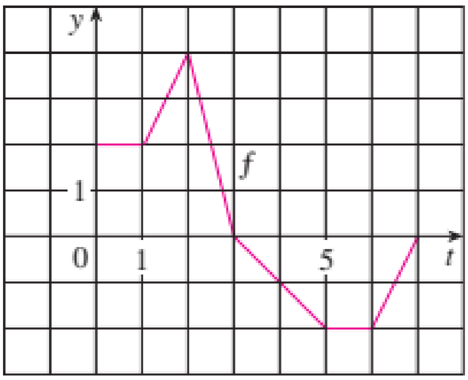


27. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?

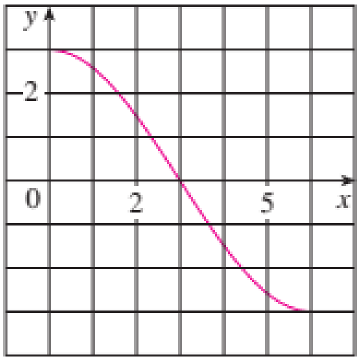


Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

28. Sea $g(x) = \int_0^x f(x)dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:



a. Evalúe $g(0), g(2), g(3) y\ g(6)$
b. ¿Sobre qué intervalos es g creciente?
c. ¿En qué valor del dominio g presenta un valor máximo?
d. Trace una gráfica aproximada de g



29. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:

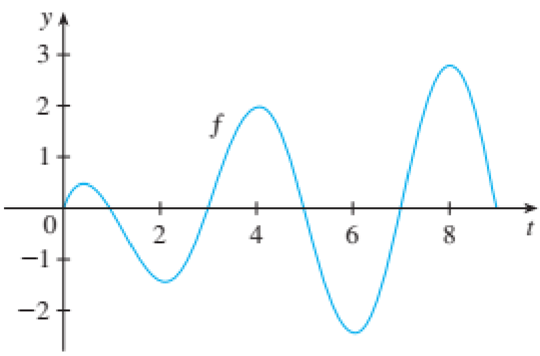
a. Evalúe $g(0)$ y $g(6)$.
b. Estime $g(x)$, para $x = 1, 2, 3, 4,$ y 5.
c. ¿Sobre qué intervalo es g creciente?
d. ¿Dónde g tiene un valor máximo?
e. Trace la gráfica aproximada de g.
f. Utilice la gráfica del inciso e. para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.

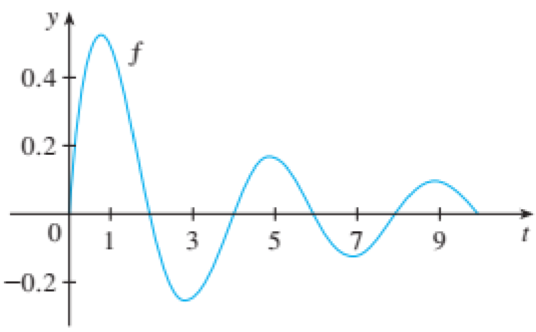
30. Ese la parte I del Teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1} dt$
b. $g(x) = \int_3^x e^{t^2-t} dt$
c. $g(s) = \int_5^x (t - t^2)^8 dt$
d. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2+4}\, dx$
e. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + sect}\, dt$
f. $G(x) = \int_x^1 cos\sqrt{t} dt$
g. $h(x) = \int_1^{e^x} lnt\, dt$
h. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$
i. $y = \int_0^{tanx} \sqrt{t + \sqrt{t}} dt$
j. $y = \int_0^{x^4} cos^2\theta\, d\theta$
k. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1+u^2} du$
l. $y = \int_{senx}^{1} \sqrt{1+t^2} dt$

31. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra en cada una de las siguientes gráficas:

a. ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?
b. ¿Dónde alcanza g su máximo absoluto?
c. ¿Sobre qué intervalos es cóncava hacia abajo g?
d. Trace la gráfica de g.

i.


ii.


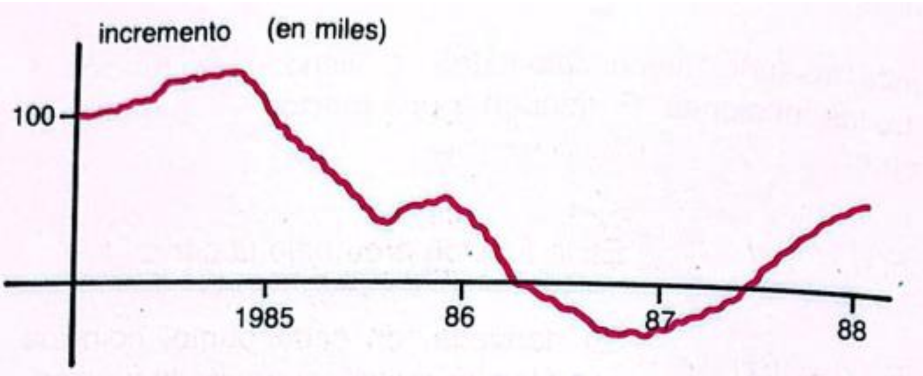
32. El caudal de agua recogido en una piscina es constante e igual a 3l/seg. (litros por segundo) ¿Qué volumen habrá en esta al cabo de un minuto? ¿Y al cabo de 2 minutos?. Dibuja la gráfica de la función caudal y la de la función volumen.

33. La velocidad en m/seg de un móvil varía según la ecuación $v(t) = 0{,}5t.$ Dibuja la gráfica de la función velocidad entre $t = 0$ y $t = 8$ segundos. ¿Qué espacio ha recorrido el móvil a los 8 segundos? ¿Y a los 3 segundos? Calcula la expresión de la función espacio recorrido y dibuja su gráfica.

34. El caudadl de agua que se vacía de un depósito de 200l es variable y viene dado por la ecuación $C(t) = 5 - 0{,}1t$ donde (t de mide en minutos y C se mide en litros por minuto)

    a. Dibuja la gráfica del caudal.
    b. Calcula el área bajo la curva en los intervalos $(0, 100), (0{,}200)$ y $(100{,}200)$. Interpreta estos valores.
    c. Grafica la función que determina el volumen de agua en el depósito.

35. Estudia la evolución de la población de un cierto país en función del tiempo sabiendo que, a principios de 1985 había 10 millones de habitantes y que la curva muestra el incremento mensual del número de habitantes. ¿Cuántos habitantes tenía el país a comienzos de 1987?



36. Evalúe cada una de las siguientes integrales definidas:

a. $\int_0^1 cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt$

b. $\int_0^1 (3t-1)^{50} dt$

c. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}dx$

d. $\int_0^3 \frac{dx}{5x+1}$

e. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

f. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

g. $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x)dx$

h. $\int_{-1}^1 x^{100} dx$

i. $\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)dt$

j. $\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

k. $\int_1^9 \sqrt{x}\, dx$

l. $\int_1^8 x^{-2/3}\, dx$

m. $\int_{\pi/6}^{\pi} sen\theta\, d\theta$

n. $\int_0^4 (4-t)\sqrt{t}dt$

o. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

p. $\int_0^2 (y-1)(2y+1)dy$

q. $\int_1^2 (1+2y)^2 dy$

r. $\int_0^3 (2senx - e^x)dx$

s. $\int_1^2 \frac{v^3+3v^6}{v^4} dv$

t. $\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}dz$

u. $\int_0^1 (x^e + e^x)dx$

v. $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3} du$

w. $\int_0^\pi f(x)dx$ donde $f(x) = \begin{cases} sen(x) & si\ \ 0 \leq x < {}^{\pi}/_{2} \\ \cos(x) & si\ \ {}^{\pi}/_{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

Funciones Integrables:

Aplicaciones de la Integral Definida:

37. Halle el área que queda limitada por las curvas $y = x^3 + 2x^2 - x + 3$ y $y = x^3 + x + 3$ entra $x = 2$ y $x = -2$.

38. Determine el área comprendida entre $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$ para todo $x \epsilon [0,6]$.

39. Halla el valor del área limitada por las parábolas $y = x^2 - 4x$ e $y = 6x - x^2$.

40. Calcula el área limitada por $y = x^3 + x^2$ e $y = x^3 + 3x + 4$ y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 6$.

41. ¿Cuál es el área limitada por la curva $y = xe^{-x^2}$ cuando la absisa varía entre $x = 0$ y la absisa para que la función alcanza su punto máximo?.

42. Halla el valor del área limitada por $y = tg(x)$ cuando $x \epsilon \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

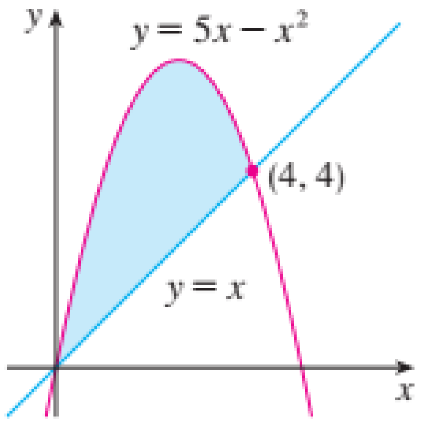
43. Calcula el área limitada por $y = sen(2x)$ y el eje x cuando $0 \leq x \leq \pi$.

44. Halla el área limitada por $y = x^2 - 4$ e $y = -2x^2 + 8$.

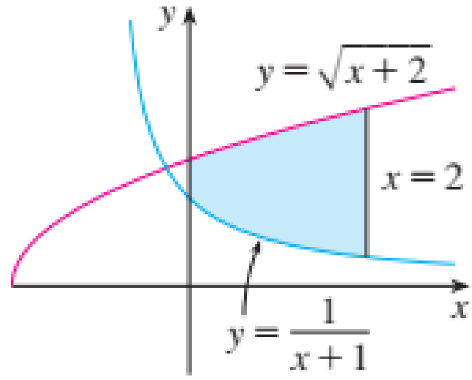
Área bajo una curva:

45. Determine el área de cada una de las regiones sombreadas:

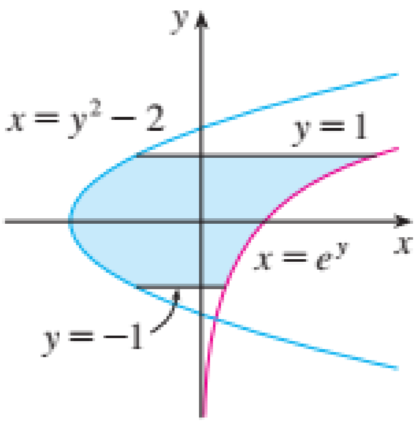
1.



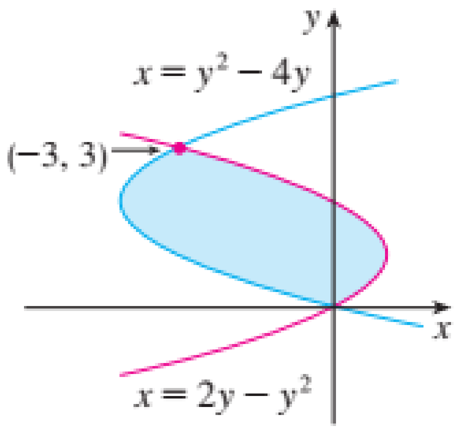
2.



3.



4.

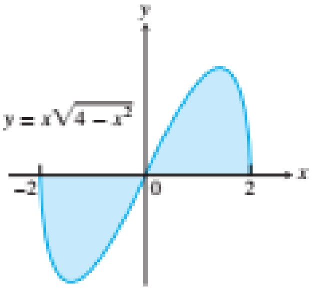


46. Trace cada una de las regiones comprendidas entre las siguientes curvas y encuentre el valor del área comprendida entre ellas.

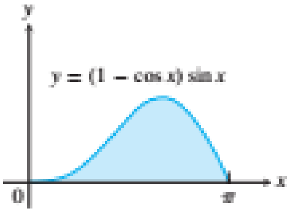
a. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$
b. $y = e^x, \quad y = xe^x, \quad x = 0$
c. $y = \cos(x), \quad y = 2 - \cos(x), \quad 0 \le x \le 2\pi$
d. $x = 2y^2, \; x = 4 - y^2$
e. $y = \sqrt{x-1}, \quad x - y = 1$
f. $y = \cos(\pi x), \quad y = \sqrt{2-x}, \quad y = 0$
g. $y = \cos(x), \quad y = 1 - \cos(x), \quad 0 \le x \le \pi$
h. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$
i. $y = {}^{1}/_{x}, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$
j. $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = 2x^2, \quad x + y = 3, \quad x \ge 0$

47. Encuentre el área total sombreada en cada uno de los ejercicios del 47 al 60.

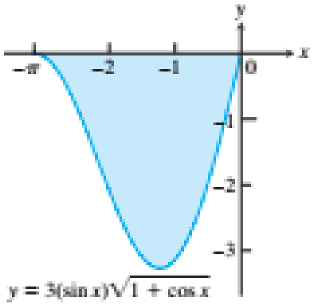
47.



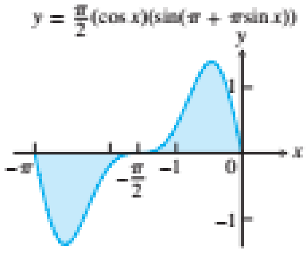
48.



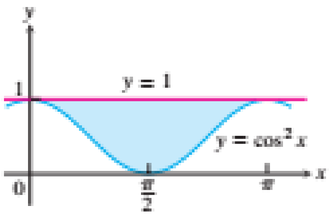
49.



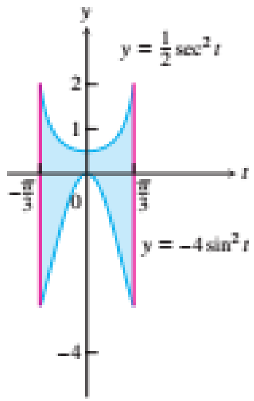
50.



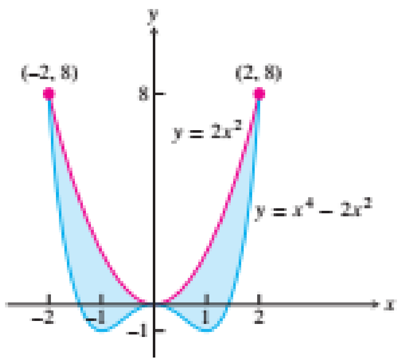
51.



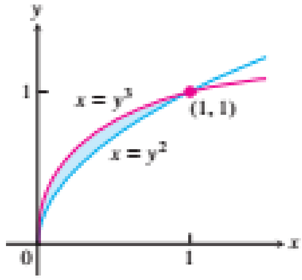
52.



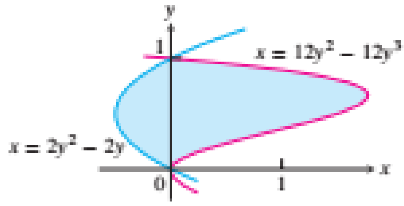
53.



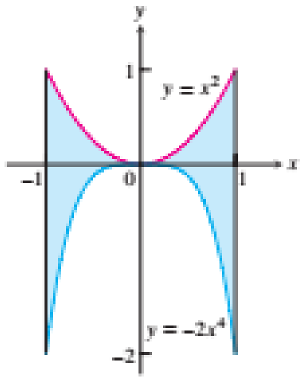
54.



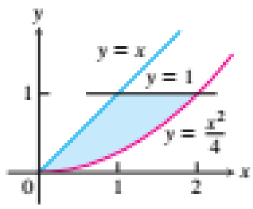
55.



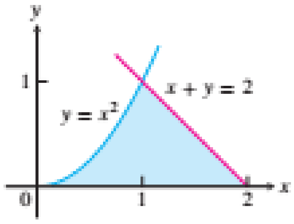
56.



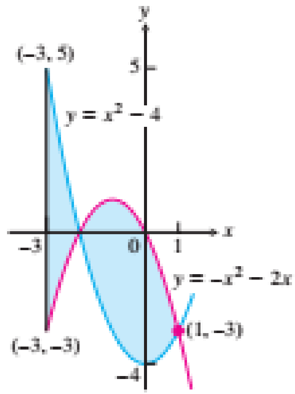
57.



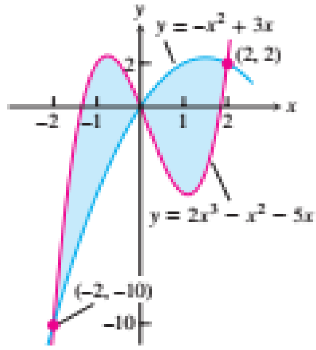
58.



59.



60.



Valor Promedio:

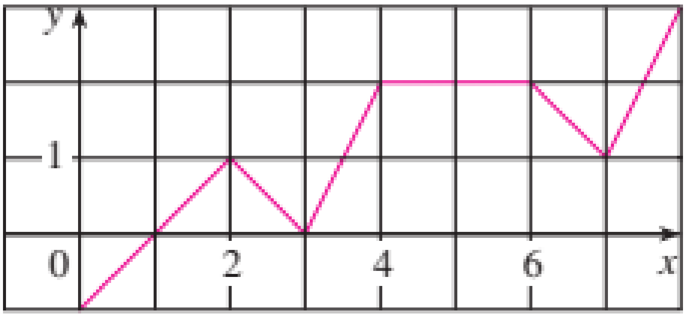
61. Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado:

a. $f(x) = 4x - x^2, \quad [0,4]$
b. $f(x) = sen(4x), \quad [-\pi, \pi]$
c. $g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad [1,8]$
d. $g(t) = \frac{t}{\sqrt{3+t^2}}, \quad [1,3]$
e. $f(t) = e^{sen(t)}.\cos(t), \quad [0, {}^{\pi}/_{2}]$
f. $h(x) = cos^4(x).sen(x), \quad [0, \pi]$
g. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}, \quad [-1,1]$

62. Si f es contina y $\int_1^3 f(x)dx = 8$, demuestre que f toma el valor 4 por lo menos una vez sobre el intervalo $[1,3]$.

63. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ sobre el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

64. Encuentre el valor promedio de f sobre $[0,8]$.



Aplicación: Integrales Impropias

65. ¿Cuáles de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

a. $\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$
b. $\int_0^{\pi} \tan(x)dx$
c. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-x-2}$
d. $\int_0^{\infty} e^{-x^3}dx$

66. Determine si cada una de las siguientes integrales convergen o divergen. Evalúe las que sean convergentes:

a. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$
b. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx$
c. $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3-4x} dx$
d. $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3} dx$
e. $\int_2^{\infty} e^{-5p} dp$
f. $\int_{-\infty}^{0} 2^r dr$
g. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$
h. $\int_{-\infty}^{\infty} (y^3 - 3y^2) dy$
i. $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$
j. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
k. $\int_0^{\infty} sen^2 \alpha d\alpha$
l. $\int_{-\infty}^{\infty} cos(\pi t) dt$
m. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+x} dx$
n. $\int_2^{\infty} \frac{dv}{v^2+2v-3}$
o. $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$
p. $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^4} dx$
q. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$
r. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+3} dx$
s. $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln(x))^3} dx$
t. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$
u. $\int_6^{8} \frac{4}{(x-6)^3} dx$
v. $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4} dx$
w. $\int_0^{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$
x. $\int_0^{2} z^2 \ln(z)\, dz$
y. $\int_0^{1} \frac{ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

67. Utilice el teorema de comparación para determinar si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente.

a. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$
b. $\int_1^{\infty} \frac{2-e^{-x}}{x} dx$
c. $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx$
d. $\int_0^{\infty} \frac{\arctan(x)}{2+e^x} dx$
e. $\int_0^{1} \frac{sec^2 x}{x\sqrt{x}} dx$
f. $\int_0^{\pi} \frac{sen^2 x}{\sqrt{x}} dx$