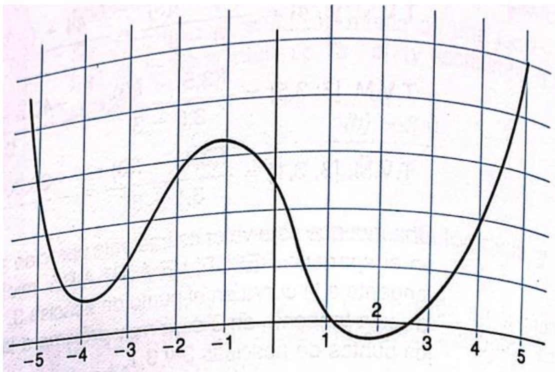
Derivada de una función en un punto:

1. Calcula la tasa de variación media para la función que es muestra en la gráfica en los intervalos $[-4,-2], [-4,-1], [-1,2], [2,5]$



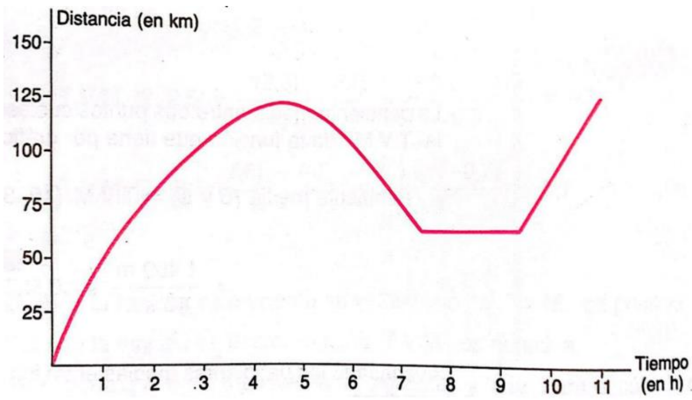
2. Durante cierto día las temperaturas en Alicante fueron las que indica la siguiente tabla:

Hora	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Temperatura (°C)	10	11	13	14	16	18	19	20	22	22	23	21	21	20	19	18	18	17	17

   a. ¿Cuál es la variación media de la temperatura entre las 6 y las 15 horas?
   b. ¿Cuál ha sido la variación media de la temperatura entre las 15 y las 24 horas?
   c. La variación media, ¿indica cuándo aumenta la temperatura y cuando disminuye?

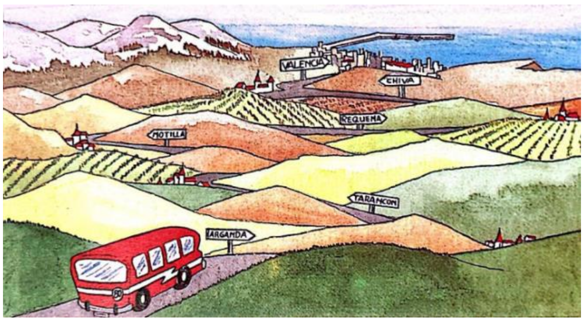
3. La curva representa la distancia a la que se encuentra un ciclista de una ciudad al pasar el tiempo:

a. Calcula la velocidad media del ciclista en las dos primeras horas y en la última media hora ¿Cuándo ha sido mayor?
b. ¿En qué intervalo el ciclista ha permanecido en reposo?
c. Calcula la velocidad media en todo el trayecto, si se hubiese desplazado a esa velocidad media ¿habría tardado menos?



4. Al lanzar cierto cohete la relación entre el tiempo (en minutos) y la distancia recorrida (en Kilómetros) viene dada por la función: $d(t) = t^2 + 10t$ calcula la velocidad media en el primer minuto y en los intervalos de tiempo $[1,2], [2,3], [1, 10]$. Su velocidad al alejarse de la tierra, ¿aumenta o disminuye?

5. Salimos en autobús de Madrid a Valencia a las 10 de la mañana, tomamos nota de los siguientes recorridos y tiempos:



Pasamos por Arganda (28Km.) a las 10 horas con 40 minutos, por Tarancón (82Km.) a las 11 horas con 30 minutos; por Motilla del Palancar (201Km.) a las 12 horas con 40 minutos; por Requena (280Km.) a las 13 horas con 30 minutos; por Chiva (320Km.) a las 14horas 15 minutos y llegamos a Valencia (350Km.) a las 15 horas.

a. Representa gráficamente estas relaciones entre tiempos y distancias.
b. Calcula la velocidad media entre Madrid y Arganda, entre Tarancón y Requena y entre Requena y Valencia.
c. ¿Cuál ha sido la velocidad media del recorrido total?
d. ¿Ha ido el autobús en algún momento del trayecto a una velocidad superior a 120Km/h? ¿Puedes asegurarlo? ¿Y si supieras que entre Tarancón y Motilla hizo una parada de un cuarto de hora?

6. Si una pelota se lanza al aire verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40m/seg., su altura (en metros) una vez que transcurren t segundos, está dada por: $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuanto $t = 2$.

7. Si se lanza una roca verticalmente hacia arriba en el planeta marte con una velocidad de 10m/seg., su altura en metros después de t segundos estará dada por: $H(t) = 10t - 1{,}86t^2$.
   a. Halle la velocidad de la roca después de 1 seg.
   b. Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
   c. ¿Cuándo caerá la roca a la superficie?
   d. ¿Con qué velocidad la roca chocará contra la superficie?

8. Determine si existe f' en cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \begin{cases} x.sen\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x^2.sen\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

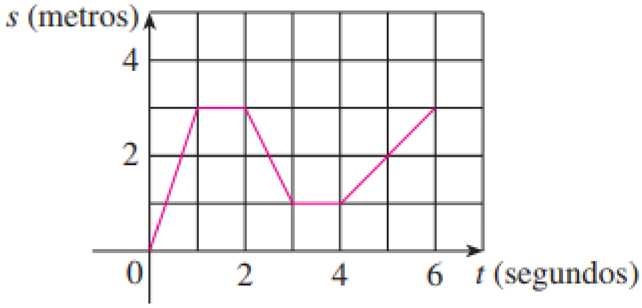
9. En un laboratorio se cultivan amebas (que se reproducen por bipartición) y se está estudiando la evolución del número de amebas del cultivo con el paso del tiempo. Se ha obtenido la siguiente tabla:

Tiempo (horas)	0	1	2	3	t
Amebas (miles)	1	1001	3001	6001	$1 + 500t + 500t^2$

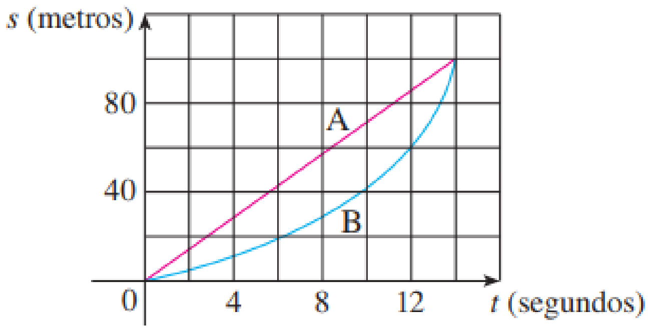
Calcula la velocidad media de reproducción en la primera hora, la velocidad media en la segunda y en la tercera hora y la velocidad media entre la tercera y la décima hora.

Interpretación geométrica:

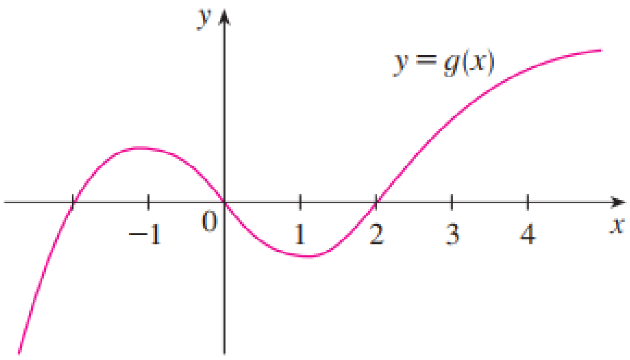
10. Una partícula empieza a moviéndose a la derecha a lo largo de una recta horizontal; la gráfica de su función posición se muestra representada en la gráfica. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil? Dibuje la gráfica de la función velocidad.



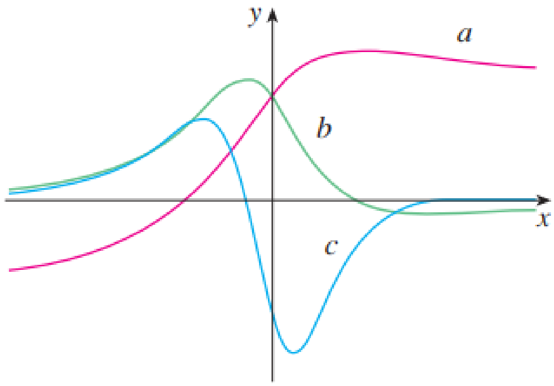
11. Se muestran las gráficas de las funciones posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100m. y terminan en empate.
    a. Describa y compare cómo desarrollaron la carrera las competidoras.
    b. ¿En qué momento hay la mayor distancia entre las competidoras?
    c. ¿En qué momento tienen la misma velocidad?



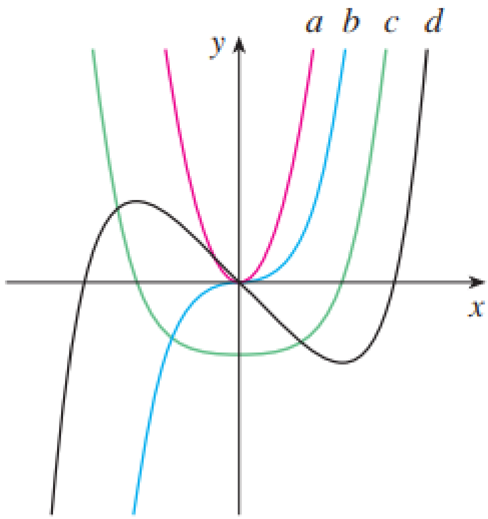
12. Para la función g cuya gráfica se muestra, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento. $0,\ g'(-2),\ g'(0),\ g'(2),\ g'(4)$



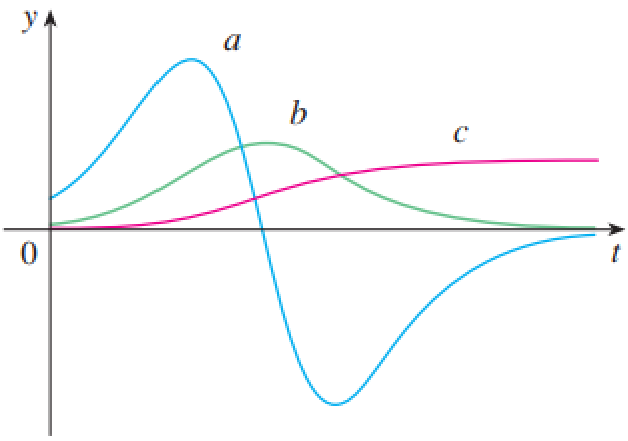
13. La figura muestra la gráfica de f, f' y f'', indique cuál es cada curva y explique el porqué de su elección.



14. La figura muestra la gráfica de f, f', f'' y f^{IV} , indique cuál es cada una de las curvas y explique las razones de su elección.



15. La figura exhibe las gráficas de tres funciones, una de ellas es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo y la restante su aceleración. Indique cuál es cada curva.



Función derivada:

16. Encuentre la función f' para cada una de las siguientes funciones:

a. $(x) = 3x^2 - 4x + 1$
b. $f(t) = 2t^3 + t$
c. $f(t) = \frac{2t+1}{t+3}$
d. $f(x) = x^{-2}$
e. $f(x) = \sqrt{1-2x}$
f. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x}}$

17. Demuestra que, si existe la derivada de una función f en el punto de abscisa $x = a$, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$f'(a) = lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

18. Cada uno de los siguientes límites representa la derivada de alguna función f en algún número $x = a$. Establezca una posibilidad para f y una para a en cada caso.

a. $lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1}{h}$
b. $lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$
c. $lim_{x\to 5}\frac{2^x-32}{x-5}$
d. $lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{tanx-1}{x-\frac{\pi}{4}}$
e. $lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)+1}{h}$
f. $lim_{t\to 1}\frac{t^4+t-2}{t-1}$

19. Si un tanque cilíndrico contiene 100000 galones de agua que se pueden drenar por el fonde del depósito en 1 hora, entonces la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100000.\left(1-\frac{1}{60}t\right)^2, \quad 0 \le t \le 60$$

Encuentre la rapidéz con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantánea de V respecto de t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes de tiempo $t = 0, 10, 20, 30, 40, 50$ y 60 minutos, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Elabore una conclusión. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

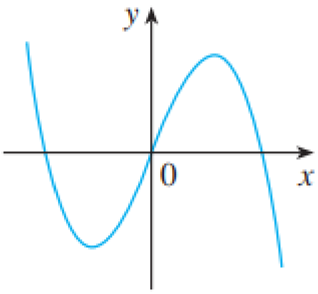
20. El costo de producir x onzas de oro a partir de una reciente mina de oro es $C = f(x)$ dólares.
   a. ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$?¿Cuáles son sus unidades?
   b. ¿Qué significa la igualdad $f'(800) = 17$?
   c. ¿Qué pensás? ¿Los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto plazo? ¿Y a largo plazo? Explique.

21. El número de bacterias después de t horas en un experimento controlado de laboratorio es $n = f(t)$.
   a. ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿ Cuáles son sus unidades?

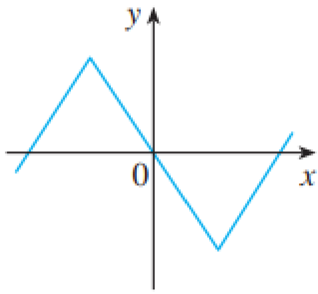
b. Considere que existe una cantidad de espacio y nutrientes suficiente para las bacterias. ¿Qué supones? ¿Es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$?. Si se limita el suministro de nutrientes ¿Cambaría su conclusión?

22. Relaciona la gráfica de cada función dada en las figuras a) a d) con la grafica de sus derivadas en las figuras I a IV. Explique las razones de su elección.

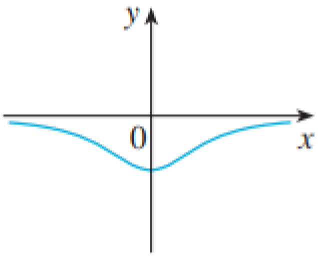
a)



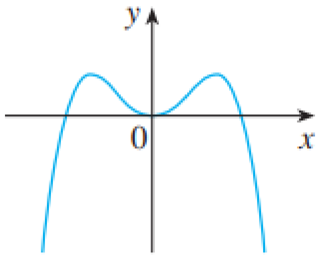
b)



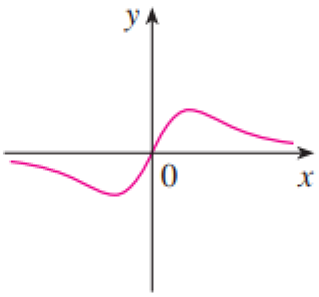
c)



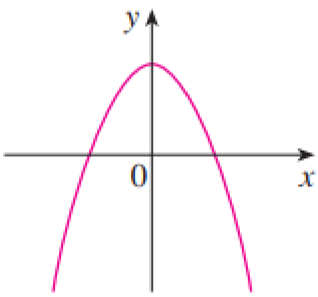
d)



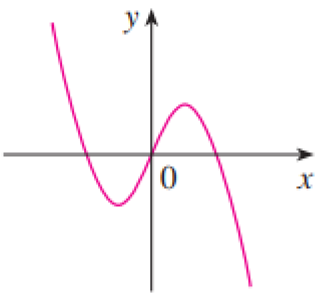
I



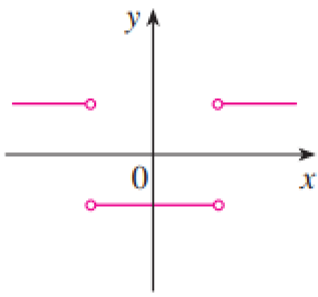
II



III



IV



23. Calcula la función derivada de:

a. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b. $f(x) = x^3 - 4x$ c. $f(x) = x^3 + x$

24. Utiliza los resultados del ejercicio anterior para averiguar los puntos de tangente horizontal de las curvas:

a. $y = x^2 - 6x + 5$ b. $y = x^3 - 4x$ c. $y = x^3 + x$

25. ¿En qué puntos tiene tangente 2 la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$?

26. ¿En cuáles puntos la recta tangente a $y = x^3 + x$ tiene menor pendiente? ¿Cuál es esa pendiente?

Derivada de funciones elementales:

27. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

 a. $y = 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 6x + 8$
 b. $f(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}15x - 0{,}01$
 c. $y = 6\pi x^2 - 3x + 2$
 d. $f(x) = x^{11} - 7x^{10} + 8x^5 - 13x^3 + 2x - 3$

28. Representa gráficamente la parábola $y = x^2 + 1$ y traza su tangente en el punto de abscisa $x = 0$. Calcula, derivando, la ecuación de la recta tangente y dibújala también. ¿Coinciden?

29. Se ha conseguido, que unas bacterias, bajo ciertas condiciones de cultivo, se multipliquen rápidamente. El número de ellas, al cabo de t minutos, viene dado por $N = 50 + 50t + 10t^2$. Calcula la velocidad de crecimiento a los 5 minutos y luego de transcurridos 7 minutos.

30. Un móvil se mueve según la ley $y = 2\sqrt{x} + 3x$ donde y es la distancia recorrida (en metros) y x es el tiempo (medido en segundos). Calcula su función velocidad y su función aceleración. ¿Cuánto vale la velocidad en $x = 1$ segundo? ¿Cuánto vale su aceleración en para $x = 4$ segundos?

31. Un objeto circular va aumentando de tamaño con el tiempo, de forma que su radio viene dado por $r = 3t + 2$ siento t el tiempo en minutos y r el radio en cm. ¿Cuál es la velocidad de crecimiento del radio? ¿Y del área?

32. En una carretera hay una limitación de velocidad de 100Km/h. Un automóvil la recorre siento su ecuación de movimiento: $y = -10t^3 + 56t^2$. ¿Cumple el conductor con la restricción de velocidad?

33. Calcula la función que da la pendiente de $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 3x - 6$ en cada uno de sus puntos. Halla los puntos en los que la recta tangente tiene inclinación de 45° y escribe la ecuación de la recta tangente en esos puntos.

34. ¿Podrías dibujar las gráficas de todas las derivadas de $y = x^2 + 2x + c$? Razona la respuesta.

35. Calcula el ángulo que forma la tangente a $y = 3x^2 - 2x + 7$ en el punto de abscisa $x = 1$ con el eje positivo de las x. ¿Es agudo u obtuso? ¿En $x = 1$ la función crecerá o decrecerá?

36. A partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$:

    a. Grafique aplicando transformaciones la gráfica de $f(x) = \sqrt{6 - x}$
    b. Use la gráfica del inciso a. para trazar la gráfica de f'.
    c. Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
    d. ¿Cuáles son los dominios de f y f'?.

37. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la recta tangente es horizontal.

38. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = e^x - 2x$ tiene una recta tangente horizontal?

39. Demuestre que la curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ no tiene una recta tangente cuya pendiente es 2.

40. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la recta $y = 1 + 3x$.

41. Encuentre las ecuaciones de ambas rectas tangentes a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la recta $12x - y = 1$.

42. En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$? Verifique graficando (con software) ambas rectas y la curva.

43. Encuentre la ecuación de la recta normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la recta $x - 3y = 5$.

44. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ es una **ecuación diferencial** porque involucra una función desconocida y sus derivadas representadas por y' y y''. Encuentre

constantes A, B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación diferencial.

Álgebra de derivadas:

45. Derive cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$
b. $g(x) = \sqrt{x}e^x$
c. $y = \frac{x}{e^x}$
d. $y = \frac{e^x}{1-e^x}$
e. $g(x) = \frac{1+2x}{3+4x}$
f. $g(x) = \frac{x^2-2}{2x+1}$
g. $h(u) = (u - \sqrt{u}).(u + \sqrt{u})$
h. $j(v) = (v^3 - 2v)(v^{-4} + v^{-2})$
i. $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right).(y + 5y^3)$
j. $f(z) = (1 - e^z).(z + e^z)$
k. $y = \frac{x+1}{x^3+x-2}$
l. $y = \frac{t^2+2}{t^4-3t^2+1}$
m. $y = \frac{t}{(t-1)^2}$
n. $y = e^p.(p + p\sqrt{p})$
o. $y = \frac{1}{s+ke^s}$
p. $y = \frac{v^3-2v\sqrt{v}}{v}$
q. $z = w^{\frac{3}{2}}(w + ce^w)$
r. $f(t) = \frac{2t}{2+\sqrt{t}}$
s. $g(t) = \frac{t-\sqrt{t}}{t^{1/3}}$
t. $f(x) = \frac{A}{B+Ce^x}$
u. $f(x) = 3x^2 - 2\cos(x)$
v. $f(x) = \sqrt{x}sen(x)$
w. $f(x) = sen(x) + \frac{1}{2}cotg(x)$
x. $y = 2\sec(x) - cosec(x)$
y. $y = \sec(\theta)\tan(\theta)$
z. $g(\theta) = e^\theta.(tan\theta - \theta)$
aa. $y = c.cost + t^2sent$
bb. $f(t) = \frac{cost}{e^t}$
cc. $y = \frac{x}{2-\tan(x)}$
dd. $y = sen\theta\ .cos\theta$
ee. $f(\theta) = \frac{\sec(\theta)}{1+\sec(\theta)}$
ff. $y = \frac{\cos(x)}{1-sen(x)}$
gg. $y = \frac{t.sen(t)}{1+t}$
hh. $y = \frac{1+\sec(x)}{\tan(x)}$
ii. $f(x) = xe^x\csc(x)$
jj. $y = x^2.sen(x).\tan(x)$

Recta tangente a una curva:

46. Escribe las ecuaciones de las tangentes a $y = x^2 - 6x + 8$ en los puntos en los que la parábola corta a los ejes coordenados.

47. Calcula las derivadas primera, segunda, tercera y cuarta de la función $f(x) = 7x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 3x + 2$.

48. Dos móviles A y B, se desplazan según las ecuaciones:

$$A: f(t) = t^3 - 3t^2 + 4 \qquad B: g(t) = t^2 - mt + n$$

a. Calcula m y n para que en el instante $t = 4$, A y B estén en el mismo lugar y lleven además la misma velocidad.
b. Halla la posición, la velocidad y la aceleración de cada uno en el instante $t = 4$.
c. Calcula el espacio recorrido, la velocidad media y el aumento de aceleración en el intervalo $[0,4]$.

49. Representa gráficamente las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$ ¿Piensa que existe una recta que es tangente a ambas curvas? Si es así, encuentre su ecuación. Si no es así, ¿por qué no?

50. Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada uno de las siguientes curvas en el punto dado:

a. $y = 4x - 3x^2, \quad (2,-4)$
b. $y = x^3 - 3x + 1, \ (2,3)$
c. $y = \sqrt{x}, \quad (1,1)$
d. $y = \frac{2x+1}{x+2}, \quad (1,1)$

51. Halle una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.

52. Si la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto donde $a = 2$ es $y = 4x - 5$, encuentre $f(2)$ y $f'(2)$.

53. Si la recta tangente a $y = f(x)$ en $(4,3)$ contiene al punto de coordenadas $(0,2)$ halle $f(4)$ y $f'(4)$.

54. Encentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

a. $y = \sqrt[4]{x}, \quad (1,1)$
b. $y = x^4 + 2x^2 - x, \quad (1,2)$

55. Encuentre la ecuación de la recta tangente y normal a cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

a. $y = x^4 + 2e^x, \quad (0,2)$
b. $y = x^2 - x^4, \quad (1,0)$

56. Suponga que $f(5) = 1, f'(5) = 6, g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Encuentre los valores siguientes:

a. $(f.g)'(5)$
b. $(f/g)'(5)$
c. $(g/f)'(5)$

57. Suponga que $f(2) = -3, g(2) = 4, f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$ si:
   a. $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$
   b. $h(x) = f(x).g(x)$
   c. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
   d. $h(x) = \frac{g(x)}{1+f(x)}$

58. Si $f(x) = e^x g(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

59. Suponga que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$ y $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2$, y sea $g(x) = f(x).sen(x)$ y $h(x) = \frac{\cos(x)}{f(x)}$ halle:
   a. $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$
   b. $h'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

60. ¿Para qué valores de x la gráfica de cada una de las siguientes funciones tiene una recta tangente horizontal?
   a. $f(x) = x + 2.sen(x)$
   b. $f(x) = e^x.\cos(x)$

Regla de la cadena:

61. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = sen(2x)$
b. $g(x) = \cos(5x^2 - 3x + 2)$
c. $h(x) = sen^2(x)$
d. $f(t) = sen(t^2)$
e. $g(t) = sen^2(t^2)$
f. $h(t) = cos^5(7t^2)$
g. $f(x) = 6\cos(3x + 5)$
h. $g(x) = \frac{1}{2}cos^3(2x)$
i. $m(x) = sen(sen(x))$
j. $n(x) = sen^2(\cos(7x))$
k. $f(x) = sen(e^x) + e^{sen(x)}$
l. $t(x) = \sqrt{sen^3(8x)}$
m. $k(x) = \sqrt{cos^5(x^2)}$
n. $l(x) = \left(x - \sqrt{1-2x}\right)^3$
o. $j(x) = sen\left(\sqrt{1-3x}\right)$
p. $f(t) = \sqrt{sen^2 t + (t^2-1)^5}$
q. $g(t) = cos^2\sqrt[3]{t + (3-t)^2}$
r. $k(x) = sen\sqrt{cos(5x+2)}$
s. $f(x) = (4x - x^2)^{100}$
t. $g(t) = t.e^{-kt}$
u. $f(x) = (2x-3).(x^2+x+1)^5$
v. $y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$
w. $y = \sqrt{\frac{s^2+1}{s^2+4}}$
x. $y = 10^{1-x^2}$
y. $g(x) = \frac{(y-1)^4}{(y^2+2y)^5}$
z. $h(x) = 2^{sen(\pi x)}$
aa. $m(x) = x^2.e^{-1/x}$
bb. $f(\theta) = cotg^2(sen(\theta))$
cc. $g(\theta) = tan(e^\theta) + e^{tg(\theta)}$
dd. $h(\theta) = sen^2\left(e^{sen^2(\theta)}\right)$
ee. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
ff. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
gg. $y = 2^{3^{x^2}}$
hh. $y = cos\sqrt{sen(tan(\pi x))}$
ii. $y = [x + (x + sen^2 x)^3]^4$

62. La función $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$ tiene dos puntos en los que no es derivable. ¿Cuáles son esos puntos? Represéntala gráficamente.

63. Calcula las derivadas, primera, segunda, tercera y cuarta de las funciones:

a. $f(x) = 6x^4 - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{3}x^2 - 11x$

b. $g(x) = 5\cos(2x)$

64. Calcula las ecuaciones de la recta tangente a la gráfica de las funciones dadas en los puntos indicados:

a. $f(x) = x^3 - 2x + 1, \quad x = 1$

b. $g(x) = \sqrt{x-2}, \quad x = 6$

c. $h(x) = 3.sen(2x), \quad x = 0$

d. $k(x) = \frac{2}{x} - \sqrt{x}, \quad x = 4$

65. Encuentre la primera y segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

a. $y = cos(x^2)$

b. $y = e^{\alpha x}.sen(\beta x)$

c. $y = cos^2 x$

d. $y = e^{e^x}$

66. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

a. $y = (1+2x)^{10}, \quad (0,1)$

b. $y = \sqrt{1+x^3}, \ (2,3)$

c. $y = sen\big(sen(x)\big), (\pi, 0)$

d. $y = senx + sen^2 x, (0,0)$

67. Encuentre todos los puntos sobre la gráfica de la función $f(x) = 2sen(x) + sen^2(x)$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

68. Determine la coordenada x de todos los puntos de la curva $y = 2sen(x) + sen^2(x)$ en los cuales la recta tangente es horizontal.

69. Si $F(x) = f\big(g(x)\big)$, donde $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, G(5) = -2$ Y $G'(5) = 6$, halle $F'(5)$.

70. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, halle $h'(1)$.

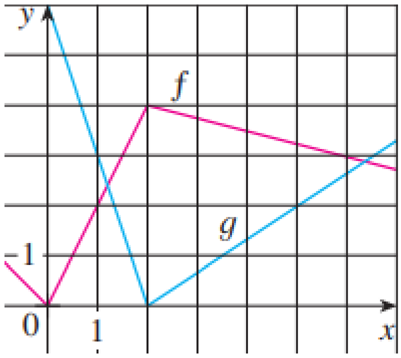
71. Se da la tabla de valores de f, g, f' y g':

a. Si $h(x) = f\big(g(x)\big)$, encuentre $h'(1)$.

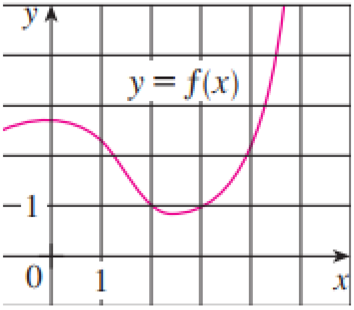
b. Si $H(x) = g\big(f(x)\big)$, halle $H'(1)$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

72. Sean f y g las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $u(x) = f(g(x)), v(x) = g(f(x))$ y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. Si no existe, explique por qué.



   a. $u'(1)$
   b. $v'(1)$
   c. $w'(1)$



73. Si f es la función cuya gráfica se muestra. Sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.
   a. $h'(2)$
   b. $g'(2)$

74. Suponga que F es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para $F'(x)$ y $G'(x)$.

75. Sea $g(x) = e^{cx} + f(x)$ y $h(x) = e^{kx}.f(x)$, donde $f(0) = 3, f'(0) = 5$ y $f''(0) = -2$.

   a. Encuentre $g'(0)$ y $g''(0)$ en términos de c.
   b. En términos de k, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de h en el punto donde $x = 0$.

76. Si $r(x) = f\left(g(h(x))\right)$, donde $h(1) = 2, g(2) = 3, h'(1) = 4, g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, encuentre $f'(1)$.

77. Si g es una función dos veces derivable y $f(x) = x.g(x^2)$, halle f'' en términos de g, g' y g''.

78. Si $F(x) = f\left(3f(4f(x))\right)$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, encuentre $F'(0)$.

79. Demuestre que la función $y = e^{2x}(Acos(3x) + Bsen(3x))$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 143y = 0$.

80. Si $F(x) = f\left(xf(xf(x))\right)$, donde $f81) = 2, f(2) = 3, f'(1) = 4, f'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$, halle $F'(1)$.

81. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $y'' - 4y' + y = 0$?

82. El costo de producir q unidades de un producto está dado por: $c = 4000 + 10q + 0{,}1q^2$, si el precio de p unidades está dado por la ecuación $q = 800 - 2{,}5p$. Encuentra la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 80$.

83. El volumen V de una célula esférica está dada por $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. En el tiempo t (en segundos) el radio r (en centímetros) está dado por: $r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$. Encuentre $\frac{dV}{dt}$ cuando $t = 10$.

84. Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio en dólares, entonces para $E \geq 7$, se tiene: $S(E) = 340E^2 - 4360E + 42{,}800$.

    a. ¿Qué tan rápido cambia el salario respecto a la educación cuando $E = 16$?
    b. ¿A qué nivel educativo la tasa del salario es igual a 5000 dólares por año de educación?

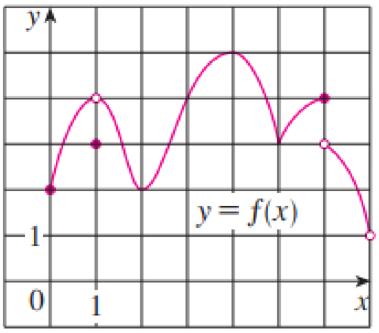
85. Un fabricante determinó que, para su producto, el costo promedio diario (en cientos de dólares está dado por: $C(q) = \frac{324}{\sqrt{q^2+35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$.
    a. Conforme la producción diaria crece el costo promedio se aproxima a una cantidad constante, ¿Cuál es esa cantidad?
    b. Determine el costo marginal[1] del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
    c. El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementan en 18 unidades diarias el ingreso crecería a 275 dólares ¿Deberá efectuar este incremento? ¿Por qué?

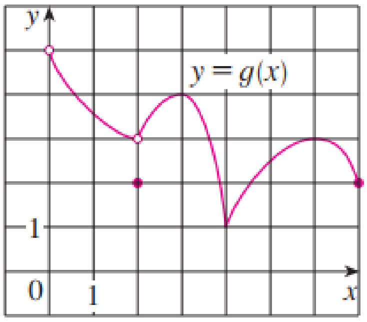
86. Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen $q(m) = 2m.(m+1)^{3/2}$ unidades de producto diariamente. El ingreso total r (en dólares) está dado por: $r(q) = \frac{50q}{\sqrt{1000+3q}}$
    a. ¿Cuánto es el precio por unidad cuando hay 12 trabajadores?
    b. Determine el ingreso marginal[2] cuando hay 12 trabajadores.
    c. Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

[1] El costo marginal es cantidad de dinero que cuesta producir una unidad más de producto.
[2] El ingreso marginal es el ingreso que se produce por vender una unidad más de producto.

Números Críticos. Crecimiento y Decrecimiento. Máximos y Mínimos locales y Absolutos:

87. Utilice la gráfica para establecer los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.





88. Trace la gráfica de f y utilícela para los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f:

a. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1); x \leq 3$
b. $f(x) = \frac{1}{x}, 1 < x < 3$
c. $f(x) = sen(x),\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
d. $f(x) = \ln(x), 0 < x \leq 2$
e. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
f. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & si\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

89. Encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de f sobre el intervalo dado:

a. $f(x) = 12 + 4x - x^2,\ [0,5]$
b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,\ [-2,3]$
c. $f(x) = x + \frac{1}{x},\ [0.2, 4]$
d. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2},\ [-1,2]$
e. $f(t) = 2cos(t) + sen(2t),\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
f. $f(x) = x - \ln(x),\ \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
g. $f(x) = x - 2actg(x),\ [0,4]$

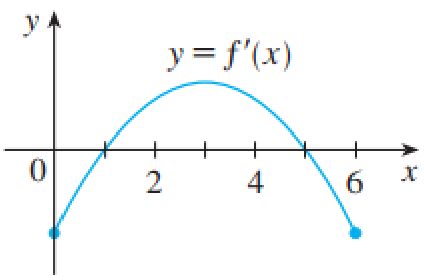
90. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a.(1 - x)^b,\ 0 \leq x \leq 1.$

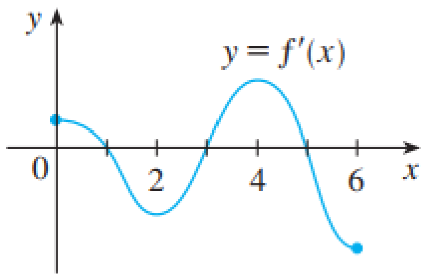
91. Demuestre que 5 es un número crítico de la función $g(x) = 2 + (x - 5)^3$ pero g no tiene un valor extremo local en 5.

92. Demuestre que la función $f(x) = x^{101} + x^{51}x + 1$ no tiene ni máximo local ni mínimo local.

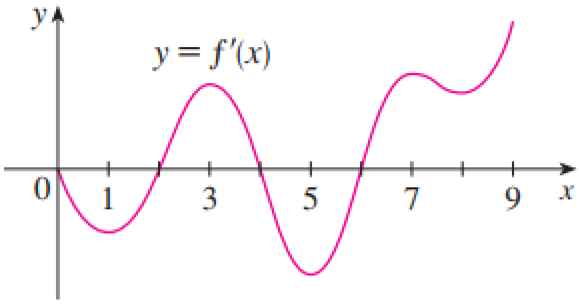
93. Si f tiene un valor mínimo local en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ tiene un valor máximo local en c.

94. En las siguientes gráficas se muestran las representaciones gráficas de la derivada f' de una función f.
    a. ¿Sobre qué intervalos f crece o decrece?
    b. ¿En qué valores de x, f tiene un máximo o un mínimo local?





95. Se muestra la representación gráfica de la primera derivada de f' de una función f.
    a. ¿Sobre qué intervalos f es creciente? Explique.
    b. ¿En qué valores de x tiene f un máximo o mínimo local? Explique.
    c. ¿Sobre qué intervalos es f cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
    d. ¿Cuáles son las coordenadas de x de los puntos de inflexión? ¿Por qué?



96. Dadas las siguientes funciones:

    i. Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
    ii. Encuentre los valores máximos y mínimos de f.
    iii. Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

a. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
b. $f(x) = cos^2(x) - 2sen(x), 0 \leq x \leq 2\pi$
c. $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$
d. $f(x) = x^2 \ln(x)$
e. $f(x) = x^2 - x - \ln(x)$
f. $f(x) = x^4 e^{-x}$

97. Suponga que la derivada de una función f es:

$$f'(x) = (x+1)^2(x-3)^5(x-6)^4$$

¿Sobre qué intervalo es f creciente?

Aproximación Lineal y Cuadrática. Polinomios de Taylor:

98. Dadas las siguientes funciones, desarrolle el Polinomio de Taylor con centro en x_0 y orden n. Grafique (ayudándose con un software) la función y su aproximación.

a. $f(x) = \sqrt{1+x}; \quad x_0 = 0; \quad n = 3$
b. $f(x) = e^x; \quad x_0 = 0; \quad n = 5$
c. $f(x) = \ln(1+x); \quad x_0 = 0; \quad n = 5$
d. $f(x) = \cos(x); \quad x_0 = 0; \quad n = 5$
e. $f(x) = arctg(x); \quad x_0 = 0; \quad n = 2$
f. $f(x) = sen(3x); \quad x_0 = 0; \quad n = 5$
g. $f(x) = e^{x^2}; \quad x_0 = 0; \quad n = 10$

99. Estime los siguientes números utilizando aproximaciones de orden 3.

a. $sen(0{,}001 + \pi)$
b. $arctg\,(0{,}05)$
c. $\ln(1{,}02)$
d. $1{,}01^{14}$
e. $\sqrt[3]{0{,}95}$
f. $\sqrt{1 + 0{,}2^3}$

100. Obtenga los polinomios de Taylor de las funciones que se dan a continuación en $x = 0$.

(a) $f(x) = a^x$
(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$
(c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
(d) $f(x) = \frac{1}{2-x}$

Problemas de Optimización:

101. Considere el siguiente problema, un agricultor que dispone de 750 pies de material para construir una barda quiere delimitar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con bardas paralelas a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total mas grande posible de los cuatro corrales?
   a. Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos corrales anchos y poco largos y otros corrales que sean angostos y muy largos. Encuentre las áreas totales de están configuraciones. ¿Parece que hay un área máxima? Si es así, estímela.
   b. Dibuje un diagrama que ilustre la situación general. Introduzca la notación y etiquete el diagrama con sus símbolos.
   c. Escriba una expresión para el área total.
   d. Utilice la información proporcionada para plantear una ecuación que relacione las variables.
   e. Utilice el inciso d. para plantear el área total como función de una variable.
   f. Termine de resolver el problema y compare la respuesta con su estimación en el inciso a.

102. Una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material que ha de utilizarse.

103. Se dispone de 1200 cm^2 de material para hacer una caja con una base cuadrada y sin tapa, encuentre el mayor volumen posible de la caja.

104. Un contenedor rectangular de almacenamiento sin tapa ha de tener un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es dos veces el ancha. El material para la base cuesta $10 el metro cuadrado y el material para los costados cuesta $6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales que hagan más barato el contenedor.

105. Encuentre el punto sobre la recta $y = 2x + 3$ que está más cerca del origen.

106. Halle el punto sobre la curva $y = \sqrt{x}$ que está más cerca del punto $(3, 0)$.

107. Busque los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que están más lejos del punto $(1, 0)$.

108. Halle las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

109. Busque el rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

110. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede ser inscrito en un triángulo equilátero de lado L si uno de los lados del rectángulo se encuentra sobre la base del triángulo.

111. Halle el área del trapecio más grande que puede ser inscrito en un círculo de radio 1 y cuya base es un diámetro del círculo.

112. Busque las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que puede ser inscrito en un círculo de radio r.

113. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 3cm. y 4cm. si dos lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

114. Halle el cilindro de mayor volumen posible que puede inscribirse en una esfera de radio r.

115. Una ventana normanda tiene la forma de rectángulo rematado por un semicírculo (así, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo) si el perímetro de la ventana es de

30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana para que sea admitida la mayor cantidad de luz posible.

116. Los márgenes superior e inferior de un cartel son de 6 cm. y los márgenes de los lados de 4 cm. Si el área de impresión sobre el cartel se fija en 384 cm^2, encuentre las dimensiones del cartel con la menor área.

117. Un cartel debe tener un área de 180 $pulg^2$ con márgenes de 1 pulgada en la parte inferior y laterales, y un margen de 2 pulgadas en la parte superior. ¿Qué dimensiones darán la mayor área de impresión?

118. Un pedazo de alambre de 10m. de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea máxima? ¿Sea mínima?

119. Una refinería de petróleo se encuentra en la orilla norte de un río recto que tiene 2km. de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería a tanques de almacenamiento situados en la orilla sur del río, 6km. al este de la refinería. El costo de colocación de tubería es de $400000/km. sobre la tierra a un punto P a la orilla norte y $800000/Km. bajo el río a los tanques. Para minimizar el costo de la tubería. ¿Dónde debe ubicarse P?.

120. La iluminación de un objeto por una fuente de luz es directamente proporcional a la intensidad de la fuente, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente. Si dos fuentes luminosas, una tres veces más intensa que la otra, se colocan a 10 pies de distancia, ¿dónde se debe colocar un objeto en la recta entre las fuentes a fin de recibir la menor iluminación?

121. Un fabricante a estado vendiendo 1000 televisores de pantalla plana a la semana a U$S 450. Un estudio de mercado indica que por cada U$S 10 de descuento ofrecidos al comprador, el número de televisores vendidos se incrementará en 100 por semana.

   a. Encuentre la función demanda.
   b. ¿Qué tan grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía al comprador a fin de maximizar sus utilidades?
   c. Si la función costo semanal es: $C(x) = 68000 + 10x$, ¿cómo debería el fabricante establecer el tamaño de la rebaja, a fin de maximizar sus ganancias?

122. El administrador de un complejo habitacional de 100 departamentos sabe por experiencia que todas las unidades serán ocupadas si el alquiler es de $80000 al mes. Un estudio de mercado sugiere que, en promedio, una unidad adicional permanecerá vacante por cada incremento de $1000 en el alquiler. ¿Qué renta debe cobrar el administrador para maximizar los ingresos?