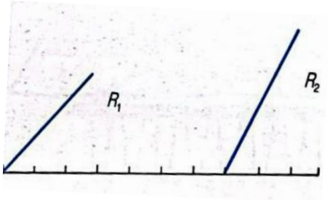
"Si la materia se nos evade, por su extrema tenuidad, como la del aire y la de la luz, si los cuerpos están situados lejos de nosotros, en la inmensidad del espacio, si el hombre quiere conocer el espectáculo de los cielos en épocas sucesivas que un gran número de siglos separa, si las acciones de la gravedad y del calor se ejercen en el interior del globo sólido a profundidades que nos serán siempre inaccesibles, el análisis matemático puedo con todo dominar las leyes de estos fenómenos."

Este fragmento está tomado de la introducción de la teoría analítica del calor, de Fourier (1822), al que Maxwell llamó un gran "*poema matemático*"

El estudio de las operaciones con derivadas que, junto con las integrales (que estudiaremos en breve) constituyen el llamado cálculo infinitesimal. Comenzó cuando los científicos decidieron interesarse no sólo por los cambios que se efectúan en las cosas sino por lo más o menos rápidamente que las cosas cambian.



De estas dos rectas R_1 y R_2 se puede decir que, "ascienden" respecto del eje horizontal, pero también es claro que R_2 asciende más rápido que R_1 y con una regla se puede tratar de ver que R_2 asciende dos veces más rápido que R_1.

Este deseo de *medir* y *cuantificar* el cambio, la variación, condujo en el siglo XVII por causes bastantes tortuosos, hasta la noción de derivada. En un principio tanto la formulación de Newton como la de Leibnitz, los dos introductores del cálculo, estuvo llena de oscuridades en lo que se refiere a su fundamentación, pero la aplicación de los métodos que ellos proponían conducía a resultados tan asombrosos, por su utilidad y por su concordancia con los experimentos que los matemáticos de ese entonces se taparon un poco los ojos y procedieron adelante con audacia.

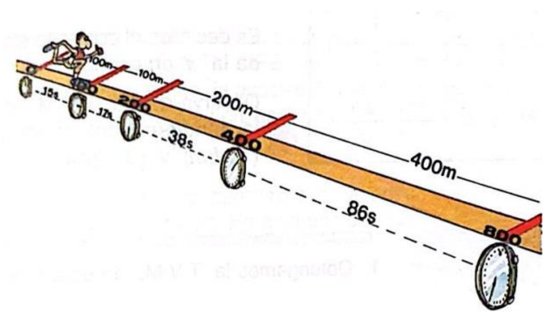
Todavía en el siglo XVII la consigna de d´Alembert, el organizador de la enciclopedia francesa y uno de los matemáticos importantes de la época era: "*Id adelante y la fe os llegará*". Hasta bien entrado el siglo XIX no se hizo la luz completa sobre este difícil asunto con la publicación en 1823 de las lecciones de Cauchy sobre el cálculo infinitesimal.

Derivada de una función en un punto:

¿Cómo estudiar la variación de unas cantidades respecto de otras?

Para obtener la velocidad media alcanzada en un recorrido calculamos el cociente:

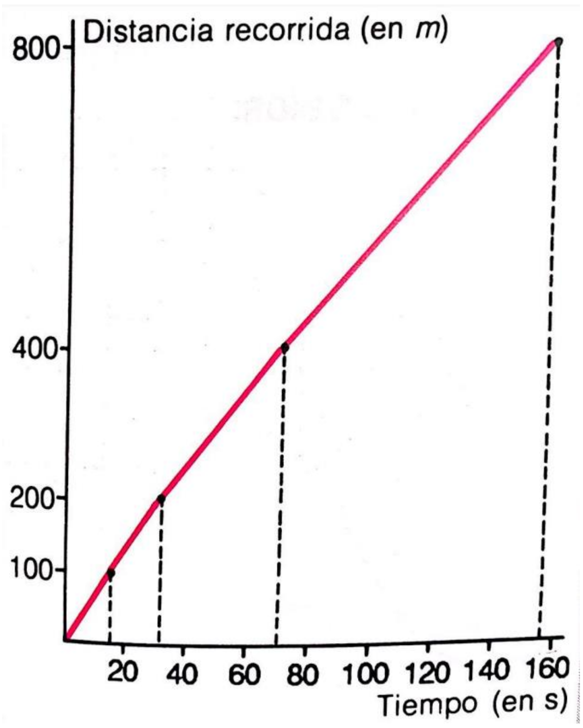
$$V_m = \frac{distncia\ recorrida}{tiempo\ transcurrido}$$



Una maratonista se está preparando para unas pruebas. En un entrenamiento ha corrido 800mts. Y se han cronometrado los siguientes tiempos.

Distancia	Tiempo
100m.	15seg.
200m.	32seg.
400m.	70seg.
800m.	156seg.

Representemos gráficamente en un sistema de ejes coordenados la situación:



¿Cuál ha sido la velocidad media total? ¿Y la velocidad media en cada intervalo? ¿Te parece que la maratonista acusa cansancio?

Veamos:

En el intervalo $[0,156] \longrightarrow V_m = \frac{800}{156} = 5{,}13\,\frac{m}{seg}$.

En el intervalo $[0,15] \longrightarrow V_m = \frac{100}{15} = 6{,}67\,\frac{m}{seg}$.

En el intervalo $[15,32] \longrightarrow V_m = \frac{200-100}{32-15} = \frac{100}{17} = 5{,}88\,\frac{m}{seg}$.

En el intervalo $[32,70] \longrightarrow V_m = \frac{400-200}{70-32} = \frac{200}{38} = 5{,}26\,\frac{m}{seg}$.

En el intervalo $[70,156] \longrightarrow V_m = \frac{800-400}{156-70} = \frac{400}{86} = 4{,}65\,\frac{m}{seg}$.

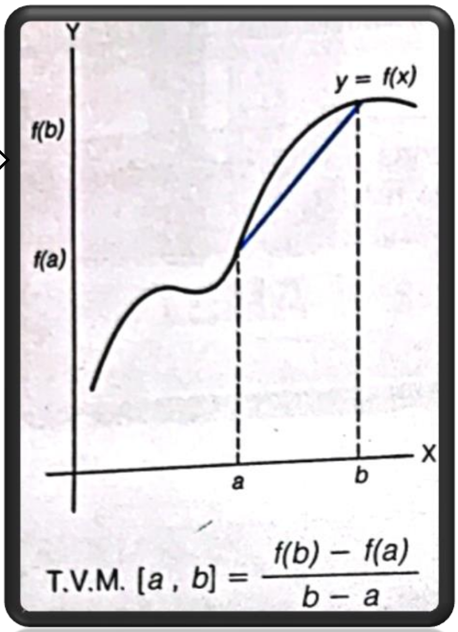
Interpretación geométrica:

La velocidad media, que acabamos de ver, es sólo un caso particular de la tasa de variación media que se define para una función cualquiera:

Se llama **tasa de variación media** de una función $y = f(x)$ correspondiente al intervalo $[a,b]$ al cociente:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Es decir, es el cociente (Razón de Cambio) entre la **variación de y** y la **variación de x** en este intervalo.



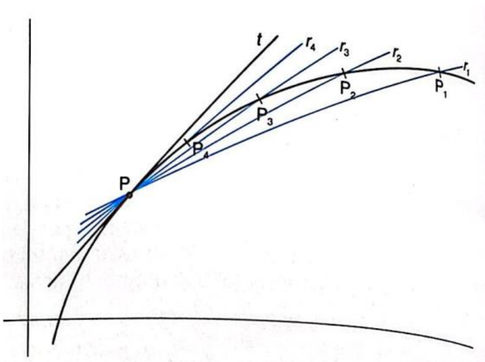
Observa que tasa de variación media (TVM) de una función en el intervalo $[a, b]$ es la pendiente del segmento cuyos extremos son los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Consideremos ahora la razón de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que b tienda (se acerque) a a, por lo que la diferencia $(b - a)$ tiende (se acerca) a 0.

El límite de esta razón de cambio promedio se llama razón de cambio instantánea de y respecto a x lo cual se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$.

Debemos aproximarnos a la pendiente de la recta tangente mediante pendientes de rectas secantes.

Derivada de una función en un punto:



La recta t es tangente a la curva en P. La recta r_1 es secante a la curva ya que la corta en dos puntos P y P_1. También son secantes r_2, r_3 y r_4, todas ellas pasan por P y por un punto cada vez más cercano a P y en teoría podríamos seguir trazando rectas que corten a la curva además de en P en puntos cada vez más cercanos a él: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \ldots, P_n$ cuanto más próximo a P sea P_n más pequeño será el ángulo que forme la recta correspondiente con la tangente t. Por eso decimos que t es el límite de las rectas secantes (r_n) cuando $P_n \longrightarrow P$.

Veamos un ejemplo:

Un tenista da un fuerte raquetazo a una pelota verticalmente hacia arriba. La altura de la pelota en función del tiempo obedece a la ecuación: $h(t) = 30t - 5t^2$ y queremos saber la velocidad que lleva 2seg. después del golpe. Podríamos calcularla, aproximadamente, representando la gráfica de la función, trazando la tangente y calculando su pendiente, pero este método además de que requiere tener previamente la gráfica de la función es poco preciso…

¡Intentemos hacerlo de otra forma más cómoda y exacta!

Vamos a calcular la derivada de la función $h(t) = 30t - 5t^2$ en el instante 2, es decir la pendiente de la recta t tangente a la curva en el punto P y lo vamos a hacer aproximándonos a t mediante rectas secantes r que, además de pasar por P pasan por otro punto P_n de la curva.

La pendiente de la recta r es la velocidad media de la pelota en el intervalo $[2, x_n]$. Calculemos la velocidad media en intervalos de este tipo, cada vez más pequeños:

$$T.V.M.[2;3] = \frac{h(3) - h(2)}{3 - 2} = \frac{45 - 40}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$

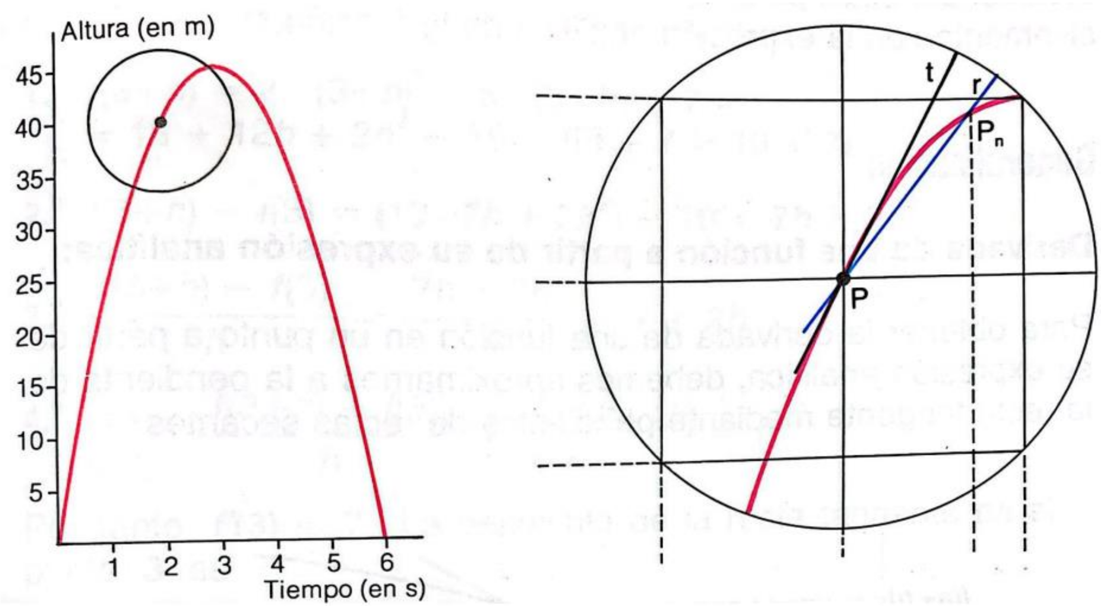
$$T.V.M.[2;2{,}5] = \frac{h(2{,}5) - h(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{43{,}75 - 40}{2{,}5 - 2} = \frac{3{,}75}{0{,}5} = 7{,}5$$

$$T.V.M.[2;2{,}1] = \frac{h(2{,}1) - h(2)}{2{,}1 - 2} = \frac{40{,}95 - 40}{2{,}1 - 2} = \frac{0{,}95}{0{,}1} = 9{,}5$$

$$T.V.M.[2;2{,}01] = \frac{h(2{,}01) - h(2)}{2{,}01 - 2} = \frac{40{,}0995 - 40}{2{,}01 - 2} = 9{,}95$$

Observemos que las velocidades medias que hemos obtenido se van acercando a 10.

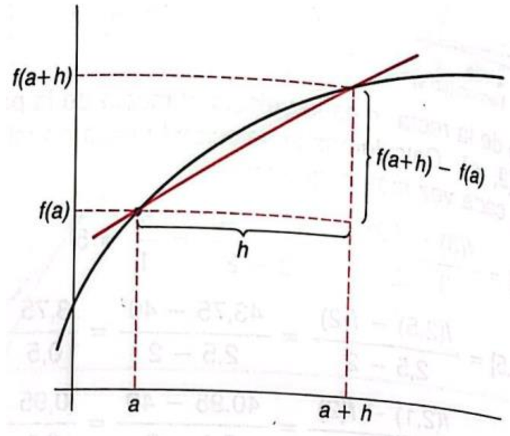
¿Será 10 el valor de $h'(2)$?



Para averiguarlo vamos a calcular el límite de las velocidades medias cuando el intervalo tiende a 0, es decir vamos a calcular el límite del cociente incremental:

$$lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)-h(2)}{(2+h)-2}=lim_{h\to 0}\frac{[30(2+h)-5(2+h)^2]-40}{h}$$
$$=lim_{h\to 0}\frac{60+30h-5(4+4h+h^2)-40}{h}$$
$$=lim_{h\to 0}\frac{60+30h-20-20h-h^2-40}{h}=lim_{h\to 0}\frac{10h-h^2}{h}$$
$$=lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}.(10-h)}{\cancel{h}}=lim_{h\to 0}(10-h)=10$$

Efectivamente el valor de $h´(2)$ es 10. Este límite (el límite de las velocidades medias cuando el intervalo tiende a 0) se llama **VELOCIDAD INSTANTÁNEA**. De manera que la velocidad de la pelota a los 2seg. de ser golpeada hacia arriba es de 10m/seg.



Tenemos entonces que:

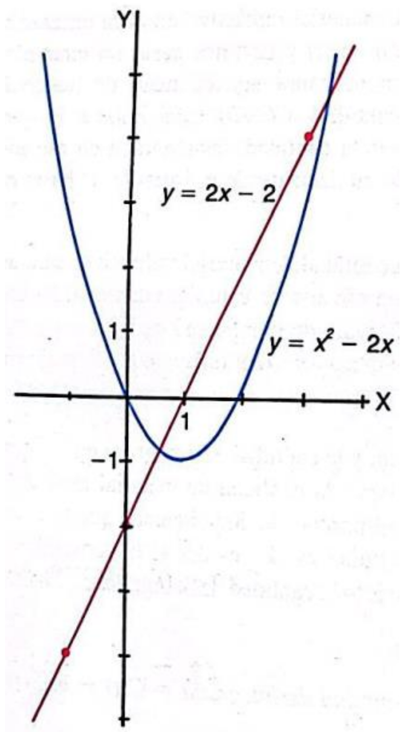
$$\boxed{f´(a)=lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Función derivada:

Apliquemos la definición para calcular la derivada de: $f(x)=x^2-2x$ en el punto de absisa -1, es decir calculemos $f´(-1)=\cdots=-4$. **¡Compruébalo!**

Ahora verifica que: $f´(0)=-2$ y que $f´(3)=4.$

En el gráfico se muestra la representación de la curva: $y=f(x)$ y también los puntos de coordenadas $(-1,-4);\ (0,2);\ (3,4)$, así como la representación gráfica de la recta: $y=2x-2$. Calcula $f´(2)$ y comprueba que el punto correspondiente también está sobre dicha recta. Esto nos lleva a suponer que si $f´(a)=b$ entonces el punto de coordenadas (a,b) también está sobre la recta $y=2x-2$, es decir:



$$f´(a)=b\Rightarrow b=2a-2\Rightarrow f'(a)=2a-2$$

Según esto, el vértice de la parábola, que estará en el punto cuya derivada es 0 cumplirá: $f´(a)=0\Rightarrow 2a-2=0\Rightarrow a=1$ y efectivamente es el punto de absisa 1 donde está el vértice de la parábola.

Veamos que ciertamente la función $y = 2x - 2$ nos proporciona la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en cada punto de absisa x.

Dada una función f, ¿se podrá encontrar otra función que nos de el valor de la derivada de la función f en cualquier punto de absisa x?

Sí, se llama función derivada de f y es:

$$lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la notamos comúnmente $f´(x)$ o bien:

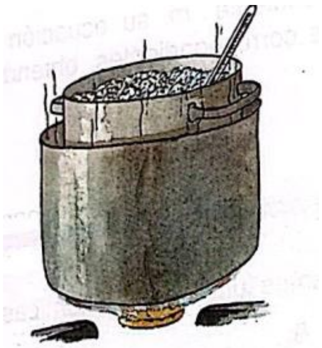
$$f´(x) = y´ = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x).$$

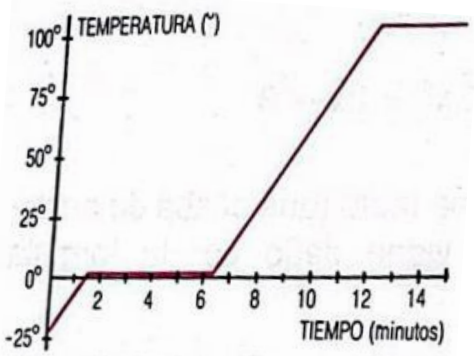
Vemos que el valor de $f´$en x puede interpretarse geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$. El dominio de $f´$es el conjunto: $Dmf´ = \{x/f\,´(x)$ exista$\}$ y puedo no coincidir con el dominio de f (es decir: $Dmf´ \subseteq Dmf$).

Existen funciones que no admiten recta tangente en algún punto, es decir no existe el límite del cociente incremental en dicho punto, entonces dichas funciones no son derivables en esos puntos.

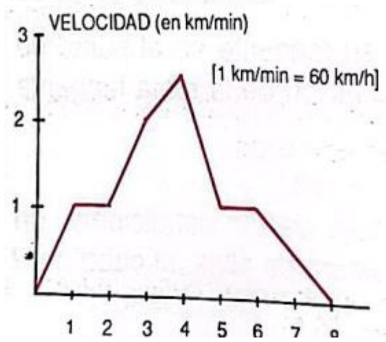
Veamos algunos ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u>: Tenemos hielo triturado a -25°C dentro de una cazuela y lo introducimos en una olla de agua hirviendo y vamos observando su temperatura. Deseamos calcular la variación instantánea de la temperatura a lo largo del tiempo que dura la experiencia:



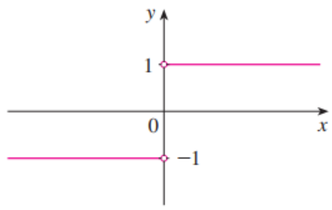


<u>Ejemplo 2</u>: Veamos la gráfica en la que se muestra la velocidad de un coche durante los 8 minutos que dura la prueba a la que se somete. ¿Cuál es su aceleración en cada momento?



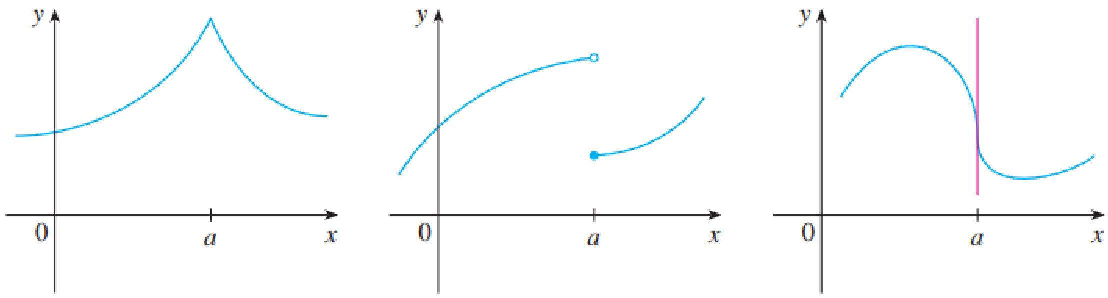
<u>Ejemplo 3</u>: Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$

Claramente la función no es continua en $x = 0$ y por lo tanto no es derivable en dicho punto ya que no se puede trazar la recta tangente en ese punto.



¿En qué puntos no es derivable una función?

En los puntos en donde la gráfica de una función presenta puntos angulosos (esquinas o picos) no tiene recta tangente, ya que la derivada allí no existe porque el límite del cociente incremental asume distintos valores por izquierda y por derecha. Tampoco existe recta tangente en los puntos en donde el límite del cociente incremental es $\pm\infty$. Y por supuesto si f no es continua en un punto no admitirá recta tangente allí, ya que: si una función es derivable en $x = a$ debe cumplirse que si existe $lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entonces necesariamente $lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = 0$ lo que significa que: $lim_{h\to 0}f(a+h) = f(a)$ que no es otra cosa que la definición de función continua en $x = a$ $\therefore$ si una función es derivable en a tiene que ser continua en a.



a) Una esquina o pico b) Una discontinuidad c) Una tangente vertical

Teorema: Si f es derivable en $x = a$ entonces f es continua en $x = a$

Nota: El recíproco de este teorema no es cierto, por lo que una función puede ser continua en un punto y no ser derivable allí, por ejemplo, la función: $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y sin embargo no es derivable en dicho punto.

Derivada de funciones elementales:

¿Es necesario calcular un límite cada vez que calculamos una derivada? Veamos un poco el trabajo que ya se ha efectuado al respecto u obviamente, … ¡usémoslo!

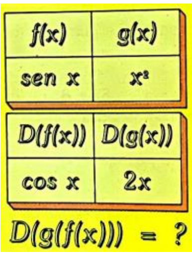
A continuación, vamos a presentar una tabla de derivadas que se obtienen calculando el límite del cociente incremental, obviamente para poder calcular algunos de estos límites tendrás que utilizar herramientas matemáticas que quizás no tengas presente o no hayas visto (por ejemplo: el binomio de Newton, identidades trigonométricas, etc.) en cualquier caso te invito a que los investigues y consultes si te interesa conocer el porqué de los resultados, de todas maneras veremos en breve la demostración de alguno de ellos.

$f(x)$	$f'(x)$
$\boldsymbol{c}$	0
$\boldsymbol{x^n}$	nx^{n-1}
$\boldsymbol{e^x}$	e^x
$\boldsymbol{c.f \quad (c = cte.)}$	$c.f'$
$\boldsymbol{f + g}$	$f' + g'$
$\boldsymbol{f - g}$	$f' - g'$
$\boldsymbol{f.g}$	$f.g' + g.f'$
$\boldsymbol{f : g}$	$\dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$
$\boldsymbol{sen\ (x)}$	$\cos(x)$
$\boldsymbol{\cos(x)}$	$-sen(x)$
$\boldsymbol{\tan(x)}$	$sec^2(x)$
$\boldsymbol{cosec(x)}$	$-cosec(x).cotang(x)$
$\boldsymbol{\sec(x)}$	$\sec(x).tang(x)$
$\boldsymbol{cotang(x)}$	$-cosec^2(x)$
$\boldsymbol{ln\ (x)}$	$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$
$\boldsymbol{a^x}$	$\boldsymbol{a^x.ln\ (a)}$

Derivadas Sucesivas:

Si una función f', derivada de f, es a su vez derivable, su función derivada se llama derivada segunda de f y se nota (en general) f'', análogamente se definen la derivada tercera de f (f''') y derivada cuarta de f (f^{IV}) y las sucesivamente.

Regla de la cadena:



f(x)	g(x)
sen x	x²
D(f(x))	D(g(x))
cos x	2x

D(g(f(x))) = ?

Supongamos que tenemos una función compuesta por otras dos, por ejemplo: $\theta(x) = g(f(x))$.

Veamos un ejemplo: $\theta(x) = sen(x^2)$, sabemos derivar la función $f(x) = sen(x)$ y también sabemos derivar la función $g(x) = x^2$, pero no sabemos derivar la función compuesta $\theta(x)$.

Veamos… para calcular la derivada debemos calcular el siguiente límite:

$$\theta'(x) = lim_{h\to 0}\frac{\theta(x+h)-\theta(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{g\big(f(x+h)\big)-g(f(x))}{h}$$
$$= lim_{h\to 0}\left[\frac{g\big(f(x+h)\big)-g(f(x))}{h}.\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}\right]$$
$$= lim_{h\to 0}\left[\frac{g\big(f(x+h)\big)-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}.\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$
$$= g'\big(f(x)\big).f'(x)\blacksquare$$

cqd.

Por lo que tenemos una forma de hallar la derivada de una función compuesta, le llamamos **regla de la cadena**:

Si f es derivable en x y g es derivable en $f(x)$, entonces la función compuesta $\theta(x) = = g\circ f$ definida mediante $\theta(x) = g\big(f(x)\big)$ es derivable en x y θ' está dada por el producto:

$$\theta'(x) = g'\big(f(x)\big).f'(x)$$

Otra notación posible (notación de Leibniz), si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

En nuestro ejemplo teníamos: $\theta(x) = sen(x^2) \therefore\ \theta'(x) = \cos(x^2)\,.2x$

Álgebra de derivadas:

Estuvimos usando ciertas reglas de derivación que asumimos como verdaderas sin probar por qué son válidas, vamos a demostrar alguna de ellos por ejemplo la regla del producto y la derivada de la función logaritmo neperiano.

El resto quedarán como trabajo personal para aquel que quiera investigarlas o adentrarse en el desafío de demostrarlas por sí mismo.

Antes de esto recuerda que:

$\log A + logB$	$\log(A.B)$
$\log A - logB$	$\log(A{:}B)$
$k.\log A$	$logA^k$

Si tenemos que: $h(x) = \ln\,(x)$ donde $x > 0$ al aplicar la definición de derivada obtenemos:

$$lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h}$$

Trabajemos el argumento del límite y luego calculamos el límite a la expresión resultante:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln(x)}{h}=\frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\frac{1}{h}.\,ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h}=ln\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\cdot\frac{1}{x}}=$$

$ln\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}$ si tomamos el límite de esta expresión cuando $h\longrightarrow 0$ tenemos que:

$\frac{x}{h}\longrightarrow\infty$ y si recordamos la definición del número e: $\boxed{lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e}$

En este caso el cociente $\frac{x}{h}$ cumple el papel de n y tenemos que:

$$lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h}=ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ \blacksquare$$

cqd.

La regla del producto nos dice que, si tenemos que derivar el producto de dos funciones, dicha derivada es la suma de dos términos donde una de ellos es el producto de una de las funciones derivada por la otra sin derivar y el otro término es el producto de las funciones derivando la que no fue derivada en el primer término multiplicada por la otra función sin derivar, esto sería:

$$\text{Si } h(x)=f(x).\,g(x)\Longrightarrow h'(x)=f'(x).\,g(x)+f(x).\,g'(x)$$

Veamos por qué esto es cierto: Antes de derivar apliquemos logaritmo miembro en miembro, es decir como $h(x)=f(x).\,g(x)$ tenemos: $ln[h(x)]=ln[f(x).\,g(x)]$ entonces aplicando la propiedad del logaritmo del producto nos queda:

$ln[h(x)]=\ln\big(f(x)\big)+\ln\big(g(x)\big)$ ahora si derivando miembro a miembro obtenemos:

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\Longrightarrow h'(x)=h(x).\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\right]\Longrightarrow h'(x)$$
$$=f(x).\,g(x).\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\right]\Longrightarrow h'(x)=g(x).\,f'(x)+f(x).\,g'(x)\blacksquare$$

cqd.

¡Prueba demostrar de forma muy similar la regla del cociente!

Aplicaciones de la Derivada:

Números Críticos. Crecimiento y Decrecimiento. Máximos y Mínimos locales y Absolutos:

Sea c un número perteneciente al dominio de la función f. Entonces $f(c)$ es el:

- Valor **máximo absoluto** de f en su domino si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en el dominio de la función.
- Valor **mínimo absoluto** de f en su domino si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en el dominio de la función.
- Valor **máximo local** de f, si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto contenido en el dominio de f que contiene a c.
- Valor **mínimo local** de f, si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto contenido en el dominio de f que contiene a c.

<u>Teorema del Valor Extremo</u>: Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

<u>Teorema de Fermat:</u> Si f tiene un máximo o mínimo local en $x = c$, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Veamos que el Teorema no dice que el hecho de que la derivada se anule implica la existencia de un extremo (es decir el recíproco del Teorema de Fermat no es válido). Veamos también que puede haber un valor extremo en un punto en donde no se anule la derivada porque podría no existir allí.

<u>Ejemplo 1</u>:

Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en $x = 0$. El hecho de que la derivada se anule en $x = 0$ sólo significa que la curva tiene una recta tangente horizontal en $(0,0)$.

<u>Ejemplo 2</u>:

La función $f(x) = |x|$ presenta en $x = 0$ un valor mínimo local y absoluto y sin embargo sabemos que la función no es derivable en ese punto, por lo tanto su derivada no se anula allí (ya que no existe)

Llamemos entonces números crítivos a los números pertenecientes al dominio de la función en donde la derivada se anule o bien no exista. De manera que:

Un **número crítico** de una función f es un número $x = c$ en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o bien $\nexists\ f'(c)$.

Si f tiene un máximo o un mínimo local en $x = c$, entonces c es un número crítico de f.

<u>Método del Intervalo Cerrado</u>:

Para hallar los valores máximo y mínimo **absolutos** de una función f **continua** sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

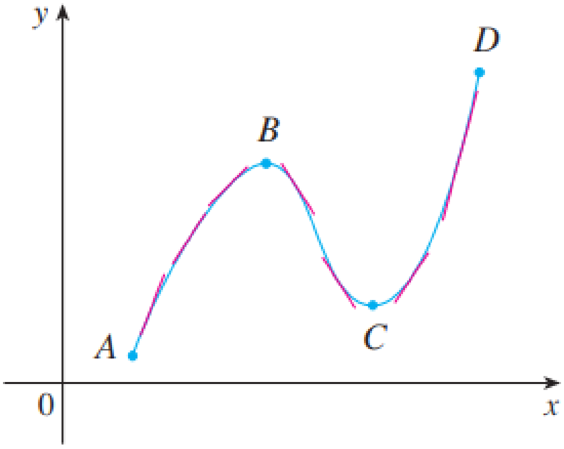
1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.

3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto y el más pequeño de dichos valores es el valor mínimo absoluto.

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de nuestra capacidad para deducir hechos acerca de una función f a partir de la información que se obtiene de sus derivadas. Ya que $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $\big(x, f(x)\big)$, nos indica la dirección de la curva en cada punto. Así, es razonable esperara que la información relacionada con $f'(x)$ nos proporcione información asociada con $f(x)$.

¿Qué nos dice f' respecto de f?

Para ver cómo la derivada de f puede decirnos donde una función es creciente o decreciente, veamos la figura… entre A y B y entre C y D, las rectas tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x) > 0$. Entre B y C las rectas tangentes tienen pendiente negativa, así que $f'(x) < 0$. Pareciera que podemos sospechar que f crece cuando f' es positiva y decrece cuando f' es negativa.



Tenemos entonces:

- ✓ Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente sobre dicho intervalo.
- ✓ Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente sobre dicho intervalo.

Demostración:

Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo donde $x_1 < x_2$. Debemos demostrar que si $f'(x) > 0$ entonces f es creciente en el intervalo es decir debemos probar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como $f'(x) > 0$, por lo tanto f es derivable en el intervalo y por consecuencia derivable en (x_1, x_2). Por el *Teorema del Valor Medio*[1] existe un c entre x_1 y x_2 tal que: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c).(x_2 - x_1)$, ahora bien como sabemos que $f'(c) > 0$ (de hecho lo es para toda x en el intervalo) y además tenemos que $(x_2 - x_1) > 0$ ya que $x_1 < x_2$ entonces el producto del segundo miembro de la ecuación en positivo y por lo tanto la resta del primer miembro también debe serlo de manera que $f(x_2) > f(x_1)$ que es lo

[1] Teorema del Valor Medio:
Sea una función f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces $\exists\, c \in (a, b) \;/\; f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

que necesitábamos probar para demostrar que f es creciente en un intervalo que contiene a x_1 y x_2.

La igual forma podemos probar que si $f'(x) < 0$, entonces f es decreceiente. ■

cqd.

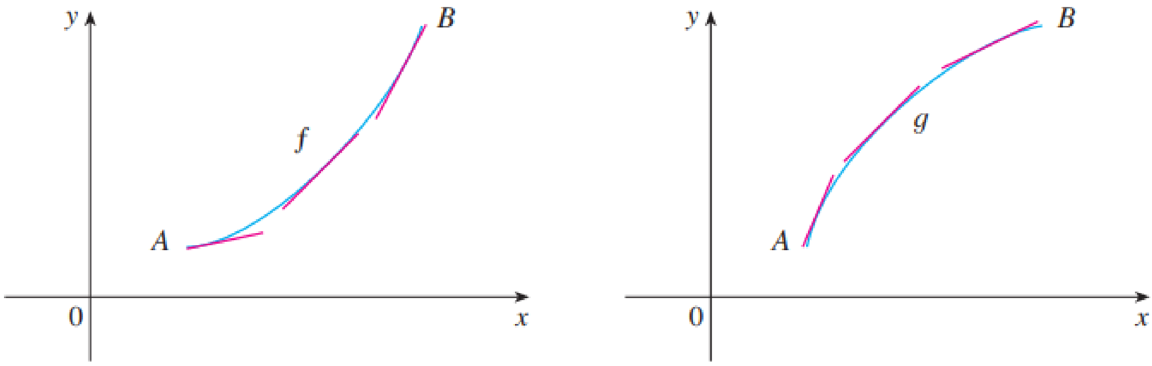
Prueba de la primera derivada:

Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a. Si f'cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b. Si f'cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c. Si f'no cambia de signo en c, entonces f no presenta extremo local en c.

¿Qué nos dice f' respecto de f?

En la grafica se muestran dos funciones crecientes sobre el intervalo (a, b). Ambas curvas son continuas en (a, b) pero son notoriamente diferentes porque se curvan de distinta manera, ¿cómo podemos distinguir entre estos dos tipos de comportamiento?, en el primer caso la curva queda arriba de las rectas tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* en (a, b). En la segunda la gráfica de la función se encuentra debajo de las rectas tangentes y se dice que la g es *cóncava hacia abajo* en (a, b).



a) Cóncava hacia arriba   b) Cóncava hacia abajo

Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus rectas tangentes sobre un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** sobre I. Si la gráfica de f queda por debao de todas sus rectas tangentes, se dice que es **cóncava hacia abajo** sobre I.

Prueba de concavidad:

- ✓ Si $f''(x) > 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
- ✓ Si $f''(x) < 0$ para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

Definimos:

Un punto P sobre una curva $y = f(x)$ se llama ***punto de inflexión*** si f es continua allí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Prueba de la segunda derivada:

Supongamos que f'' es continua cerca de $x = c$

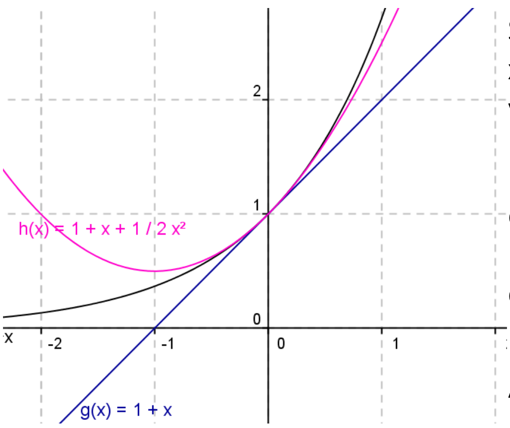
a. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = c$.
b. Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = c$.

Aproximación Lineal y Cuadrática. Polinomios de Taylor:

Los polinomios son de las funciones más “buenas” que hemos usado hasta ahora. Este calificativo reside en el hecho de que son funciones continuas con infinitas derivadas continuas; hasta en lo referente a lo numérico son funciones simples, ya que para obtener justamente las imágenes sólo se deben realizar sumas y multiplicaciones.

La idea aquí será aproximar diversas funciones por polinomios, es decir por funciones más sencillas.

Veamos un ejemplo…



Si tenemos la función $f(x) = e^x$, sabemos que en x=0 tanto la función como todas sus derivadas valen 1.

El polinomio de primer grado $g(x) = 1 + x$ (que no es otra cosa que la linealización de f en x=0) tiene la característica de que tanto g como g’ coinciden con f y su derivada primera en x=0 respectivamente.

Ahora si queremos obtener un polinomio que aproxime mejor a dicha función, podríamos pensar en un polinomio de segundo grado que coincida, además con la derivada segunda de f.

Geométricamente podríamos explicar esto pensando en obtener un polinomio que posea la misma “concavidad” de f.

En definitiva, con estos datos, obtenemos el polinomio $h(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

“Jugando” de la misma manera podríamos obtener un polinomio de grado 3, de grado 4 y así.

Lo que vamos a hacer es justamente buscar ese tipo de polinomios.

Desarrollo:

Sea una función f con n derivadas en x=0

1. Sea $p_1(x) = a_1x + a_0$. Queremos que:

$$p_1(0) = f(0) \text{ y } p_1'(0) = f'(0)$$

Entonces no queda otra que:

$$a_0 = f(0) \text{ y } a_1 = f'(0)$$

Ahora busquemos $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. A las condiciones pedidas en 1. le agregamos que $p_2''(0) = f''(0)$.

Entonces:

$$p_2(0) = f(0) \rightarrow a_0 = f(0)$$

$$p_2'(0) = f'(0) \rightarrow a_1 = f'(0)$$

$$p_2''(0) = f''(0) \rightarrow 2a_2 = f''(0) \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

Ampliemos la búsqueda a un polinomio $p_5(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, de forma que tanto f como sus derivadas hasta el orden 5 en $x = 0$ coincidan p_5 y sus derivadas.

Luego:

Por lo visto en 2. tenemos que $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$ y $a_2 = \frac{1}{2}f''(0)$. Además:

$$p_5^{(3)}(0) = 3.2.a_3 = f^{(3)}(0) \rightarrow a_3 = \frac{1}{3.2}f^{(3)}(0) = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

$$p_5^{(4)}(0) = 4.3.2.a_4 = f^{(4)}(0) \rightarrow a_4 = \frac{1}{4.3.2}f^{(4)}(0) = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$

$$p_5^{(5)}(0) = 5.4.3.2.a_5 = f^{(5)}(0) \rightarrow a_5 = \frac{1}{5.4.3.2}f^{(5)}(0) = \frac{f^{(5)}(0)}{5!}$$

Así, generalizando…

Si f es una función que tiene derivadas hasta el orden n en el punto $x = 0$, siendo $n \geq 1$, buscaremos un polinomio que coincida con f y sus n derivadas en $x = 0$.

Entonces se deben cumplir las siguientes $n + 1$ condiciones, a saber:

$$p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p^{(2)}(0) = f^{(2)}(0), \dots, p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \qquad \Theta$$

Ensayando con un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$, y operando con él usando las condiciones Θ para poder hallar los coeficientes de p, procediendo de forma análoga a los puntos anteriores, notamos que $k!\,a_k = f^{(k)}(0)$, con lo que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad \text{para } k = 0,1,..,n$$

- Observaciones
    - $f^{(0)}(0) = f(0)$

- El grado del polinomio será a lo sumo n (será exactamente n si $f^{(n)}(0) \neq 0$

Ejemplo:

Halla un polinomio que coincida con $f(x) = e^x$ y sus derivadas hasta el orden 5 en $x = 0$

Imitando el desarrollo anterior, la idea será obtener un polinomio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Es decir que nuestra tarea se aboca a hallar los coeficientes a_i.

Notemos que $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(5)}(x) = e^x$

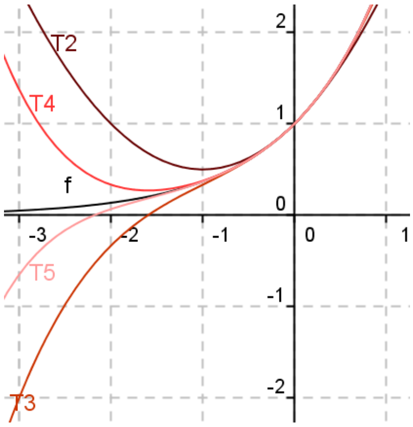
Con lo que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(5)}(0) = 1$

Luego los coeficientes serán $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$

Por lo que el polinomio quedará de la siguiente forma:

$$p(x) = \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2!}x^2 + 1.x + 1 =$$

$$= \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$



La curva identificada como T5 es la que corresponde al polinomio del ejemplo. Las otras son de polinomios de iguales características, pero de grado 2, 3 y 4.

Teorema: Sea f una función con derivadas de orden n en $x = 0$. Exsite un único polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ de grado menor o igual a n que satisface las $n + 1$ condiciones:

$$p(0) = f(0), p'(0) = f'(0), p''(0) = f''(0), p'''(0) = f'''(0), \ldots, p^n(0) = f^n(0)$$

Dicho polinomio tiene por coeficientes: $a_k = \frac{f^k(0)}{k!}$ con $k = 0,1, \ldots, k$.

Entonces el polinomio será de la siguiente forma:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (\Delta)$$

Generalizando aún más podemos demostrar que si una función f tiene derivadas de orden n en $x = a$, existe un único polinomio de grado menor o igual a n que coincide con f y sus primeras n derivadas en $x = a$. El mismo viene dado por la fórmula:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \qquad (O)$$

Definición: Sea f una función con derivadas de orden n en $x = a$. Llamamos Polinomio de Taylor de orden n generado por la función f en x=a, y se simboliza $T_{f,a,n}(x)$, a:

$$T_{f,a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Observación: Notar que la fórmula (Δ) corresponde a un polinomio de Taylor de orden n generado por la función f en $x = 0$. Otra notación puede ser: $T_n f$.

Algunos ejemplos:

1. Obtenga el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = e^x$ en $x = 1$.

Como $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$ tenemos que $f(1) = f'(1) = \ldots = f^{(n)}(1) = e$ por lo que $T_{f,a,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x-1)^k$.

2. Obtenga el polinomio de Taylor de orden m de la función $f(x) = sen(x)$ en $x = 0$.

Veamos primero que sucede con las derivadas sucesivas de esta función:

$f(x) = sen(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

$f^{(2)}(x) = -sen(x)$

$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$

$f^{(4)}(x) = sen(x)$

$f^{(5)}(x) = \cos(x)$

$f^{(6)}(x) = -sen(x)$

$f^{(7)}(x) = -\cos(x)$

$f^{(8)}(x) = sen(x)$

Notemos que se empiezan a repetir cíclicamente. De está manera, evaluando estas derivadas en $x = 0$ tendremos:

$$\begin{aligned}
f(0) &= f^{(4)}(0) = f^{(8)}(0) = \ldots = f^{(4n)}(0) = 0 \\
f'(0) &= f^{(5)}(0) = f^{(9)}(0) = \ldots = f^{(4n+1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(0) &= f^{(6)}(0) = f^{(10)}(0) = \ldots = f^{(4n+2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(0) &= f^{(7)}(0) = f^{(11)}(0) = \ldots = f^{(4n+3)}(0) = -1
\end{aligned}$$

Observar que de esta manera en el polinomio los términos de exponente par se anulan, ya que los coeficientes son 0.
En definitiva vemos que los coeficientes de los términos de exponente impar se alternan en signo y tienen la siguiente forma:

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

Con lo que

$$(T_{2n+1}f)(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Errores

A mayor grado del polinomio de Taylor pareciera ser mejor la aproximación.

Supongamos que queremos estimar el número e y para ello utilizamos el polinomio de Taylor generado por la función $f(x) = e^x$ en $x = 0$, es decir:

$$T_{n,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Para ello tendremos que tomar $x = 1$, valor que está “relativamente lejos” de 0. Por lo que buscaremos los valores de $T_{n,f}(1)$. Veremos como usando sucesivos polinomios de Taylor mejoraremos la aproximación:

$e \approx T_{1,f}(1) = 2$ $\qquad$ $e \approx T_{2,f}(1) = 2.5$

$e \approx T_{3,f}(1) = 2.5 + \frac{1}{6} = 2.\hat{6}$ $\qquad$ $e \approx T_{4,f}(1) = 2.5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 2.708\hat{3}$

Como se puede apreciar, a medida que aumentamos el grado del polinomio se van obteniendo más cifras exactas.

Lo interesante es que podemos obtener una forma de “medir” el error cometido. Algunas de ellas se presentan en el siguiente teorema.

> Teorema: Si f es $n+1$ veces derivable en un entorno de $x = a$, entonces:
>
> (Fórmula de Lagrange) $\quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ con c entre x y a.

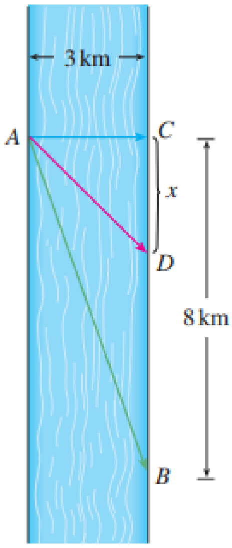
Problemas de Optimización:

> Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos:
>
> Suponga que c es un número crítivco de una función continua f definida sobre un intervalo.
>
> - ✓ Si $f´(x) > 0 ´ \forall\, x < c$ y $f´(x) < 0 \;\forall\, x > c$, entonces $f(c)$ es un valor **máximo absoluto** de f.
> - ✓ Si $f´(x) < 0 ´ \forall\, x < c$ y $f´(x) > 0 \;\forall\, x > c$, entonces $f(c)$ es un valor **mínimo absoluto** de f.

Ejemplo 1:

Un hombre lanza su lancha desde un punto A a la orilla de un río recto de 3km. de ancho y quiere alcanzar el punto B, 8 km. abajo en la orilla opuesta en el menor tiempo posible.

Podría dirigir su lancha por el río en forma horizontal hasta el punto Cy después correr hacia B, podría dirigirse con su lancha hacia B o bien podría dirigirse con su lancha hacia un punto C (entre C y B) en la orilla opuesta para después correr hacia B por tierra. Si el hombre puede remar a6 km/h y correr a 8km/h ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sean posible? (suponemos que la rapidéz del agua es insignificante en comparación con la rapidéz a la que el hombre rema).



Solución:

Sea x la distancia entre C y D, entonces la distancia que ha de correr es $|\overline{DB}| = 8 - x$ y el teorema de Pitágoras nos proporciona la distancia que debe remar: $|\overline{AD}| = \sqrt{x^2+9}$. Utilizamos la ecuación: $tiempo = \frac{distancia}{rapidéz}$ entonces el tiempo de remo es: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$, y el tiempo de carrera es $\frac{(8-x)}{8}$, por lo que el tiempo total T como una función de x es:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$$

El domino de T es el intervalo cerrado $[0, 8]$. Observe que si $x = 0$ el hombre rema hacia C y si $x = 8$ el hombre rema hacia B.

La derivada de T es $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$, así utilizando el hecho de que $x \geq 0$, tenemos:

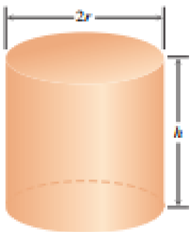
$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow 16x^2 = 9.(x^2+9) \Leftrightarrow 7x^2 = 81$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{81}{7} \Longrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

El único número crítico es $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Para saber si el mínimo ocurre en este número crítico o en un extremo del dominio $[0,8]$, evaluemos T en los tres puntos:

$$T(0) = 1{,}5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Como el más pequeño de estos valores de T se produce cuando $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$, el valor mínimo absoluto de T debe ocurrir allí. De manera que el hombre debe desembarcar en un punto que se en encuentra a $\frac{9}{\sqrt{7}}$ km. ($\approx 3.4km.$) río debajo de su punto de partida.

Ejemplo 2:



Se pide diseñar una lata con forma de cilindro circular recto que tenga capacidad para 1l. (1 litro). ¿Qué dimensiones debe tener la lata si se desea utilizar la menor cantidad posible de material?

Solución: Si r y h se miden en centímetros, el área superficial de la lata en cm^3 es:

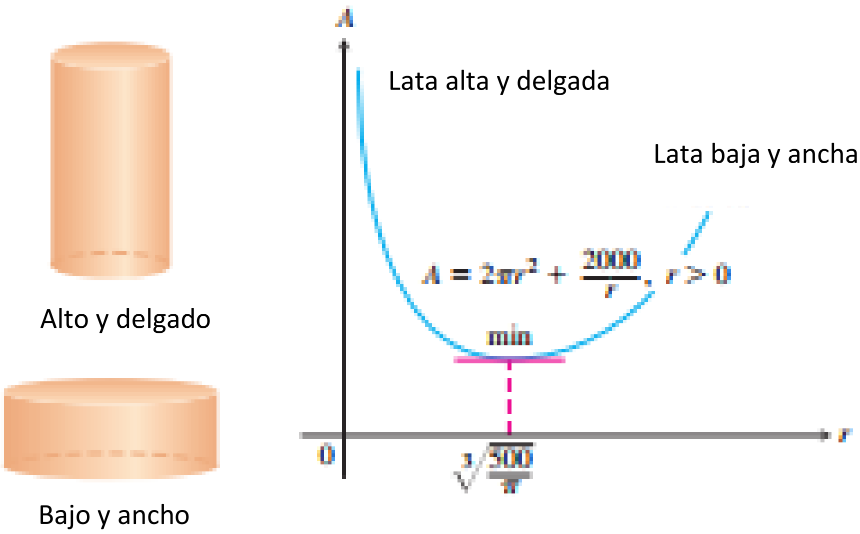
$$\text{Área superficial de la lata:} \quad A(r,h) = \underbrace{2\pi r^2}_{tapas\ circulares} + \underbrace{2\pi r h^2}_{pared\ circular}$$

¿Cómo podemos interpretar la frase menor cantidad posible de material? En primer lugar obviamos el espesor del material y el desperdicio en la fabricación. Luego nos preguntamos cuáles son las dimensiones de r y h que hacen el área superficial tan pequeña como se pueda sin dejar de satisfacer la restricción $\pi r^2 h = 1000$.

Para expresar el área superficial como una expresión de una variable, despejamos (por ejemplo) h en la condición inicial y tenemos: $h = \frac{1000}{\pi r^2}$, en consecuencia, nos queda:

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\cancel{\pi r}\frac{1000}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} \Longrightarrow A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Nuestra meta es encontrar un valor de $r > 0$, que minimice el valor de A. La figura muestra que tal valor existe…



Observe a partir de la gráfica que para r pequeño (un recipiente alto y delgado) como una especie de tubo, el término $\frac{2000}{r}$ domina y A es grande, para r grande (un recipiente bajo y ancho) como un molde para pizza, el término $2\pi r^2$ domina y el A es grande también. Como A es diferenciable con $r > 0$, y la función no está definida en un intervalo cerrado podemos sospechar que el valor mínimo aparecerá donde la derivada primera se anule, de esta forma:

$$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

[2] Nótese que $\pi r^2 h = 1000$; $\quad (1litro = 1000cm^3)$

Busquemos el valor (o valores de r) que anulan la derivada $\therefore 0 = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \Longrightarrow 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Longrightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42$

¿Qué pasa en $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$?

Si observamos la derivada segunda: $\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$ es positiva en todo el dominio de A por lo tanto la gráfica es siempre cóncava hacia arriba y el valor de A en $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ es mínimo absoluto. El valor correspondiente de h (después de realizar algunas operaciones algebraicas es: $h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$.

Rta: La lata con capacidad para un litro que utiliza la menor cantidad de material para su construcción, tiene una altura igual al diámetro, en este caso con $r \approx 5{,}42cm.$ y $h \approx 10{,}84cm.$

Pasos para la resolución de problemas de optimización:

1. ***Leer el problema:*** Lea el problema. ¿Qué datos se tienen? ¿Cuál es la cantidad desconocida que hay que optimizar?
2. ***Hacer un dibujo:*** Esquematice la situación e identifique los datos que puedan resultar importantes en la resolución de la situación.
3. ***Introducir el nombre de las variables en juego:*** haga una lista de las relaciones que encuentre en el dibujo o esquema, e identifique la variable desconocida.
4. ***Escribir una ecuación para la cantidad desconocida:*** de ser posible exprese la incógnita como función de una sola variable o mediante dos ecuaciones con dos incógnitas.
5. ***Examinar los puntos críticos y los extremos del dominio de la función:*** Use la información que conoce a cerca de la forma de la gráfica de la función si es que la conoce. Emplee la primera y la segunda derivada para identificar y clasificar los puntos críticos de la función.

Bibliografía:

- Guzmán, Miguel de, Colera, José, Salvador, Adela. (1987) Matemáticas Bachillerato 2. España, Madrid: Anaya.
- Guzmán, Miguel de, Colera, José, Salvador, Adela. (1988) Matemáticas Bachillerato 3. España: Anaya.
- Stewart, James. (2008) Cálculo de una variable- Trascendentes Tempranas. (6ta. ed.) México: Cengage Learning.
- Napolitano, Mónica (2011) Apuntes de la cátedra Análisis Matemático II (2do. C) FCEIA-UNR.
- Thomas, George B, Jr. (2006). Cálculo una variable. (11ma. ed.) México: Pearson.