El papel del infinito en matemáticas es extraordinariamente variado y profundo. En el cálculo infinitesimal, en particular, se ejerce básicamente a través de la noción de límite, que es la que subyace a los conceptos de derivada e integral. Mediante el paso al límite en el proceso de división, que da lugar a la derivada, y en el de suma, que aparece en la integral, se obtiene una drástica simplificación conceptual. Viene a ser, el infinito, como los conceptos utópicos de los filósofos en política: una noción útil para señalar una dirección. Y necesitamos valernos de direcciones, aunque los objetivos a los que apunten sean inalcanzables.

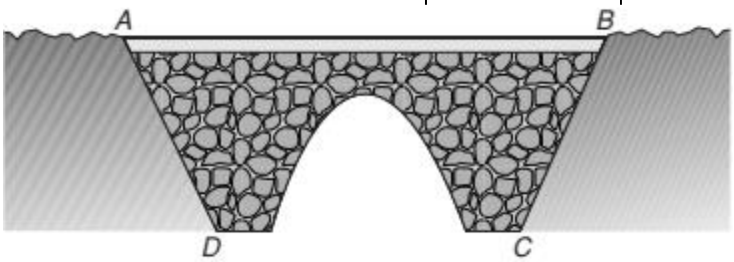
Introducción al tema:

Cualquiera que haya tenido un negocio, conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe decidir cuánta pintura utilizará en un trabajo. Cómo un m^3 de pintura cubrirá cierta área en m^2, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada, por lo general esto sólo requiere de aritmética simple (las paredes y los techos son rectangulares de modo que el área a determinar es una suma de productos de base por altura).

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra en la figura debe pulirse para remover el hollín. ¿Cómo calcularía el contratista el número de m^2 del área de la pared vertical de cada lado del puente?

Quizás el área podría ser estimada como tres cuartos del área del trapecio formado por los puntos A, B, C y D. Pero un cálculo más preciso, podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (a lo largo de una vía de tren); esto requeriría un enfoque más refinado.



Si la forma del arco del puente puede describirse en forma matemática por medio de una función, el contratista podría utilizar el método que vamos a estudiar en esta unidad (integración). La integración tiene muchas aplicaciones, la más simple es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras aplicaciones incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a una fuerza de flexión, el cálculo de la distancia recorrida bajo el mar por un submarino y el cálculo del pago de electricidad por una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso del mes.

Evolución de la Integral:

La noción de Integral y el cálculo de áreas y volúmenes permanecieron prácticamente estancadas desde el siglo III a. de C. (a partir de Arquímedes) hasta el siglo XVII.

Kepler comenzó a preocuparse seriamente del cálculo de volúmenes, al parecer motivado por la inexactitud de las cuentas de los vinateros al medir volúmenes de vino que cabían en sus toneles. Estudió a fondo el asunto y publicó un tratado en latín; *Stereometría doliorum* (Cálculo de volúmenes de barriles) que comenzó a motivar a otros matemáticos del tiempo.

Con Newton Y Leibniz llegó el comienzo de la sistematización y los grandes descubrimientos del cálculo al enlazar, en un cuerpo de pensamiento, la derivada y la integral y conseguir, así, procedimientos operativos rápidos y muy manejables.

La integral, junto con la derivada, se constituyó en una herramienta enormemente poderosa para expresar y calcular diversos conceptos importantes de la física y de otras disciplinas. El área y el volumen fueron los primeros de toda una serie. El trabajo, como integral de una fuerza que recorre un espacio; el caudal, como integral del flujo puntual en una corriente no homogénea; el espacio recorrido por un móvil, como integral de la velocidad; la inercia de un cuerpo con respecto a un eje de giro, como integral de la masa puntual por el cuadrado de la distancia al eje, son otros tantos de los numerosos ejemplos de aplicabilidad de la integral.

Cálculo de Primitivas Elementales:

Como hemos visto la derivada de x^3 es $3x^2$ y escribimos $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$.

Esto mismo se puede expresar diciendo que la primitiva de $3x^2$ es x^3 y lo escribiremos así:

$$\int 3x^2dx = x^3$$

La obtención de primitivas es… el proceso inverso al de derivación.

Teniéndolo en cuenta intenta calcular (es aconsejable que tengas a mano tu tabla de derivadas)

1. $\int 1\,dx$
2. $\int 2x\,dx$
3. $\int x^5\,dx$
4. $\int x^k\,dx$
5. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$
6. $\int (3x^3 - 7x - 2)\,dx$
7. $\int \frac{1}{x}\,dx$
8. $\int \frac{1}{x-5}\,dx$
9. $\int \frac{3}{x+4}\,dx$
10. $\int \cos(x)\,dx$
11. $\int \cos(2x)\,dx$
12. $\int 5.\cos(3x+1)\,dx$
13. $\int sen(x)\,dx$
14. $\int sen(x).\cos(x)\,dx$
15. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$
16. $\int \cos(x^2+1)\,.\,2x\,dx$
17. $\int \sqrt{x-5}\,dx$
18. $\int \sqrt{x^2+2}\,2x\,dx$
19. $\int \frac{3x^2-2x}{x^3-x^2+3}\,dx$
20. $\int e^{x-5}\,dx$

¿Qué reglas debemos conocer para, dada una función $f(x)$, encontrar otra $F(x)$, que cumpla la condición $F'(x) = f(x)$?

$F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, si $F'(x) = f(x)$, entonces se escribe: $F(x) = \int f(x)\,dx.$ Vemos que cada función tiene infinitas primitivas ya que si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ también lo son todas las funciones de la forma $F(x) + K, \forall\, K \in \mathbb{R}$. Por eso se suele escribir: $\int f(x) = F(x) + K.$ Así a la expresión $\int f(x)$ le llamamos integral indefinida de f o simplemente **integral** de f.
Puesto que el proceso de integración es "prácticamente" opuesto al de derivación, muchas de sus propiedades se deducen inmediatamente de las **propiedades** de las derivadas. Las más importantes son:

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$

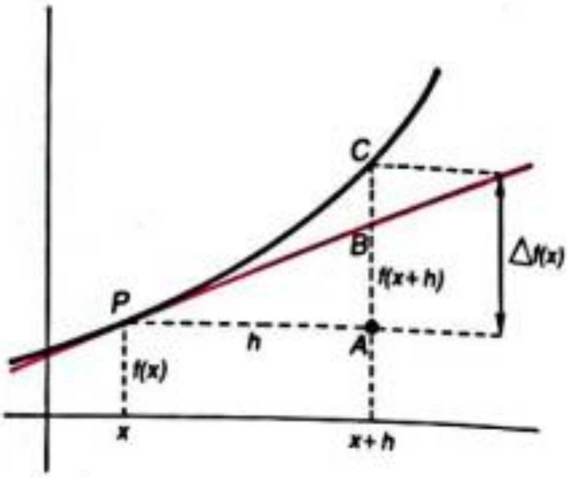
Veamos algunas integrales inmediatas:

$\int x^k\,dx$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$ si
$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln(x) + k$
$\int sen\,(x)\,dx$	$-\cos(x) + k$
$\int \cos(x)\,dx$	$sen(x) + k$
$\int \frac{1}{cos^2(x)}\,dx = \int (1 + tg^2(x))\,dx$	$tg(x) + k$
$\int e^x\,dx$	$e^x + k$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln(x)} + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arc\,sen\,(x) + k$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$arc\,cos\,(x) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$arc\,tg\,(x) + k$

Diferencial de una función en un punto:

El incremento de una función f en un punto x es: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Como ya hemos visto, la recta tangente en P es la recta que mejor se aproxima a la curva en las cercanías del punto, lo cual quiere decir que BA es una buena aproximación de CA si h

es pequeño. Al valor BA que es el incremento correspondiente a la recta tangente en x se le llama diferencial de la función en el punto x para el incremento h, se escribe $df(x)$, teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente es $f'(x)$, se tiene que: $df(x) = f'(x).h$ con esto podemos decir que $df(x)$ es una buena aproximación $\Delta f(x)$ si el incremento h con que se ha calculado es pequeño.



Para la función $g(x) = x$ se tiene que: $dg(x) = g'(x).h = 1.h = h$, es decir: $dx = h$ por lo que para una función cualquiera $f(x)$ podemos escribir: $df(x) = f'(x).dx$ si despejamos $f'(x)$ tenemos: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ y así podemos ver a la derivada de una función como un verdadero cociente de diferencias.

La regla de la cadena y el cálculo de primitivas:

Recordemos la regla de la cadena, si: $h(x) = g\big(f(x)\big)$, entonces:

$$h'(x) = g'\big(f(x)\big).f'(x) \qquad (\blacksquare)$$

Hagamos una sustitución, llamemos $y = f(x)$ tenemos entonces $dy = f'(x)dx$, de manera que integrando miembro a miembro la ecuación $(\blacksquare)$ tenemos:

$$\int g'(y)\,dy = h(x)$$

Si la integral es inmediata el proceso anterior es muy conveniente.

<u>Ejemplo</u>: Calcule: $I = \int \cos(x^2 - 5x + 3)\,.\,(2x - 5)dx$

Tomemos $y = (x^2 - 5x + 3)$ de manera que $dy = (2x - 5)dx$ entonces sustituyendo nos queda:

$$I = \int \cos(y)\,dy = sen(y) + k$$

Volviendo a nuestra variable original tenemos: $I = sen(x^2 - 5x + 3) + k$

Integración por partes:

Recordemos la regla de derivación para el producto:

$$\frac{d}{dx}[u(x).v(x)] = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

Despejando el último sumando y expresado en notación diferencial resulta:

$$u(x)dv(x) = \frac{d}{dx}[u(x).v(x)] - v(x)du(x)$$

Si integramos miembro a miembro tenemos:

$$\int u(x)dv(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)du(x)\, dx$$

O de manera similar:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx \;\; (\#)}$$

<u>Ejemplo</u>: Calcule: $I = \int x.e^x dx$

Observemos que al derivar la función x se simplifica y al buscar una primitiva para la función e^x no se complica, por lo tanto, hagamos que $u(x) = x \;\Rightarrow du(x) = 1dv(x)$ y $dv'(x) = e^x dx \Longrightarrow v'(x) = \int e^x dx = e^x$ por lo que utilizando la fórmula $(\#)$ tenemos:

$$I = \int x.e^x dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + k$$

Suma de Riemann:

Con la idea de poder definir la integral definida vamos a introducir ciertos términos y simbologías. Consideremos el cálculo de la suma S de los primeros n enteros positivos:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

Si escribimos la ecuación conmutando en orden decreciente los sumandos del segundo miembro tenemos:

$$S = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades tenemos:

$$2s = n.(n+1) \therefore \;\; s = \frac{n.(n+1)}{2} \qquad (*)$$

Por ejmplo la suma de los primeros 100 enteros positivos sería (con n=100)

$$S = \frac{100.101}{2} = 5050$$

Por conveniencia para indicar una suma introduciremos la notación **sigma o sumatoria**, llamada así por la letra griega Σ (sigma) que usaremos. Por ejemplo, la notación:

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+5)$$

Denota la suma de aquellos números que se obtienen de reemplazar en la expresión $(2k+5)$ k primero por 1, luego por 2 y finalmente por 3. Así obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+5) = [2(1)+5]+[2(2)+5]+[2(3)+5] = 7+9+11 = 27$$

La letra k se llama *índice de la sumatoria*; los números 1 y 3 son los *límites de la sumatoria* (1 es el *límite inferior* y 3 el *límite superior*). Los valores del índice comienzan en el límite inferior y toman valores enteros sucesivos hasta llegar al límite superior. El símbolo usado para el índice es "mudo" en el sentido de que no afecta a la suma de los términos (Puede usarse cualquier otra letra).

Ejemplo: Evaluar

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^{j+1}(j-1)^2 = [(-1)^1(-1)^2]+[(-1)^2(0)^2]+[(-1)^3(1)^2]$$
$$= (-1)+0+(-1) = -2$$

Para expresar la suma de los primeros n enteros positivos con la notación de sumatoria podemos escribir:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n$$

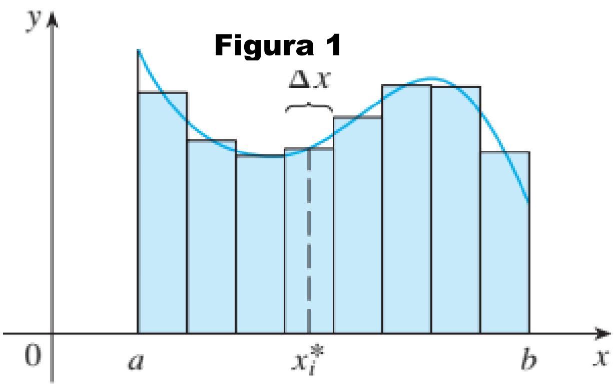
De manera que por la ecuación $(*)$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

Vea que esta ecuación depende sólo de n y NO de k.

Veamos una sumatoria muy particular:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$



Esta sumatoria se llama suma de Riemann, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), veamos que si f es positiva entonces la suma de Riemann puede interpretarse como la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 1, de manera que la suma de Riemann puede interpretarse como el área bajo la curva $y = f(x)$, desde $x = a$ y hasta $x = b$.

Si f toma valores tanto positivos como negativos (como en la figura 2) entonces la suma de Riemann nos da las áreas de los rectángulos que se encuentran por sobre el eje x y la suma del valor opuesto de las áreas de los rectángulos que están por debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en azul menos las áreas de los rectángulos en amarillo)

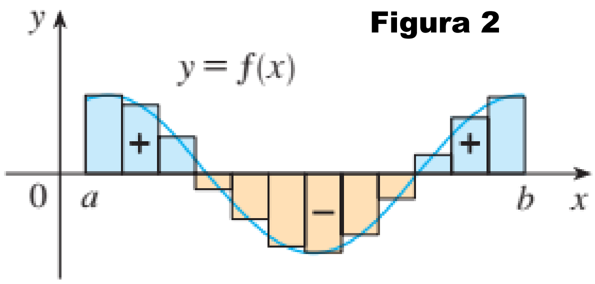


Figura 2

Cuando tomamos el límite de esa suma de Riemann obtenemos una situación como la que se ilustra en la figura 3.

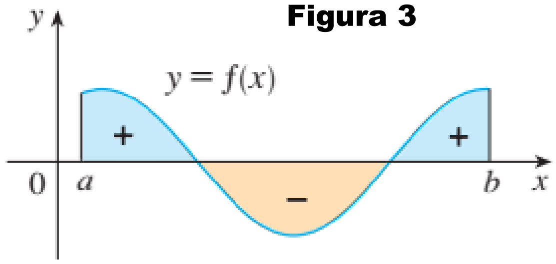


Figura 3

Veamos el resultado de algunas sumatorias en particular (la primera de ellas ya la hemos deducido)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n.(n+1)}{2} \quad \mathbf{(1)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} \quad \mathbf{(2)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2 \quad \mathbf{(3)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \quad \mathbf{(4)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c.\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \mathbf{(5)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \mathbf{(6)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \quad \mathbf{(7)}$$

Ejemplo:

a. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestras de los puntos extremos de la derecha, donde $a = 0, b = 3$ y $n = 6$.
b. Evalúa la suma de Riemann con n subintervalos y calcule el valor del límite de esta suma cuando $n \to \infty$
c. Encuentre una primitiva de f, evalúela en b, luego en a y reste estos resultados.
d. Compare los valores obtenidos en los apartados b. y c.

Solución:

a. Con $n = 6$ el ancho de cada rectángulo será: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ y los puntos muestras (extremos de la derecha) serán $x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5, x_4 = 2, x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3$ de manera que la suma de Riemann no queda:

$$R_6 = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$
$$= f(0.5)\Delta x + f(1)\Delta x + f(1.5)\Delta x + f(2)\Delta x + f(2.5)\Delta x + f(3)\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) = \boxed{-3.9375}$$

b. Con n subintervalos, tenemos: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$, y así: $x_0 = 0, x_1 = \frac{3}{n}, x_2 = \frac{6}{n}, x_3 = \frac{9}{n}$, en general: $x_i = \frac{3i}{n}$

Quedándonos entonces la siguiente expresión para la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i\right] =$$

$$= \frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\} =$$

$$= \left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

Si a esta expresión le calculamos el límite cuando $n \to \infty$ tenemos:

$$lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = \boxed{-6.75}$$

Esta suma no puede interpretarse como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos, pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$ donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 4. En la figura 5 se ilustran los cálculos al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que la suma de Riemann tiende al valor obtenido cuando $n \to \infty$.

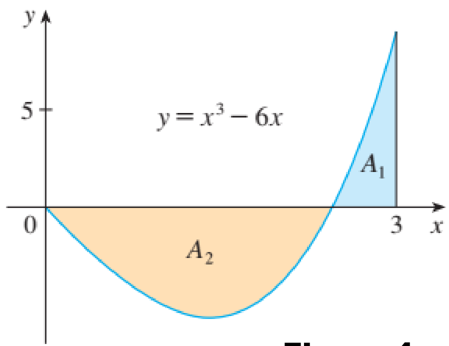


Figura 4

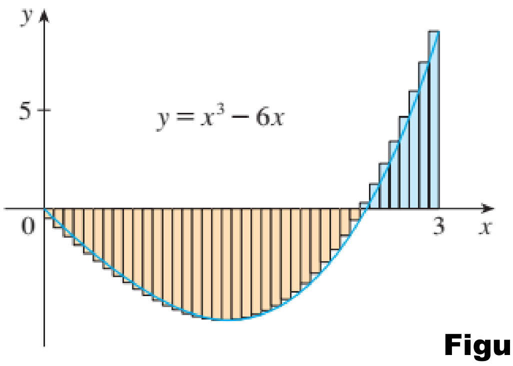


Figura 5

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

Enseguida veremos un método mucho más sencillo para calcular este límite.

Integral Definida:

Si f es integrable sobre $[a, b]$, entonces el límite en la sumatoria de Riemann existe y proporciona el mismo valor, sin importar cómo seleccione los puntos muestras x_i^* . Para simplificar los cálculos, con frecuencia tomamos los puntos muestras en los extremos de la derecha. Por lo tanto, $x_i^* = x_i$ y la definición de integral definida es:

Teorema: Si f es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_x$$

donde $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta_x$

Si f es una función continua (más precisamente *seccionalmente continua*) definida para $a \leq x \leq b$, dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$. Sean $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$ los puntos extremos de estos subintervalos y sean $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b**, es:

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_x$$

Siempre que este límite exista y de el mismo valor para todas las posibles elecciones de puntos muestra. Si es así decimos que f es integrable en $[a, b]$.

Propiedades de la integral definida:

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, de manera implícita se supuso que $a < b$. Pero, la definición como suma Riemann tiene sentido aún cuando $a > b$. Si invertimos a y b, entones Δx cambia de $\frac{b-a}{n}$ a $\frac{a-b}{n}$, en consecuencia:

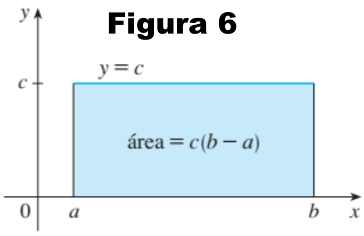
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}$$

Si $a = b$, entonces $\Delta_x = 0$, de manera que:

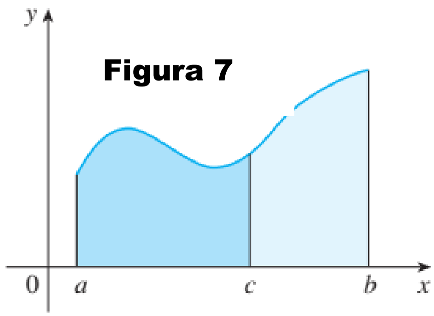
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = 0}$$

Suponga que f y g son funciones continuas (y por lo tanto integrables), entonces:

a. $\int_a^b c dx = c.(b-a)$, donde c es cualquier constante. (ver **Figura 6**)
b. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
c. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$ donde c es cualquier constante.
d. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$



La propiedad que sigue, no es fácil de demostrar en general; pero, para el caso donde $f(x) \geq 0$ y $a < c < b$ puede verse la propiedad a partir de la interpretación geométrica de la **Figura 7**, el área bajo $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c y hasta b.



e. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

Funciones Integrables:

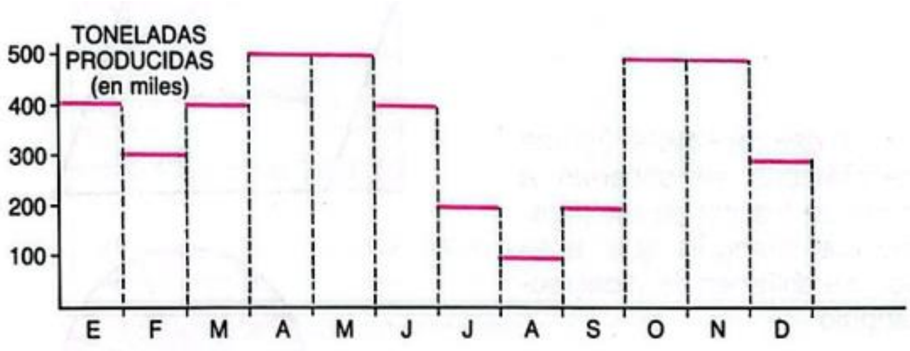
Teorema:

Si f es continua sobre el intervalo $[a,b]$, o si f tiene un número finito de discontinuidades de salto, entonces f es integrable sobre $[a,b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Aplicaciones de la Integral Definida:

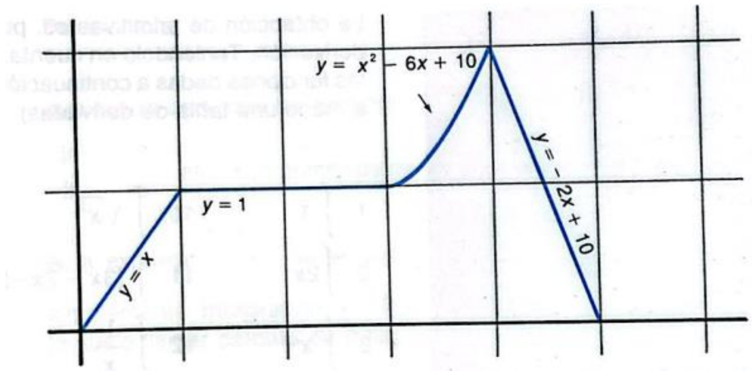
Área bajo una curva:

La producción de hierro de cierto país durante el año 1987 viene dada por la siguiente gráfica:



¿Podrías indicar cuál ha sido la producción total? ¿Y la producción en los tres primeros meses del año?

¿Podrías hacer un estudio del recorrido que hace un móvil, cuya función velocidad viene dada por esta gráfica?

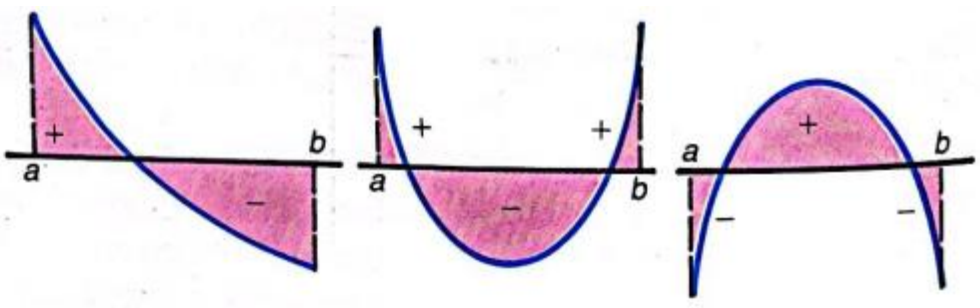


Sabemos que la velocidad en un movimiento es la derivada del espacio respecto del tiempo, es decir que si tenemos la curva de la función espacio-tiempo, su pendiente en cada punto nos devuelve el valor de la velocidad en ese instante.

Ahora vamos a partir de la curva velocidad-tiempo ¿Cómo se obtiene el espacio recorrido a partir de ella? Veremos que se logra calculando el área bajo la curva

¿Cómo calculamos el valor del área cuando el recinto tiene partes por encima del eje x y también por debajo del mismo? ¿Servirán las integrales también para calcular volúmenes?

Como ya hemos visto, si para calcular el área comprendida entre una curva $y = f(x)$ y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, nos limitamos a calcular $\int_a^b f(x)dx$, nos podemos encontrar en alguno de estos casos:



En los que el resultado de la integral NO representa el área buscada, esto es debido a las compensaciones que se producen de las partes negativas con las positivas. La forma correcta de proceder será calcular por separado las integrales de los distintos sectores y posteriormente sumar sus valores absolutos.

En la **figura 8** se muestra la gráfica de un movimiento uniforme (velocidad constante: 3m/seg). El área coloreada (3.6=18) coincide con el espacio recorrido por el móvil a los 6 segundos. Calcula los recorridos en los instantes: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 y t. Represéntalos en una gráfica espacio-tiempo y comprueba que están sobre la recta $e(t) = 3t$.

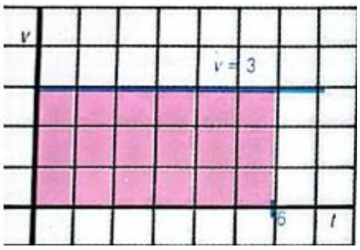
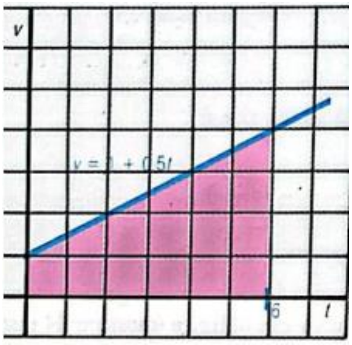


Figura 8

Figura 9



En la gráfica de la **figura 9** se muestra representada la velocidad de un movimiento uniformemente acelerado (vi: 1 m/seg, aceleración 0,5 m/seg^2). El área coloreada $\left(\frac{1+4}{2}.6 = 15\right)$ coincide con el espacio recorrido por el móvil a los 6 segundos $\left(e = v_\circ t + \frac{1}{2}at^2\right)$. Calcula las áreas correspondientes a los instantes: 1, 2, 4, 6, 8 y t y comprueba que coinciden con los recorridos correspondientes.

Ahora en la gráfica de la **figura 10** se muestra un movimiento con aceleración variable, el área coloreada (algo menos de 7, supongamos 6,8) corresponde al instante 1. Calcula aproximadamente (contando cuadritos) el área correspondiente a los instantes 2, 3, 4, 5 y 6. Supongamos que, como en los dos casos anteriores, estos valores corresponden a los espacios recorridos hasta esos instantes. Construye en consecuencia la gráfica espacio-tiempo de ese movimiento.

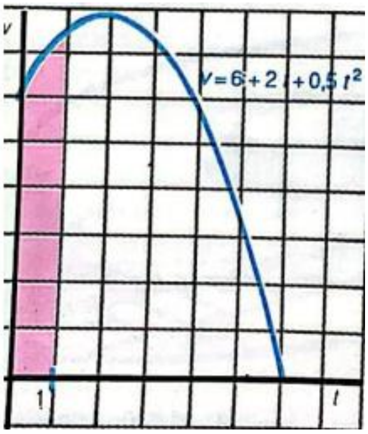


Figura 10

Tenemos que:

- El área bajo la curva velocidad es el espacio recorrido por el móvil tanto si el movimiento es uniforme como si no lo es.
- En una función fuerza-espacio recorrido, él área bajo la curva significa el trabajo realizado tanto si la fuerza es constante como si es variable.
- Si una curva marca el caudal de agua que cae en un depósito en litros por minuto, el área bajo esa curva significa la cantidad de agua que hay en el depósito.

Multitud de fenómenos físicos, económicos, sociales, etc. se obtienen calculando el área bajo la curva de una función.

¿Cómo calcular el área bajo la curva de una función cuando está no está delimitada por una figura conocida?

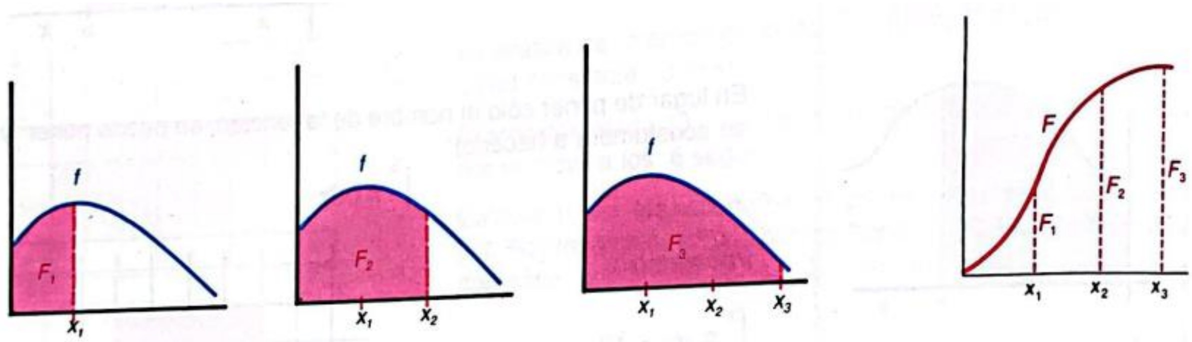
Ya hemos visto que podemos calcular el área de una figura contenida entre el eje x y la representación gráfica de una figura positiva y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ mediante la integral definida: $\int_a^b f(x)dx$. En este caso los extremos de integración son constantes fijas. Ahora vamos a referirnos a la integral:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x)$$

El área así obtenida es variable, depende de x (es una función de x)

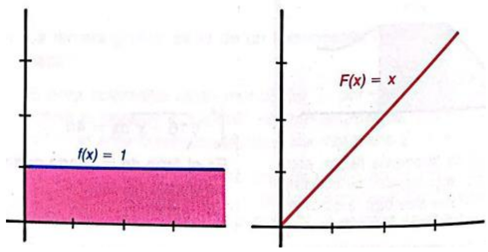
Veamos entonces estas dos funciones:

1. La función $\boldsymbol{f}$ cuya curva se muestra dibujada en celeste.
2. Y la función $\boldsymbol{F}$ que representa el área bajo $\boldsymbol{f}$ cuando se varía el límite superior del integrando x. Su representación gráfica se muestra en rosa.

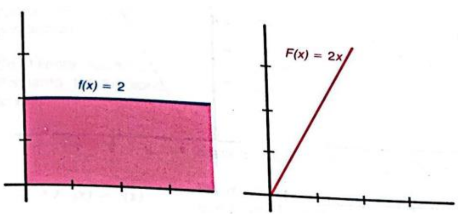


En breve veremos que $\boldsymbol{F'} = \boldsymbol{f}$, es decir, que $\boldsymbol{f}$ es la curva que nos da el valor de la derivada de $\boldsymbol{F}$ en cada punto.

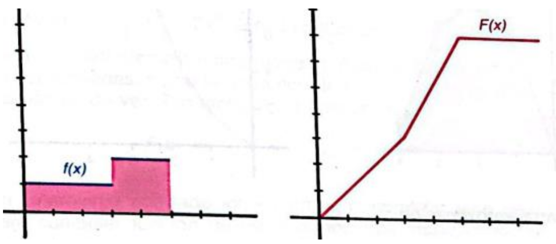
<u>Veamos algunos ejemplos</u>:



<u>Ejemplo 1</u>: El área bajo la recta $y = 1$ entre 0 y x. $F(x)$ es una recta con pendiente 1, es decir: $F'(x) = f(x)$.



<u>Ejemplo 2</u>: El área bajo la recta $y = 2$ entre 0 y x. $F(x)$ es una recta con pendiente 2, es decir: $F'(x) = f(x)$.

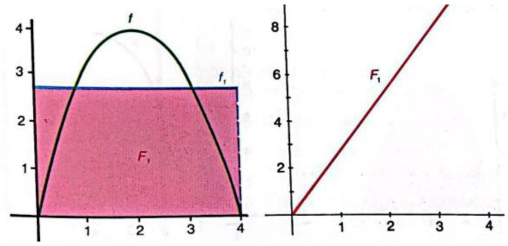


<u>Ejemplo 3</u>: La función f es escalonada (compuesta por tres tramos). $F(x)$ es una función compuesta por tres tramos. La pendiente de cada uno de ellos es el valor

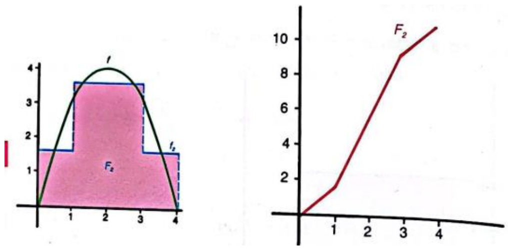
de f en el tramo correspondiente. Por lo que la derivada de F en cada punto coincide con el valor de f (salvo en los puntos de discontinuidad). Es decir $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 4: Ahora la función f tiene por gráfica una parábola: $f(x) = -x^2 + 4x$. Cómo no sabemos calcular con exactitud él área bajo la línea curva, la obtención de $F(x)$ la vamos a hacer mediante aproximaciones sucesivas. La pendiente de cada tramo de F coincide con el valor de f en ese tramo.

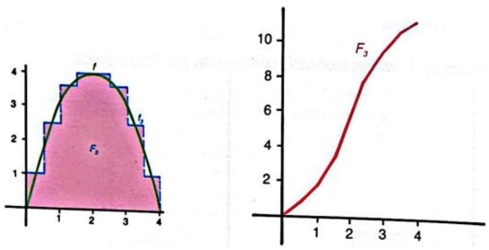
Primera aproximación:



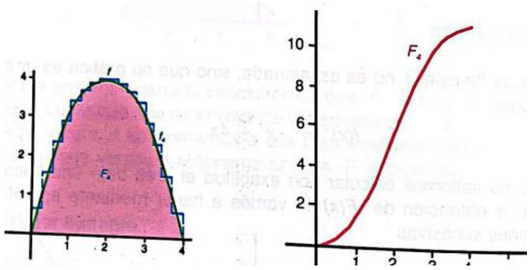
Segunda aproximación:



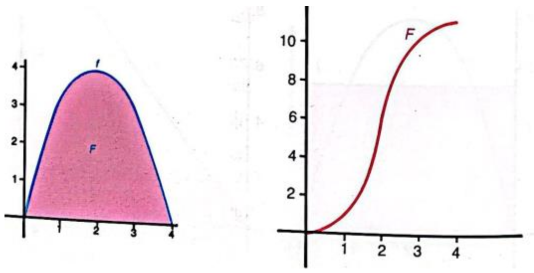
Tercera aproximación:



Cuarta aproximación:



Situación límite:



En cada aproximación la función escalonada f se parece cada vez más al valor del área bajo f. Además, las funciones F_i están construidas por tramos, cuyas pendientes coinciden con el valor de f_i en los intervalos correspondientes.

El en límite las funciones escalonadasf_i, tienden a la función f**.** Por lo que las funciones F_i tienden a una función F que cumple con lo siguiente:

- $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ esta es la función área bajo la curva f.
- $F'(x) = f(x)$ su derivada en cada punto coincide con el valor en ese punto de la función.

Esta propiedad nos permite esperar que sea cierto que $F(x) = \int_0^x f(x)dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$.

Enseguida intentaremos generalizar este resultado para cualquier función (siempre que sea posible).

Teorema Fundamental del Cálculo Integral:

Aunque en la mayoría de los libros y cursos de matemática se suele presentar el estudio de la derivada antes que el de la integral de una función lo cierto es que la integral es anterior a la derivada en más de 18 siglos.

Arquímedes en el siglo III a.C. calculó el área encerrada por un segmento de parábola mediante un procedimiento muy ingenioso, parecido a los utilizados posteriormente en le cálculo integral. Resolvió, además, otros muchos problemas similares. Pero, como la matemática griega fue un tanto estática y así se conservó hasta el siglo XVII, no se elaboró bien el concepto de función y entonces no se les ocurrió ni a los griegos, ni a los matemáticos posteriores pensar en la derivada.

Hasta el siglo XVIII no se pusieron ambos conceptos en conexión, entonces fue cuando Barrow (maestro de Newton) en Cambridge, se dio cuenta, a su modo, de que la derivada de la función que nos da el área bajo una curva es precisamente la función misma que representa la curva.

Esto, que se conoce hoy como **regla de Barrow** y también **Teorema Fundamental del Cálculo**, es verdaderamente una de las claves del análisis matemático moderno.

Por lo que vimos en la suma de Riemann… ¿será cierto que, en general, la función $F(x)$, ára bajo la curva de $y = f(x)$ cumple la propiedad de que $F´(x) = f(x)$? De todas las infinitas funciones cuya derivada es $f(x)$, cuál es la que se ajusta a $F(x)$? ¿Cómo podemos aplicar estos resultados para calcular el área fija del tipo $\int_a^b f(x)dx$?

<u>Teorema Fundamental del Cálculo</u>: (Parte I)

Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y definimos la función $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ con $x \epsilon [a, b]$ entonces: $F´(x) = f(x)$

<u>Demostración</u>:

Vamos a calcular la derivada de la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y lo vamos a hacer como siempre calculando el límite:

$$lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Veamos que:

$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$ (está representada por el área rosa en la **Figura 11**. De manera que el cociente $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ es el cociente entre el área del cociente anterior (una especie de rectángulo con el lado superior curvo) y su base. El cociente es entonces, su altura, que será tanto más próxima a $f(x)$ cuanto menor sea h, por lo que, cuando $h \to 0$ el límite del cociente es $f(x)$. Es decir:

$$F'(x) = lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

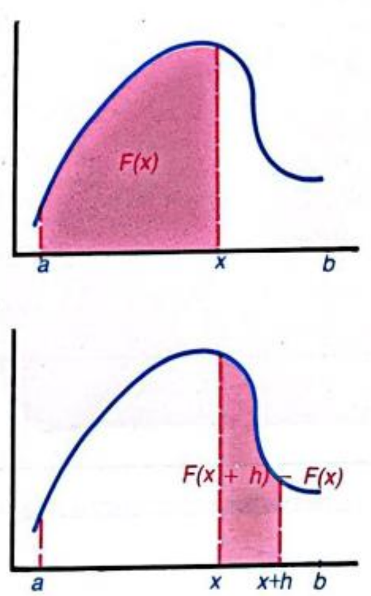


Figura 11

■

Consecuencias:

El teorema anterior nos permite calcular algunas áreas de forma más cómoda. Vemos un ejemplo: Queremos calcular el área $\int_2^5 f(x)dx$ siendo $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, veamos entonces que: $F(x) = \int_2^x 3x^2 - 2x + 3\, dx$ ya que $F'(x) = 3x^2 - 2x + 3$ entonces F es de la forma: $F(x) = x^3 - x^2 + 3x + K$

¿Cuánto debe valer K?, vemos: $\int_2^2 f(x) = 0 \Longrightarrow F(2) = 0 \Longrightarrow 2^3 - 2^2 + 3.2 + k = 0 \Longrightarrow K = -10$

De manera que $F(x) = x^3 - x^2 + 3x - 10$.

¿Y de qué nos sirve conocer F? ... Lo que queríamos calcular es el valor de $\int_2^5 f(x)dx = F(5) = 5^3 - 5^2 + 3.5 - 10 = 105$

Este proceso nos permite calcular el área buscada de una manera mucho más cómoda que mediante aproximaciones sucesivas con la suma de áreas de rectángulos.

Veamos otro Teorema que hará el proceso más fácil aún…

Teorema Fundamental del Cálculo: (Parte II)

Si f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y $G(x)$ es una función que cumple que: $G'(x) = f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

Demostración:

Tomemos la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos del Teorema Fundamental de Cálculo (Parte I) que: $F'(x) = f(x)$, pero por la hipótesis de este Teorema también sabemos que: $G'(x) = f(x)$, entonces F y G sólo puede diferir en una constante (ya que sus derivadas son iguales) de manera que tenemos que: $F(x) = G(x) + K$ $(*)$ si valuamos en $x = a$ obtenemos: $F(a) = G(a) + K$, pero como $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ obtenemos que $-G(a) = k$. Introduciendo este resultado en $(*)$ obtenemos: $F(x) = G(x) - G(a)$ lo que significa:

$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ siendo G una primitiva (cualquiera) de f. ■

La parte II del Teorema Fundamental del Cálculo establece que si conocemos una antiderivada G de f, entonces podemos evaluar $\int_a^b f(t)dt$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$, sorprende mucho que $\int_a^b f(t)dt$ que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $F(x)$ para $a \leq x \leq b$, pueda determinarse conociendo los valores de $F(x)$ en sólo 2 puntos a y b.

La derivación y la integración como procesos inversos:

Al juntamos los resultados obtenidos, tenemos:

1. Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $F'(x) = f(x)$
2. $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$, donde G es cualquier antiderivada de f, es decir $G' = f$.

La parte I puede reescribirse como:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Esta igualdad afirma que si se integra f y a continuación se deriva el resultado, se obtiene la función original f. Ya que ´$F'(x) = f(x)$, la parte II puede reescribirse así:

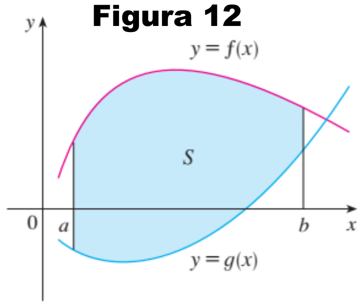
$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

Y esta igualdad afirma que si tomamos una función F, la derivamos y luego integramos el resultado, regresamos a la función original F pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del Teorema Fundamental del Cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos ("casi") inversos. Cada uno deshace lo que el otro hace.

Sin duda alguna el Teorema Fundamental del Cálculo es el más importante en este campo, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grande logros de la mente humana.

¿Qué pasa si queremos calcular el área de de regiones que están encerradas entre las gráficas de dos funciones?

Figura 12



Considere la región s que está ubicada entre las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ entre las rectas verticaleds $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geq g(x)\ \ \forall\ x \in [a, b]$ (como se muestra en la **figura 12**).

Como lo hemos hecho para el cálculo de áreas bajo una curva, la idea es dividir la región s en n franjas con igual ancho y calcular el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo de base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ (observe la **figura 13**). Podríamos tomar todos los puntos muestras como extremos derechos, en cuyo caso la suma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n}[f(x_i^*) - g(x_i^X)]\Delta x$ es una aproximación a lo que se puede intuir que es el área de s.

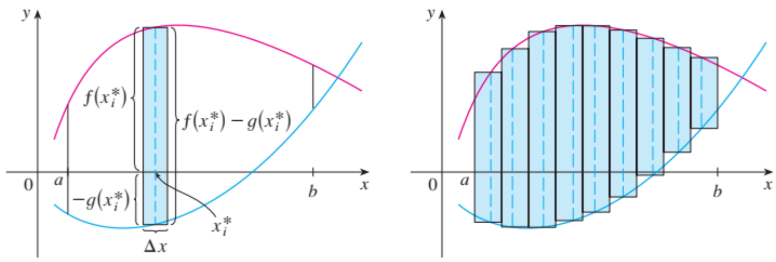


Figura 13

Al parecer esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$ por lo tanto identificamos el área A de s como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

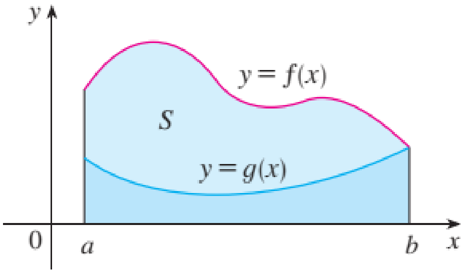
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^X)]\Delta x$$

Identificamos este límite como la integral definida de $f - g$, de manera que podemos concluir:

El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x), y = g(x)$ y las rectas $x = a, x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [a, b]$, es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

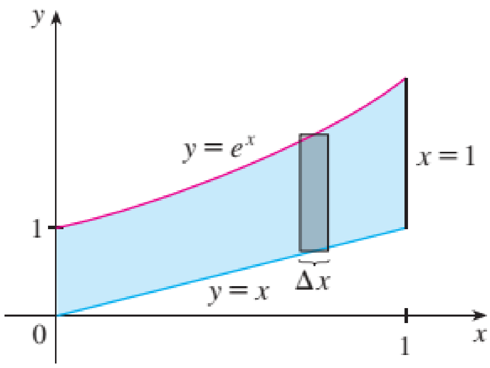
En el caso especial en que $g(x) = 0$ se tiene la región comprendida entre el eje comprendida entre el eje x y la representación gráfica de la función f.



En el caso especial en que tanto f como g son positivas en $[a, b]$ se visualiza claramente que:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)] =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

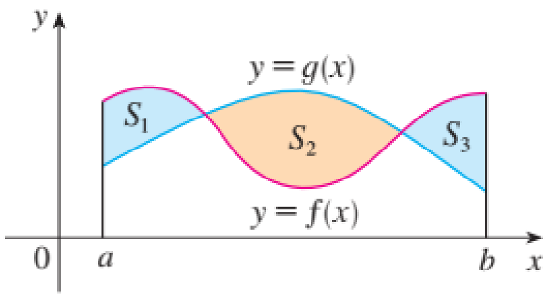


Ejemplo: Determine el área de la región acotada por arriba por $y = e^x$ y por debajo por la curva $y = x$ para x perteneciente al intervalo $[0,1]$. Tenemos:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)dx = e^x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

En el gráfico se muestra un rectángulo representativo de aproximación cuya base mide Δx para recordar el procedimiento mediante el cual llegamos a la definición de área. Es útil siempre elaborar un croquis de la región para identificar las curvas superior e inferior, así como también puede ser conveniente dibujar un rectángulo representativo.

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$ para algunos valores de x, pero $g(x) \geq f(x)$ para otros valores de x, entonces lo que debemos hacer es dividir la región S en varias regiones $S_1, S_2, S_3, \dots$ con áreas $A_1, A_2, A_3, \dots$ como se muetra en la figura y luego definimos el área de la región S como la suma de las áreas $S_1, S_2, S_3, \dots$ Es decir, $A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots$ Y como:



$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & si\ f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & si\ g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

Tenemos la siguiente expresión para el área buscada:

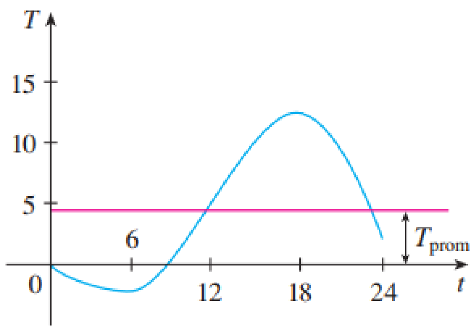
El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Valor Promedio:

Es fácil calcular el valor promedio de una cantidad finita de números $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, esto sería: $y_{prom} = \frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n}{n}$, pero, ¿de qué manera calcular la temperatura promedio durante un día si se conoce la representación gráfica de la función temperatura? En la figura se muestra la representación gráfica de una función temperatura $T(t)$, donde t se mide en horas y T en °C, y también se muestra una conjetura de la temperatura promedio.

En general trataremos de calcular el valor promedio de una función $y = f(x), a \leq x \leq b$, empecemos por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = {(b-a)}/{n}$. Luego escogemos los puntos $x_i^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y calculamos el promedio de los valores $f(x_i^*), \ldots, f(x_n^*)$:



$$\frac{f(x_i^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa la función temperatura y $n = 24$, esto quiere decir que tomamos lecturas de la temperatura cada hora y luego promediamos) Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ podemos decir que $n = \frac{b-a}{\Delta x}$ el valor promedio sería:

$$\frac{f(x_i^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}[f(x_i^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x] = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Si incrementamos n, podríamos calcular el valor promedio de un gran número de valores muy poco separados. (Por ejemplo, podríamos promediar lecturas de temperatura tomadas cada minuto o hasta cada segundo) El valor límite es:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ por la definición de integral definida. Por lo que definimos el valor promedio de f sobre el intervalo $[a, b]$ como:

$$\boxed{f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Ejemplo:

Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ sobre el intervalo $[-1,2]$.

Entonces con $a = -1$ y $b = 2$ tenemos:

$$f_{prom} = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1 + x^2)dx = \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = 2$$

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t podemos preguntarnos si existe un momento específico en el que la temperatura es la misma que la temperatura promedio. Para la función temperatura que se muestra en el gráfico, existen dos momentos justo antes del mediodía y antes de la medianoche. En general, ¿hay un número c en el cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir existe c tal que $f(c) = f_{prom}$? El siguiente Teorema (que es una consecuencia del teorema del valor medio para derivadas y del teorema fundamental del cálculo) dice que esto es válido para funciones continuas.

Teorema del valor medio para integrales:

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c tal que:

$f(c) = f_{prom} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, es decir: $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales es que, para funciones continuas positivas f, hay un número c tal que el rectángulo con base $(b-a)$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f desde $x = a$ y hasta $x = b$. Observe la **figura 14**

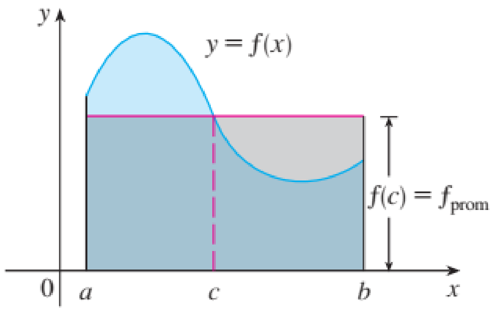


Figura 14

Aplicación. Integrales Impropias

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ tratamos con una función f definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ y supusimos que f no tiene una discontinuidad infinita. Ahora extenderemos el concepto de integral definida al caso en donde el intervalo de integración es infinito y también al caso en donde f presenta una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En estos casos la integral se llama ***impropia***.

Tipo 1: Intervalos Infinitos

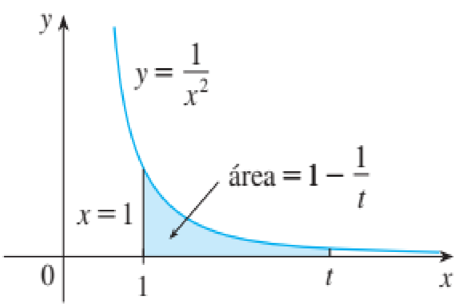


Figura 15

Considere la región S que está debajo de la curva $y = \frac{1}{x^2}$ por encima del eje x y a la derecha de la recta $x = 1$. Podría pensarse que como S se extiende al infinito su área debe ser infinita, pero veamos esto con más detalle. El área de la parte S que está a la izquierda de la recta $x = t$ (sombreada en la **figura 15**) es:

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Observe que $A(t) < 1$ sin importar que tan grande se elija t. Veamos también que:

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (se muestra en la **figura 16**) así que decimos que el área de la región infinita S es igual a 1 y escribimos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx = 1$$

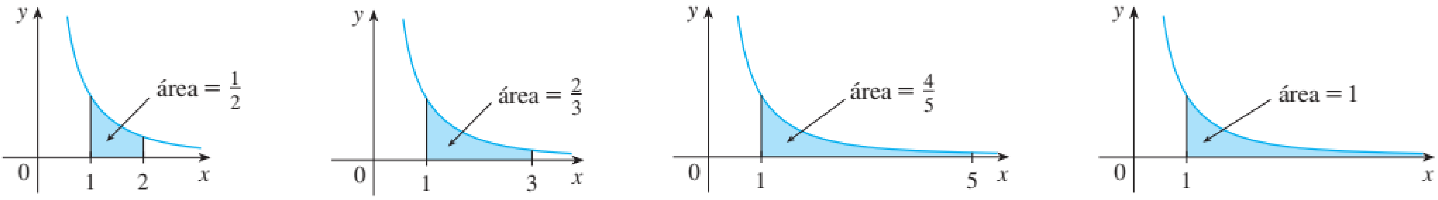


Figura 16

De este modo definimos la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de las integrales sobre intervalos finitos.

Definición de ***integral impropia*** *(Tipo 1)*

a. Si $\int_a^t f(x)dx$ existe para todo número $t \geq a$, entonces:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$$

Siempre que este número exista (como número finito).

b. Si $\int_t^b f(x)dx$ existe para todo número $t \leq b$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

Siempre que este número exista (como número finito).

c. Si ambas $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ son convergentes, entonces definimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Para cualquiera sea el valor de a.

Ejemplo 1: Determine si la integral $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx$ es convergente o divergente.

Según con la definición que hemos visto, tenemos que:

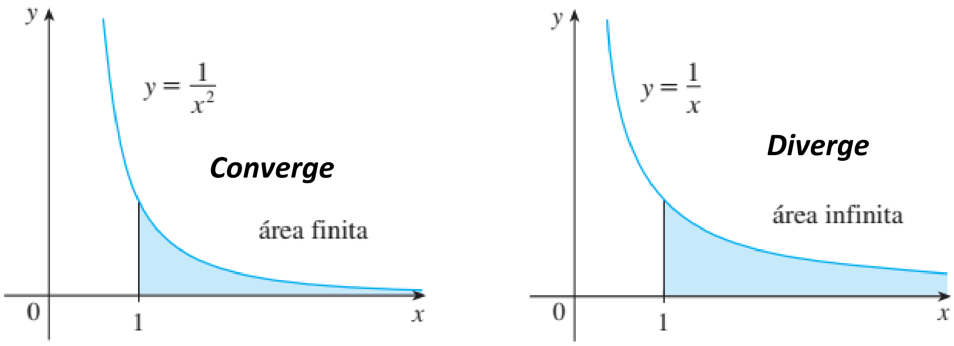
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \to \infty} x|_1^t = \lim_{t \to \infty} (\ln(t) - \ln(1)) = \lim_{t \to \infty} \ln(t) = \infty$$

Este límite no existe (como número finito) y por lo tanto la integral impropia planteada es divergente.

Si comparamos los dos ejercicios que hemos resuelto tenemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \ \ converge \qquad y \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad diverge$$

Geométricamente esto indica que, aunque las curvas $y = {}^1/_{x^2}$ y $y = {}^1/_x$ se parecen mucho para $x > 0$, la región bajo $y = {}^1/_{x^2}$ a la derecha de $x = 1$ tiene un área finita, mientras que el área de la región bajo la curva $y = {}^1/_x$ a la derecha de $x = 1$ tiene un área infinita. Observe que ambas curvas tienden a 0 cuando $x \to \infty$, pero ${}^1/_{x^2}$ tiende a 0 más rápido que ${}^1/_x$. Los valores de ${}^1/_x$ no decrecen lo suficientemente rápido para que su integral tenga un valor finito.



<u>Ejemplo 2</u>: ¿Para qué valores de p la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ es convergente?

En el ejemplo 1 vimos que si $p = 1$ la integral es divergente, de vamos que vamos a estudiar qué sucede cuando $p \neq 1$, entonces tenemos:

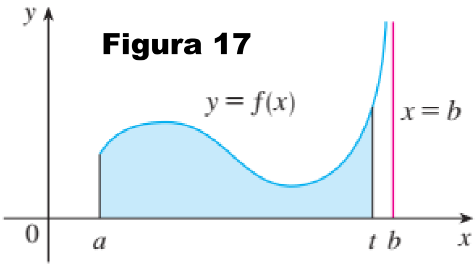
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{x \to \infty} \int_1^t x^{-p} dx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_{x=1}^{x=t} = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)$$

Si $p > 1$, entonces $p - 1 > 0$, así que cuando $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y ${}^1/_{t^{p-1}} \to 0$. Por tanto, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ si $p > 1$ y, en consecuencia, la integral converge. Pero si $p < 1$, entonces $p - 1 < 0$, así que: $\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y por lo tanto la integral diverge. Resumiendo, hemos obtenido:

$$\boxed{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx \text{ es convergente si } p > 1 \text{ y es divergente si } p \leq 1}$$

Tipo 2: Integrados discontinuos

Suponga que f es una función continua positiva definida sobre un intervalo finito $[a,b)$, pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y por encima del eje x entre a y b (para integrales impropias del tipo 1, las regiones se extienden indefinidamente en una dirección horizontal. Ahora la región es infinita pero en una dirección vertical) El área de la parte de S entre a y t (la región que se muestra sombreada en la **figura 17**) es: $A(t) = \int_a^t f(x)dx$



Sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces decimos que el área de la región S es A y escribimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

Utilizamos esta ecuación para definir una integral impropia del tipo 2 aun cuando f no es una función positiva sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

Definición de ***integral impropia*** *(tipo 2)*

a. Si f es continua sobre $[a,b)$ y es discontinua en b, entonces:

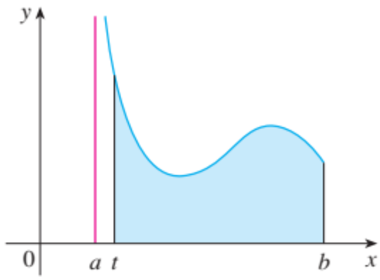
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

si este límite existe (como número finito).

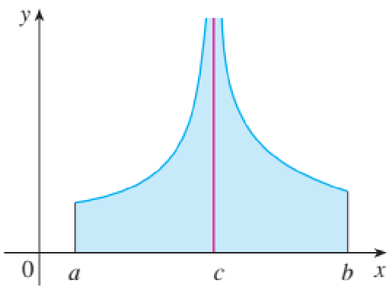
b. Si f es continua sobre $(a,b]$ y es discontinua en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

si este límite existe (como número finito).



La integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ se llama ***convergente*** si existe el límite correspondiente y ***divergente*** si el límite no existe.



c. Si f es discontinua en c, donde $a < c < b$ y ambas $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ son convergentes, entonces definimos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 3: Encuentre $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}dx$.

Primero advertimos que la integral dada es impropia porque $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ posee una asíntota vertical de ecuación $x = 2$, dado que su gráfica presenta una discontinuidad infinita en el extremo izquierdo de $[2,5]$, entonces planteamos:

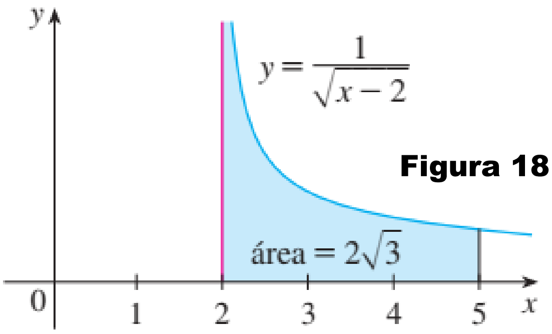


Figura 18

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \lim_{t\to2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$
$$= \lim_{t\to2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_t^5$$
$$= \lim_{t\to2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right)$$
$$= 3\sqrt{3}$$

De manera que la integral planteada es convergente y como el integrando es positivo podemos interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la **figura 18**.

Ejemplo 4: Evalúe $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando, pero esta asíntota se presenta en el medio del intervalo de integración, de manera que (con la definición vista en el apartado c. y haciendo $c = 1$) tenemos:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \lim_{t\to1^+} \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

Notemos que:

$$\lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} ln|x-1|\Big|_0^t = \lim_{t\to1^-} (ln|t-1| - ln|-1|) = \lim_{t\to1^-} ln(1-t) = -\infty$$

Ya que $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ es divergente. Esto implica que $\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ es divergente (No es necesario evaluar $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$).

Nota: Si no hubiésemos advertido la presencia de la asíntota vertical $x = 1$ y hubiésemos confundido la integral impropia con una integral ordinaria habríamos calculado de manera incorrecta y hubiésemos llegado a un resultado erróneo $(ln2)$. Recuerde estar atento para trabajar las integrales impropias en términos de límite como corresponde. De ahora en adelante, siempre que se encuentre con el $\int_a^b f(x)dx$ debe en primer lugar decidir (observando el comportamiento de la función f sobre el intervalo $[a, b]$ si se trata de una integral definida ordinario o de una integral impropia.

Prueba de comparación para integrales impropias:

Algunas veces es imposible encontrar el valor exacto de una integral impropia, pero puede ser importante saber si converge o diverge. En esos casos podemos hacer uso del siguiente teorema (aunque está enunciado para integrales del tipo 1, un teorema similar es válido para integrales impropias del tipo 2).

Teorema de comparación:

Suponga que f y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x)$ para $x \geq a$.

a) Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ es también convergente.
b) Si $\int_a^\infty g(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es también divergente.

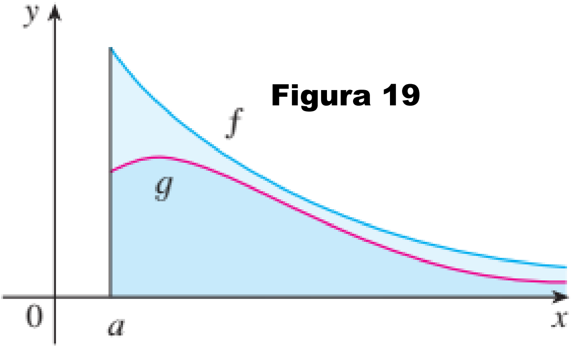


Figura 19

Aunque omitimos la demostración del teorema de comparación, en la **figura 19** puede apreciarse su factibilidad. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, entonces también lo es el área bajo la curva inferior $y = g(x)$. Y análogamente si el área bajo la curva inferior $y = g(x)$ es infinita, entonces el área bajo la curva superior $y = f(x)$ también lo será. Lo contrario no es necesariamente cierto, es decir: si $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ puede converger o no y del mismo modo si $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente $\int_a^\infty g(x)dx$ puede o no ser divergente.

Ejemplo 5: Demuestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente.

No podemos evaluar directamente la integral porque la antiderivada e^{-x^2} no es una función elemental, escribamos entonces:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Observe que la primera integral del lado derecho es justo una integral definida ordinaria y en la segunda integral (impropia del tipo 1) utilizaremos el hecho de que para $x > 1$ tenemos $x^2 > x$, y así $-x^2 \leq -x$ y, por tanto, $e^{-x^2} \leq e^x$ (observe la **figura 20**). La integral de e^{-x} se evalúa fácilmente:

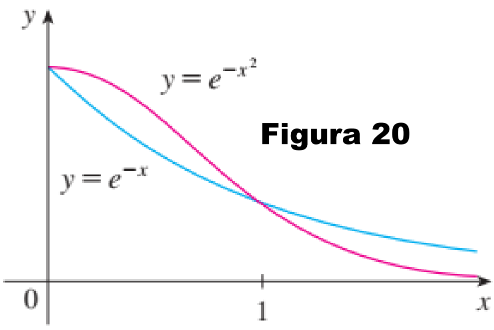


Figura 20

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así tomando $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, vemos que $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ es convergente, por lo que se sigue que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es convergente.

Bibliografía:

- Ernest F. Haeussler, Jr., Richard S. Paul (2003). Matemáticas para admiración y economía. México: Pearson (Prentice Hall) (10ma. ed.)
- Guzmán, Miguel de, Colera, José, Salvador, Adela. (1988) Matemáticas Bachillerato 3. España: Anaya.
- Stewart, James. (2008) Cálculo de una variable- Trascendentes Tempranas. (6ta. ed.) México: Cengage Learning.
- Thomas, George B, Jr. (2006). Cálculo una variable. (11ma. ed.) México: Pearson.