Índice

1. Ejercicio 12

1.1. Enunciado

Dadas las rectas $r1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$ y $r2)\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{10} = \dfrac{x+2}{14}$

a Verifiquen que son paralelas y no coincidentes.

b Hallen la ecuación del plano que determinan.

c Hallen las ecuaciones de todos los planos paralelos a ambas rectas que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas.

1.2. Solución analítica

Valores iniciales:

$$r1)\begin{cases} 3x - 2y + z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 2x + y - z - 5 = 0 & (\beta) \end{cases} \qquad r2)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{x+2}{14}$$

A continuación buscamos los vectores $\vec{u_1} \parallel r1$ y $\vec{u_2} \parallel r2$:

Hallamos la recta que forma la intersección de los planos determinados en $r1$):

$$\vec{n_\alpha} = (3, -2, 1) \qquad \vec{n_\beta} = (2, 1, -1)$$

Hallamos $\vec{u_1} \perp \vec{n_\alpha} \wedge \vec{n_\beta}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u_1} &= \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} \\
\vec{u_1} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
\vec{u_1} &= \vec{i}(2-1) - \vec{j}(-3-2) + \vec{k}(3+4) \\
\vec{u_1} &= \vec{i}(1) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(7) \\
\vec{u_1} &= \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \\
\therefore\ \vec{u_1} &= \boxed{(1, 5, 7)}
\end{aligned}$$

Hallamos $\vec{u_2}$ de $r2$ igualando cada expresión a un λ dado, con lo que obtenemos la siguiente ecuación paramétrica:

$$r2)\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \\ z = -2 + 14\lambda \end{cases}$$

$$\therefore\ \boxed{\vec{u_2} = (2, 10, 14)}$$

Obtenemos también el punto $P_0(1, 3, -2)$

1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes:

$$\vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \iff \exists k \in \mathbb{R} \ / \ \vec{u_1} = k\vec{u_2}$$

$$\vec{u_1} = (1,5,7) \qquad \vec{u_2} = (2,10,14)$$

$$\begin{aligned} \vec{u_1} &\stackrel{?}{=} k\vec{u_2} \\ (1,5,7) &\stackrel{?}{=} k(2,10,14) \\ (1,5,7) &\stackrel{?}{=} (2k,10k,14k) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 = 2k &\implies k = \frac{1}{2} \\ 5 = 10k &\implies k = \frac{1}{2} \\ 7 = 14k &\implies k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\implies \vec{u_1} = \tfrac{1}{2}\vec{u_2} \qquad \implies \vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \qquad \therefore \ \boxed{r1 \ \parallel \ r2}$$

Son rectas coincidentes?

Si $P_0 \in r2 \wedge P_0 \in r1 \implies P_0$ debe satisfacer todas las ecuaciones de $r1$:

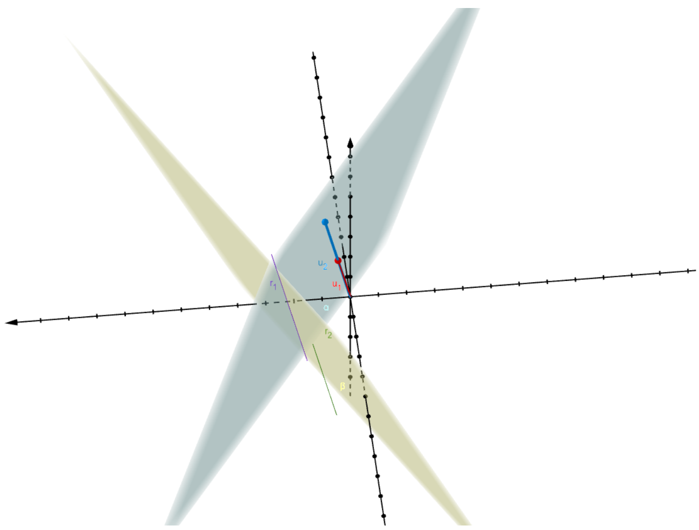
Reemplazamos P_0 en la ecuación (α) de $r1$:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - 5 &= 0 \\ 3(1) - 2(3) + (-2) - 5 &= 0 \\ 3 - 6 - 2 - 5 &= 0 \\ 3 - 13 &= 0 \\ -10 &\neq 0 \end{aligned}$$

Pero P_0 **no satisface** la ecuación una de las ecuaciones de $r1$, entonces P_0 no pertenece a $r1$.

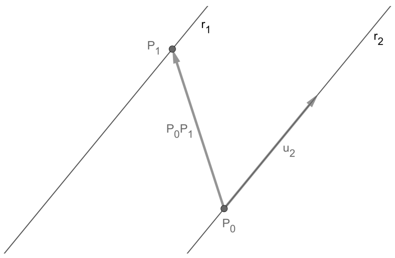
$$\therefore \ \boxed{r1 \wedge r2 \ \ \text{no son coincidentes}}$$

Gráfica:



1.2.2. Ecuación del plano que determinan $r1$ y $r2$:

Información inicial:



$\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u_2} = \vec{n}$, vector normal al plano determinado por $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u_2}$.

Buscamos un punto de paso P_1 en $r1$:

Si $z = \boxed{0} \implies \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$

Despejamos y de (1):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5 &= 0 \\ -2y &= -3x + 5 \\ y &= \frac{-(3x-5)}{-2} \\ y &= \frac{3x-5}{2} \qquad (3) \end{aligned}$$

Reemplazamos (3) en (2) para hallar x:

$$\begin{aligned} 2x + y - 5 &= 0 \\ 2x + \left(\frac{3x-5}{2}\right) - 5 &= 0 \\ 2x + \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - 5 &= 0 \\ \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} &= 0 \\ 7x - 15 &= 0 \\ x &= \boxed{\frac{15}{7}} \end{aligned}$$

Reemplazamos x en (3) para hallar y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}\left(\frac{15}{7}\right) - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{45}{14} - \frac{35}{14} \\ y &= \frac{10}{14} \\ y &= \boxed{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_1\left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right) \in r1}$$

A partir de este punto de paso P_1 podemos buscar el vector $\vec{n'}$ del plano determinado por $r1$ y $r2$:

$$P_0(1,3,-2) \qquad P_1\left(\tfrac{15}{7},\tfrac{5}{7},0\right)$$

Armamos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{15}{7},\frac{5}{7},0\right) - (1,3,-2)$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{15}{7}-1,\ \frac{5}{7}-3,\ 0-(-2)\right)$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{8}{7},\ -\frac{16}{7},\ 2\right)$$

Buscamos el vector $\vec{n'}$ con $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u_2}$:

$$\vec{n'} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u_2}$$
$$\vec{n'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} & 2 \\ 2 & 10 & 14 \end{vmatrix}$$
$$\vec{n'} = \vec{i}\left[(-\frac{16}{7})\cdot(14)-(2)\cdot(10)\right] + \vec{j}\left[(2)\cdot(2)-(\frac{8}{7})\cdot(14)\right] + \vec{k}\left[(\frac{8}{7})\cdot(10)-(-\frac{16}{7})\cdot(2)\right]$$
$$\vec{n'} = \vec{i}\,[-32-20] + \vec{j}\,[4-16] + \vec{k}\left[\frac{80}{7}+\frac{32}{7}\right]$$
$$\vec{n'} = \vec{i}(-52) + \vec{j}(-12) + \vec{k}(16)$$
$$\vec{n'} = -52\vec{i} - 12\vec{j} + 16\vec{k}$$
$$\vec{n'} = -13\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\therefore\ \vec{n'} = \boxed{(-13,-3,4)}$$

Con el vector $\vec{n'}$ encontrado empezamos a armar la ecuación del plano al que llamaremos ω:

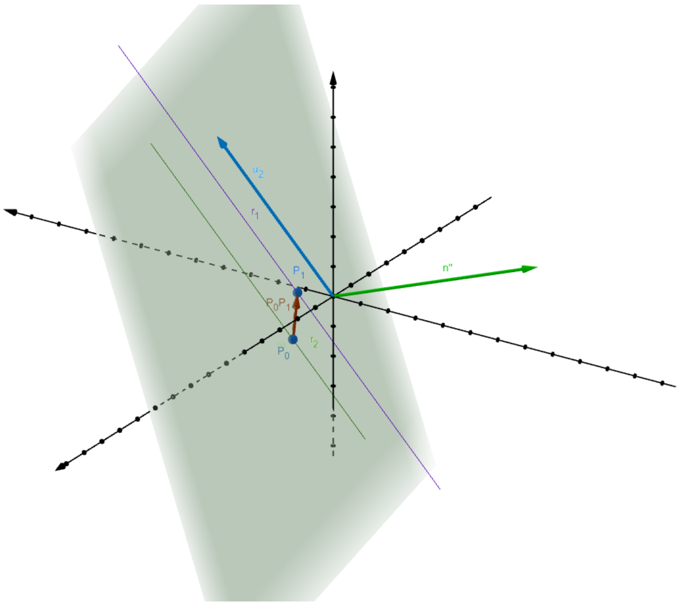
$$\omega) \qquad -13x - 3y + 4z + d = 0$$

Usamos el punto $P_0(1,3,-2)$ para determinar el valor de d:

$$-13x - 3y + 4z + d = 0$$
$$-13(1) - 3(3) + 4(-2) + d = 0$$
$$-13 - 9 - 8 + d = 0$$
$$-30 + d = 0$$
$$d = \boxed{30}$$

$\therefore$ $\boxed{\omega) \quad -13x - 3y + 4z + 30 = 0}$ es la ecuación del plano determinado por las rectas $r1$ y $r2$.

Gráfica:



1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a $r1$ y $r2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas:

Planos paralelos a ambas rectas serán paralelos a ω. Se podría usar el mismo vector normal $\vec{n'}$ y el punto de paso P_0 esta vez a 10 unidades del origen de coordenadas.

Valores iniciales:

$$\vec{n'} = (-13, -3, 4) \qquad P_0(1, 3, -2)$$

Hallamos el módulo de $\vec{n'}$:

$$|\vec{n'}| = \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2 + (4)^2}$$
$$|\vec{n'}| = \sqrt{169 + 9 + 16}$$
$$|\vec{n'}| = \sqrt{194}$$

Hallamos el versor de $\vec{n'}$:

$$\vec{n'_0} = \frac{1}{|\vec{n'}|} \cdot \vec{n'}$$
$$\vec{n'_0} = \frac{1}{\sqrt{194}} \cdot (-13, -3, 4)$$
$$\vec{n'_0} = \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}}\right)$$

Hallamos un vector $\vec{n_1} = 10 \cdot \vec{n'_0}$ que nos servirá para hallar los puntos P_1 y P_2 que equidistan del plano en direcciones opuestas en 10 unidades:

$$\vec{n_1} = 10 \cdot \vec{n'_0}$$
$$\vec{n_1} = 10 \cdot \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}}\right)$$
$$\vec{n_1} = \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}}\right)$$

$$\therefore \boxed{P_1 = \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}}\right)} \wedge P_2 = -P_1 \implies \boxed{P_2 = \left(\frac{130}{\sqrt{194}}, \frac{30}{\sqrt{194}}, \frac{-40}{\sqrt{194}}\right)}$$

A continuación hallamos las ecuaciones de los planos ω_1 y ω_2:

Usamos P_1 para hallar ω_1:

$$-13x - 3y + 4z + d = 0$$
$$-13 \cdot \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}\right) - 3 \cdot \left(\frac{-30}{\sqrt{194}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{194}}\right) + d = 0$$
$$\frac{1690}{\sqrt{194}} + \frac{90}{\sqrt{194}} + \frac{160}{\sqrt{194}} + d = 0$$
$$\frac{1940}{\sqrt{194}} + d = 0$$
$$10\sqrt{194} + d = 0$$
$$d = \boxed{-10\sqrt{194}}$$

$$\implies \omega_1) \; -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0$$

Usamos P_2 para hallar ω_2:

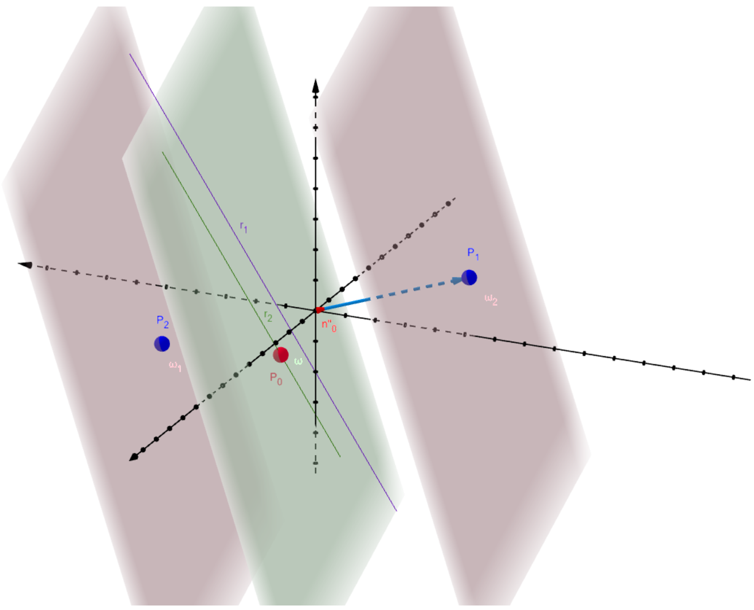
$$\begin{aligned}
-13x - 3y + 4z + d &= 0 \\
-13 \cdot \left(\frac{130}{\sqrt{194}}\right) - 3 \cdot \left(\frac{30}{\sqrt{194}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{-40}{\sqrt{194}}\right) + d &= 0 \\
-\frac{1690}{\sqrt{194}} - \frac{90}{\sqrt{194}} - \frac{160}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
-\frac{1940}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
-10\sqrt{194} + d &= 0 \\
d &= \boxed{10\sqrt{194}}
\end{aligned}$$

$\implies \quad \omega_2) \ -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0$

$\therefore$ Las ecuaciones de los planos paralelos a $r1$ y $r2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas son:

$\boxed{\omega_1) \ -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0}$ y $\boxed{\omega_2) \ -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0}$

Gráfica:



2. Ejercico 18

2.1. Enunciado

2.2. Solución

3. Ejercico 23

3.1. Enunciado

3.2. Solución