

## Índice

<b>1. Ejercicio 12</b>	<b>2</b>
1.1. Enunciado . . . . .	2
1.2. Solución analítica . . . . .	3
1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes: . . . . .	4
1.2.2. Ecuación del plano que determinan $r_1$ y $r_2$ : . . . . .	5
1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a $r_1$ y $r_2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas: . . . . .	8
<b>2. Ejercicio 18</b>	<b>10</b>
2.1. Enunciado . . . . .	10
2.2. Solución analítica . . . . .	11
2.2.1. Distancia del punto $B$ al plano $\alpha$ : . . . . .	12
2.2.2. Coordenadas del punto $B'$ que pertenece a $\alpha$ y cuya distancia a $B$ es igual que la distancia de $B$ a $\alpha$ : . . . . .	13
<b>3. Ejercicio 23</b>	<b>15</b>
3.1. Enunciado . . . . .	15
3.2. Solución . . . . .	15

## 1. Ejercicio 12

### 1.1. Enunciado

Dadas las rectas  $r1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$  y  $r2) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+2}{14}$

- a Verifiquen que son paralelas y no coincidentes.
- b Hallen la ecuación del plano que determinan.
- c Hallen las ecuaciones de todos los planos paralelos a ambas rectas que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas.

## 1.2. Solución analítica

Valores iniciales:

$$r1) \begin{cases} 3x - 2y + z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 2x + y - z - 5 = 0 & (\beta) \end{cases} \quad r2) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{x+2}{14}$$

A continuación buscamos los vectores  $\vec{u}_1 \parallel r1$  y  $\vec{u}_2 \parallel r2$ :

Hallamos la recta que forma la intersección de los planos determinados en  $r1$ ):

$$\vec{n}_\alpha = (3, -2, 1) \quad \vec{n}_\beta = (2, 1, -1)$$

Hallamos  $\vec{u}_1 \perp \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta$ :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \\ \vec{u}_1 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \vec{u}_1 &= \vec{i}(2-1) - \vec{j}(-3-2) + \vec{k}(3+4) \\ \vec{u}_1 &= \vec{i}(1) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(7) \\ \vec{u}_1 &= \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \\ \therefore \vec{u}_1 &= \boxed{(1, 5, 7)} \end{aligned}$$

Hallamos  $\vec{u}_2$  de  $r2$  igualando cada expresión a un  $\lambda$  dado, con lo que obtenemos la siguiente ecuación paramétrica:

$$\begin{aligned} r2) \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \\ z = -2 + 14\lambda \end{cases} \\ \therefore \vec{u}_2 &= \boxed{(2, 10, 14)} \end{aligned}$$

Obtenemos también el punto  $P_0(1, 3, -2)$

**1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes:**

$$\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \iff \exists k \in \mathbb{R} / \vec{u}_1 = k\vec{u}_2$$

$$\vec{u}_1 = (1, 5, 7) \quad \vec{u}_2 = (2, 10, 14)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &\stackrel{?}{=} k\vec{u}_2 & 1 = 2k &\implies k = \frac{1}{2} \\ (1, 5, 7) &\stackrel{?}{=} k(2, 10, 14) & 5 = 10k &\implies k = \frac{1}{2} \\ (1, 5, 7) &\stackrel{?}{=} (2k, 10k, 14k) & 7 = 14k &\implies k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\implies \vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u}_2 \implies \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \quad \therefore \boxed{r1 \parallel r2}$$

**Son rectas coincidentes?**

Si  $P_0 \in r2 \wedge P_0 \in r1 \implies P_0$  debe satisfacer todas las ecuaciones de  $r1$ :

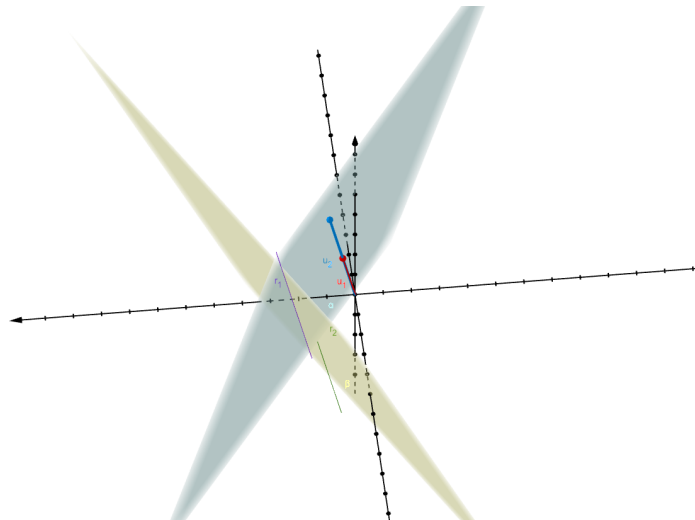
Reemplazamos  $P_0$  en la ecuación ( $\alpha$ ) de  $r1$ :

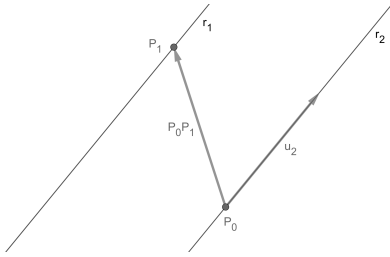
$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - 5 &= 0 \\ 3(1) - 2(3) + (-2) - 5 &= 0 \\ 3 - 6 - 2 - 5 &= 0 \\ 3 - 13 &= 0 \\ -10 &\neq 0 \end{aligned}$$

Pero  $P_0$  **no satisface** la ecuación una de las ecuaciones de  $r1$ , entonces  $P_0$  no pertenece a  $r1$ .

$$\therefore \boxed{r1 \wedge r2 \text{ no son coincidentes}}$$

**Gráfica 12-a:**



**1.2.2. Ecuación del plano que determinan  $r_1$  y  $r_2$ :****Información inicial:**

$\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}_2 = \vec{n}$ , vector normal al plano determinado por  $\overrightarrow{P_0P_1}$  y  $\vec{u}_2$ .

**Buscamos un punto de paso  $P_1$  en  $r_1$ :**

$$\text{Si } z = \boxed{0} \implies \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejamos  $y$  de (1):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5 &= 0 \\ -2y &= -3x + 5 \\ y &= \frac{-(3x - 5)}{-2} \\ y &= \frac{3x - 5}{2} & (3) \end{aligned}$$

Reemplazamos (3) en (2) para hallar  $x$ :

$$\begin{aligned} 2x + y - 5 &= 0 \\ 2x + \left(\frac{3x - 5}{2}\right) - 5 &= 0 \\ 2x + \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - 5 &= 0 \\ \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} &= 0 \\ 7x - 15 &= 0 \\ x &= \boxed{\frac{15}{7}} \end{aligned}$$

Reemplazamos  $x$  en (3) para hallar  $y$ :

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x - 5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{3}{2} \left(\frac{15}{7}\right) - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{45}{14} - \frac{35}{14} \\ y &= \frac{10}{14} \\ y &= \boxed{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore P_1 \left( \frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0 \right) \in r_1$$

A partir de este punto de paso  $P_1$  podemos buscar el vector  $\vec{n}'$  del plano determinado por  $r_1$  y  $r_2$ :

$$P_0(1, 3, -2) \quad P_1\left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$$

Armamos el vector  $\overrightarrow{P_0P_1}$ :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right) - (1, 3, -2) \\ \overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{15}{7} - 1, \frac{5}{7} - 3, 0 - (-2)\right) \\ \overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{8}{7}, -\frac{16}{7}, 2\right)\end{aligned}$$

Buscamos el vector  $\vec{n}'$  con  $\overrightarrow{P_0P_1}$  y  $\vec{u}_2$ :

$$\begin{aligned}\vec{n}' &= \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}_2 \\ \vec{n}' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} & 2 \\ 2 & 10 & 14 \end{vmatrix} \\ \vec{n}' &= \vec{i} \left[ \left(-\frac{16}{7}\right) \cdot (14) - (2) \cdot (10) \right] + \vec{j} \left[ (2) \cdot (2) - \left(\frac{8}{7}\right) \cdot (14) \right] + \vec{k} \left[ \left(\frac{8}{7}\right) \cdot (10) - \left(-\frac{16}{7}\right) \cdot (2) \right] \\ \vec{n}' &= \vec{i}[-32 - 20] + \vec{j}[4 - 16] + \vec{k}\left[\frac{80}{7} + \frac{32}{7}\right] \\ \vec{n}' &= \vec{i}(-52) + \vec{j}(-12) + \vec{k}(16) \\ \vec{n}' &= -52\vec{i} - 12\vec{j} + 16\vec{k} \\ \vec{n}' &= -13\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \therefore \vec{n}' &= \boxed{(-13, -3, 4)}\end{aligned}$$

Con el vector  $\vec{n}'$  encontrado empezamos a armar la ecuación del plano al que llamaremos  $\omega$ :

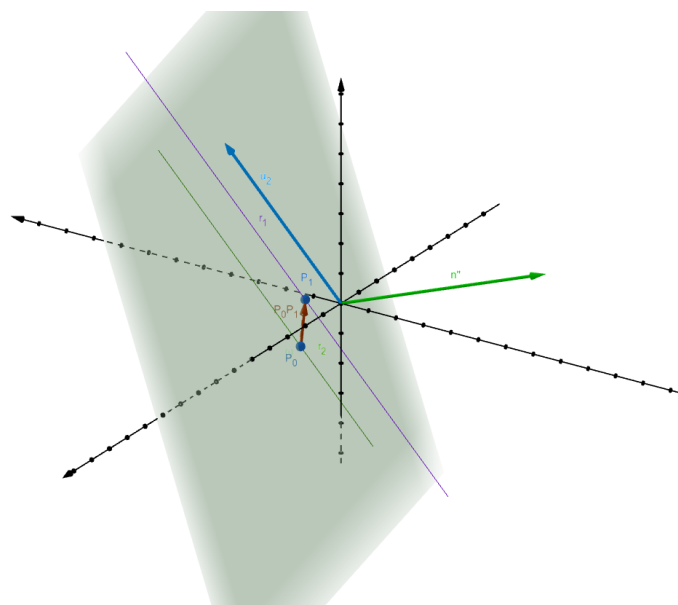
$$\omega) \quad -13x - 3y + 4z + d = 0$$

Usamos el punto  $P_0(1, 3, -2)$  para determinar el valor de  $d$ :

$$\begin{aligned}-13x - 3y + 4z + d &= 0 \\ -13(1) - 3(3) + 4(-2) + d &= 0 \\ -13 - 9 - 8 + d &= 0 \\ -30 + d &= 0 \\ d &= \boxed{30}\end{aligned}$$

$\therefore \omega) \quad -13x - 3y + 4z + 30 = 0$  es la ecuación del plano determinado por las rectas  $r_1$  y  $r_2$ .

Gráfica 12-b:



### 1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a $r_1$ y $r_2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas:

Planos paralelos a ambas rectas serán paralelos a  $\omega$ . Se podría usar el mismo vector normal  $\vec{n}'$  y el punto de paso  $P_0$  esta vez a 10 unidades del origen de coordenadas.

Valores iniciales:

$$\vec{n}' = (-13, -3, 4) \quad P_0(1, 3, -2)$$

Hallamos el módulo de  $\vec{n}'$ :

$$\begin{aligned} |\vec{n}'| &= \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2 + (4)^2} \\ |\vec{n}'| &= \sqrt{169 + 9 + 16} \\ |\vec{n}'| &= \sqrt{194} \end{aligned}$$

Hallamos el versor de  $\vec{n}'$ :

$$\begin{aligned} \vec{n}'_0 &= \frac{1}{|\vec{n}'|} \cdot \vec{n}' \\ \vec{n}'_0 &= \frac{1}{\sqrt{194}} \cdot (-13, -3, 4) \\ \vec{n}'_0 &= \left( \frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}} \right) \end{aligned}$$

Hallamos un vector  $\vec{n}_1 = 10 \cdot \vec{n}'_0$  que nos servirá para hallar los puntos  $P_1$  y  $P_2$  que equidistan del plano en direcciones opuestas en 10 unidades:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= 10 \cdot \vec{n}'_0 \\ \vec{n}_1 &= 10 \cdot \left( \frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}} \right) \\ \vec{n}_1 &= \left( \frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_1 = \left( \frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}} \right)} \wedge P_2 = -P_1 \Rightarrow \boxed{P_2 = \left( \frac{130}{\sqrt{194}}, \frac{30}{\sqrt{194}}, \frac{-40}{\sqrt{194}} \right)}$$

A continuación hallamos las ecuaciones de los planos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ :

Usamos  $P_1$  para hallar  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} -13x - 3y + 4z + d &= 0 \\ -13 \cdot \left( \frac{-130}{\sqrt{194}} \right) - 3 \cdot \left( \frac{-30}{\sqrt{194}} \right) + 4 \cdot \left( \frac{40}{\sqrt{194}} \right) + d &= 0 \\ \frac{1690}{\sqrt{194}} + \frac{90}{\sqrt{194}} + \frac{160}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\ \frac{1940}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\ 10\sqrt{194} + d &= 0 \\ d &= \boxed{-10\sqrt{194}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_1) -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0$$



Usamos  $P_2$  para hallar  $\omega_2$ :

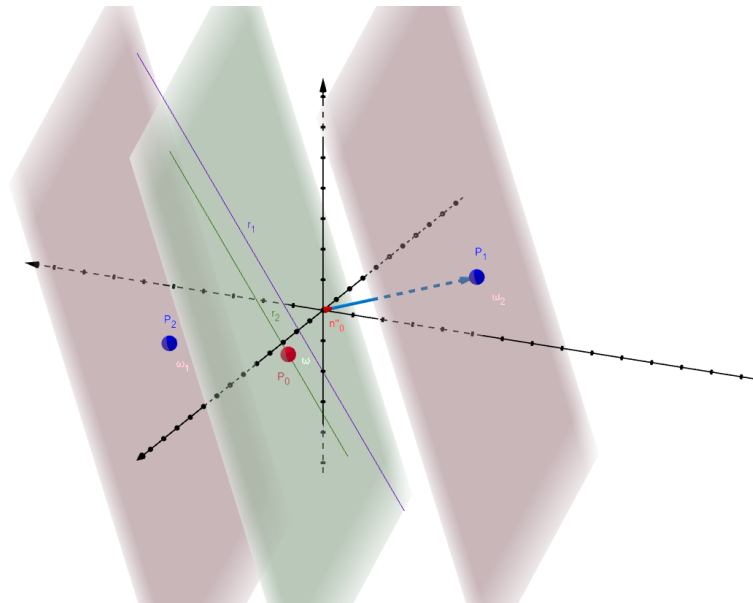
$$\begin{aligned}
 -13x - 3y + 4z + d &= 0 \\
 -13 \cdot \left( \frac{130}{\sqrt{194}} \right) - 3 \cdot \left( \frac{30}{\sqrt{194}} \right) + 4 \cdot \left( \frac{-40}{\sqrt{194}} \right) + d &= 0 \\
 -\frac{1690}{\sqrt{194}} - \frac{90}{\sqrt{194}} - \frac{160}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
 -\frac{1940}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
 -10\sqrt{194} + d &= 0 \\
 d &= \boxed{10\sqrt{194}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_2) -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0$$

$\therefore$  Las ecuaciones de los planos paralelos a  $r_1$  y  $r_2$  que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas son:

$$\boxed{\omega_1) -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\omega_2) -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0}$$

**Gráfica 12-c:**



## 2. Ejercicio 18

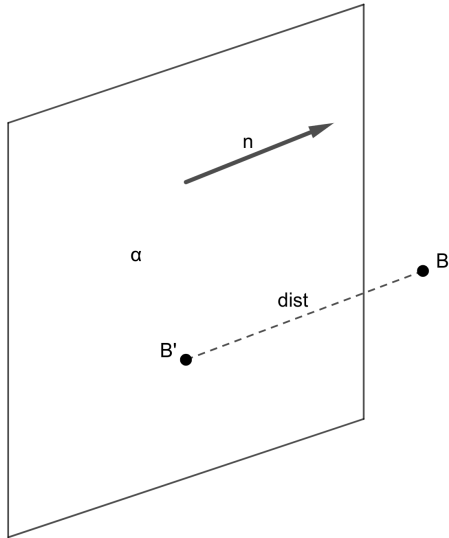
### 2.1. Enunciado

Dados el plano  $\alpha3x + 2y - 5z = 0$  y el punto  $B(2, 1, -1)$ :

- a) Calculen la distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$ .
- b) Determinen las coordenadas del punto  $B'$  del plano cuya distancia al punto  $B$  coincide con la distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$ .

## 2.2. Solución analítica

Valores iniciales:



Ecuación del plano  $\alpha$  dado:

$$\alpha) \quad 3x + 2y - 5z = 0$$

Punto  $B$  dado:

$$B(2, 1, -1)$$

Vector  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ :

$$\vec{b} = (2, 1, -1)$$

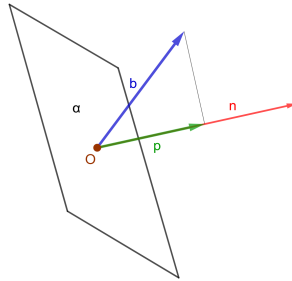
Vector normal del plano:

$$\vec{n} = (3, 2, -5)$$

Ecuaciones paramétricas de una recta  $\parallel$  a  $\vec{n}$ :  
(solo con fines ilustrativos)

$$r) \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$$

Lo anterior nos presenta la siguiente situación:



Ya que el coeficiente  $d$  de  $\alpha$  es igual a 0, determinamos que el plano cruza el origen de coordenadas. El vector  $\vec{n}$  representa el vector normal  $\perp$  a  $\alpha$ , el vector  $\vec{b}$  que representa la distancia  $\overrightarrow{OB}$ , con lo que la distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$  está determinada por el módulo del vector  $\vec{p}$  (proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{n}$ ), que está dado por:

$$\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} = \vec{p}$$

**2.2.1. Distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$ :**

Con la situación y los valores iniciales anteriormente mencionados procedemos a hallar la distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$ , para ello hallamos el módulo de la proyección  $\vec{p}$ :

$$|\vec{p}| = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \vec{b} = (2, 1, -1) \quad \vec{n} = (3, 2, -5)$$

Hallamos el producto escalar entre  $\vec{b} \cdot \vec{n}$ :

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = (2) \cdot (3) + (1) \cdot (2) + (-1) \cdot (-5)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 6 + 2 + 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = \boxed{13}$$

Hallamos el módulo de  $\vec{n}$ :

$$|\vec{n}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-5)^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 4 + 25}$$

$$|\vec{n}| = \boxed{\sqrt{38}}$$

Hallamos el módulo de la proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{n}$ :

$$|\vec{p}| = \frac{13}{\sqrt{38}} \implies \frac{13}{38}\sqrt{38}$$

$\therefore$  La distancia del punto  $B$  al plano  $\alpha$  es  $\boxed{\frac{13}{38}\sqrt{38}} \approx 2,109$

### 2.2.2. Coordenadas del punto $B'$ que pertenece a $\alpha$ y cuya distancia a $B$ es igual que la distancia de $B$ a $\alpha$ :

Para hallar el punto  $B' \in \alpha$  y cuya distancia a  $B$  es igual a la distancia de  $B$  a  $\alpha$  podemos hacer uso del vector proyección  $\vec{p}$  antes mencionado para luego restarlo del vector  $\vec{b}$ , lo que nos da como resultado un vector  $\vec{b'}$  cuyo sentido (punta flecha) coincidirá con el punto  $B' \in \alpha$ :

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}} \quad \vec{n} = (3, 2, -5) \quad \vec{b} = (2, 1, -1) \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 13 \quad |\vec{n}| = \sqrt{38}$$

Calculamos  $\vec{p}$ :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \\ \vec{p} &= \frac{13}{(\sqrt{38})^2} \cdot (3, 2, -5) \\ \vec{p} &= \frac{13}{38} \cdot (3, 2, -5) \\ \vec{p} &= \left( \frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38} \right) \end{aligned}$$

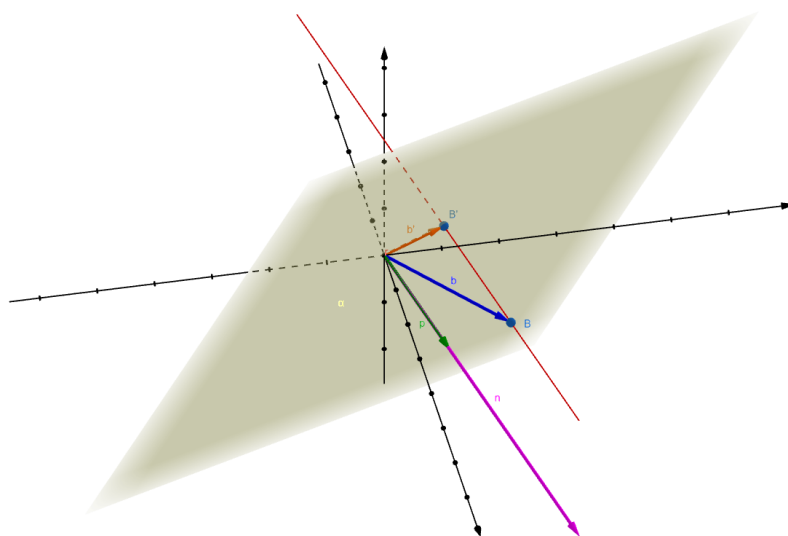
Calculamos  $\vec{b'}$ :

$$\begin{aligned} \vec{b'} &= \vec{b} - \vec{p} \\ \vec{b'} &= (2, 1, -1) - \left( \frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38} \right) \\ \vec{b'} &= \left( 2 - \frac{39}{38}, 1 - \frac{26}{38}, -1 + \frac{65}{38} \right) \\ \vec{b'} &= \left( \frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38} \right) \end{aligned}$$

$\therefore$  Las coordenadas del punto  $B'$  que está contenido en  $\alpha$  y cuya distancia a  $B$  es igual a la distancia de  $B$  a  $\alpha$  es:

$$\boxed{B' \left( \frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38} \right)} \approx (0,974; 0,316; 0,711)$$

Gráfica 18-a,b:



### **3. Ejercicio 23**

#### **3.1. Enunciado**

#### **3.2. Solución**