



Universidad
Nacional
de Rosario

TRABAJO PRÁCTICO NRO. 1

DISTANCIA ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

MATEMÁTICA - TUIA

Autores:

Andrés Arana Castillo - Legajo: A-4604/3

Gustavo Alberto Casado - Legajo: C-7296/6

Junio 2023

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Ejercicio 12 | 2 |
| 1.1. Enunciado | 2 |
| 1.2. Solución analítica | 3 |
| 1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes: | 4 |
| 1.2.2. Ecuación del plano que determinan r_1 y r_2 : | 5 |
| 1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a r_1 y r_2 que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas: | 8 |
| 2. Ejercicio 18 | 10 |
| 2.1. Enunciado | 10 |
| 2.2. Solución analítica | 11 |
| 2.2.1. Distancia del punto B al plano α : | 12 |
| 2.2.2. Coordenadas del punto B' que pertenece a α y cuya distancia a B es igual que la distancia de B a α : | 13 |
| 3. Ejercicio 23 | 15 |
| 3.1. Enunciado | 15 |
| 3.2. Solución analítica | 16 |
| 3.2.1. Distancia entre r_1 y r_2 : | 17 |

1. Ejercicio 12

1.1. Enunciado

Dadas las rectas $r1) \begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$ y $r2) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+2}{14}$

- a Verifiquen que son paralelas y no coincidentes.
- b Hallen la ecuación del plano que determinan.
- c Hallen las ecuaciones de todos los planos paralelos a ambas rectas que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas.

1.2. Solución analítica

Valores iniciales:

$$r1) \begin{cases} 3x - 2y + z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 2x + y - z - 5 = 0 & (\beta) \end{cases} \quad r2) \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+2}{14}$$

A continuación buscamos los vectores $\vec{u}_1 \parallel r1$ y $\vec{u}_2 \parallel r2$:

Dados los vectores normales a los planos que determinan $r1$):

$$\vec{n}_\alpha = (3, -2, 1) \quad \vec{n}_\beta = (2, 1, -1)$$

Hallamos el vector director de $r1$): $\vec{u}_1 / \vec{u}_1 \perp \vec{n}_\alpha \wedge \vec{u}_1 \perp \vec{n}_\beta$:

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \\ \vec{u}_1 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \vec{u}_1 &= \vec{i}(2-1) - \vec{j}(-3-2) + \vec{k}(3+4) \\ \vec{u}_1 &= \vec{i}(1) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(7) \\ \vec{u}_1 &= \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \\ \therefore \vec{u}_1 &= \boxed{(1, 5, 7)} \end{aligned}$$

Hallamos \vec{u}_2 de $r2$ igualando cada expresión a un λ dado, con lo que obtenemos la siguiente ecuación paramétrica:

$$\begin{aligned} r2) \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \\ z = -2 + 14\lambda \end{cases} \\ \therefore \vec{u}_2 &= \boxed{(2, 10, 14)} \end{aligned}$$

Obtenemos también el punto $P_0(1, 3, -2)$

1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes:

$$\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \iff \exists k \in \mathbb{R} / \vec{u}_1 = k\vec{u}_2$$

$$\vec{u}_1 = (1, 5, 7) \quad \vec{u}_2 = (2, 10, 14)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &\stackrel{?}{=} k\vec{u}_2 & 1 = 2k &\implies k = \frac{1}{2} \\ (1, 5, 7) &\stackrel{?}{=} k(2, 10, 14) & 5 = 10k &\implies k = \frac{1}{2} \\ (1, 5, 7) &\stackrel{?}{=} (2k, 10k, 14k) & 7 = 14k &\implies k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\implies \vec{u}_1 = \frac{1}{2}\vec{u}_2 \implies \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \quad \therefore \boxed{r_1 \parallel r_2}$$

Son rectas coincidentes?

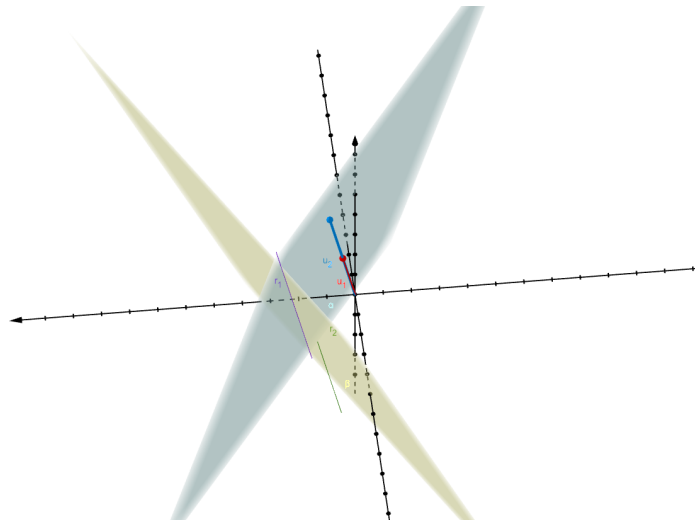
Si $P_0 \in r_2 \wedge P_0 \in r_1 \implies P_0$ debe satisfacer todas las ecuaciones de r_1 :

Reemplazamos P_0 en la ecuación (α) de r_1 :

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - 5 &= 0 \\ 3(1) - 2(3) + (-2) - 5 &= 0 \\ 3 - 6 - 2 - 5 &= 0 \\ 3 - 13 &= 0 \\ -10 &\neq 0 \end{aligned}$$

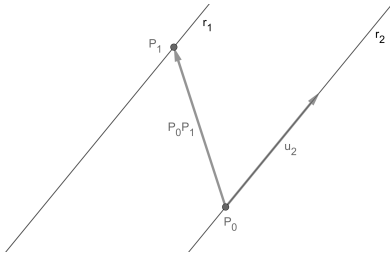
Pero P_0 **no satisface** una de las ecuaciones de r_1 , entonces P_0 no pertenece a r_1 .

$$\therefore \boxed{r_1 \wedge r_2 \text{ no son coincidentes}}$$

Gráfica 12-a:

1.2.2. Ecuación del plano que determinan r_1 y r_2 :

Información inicial:



$\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}_2 = \vec{n}$, vector normal al plano determinado por $\overrightarrow{P_0P_1}$ y \vec{u}_2 .

Buscamos un punto de paso P_1 en r_1 :

$$\text{Si } z = \boxed{0} \implies \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Despejamos y de (1):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5 &= 0 \\ -2y &= -3x + 5 \\ y &= \frac{-(3x - 5)}{-2} \\ y &= \frac{3x - 5}{2} & (3) \end{aligned}$$

Reemplazamos (3) en (2) para hallar x :

$$\begin{aligned} 2x + y - 5 &= 0 \\ 2x + \left(\frac{3x - 5}{2}\right) - 5 &= 0 \\ 2x + \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - 5 &= 0 \\ \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} &= 0 \\ 7x - 15 &= 0 \\ x &= \boxed{\frac{15}{7}} \end{aligned}$$

Reemplazamos x en (3) para hallar y :

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x - 5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}\left(\frac{15}{7}\right) - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{45}{14} - \frac{35}{14} \\ y &= \frac{10}{14} \\ y &= \boxed{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore P_1\left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right) \in r_1$$

A partir de este punto de paso P_1 podemos buscar el vector \vec{n} del plano determinado por r_1 y r_2 :

$$P_0(1, 3, -2) \quad P_1\left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right)$$

Armamos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right) - (1, 3, -2) \\ \overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{15}{7} - 1, \frac{5}{7} - 3, 0 - (-2)\right) \\ \overrightarrow{P_0P_1} &= \left(\frac{8}{7}, -\frac{16}{7}, 2\right)\end{aligned}$$

Buscamos el vector \vec{n} con $\overrightarrow{P_0P_1}$ y \vec{u}_2 :

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u}_2 \\ \vec{n} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} & 2 \\ 2 & 10 & 14 \end{vmatrix} \\ \vec{n} &= \vec{i} \left[\left(-\frac{16}{7}\right) \cdot (14) - (2) \cdot (10) \right] + \vec{j} \left[(2) \cdot (2) - \left(\frac{8}{7}\right) \cdot (14) \right] + \vec{k} \left[\left(\frac{8}{7}\right) \cdot (10) - \left(-\frac{16}{7}\right) \cdot (2) \right] \\ \vec{n} &= \vec{i} [-32 - 20] + \vec{j} [4 - 16] + \vec{k} \left[\frac{80}{7} + \frac{32}{7} \right] \\ \vec{n} &= \vec{i}(-52) + \vec{j}(-12) + \vec{k}(16) \\ \vec{n} &= -52\vec{i} - 12\vec{j} + 16\vec{k} \\ \vec{n} &= -13\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \\ \therefore \vec{n} &= \boxed{(-13, -3, 4)}\end{aligned}$$

Con el vector \vec{n} encontrado empezamos a armar la ecuación del plano al que llamaremos ω :

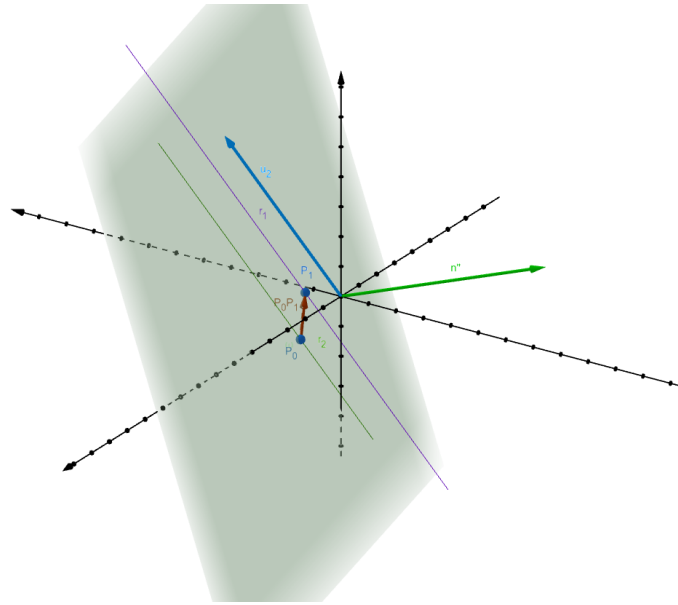
$$\omega) \quad -13x - 3y + 4z + d = 0$$

Usamos el punto $P_0(1, 3, -2)$ para determinar el valor de d :

$$\begin{aligned}-13x - 3y + 4z + d &= 0 \\ -13(1) - 3(3) + 4(-2) + d &= 0 \\ -13 - 9 - 8 + d &= 0 \\ -30 + d &= 0 \\ d &= \boxed{30}\end{aligned}$$

$\therefore \omega) \quad -13x - 3y + 4z + 30 = 0$ es la ecuación del plano determinado por las rectas r_1 y r_2 .

Gráfica 12-b:



1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a r_1 y r_2 que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas:

Planos paralelos a ambas rectas serán paralelos a ω . Se podría usar el mismo vector normal \vec{n} y hallar los puntos de paso a unidades del origen de coordenadas.

Valores iniciales:

$$\vec{n} = (-13, -3, 4)$$

Hallamos el módulo de \vec{n} :

$$\begin{aligned} |\vec{n}| &= \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2 + (4)^2} \\ |\vec{n}| &= \sqrt{169 + 9 + 16} \\ |\vec{n}| &= \sqrt{194} \end{aligned}$$

Hallamos el versor de \vec{n} :

$$\begin{aligned} \vec{n}_0 &= \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \\ \vec{n}_0 &= \frac{1}{\sqrt{194}} \cdot (-13, -3, 4) \\ \vec{n}_0 &= \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}} \right) \end{aligned}$$

Hallamos un vector $\vec{n}_1 = 10 \cdot \vec{n}_0$ que nos servirá para hallar los puntos P_1 y P_2 que equidistan del plano en direcciones opuestas en 10 unidades:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= 10 \cdot \vec{n}_0 \\ \vec{n}_1 &= 10 \cdot \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}} \right) \\ \vec{n}_1 &= \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_1 = \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}} \right)} \wedge P_2 = -P_1 \implies \boxed{P_2 = \left(\frac{130}{\sqrt{194}}, \frac{30}{\sqrt{194}}, \frac{-40}{\sqrt{194}} \right)}$$

A continuación hallamos las ecuaciones de los planos ω_1 y ω_2 :

Usamos P_1 para hallar ω_1 :

$$\begin{aligned} -13x - 3y + 4z + d &= 0 \\ -13 \cdot \left(\frac{-130}{\sqrt{194}} \right) - 3 \cdot \left(\frac{-30}{\sqrt{194}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{194}} \right) + d &= 0 \\ \frac{1690}{\sqrt{194}} + \frac{90}{\sqrt{194}} + \frac{160}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\ \frac{1940}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\ 10\sqrt{194} + d &= 0 \\ d &= \boxed{-10\sqrt{194}} \end{aligned}$$

$$\implies \omega_1) -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0$$

2. Ejercicio 18

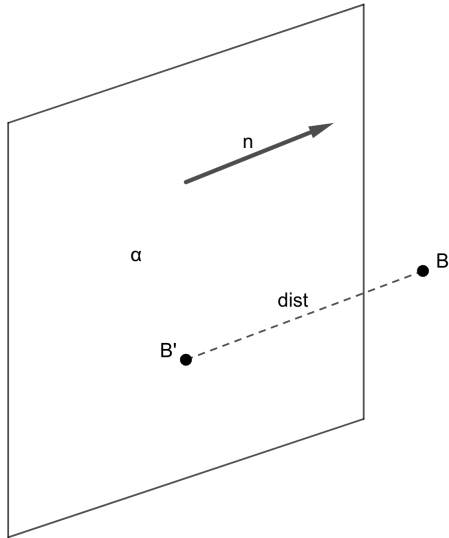
2.1. Enunciado

Dados el plano $\alpha3x + 2y - 5z = 0$ y el punto $B(2, 1, -1)$:

- a) Calculen la distancia del punto B al plano α .
- b) Determinen las coordenadas del punto B' del plano cuya distancia al punto B coincide con la distancia del punto B al plano α .

2.2. Solución analítica

Valores iniciales:



Ecuación del plano α dado:

$$\alpha) \quad 3x + 2y - 5z = 0$$

Punto B dado:

$$B(2, 1, -1)$$

Vector $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$:

$$\vec{b} = (2, 1, -1)$$

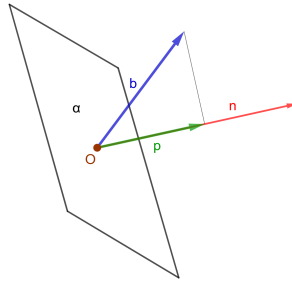
Vector normal del plano:

$$\vec{n} = (3, 2, -5)$$

Ecuaciones paramétricas de una recta ortogonal al plano α : *(solo con fines ilustrativos)*

$$r) \quad \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$$

Lo anterior nos presenta la siguiente situación:



Ya que el coeficiente d de α es igual a 0, determinamos que el plano cruza el origen de coordenadas. El vector \vec{n} representa el vector normal \perp a α , el vector \vec{b} que representa la distancia \overline{OB} , con lo que la distancia del punto B al plano α está determinada por el módulo del vector \vec{p} (*proyección de \vec{b} sobre \vec{n}*), que está dado por:

$$\overrightarrow{\text{Proy}_{\vec{n}} \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} = \vec{p}$$

2.2.1. Distancia del punto B al plano α :

Con la situación y los valores iniciales anteriormente mencionados procedemos a hallar la distancia del punto B al plano α , para ello hallamos el módulo de la proyección \vec{p} :

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad \vec{b} = (2, 1, -1) \quad \vec{n} = (3, 2, -5)$$

Hallamos el producto escalar entre $\vec{b} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = (2) \cdot (3) + (1) \cdot (2) + (-1) \cdot (-5)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 6 + 2 + 5$$

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = \boxed{13}$$

Hallamos el módulo de \vec{n} :

$$|\vec{n}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-5)^2}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 4 + 25}$$

$$|\vec{n}| = \boxed{\sqrt{38}}$$

Hallamos el módulo de la proyección de \vec{b} sobre \vec{n} :

$$|\vec{p}| = \frac{13}{\sqrt{38}} \implies \frac{13}{38}\sqrt{38}$$

\therefore La distancia del punto B al plano α es $\boxed{\frac{13}{38}\sqrt{38}} \approx 2,109$

2.2.2. Coordenadas del punto B' que pertenece a α y cuya distancia a B es igual que la distancia de B a α :

Para hallar el punto $B' \in \alpha$ y cuya distancia a B es igual a la distancia de B a α podemos hacer uso del vector proyección \vec{p} antes mencionado para luego restarlo del vector \vec{b} , lo que nos da como resultado un vector $\vec{b'}$ cuyo sentido (punta flecha) coincidirá con el punto $B' \in \alpha$:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}} \quad \vec{n} = (3, 2, -5) \quad \vec{b} = (2, 1, -1) \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 13 \quad |\vec{n}| = \sqrt{38}$$

Calculamos \vec{p} :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} \\ \vec{p} &= \frac{13}{(\sqrt{38})^2} \cdot (3, 2, -5) \\ \vec{p} &= \frac{13}{38} \cdot (3, 2, -5) \\ \vec{p} &= \left(\frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38} \right) \end{aligned}$$

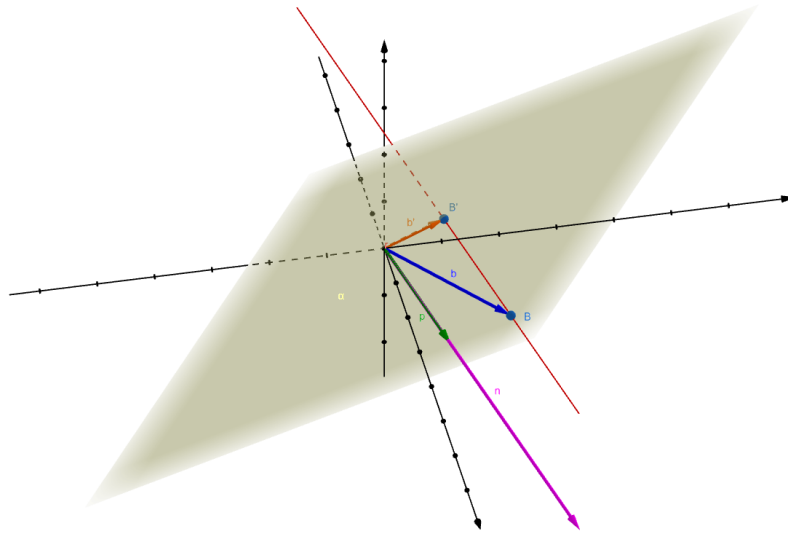
Calculamos $\vec{b'}$:

$$\begin{aligned} \vec{b'} &= \vec{b} - \vec{p} \\ \vec{b'} &= (2, 1, -1) - \left(\frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38} \right) \\ \vec{b'} &= \left(2 - \frac{39}{38}, 1 - \frac{26}{38}, -1 + \frac{65}{38} \right) \\ \vec{b'} &= \left(\frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38} \right) \end{aligned}$$

\therefore Las coordenadas del punto B' que está contenido en α y cuya distancia a B es igual a la distancia de B a α es:

$$\boxed{B' \left(\frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38} \right)} \approx (0,974; 0,316; 0,711)$$

Gráfica 18-a,b:



3. Ejercicio 23

3.1. Enunciado

Halla la distancia entre las rectas $r_1) \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y r_2 determinada por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(-2, 2, 6)$.

3.2. Solución analítica

Valores iniciales:

En r_1):

$$\boxed{P_1(2, -1, 3)}$$

$$\boxed{\vec{u} = (2, -1, 3)}$$

En r_2):

$$\boxed{P_2(1, 0, 2)}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{v} = (-2, 2, 6) - (1, 0, 2)$$

$$\vec{v} = (-2 - 1, 2 - 0, 6 - 2)$$

$$\boxed{\vec{v} = (-3, 2, 4)}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 2) - (2, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [1 - 2, 0 - (-1), 2 - 3]$$

$$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 1, -1)}$$

Verificación de coplanaridad entre r_1 y r_2 :

Para verificar si las rectas son coplanares o alabeadas calculamos el producto mixto $\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -1, 3) \times (-3, 2, 4)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i}[(-1)(4) - (3)(2)] + \vec{j}[(3)(-3) - (2)(4)] + \vec{k}[(2)(2) - (-1)(-3)]$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i}(-4 - 6) + \vec{j}(-9 - 8) + \vec{k}(4 - 3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{i}(-10) + \vec{j}(-17) + \vec{k}(1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-10, -17, 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (-1, 1, -1) \cdot (-10, -17, 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = [(-1)(-10)] + [(1)(-17)] + [(-1)(1)]$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (10 - 17 - 1)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (10 - 18)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \boxed{-8}$$

\therefore podemos determinar que r_1 y r_2 son rectas **alabeadas**.

3.2.1. Distancia entre r_1 y r_2 :

Para determinar la distancia entre r_1 y r_2 hacemos uso de la siguiente expresión:

$$\delta(r_1; r_2) = \left| \text{Proy}_{\vec{u} \times \vec{v}} \overrightarrow{P_1 P_2} \right| = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right|$$

Realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned} \delta(r_1; r_2) &= \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \left| \frac{\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \left| \frac{-8}{(-10, -17, 1)} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \left| \frac{-8}{\sqrt{(-10)^2 + (-17)^2 + (1)^2}} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \left| \frac{-8}{\sqrt{100 + 289 + 1}} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \left| \frac{-4}{195} \sqrt{390} \right| \\ \delta(r_1; r_2) &= \frac{4}{195} \sqrt{390} \\ \delta(r_1; r_2) &\approx 0,405 \end{aligned}$$

\therefore La distancia entre las rectas r_1 y r_2 es $\approx 0,405$.

