Trabajo Práctico Nro. 1

Distancia entre puntos, rectas y planos en el espacio

Matemática - TUIA

Autores:

Andrés Arana Castillo - Legajo: A-4604/3
Gustavo Alberto Casado - Legajo: C-7296/6

Junio 2023

Índice

1. Ejercicio 12

1.1. Enunciado

Dadas las rectas $r1)\begin{cases} 3x-2y+z=5 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$ y $r2)\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{10}=\dfrac{z+2}{14}$

a Verifiquen que son paralelas y no coincidentes.

b Hallen la ecuación del plano que determinan.

c Hallen las ecuaciones de todos los planos paralelos a ambas rectas que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas.

1.2. Solución analítica

Valores iniciales:

$$r1)\begin{cases} 3x - 2y + z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 2x + y - z - 5 = 0 & (\beta) \end{cases} \qquad r2)\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{10} = \frac{z+2}{14}$$

A continuación buscamos los vectores $\vec{u_1} \parallel r1$ y $\vec{u_2} \parallel r2$:

Dados los vectores normales a los planos que determinan $r1$):

$$\vec{n_\alpha} = (3, -2, 1) \qquad \vec{n_\beta} = (2, 1, -1)$$

Hallamos el vector director de $r1) :\ \vec{u_1}/\vec{u_1} \perp \vec{n_\alpha} \wedge \vec{u_1} \perp \vec{n_\beta}$:

$$\begin{aligned} \vec{u_1} &= \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} \\ \vec{u_1} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \vec{u_1} &= \vec{i}(2-1) - \vec{j}(-3-2) + \vec{k}(3+4) \\ \vec{u_1} &= \vec{i}(1) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(7) \\ \vec{u_1} &= \vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} \\ \therefore\ \vec{u_1} &= \boxed{(1, 5, 7)} \end{aligned}$$

Hallamos $\vec{u_2}$ de $r2$ igualando cada expresión a un λ dado, con lo que obtenemos la siguiente ecuación paramétrica:

$$r2)\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \\ z = -2 + 14\lambda \end{cases}$$

$$\therefore\ \boxed{\vec{u_2} = (2, 10, 14)}$$

Obtenemos también el punto $P_0(1, 3, -2)$

1.2.1. Verificación de paralelismo y rectas no coincidentes:

$$\vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \iff \exists k \in \mathbb{R} \;/\; \vec{u_1} = k\vec{u_2}$$

$$\vec{u_1} = (1,5,7) \qquad \vec{u_2} = (2,10,14)$$

$$\begin{aligned} \vec{u_1} &\stackrel{?}{=} k\vec{u_2} \\ (1,5,7) &\stackrel{?}{=} k(2,10,14) \\ (1,5,7) &\stackrel{?}{=} (2k,10k,14k) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1 = 2k &\implies k = \frac{1}{2} \\ 5 = 10k &\implies k = \frac{1}{2} \\ 7 = 14k &\implies k = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\implies \vec{u_1} = \tfrac{1}{2}\vec{u_2} \qquad \implies \vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \qquad \therefore \boxed{r1 \;\parallel\; r2}$$

Son rectas coincidentes?

Si $P_0 \in r2 \wedge P_0 \in r1 \implies P_0$ debe satisfacer todas las ecuaciones de $r1$:

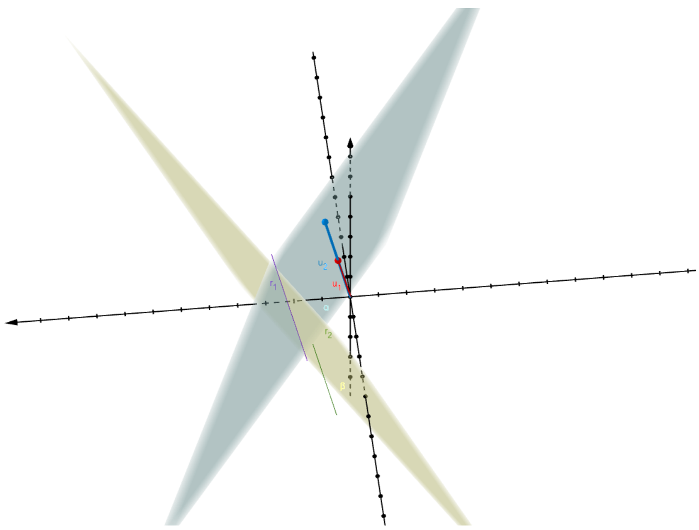
Reemplazamos P_0 en la ecuación (α) de $r1$:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z - 5 &= 0 \\ 3(1) - 2(3) + (-2) - 5 &= 0 \\ 3 - 6 - 2 - 5 &= 0 \\ 3 - 13 &= 0 \\ -10 &\neq 0 \end{aligned}$$

Pero P_0 **no satisface** una de las ecuaciones de $r1$, entonces P_0 no pertenece a $r1$.

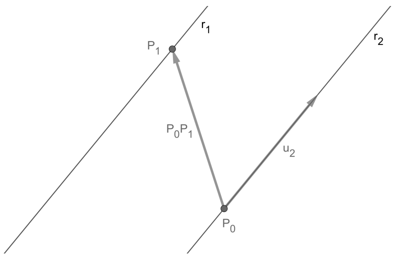
$$\therefore \boxed{r1 \wedge r2 \;\; \text{no son coincidentes}}$$

Gráfica 12-a:



1.2.2. Ecuación del plano que determinan $r1$ y $r2$:

Información inicial:



$\overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u_2} = \vec{n}$, vector normal al plano determinado por $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u_2}$.

Buscamos un punto de paso P_1 en $r1$:

Si $z = \boxed{0} \implies \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 & (1) \\ 2x + y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$

Despejamos y de (1):

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 5 &= 0 \\ -2y &= -3x + 5 \\ y &= \frac{-(3x-5)}{-2} \\ y &= \frac{3x-5}{2} \qquad (3) \end{aligned}$$

Reemplazamos (3) en (2) para hallar x:

$$\begin{aligned} 2x + y - 5 &= 0 \\ 2x + \left(\frac{3x-5}{2}\right) - 5 &= 0 \\ 2x + \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - 5 &= 0 \\ \frac{7}{2}x - \frac{15}{2} &= 0 \\ 7x - 15 &= 0 \\ x &= \boxed{\frac{15}{7}} \end{aligned}$$

Reemplazamos x en (3) para hallar y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{3}{2}\left(\frac{15}{7}\right) - \frac{5}{2} \\ y &= \frac{45}{14} - \frac{35}{14} \\ y &= \frac{10}{14} \\ y &= \boxed{\frac{5}{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_1\left(\frac{15}{7}, \frac{5}{7}, 0\right) \in r1}$$

A partir de este punto de paso P_1 podemos buscar el vector $\vec{n}$ del plano determinado por $r1$ y $r2$:

$$P_0(1,3,-2) \qquad P_1\left(\tfrac{15}{7},\tfrac{5}{7},0\right)$$

Armamos el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{15}{7},\frac{5}{7},0\right) - (1,3,-2)$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{15}{7}-1,\ \frac{5}{7}-3,\ 0-(-2)\right)$$
$$\overrightarrow{P_0P_1} = \left(\frac{8}{7},\ -\frac{16}{7},\ 2\right)$$

Buscamos el vector $\vec{n}$ con $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u_2}$:

$$\vec{n} = \overrightarrow{P_0P_1} \times \vec{u_2}$$
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{8}{7} & -\frac{16}{7} & 2 \\ 2 & 10 & 14 \end{vmatrix}$$
$$\vec{n} = \vec{i}\left[(-\frac{16}{7})\cdot(14)-(2)\cdot(10)\right] + \vec{j}\left[(2)\cdot(2)-(\frac{8}{7})\cdot(14)\right] + \vec{k}\left[(\frac{8}{7})\cdot(10)-(-\frac{16}{7})\cdot(2)\right]$$
$$\vec{n} = \vec{i}\,[-32-20] + \vec{j}\,[4-16] + \vec{k}\left[\frac{80}{7}+\frac{32}{7}\right]$$
$$\vec{n} = \vec{i}(-52) + \vec{j}(-12) + \vec{k}(16)$$
$$\vec{n} = -52\vec{i} - 12\vec{j} + 16\vec{k}$$
$$\vec{n} = -13\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$
$$\therefore\ \vec{n} = \boxed{(-13,-3,4)}$$

Con el vector $\vec{n}$ encontrado empezamos a armar la ecuación del plano al que llamaremos ω:

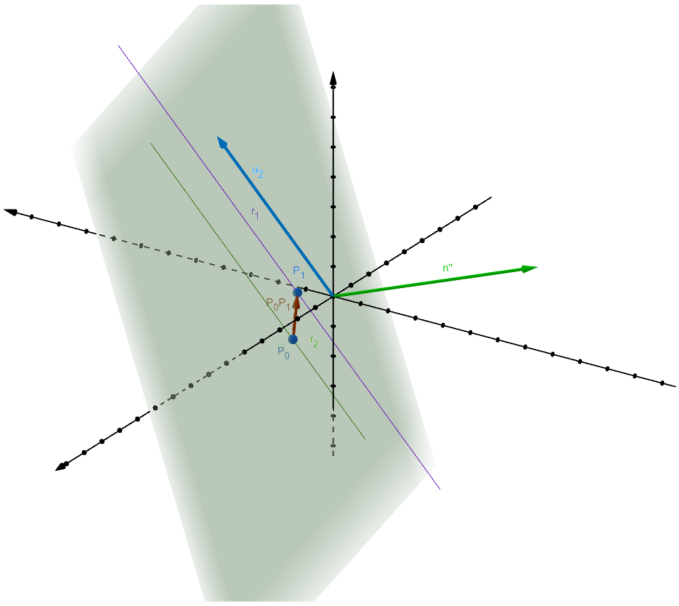
$$\omega) \qquad -13x - 3y + 4z + d = 0$$

Usamos el punto $P_0(1,3,-2)$ para determinar el valor de d:

$$-13x - 3y + 4z + d = 0$$
$$-13(1) - 3(3) + 4(-2) + d = 0$$
$$-13 - 9 - 8 + d = 0$$
$$-30 + d = 0$$
$$d = \boxed{30}$$

$\therefore$ $\boxed{\omega) \quad -13x - 3y + 4z + 30 = 0}$ es la ecuación del plano determinado por las rectas $r1$ y $r2$.

Gráfica 12-b:



1.2.3. Ecuaciones de planos paralelos a $r1$ y $r2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas:

Planos paralelos a ambas rectas serán paralelos a ω. Se podría usar el mismo vector normal $\vec{n}$ y hallar los puntos de paso a 10 unidades del origen de coordenadas.

Valores iniciales:

$$\vec{n} = (-13, -3, 4)$$

Hallamos el módulo de $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-13)^2 + (-3)^2 + (4)^2}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{169 + 9 + 16}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{194}$$

Hallamos el versor de $\vec{n}$:

$$\vec{n_0} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$$
$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{194}} \cdot (-13, -3, 4)$$
$$\vec{n_0} = \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}}\right)$$

Hallamos un vector $\vec{n_1} = 10 \cdot \vec{n_0}$ que nos servirá para hallar los puntos P_1 y P_2 que equidistan del plano en direcciones opuestas en 10 unidades:

$$\vec{n_1} = 10 \cdot \vec{n_0}$$
$$\vec{n_1} = 10 \cdot \left(\frac{-13}{\sqrt{194}}, \frac{-3}{\sqrt{194}}, \frac{4}{\sqrt{194}}\right)$$
$$\vec{n_1} = \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}}\right)$$

$$\therefore \boxed{P_1 = \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}, \frac{-30}{\sqrt{194}}, \frac{40}{\sqrt{194}}\right)} \wedge P_2 = -P_1 \implies \boxed{P_2 = \left(\frac{130}{\sqrt{194}}, \frac{30}{\sqrt{194}}, \frac{-40}{\sqrt{194}}\right)}$$

A continuación hallamos las ecuaciones de los planos ω_1 y ω_2:

Usamos P_1 para hallar ω_1:

$$-13x - 3y + 4z + d = 0$$
$$-13 \cdot \left(\frac{-130}{\sqrt{194}}\right) - 3 \cdot \left(\frac{-30}{\sqrt{194}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{40}{\sqrt{194}}\right) + d = 0$$
$$\frac{1690}{\sqrt{194}} + \frac{90}{\sqrt{194}} + \frac{160}{\sqrt{194}} + d = 0$$
$$\frac{1940}{\sqrt{194}} + d = 0$$
$$10\sqrt{194} + d = 0$$
$$d = \boxed{-10\sqrt{194}}$$

$$\implies \omega_1) - 13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0$$

Usamos P_2 para hallar ω_2:

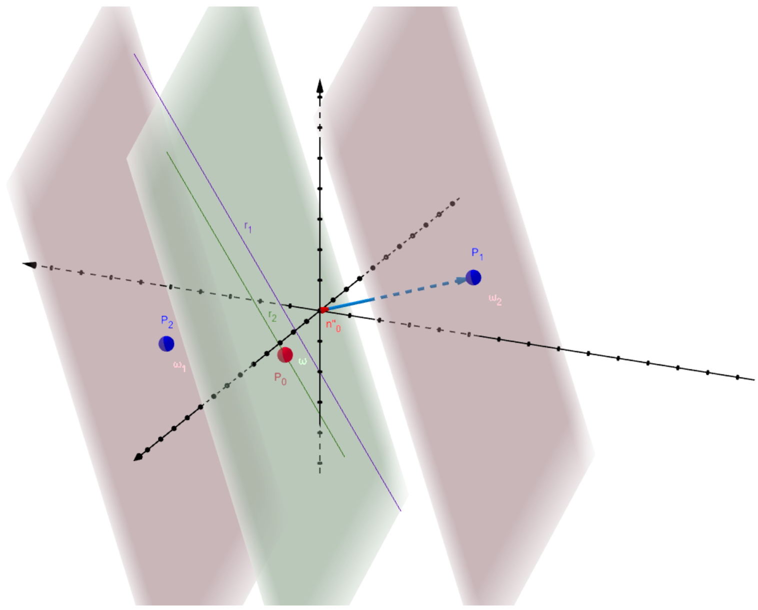
$$\begin{aligned}
-13x - 3y + 4z + d &= 0 \\
-13 \cdot \left(\frac{130}{\sqrt{194}}\right) - 3 \cdot \left(\frac{30}{\sqrt{194}}\right) + 4 \cdot \left(\frac{-40}{\sqrt{194}}\right) + d &= 0 \\
-\frac{1690}{\sqrt{194}} - \frac{90}{\sqrt{194}} - \frac{160}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
-\frac{1940}{\sqrt{194}} + d &= 0 \\
-10\sqrt{194} + d &= 0 \\
d &= \boxed{10\sqrt{194}}
\end{aligned}$$

$$\implies \quad \omega_2) \; -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0$$

$\therefore$ Las ecuaciones de los planos paralelos a $r1$ y $r2$ que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas son:

$$\boxed{\omega_1) \; -13x - 3y + 4z - 10\sqrt{194} = 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\omega_2) \; -13x - 3y + 4z + 10\sqrt{194} = 0}$$

Gráfica 12-c:



2. Ejercicio 18

2.1. Enunciado

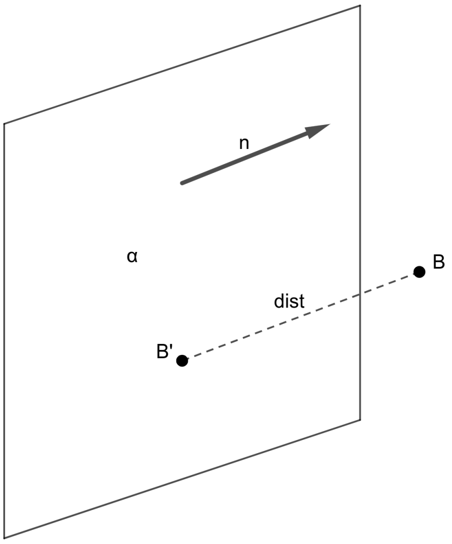
Dados el plano $\alpha)\ \ 3x + 2y - 5z = 0$ y el punto $B(2, 1, -1)$:

a Calculen la distancia del punto B al plano α.

b Determinen las coordenadas del punto B' del plano cuya distancia al punto B coincide con la distancia del punto B al plano α.

2.2. Solución analítica

Valores iniciales:



Ecuación del plano α dado:

$\alpha)\ \ 3x + 2y - 5z = 0$

Punto B dado:

$B(2, 1, -1)$

Vector $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$:

$\vec{b} = (2, 1, -1)$

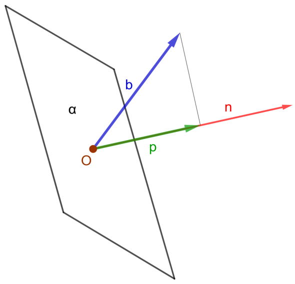
Vector normal del plano:

$\vec{n} = (3, 2, -5)$

Ecuaciones paramétricas de una recta ortogonal al plano α: *(solo con fines ilustrativos)*

$$r)\ \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 5t \end{cases}$$

Lo anterior nos presenta la siguiente situación:



Ya que el coeficiente d de α es igual a 0, determinamos que el plano cruza el origen de coordenadas. El vector $\vec{n}$ representa el vector normal $\perp$ a α, el vector $\vec{b}$ que representa la distancia $\overline{OB}$, con lo que la distancia del punto B al plano α está determinada por el módulo del vector $\vec{p}$ *(proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{n}$)*, que está dado por:

$$\boxed{\overrightarrow{Proy_{\vec{n}}\ \vec{b}} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n} = \vec{p}}$$

2.2.1. Distancia del punto B al plano α:

Con la situación y los valores iniciales anteriormente mencionados procedemos a hallar la distancia del punto B al plano α, para ello hallamos el módulo de la proyección $\vec{p}$:

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \qquad \vec{b} = (2, 1, -1) \qquad \vec{n} = (3, 2, -5)$$

Hallamos el producto escalar entre $\vec{b} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = (2) \cdot (3) + (1) \cdot (2) + (-1) \cdot (-5)$$
$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 6 + 2 + 5$$
$$\vec{b} \cdot \vec{n} = \boxed{13}$$

Hallamos el módulo de $\vec{n}$:

$$|\vec{n}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-5)^2}$$
$$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 4 + 25}$$
$$|\vec{n}| = \boxed{\sqrt{38}}$$

Hallamos el módulo de la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{n}$:

$$|\vec{p}| = \frac{13}{\sqrt{38}} \implies \frac{13}{38}\sqrt{38}$$

$\therefore$ La distancia del punto B al plano α es $\boxed{\frac{13}{38}\sqrt{38}} \approx 2,109$

2.2.2. Coordenadas del punto B' que pertenece a α y cuya distancia a B es igual que la distancia de B a α:

Para hallar el punto $B' \in \alpha$ y cuya distancia a B es igual a la distancia de B a α podemos hacer uso del vector proyección $\vec{p}$ antes mencionado para luego restarlo del vector $\vec{b}$, lo que nos da como resultado un vector $\vec{b'}$ cuyo sentido (punta flecha) coincidirá con el punto $B' \in \alpha$:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}} \qquad \vec{n} = (3, 2, -5) \qquad \vec{b} = (2, 1, -1) \qquad \vec{b} \cdot \vec{n} = 13 \qquad |\vec{n}| = \sqrt{38}$$

Calculamos $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \cdot \vec{n}$$
$$\vec{p} = \frac{13}{(\sqrt{38})^2} \cdot (3, 2, -5)$$
$$\vec{p} = \frac{13}{38} \cdot (3, 2, -5)$$
$$\vec{p} = \left(\frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38}\right)$$

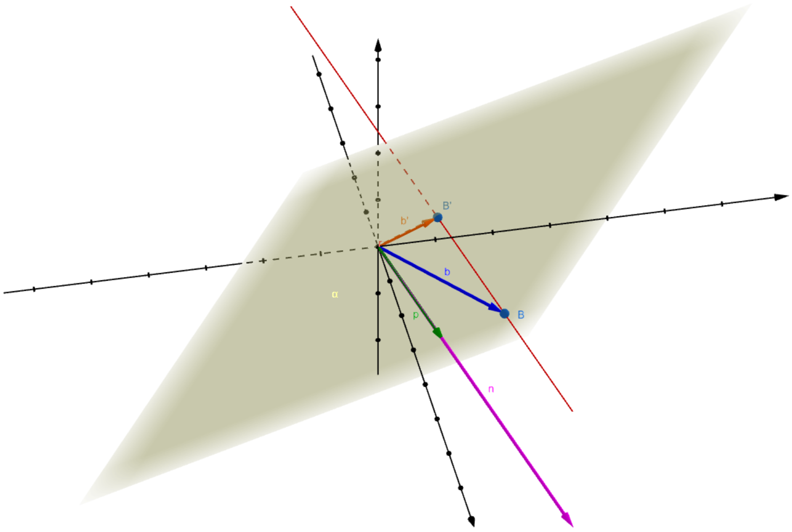
Calculamos $\vec{b'}$:

$$\vec{b'} = \vec{b} - \vec{p}$$
$$\vec{b'} = (2, 1, -1) - \left(\frac{39}{38}, \frac{26}{38}, -\frac{65}{38}\right)$$
$$\vec{b'} = \left(2 - \frac{39}{38}, 1 - \frac{26}{38}, -1 + \frac{65}{38}\right)$$
$$\vec{b'} = \left(\frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38}\right)$$

$\therefore$ Las coordenadas del punto B' que está contenido en α y cuya distancia a B es igual a la distancia de B a α es:

$$\boxed{B'\left(\frac{37}{38}, \frac{12}{38}, \frac{27}{38}\right)} \approx (0{,}974;\ 0{,}316;\ 0{,}711)$$

Gráfica 18-a,b:



3. Ejercicio 23

3.1. Enunciado

Halla la distancia entre las rectas $r_1) \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y r_2 determinada por los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(-2, 2, 6)$.

3.2. Solución analítica

Valores iniciales:

En r_1):

$\boxed{P_1(2,-1,3)}$

$\boxed{\vec{u}=(2,-1,3)}$

En r_2):

$\boxed{P_2(1,0,2)}$

$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$
$\vec{v}=(-2,2,6)-(1,0,2)$
$\vec{v}=(-2-1,\ 2-0,\ 6-2)$
$\boxed{\vec{v}=(-3,2,4)}$

$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,2)-(2,-1,3)$

$\overrightarrow{P_1P_2}=[1-2,\ 0-(-1),\ 2-3]$

$\boxed{\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,1,-1)}$

Verificación de coplanaridad entre r_1 y r_2:

Para verificar si las rectas son coplanares o alabeadas calculamos el producto mixto $\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$:

$$\begin{aligned}
\vec{u}\times\vec{v} &= (2,-1,3)\times(-3,2,4)\\
\vec{u}\times\vec{v} &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -1 & 3\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}\\
\vec{u}\times\vec{v} &= \vec{i}[(-1)(4)-(3)(2)]+\vec{j}[(3)(-3)-(2)(4)]+\vec{k}[(2)(2)-(-1)(-3)]\\
\vec{u}\times\vec{v} &= \vec{i}(-4-6)+\vec{j}(-9-8)+\vec{k}(4-3)\\
\vec{u}\times\vec{v} &= \vec{i}(-10)+\vec{j}(-17)+\vec{k}(1)\\
\vec{u}\times\vec{v} &= (-10,\ -17,\ 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= (-1,1,-1)\cdot(-10,-17,1)\\
\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= [(-1)(-10)]+[(1)(-17)]+[(-1)(1)]\\
\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= (10-17-1)\\
\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= (10-18)\\
\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= \boxed{-8}
\end{aligned}$$

$\therefore$ podemos determinar que r_1 y r_2 son rectas **alabeadas**.

3.2.1. Distancia entre r_1 y r_2:

Para determinar la distancia entre r_1 y r_2 hacemos uso de la siguiente expresión:

$$\boxed{\delta(r_1;r_2) = \left|Proy_{\vec{u}\times\vec{v}}\ \overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right|}$$

Realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned}
\delta(r_1;r_2) &= \left|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \left|\frac{-8}{(-10,-17,1)}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \left|\frac{-8}{\sqrt{(-10)^2+(-17)^2+(1)^2}}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \left|\frac{-8}{\sqrt{100+289+1}}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \left|\frac{-4}{195}\sqrt{390}\right| \\
\delta(r_1;r_2) &= \frac{4}{195}\sqrt{390} \\
\delta(r_1;r_2) &\approx 0{,}405
\end{aligned}$$

$\therefore$ La distancia entre las rectas r_1 y r_2 es $\boxed{\approx 0{,}405}$.

Gráfica 23: