

Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Чемоданова Ангелина Александровна

26 февраля 2025

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия

- Чемоданова Ангелина Александровна
- Студентка НФИбд02-22
- Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
- 1132226443@pfur.ru
- <https://github.com/aachemodanova>



Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 25 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Выполнение лабораторной работы

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k - x}{5.1v}$ (во втором случае $\frac{k + x}{5.1v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k - x}{5.1v} \text{ - в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k + x}{5.1v} \text{ - во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{25}{6,1}$ и $x_2 = \frac{25}{4,1}$, задачу будем решать для двух случаев.

Выполнение лабораторной работы

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r , $r \frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{26.01v^2 - v^2} = \sqrt{25.01}v$$

Из чего можно вывести:

$$r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{25.01} v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = v \\ r \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{25.01} v \end{array} \right.$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \frac{25}{6.1} \end{cases} \quad (1)$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \frac{25}{4.1} \end{cases} \quad (2)$$

Исключая из полученной системы производную по t , можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{25.01}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

```
using DifferentialEquations, Plots
```

```
# расстояние от лодки до катера
```

```
k = 25
```

```
# начальные условия для 1 и 2 случаев
```

```
r0 = k/6.1
```

```
r0_2 = k/4.1
```

```
theta0 = (0.0, 2*pi)
```

```
theta0_2 = (-pi, pi)
```

```
# данные для движения лодки браконьеров
```

```
fi = 3*pi/4;
```

```
t = (0, 50);
```

Выполнение лабораторной работы

функция, описывающая движение лодки браконьеров

```
x(t) = tan(fi)*t;
```

функция, описывающая движение катера береговой охраны

```
f(r, p, t) = r/sqrt(25.01)
```

постановка проблемы и решение ДУ для 1 случая

```
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)
```

```
sol = solve(prob, saveat = 0.01)
```

отрисовка траектории движения катера

```
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения ка
```

Получим график движения катера в 1 случае:

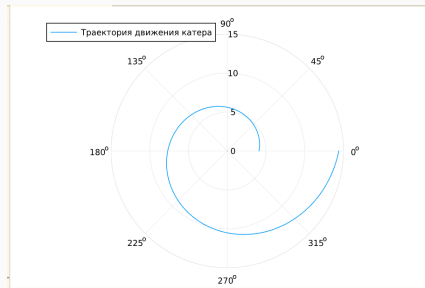


Рис. 1: Траектория движения катера в 1 случае

Добавим в код:

```
## необходимые действия для построения траектории движения лодки
```

```
ugol = [fi for i in range(0,15)]
```

```
x_lims = [x(i) for i in range(0,15)]
```

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером
```

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения л
```

Получим график движения катера и траекторию движения лодки в 1 случае:

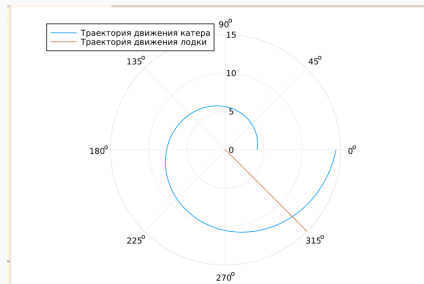


Рис. 2: График движения катера и траекторию движения лодки в 1 случае

Теперь рассчитаем точку пересечения траектории катера и лодки.

точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны

$y(x) = (250 * \exp((10 * x) / (\sqrt{2501}))) / (61)$

подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для

$y(f_i + \pi)$

Получим следующее значение: 12.304002757914663.

При оценки точки на глаз можно получить похожее значение:

```
# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны  
  
y(x)=(250*exp((10*x)/(sqrt(2501))))/(61) | y (generic function with 1 method)  
  
# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
  
y(fi + pi) | 12.304002757914663
```

Рис. 3: Точка пересечения траекторий катера и лодки в 1 случае

Перейдем к решению второго случая.

```
# постановка проблемы и решение ДУ для 2 случая
```

```
prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
```

```
sol_2 = solve(prob_2, saveat = 0.01)
```

```
# отрисовка траектории движения катера
```

```
plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0,15), label = "Траектория движения")
```

Получим график движения катера во 2 случае:

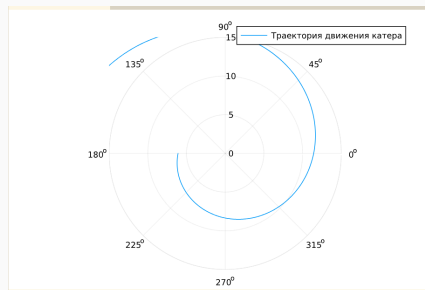


Рис. 4: Траектория движения катера во 2 случае

Добавим в код:

```
# отрисовка траектории движения лодки вместе с катером
```

```
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label = "Траектория движения ло
```

Получим график движения катера и траекторию движения лодки во 2 случае:

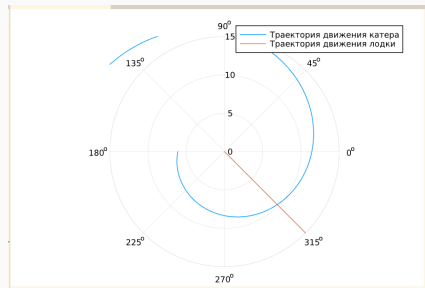


Рис. 5: График движения катера и траекторию движения лодки во 2 случае

Теперь рассчитаем точку пересечения траектории катера и лодки.

точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случ

$y_2(x) = (250 * \exp((10 * x / \sqrt{2501}) + (10 * \pi / \sqrt{2501}))) / (41)$

подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для

$y_2(f_i - \pi)$

Получим следующее значение: 9.767236102657977. При оценки точки на глаз можно получить похожее значение:

```
# точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая  
  
y2(x)=(250*exp((10*x/sqrt(2501))+(10*pi/sqrt(2501))))/(41) | y2 (generic function with 1 method)  
  
# подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
  
y2(fi-pi) | 9.767236102657977
```

Рис. 6: Точка пересечения траекторий катера и лодки во 2 случае

Мы построили математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.