T5: AUTÓMATAS CON PILA

* Extensión de los ε-AFND con una pila interna → MEMORIA!
* Reconocen los lenguajes independientes del contexto.

$(Q, A, B, \delta, q_0, Z_0, F^*)$

Alfabeto de la pila

Estados finales

Símbolo inicial de la pila

Función de transición

$$\delta : Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times B \longrightarrow \mathcal{P}(Q \times B^*)$$

* Dos criterios de parada:

  1. Por pila vacía: se acepta una palabra cuando la pila esté vacía. No se puede hacer ningún otro movimiento. $F = \emptyset$

  2. Por estados finales: se puede acabar si se está en un estado final independientemente de la pila.

EJEMPLO: $L = \{0^i 1^i \ / \ i \geq 0\}$

- Por pila vacía: $M = (\{q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{R, X\}, \delta, q_1, R, \emptyset)$

Meto 0's | Meto 1's

$\delta(q_1, 0, R) = (q_1, XR)$ $\qquad$ $\delta(q_1, 0, X) = (q_1, XX)$

$i=0$ $\delta(q_1, \varepsilon, R) = (q_1, \varepsilon)$ $\qquad$ $\delta(q_1, 1, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, 1, X) = (q_2, \varepsilon)$ $\qquad$ $\delta(q_2, \varepsilon, R) = (q_2, \varepsilon)$

Quito la R, FIN

- Por estados finales: $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0,1\}, \{R, x\}, \delta, q_1, R, \{q_3\})$

$\delta(q_1, 0, R) = (q_1, xR)$ $\delta(q_1, 0, x) = (q_1, xx)$

$i=0 \rightarrow \delta(q_1, \varepsilon, R) = (q_3, \varepsilon)$ $\delta(q_1, 1, x) = (q_2, \varepsilon)$

final

$\delta(q_2, 1, x) = (q_2, \varepsilon)$ $\delta(q_2, \varepsilon, R) = (q_3, \varepsilon)$

Ejercicio 2: AP para $\{a^i b^i : i \geq 0\} \cup \{a^i : i \geq 0\} \cup \{b^i : i \geq 0\}$

b) Por pila vacía: $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{Z_0, Z\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$

$\delta(q_0, a, Z_0) = \{(q_1, ZZ_0), (q_2, Z_0)\}$ $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = (q_0, \varepsilon)$ $i=0$.

$\delta(q_0, b, Z_0) = (q_4, Z_0)$

$a^i b^i$

$\delta(q_1, a, Z) = (q_1, ZZ)$

$\delta(q_1, b, Z) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_3, b, Z) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_3, \varepsilon, Z_0) = (q_3, \varepsilon)$

Acepto palabra

Meto a's

$\delta(q_2, a, Z_0) = (q_2, Z_0)$

$\delta(q_2, \varepsilon, Z_0) = (q_2, \varepsilon)$

fin

Meto b's

$\delta(q_4, b, Z_0) = (q_4, Z_0)$

$\delta(q_4, \varepsilon, Z_0) = (q_4, \varepsilon)$

fin

a) Por estados finales.

Basta con crear nuevo estado: q_5 y llevar: $\delta(q_i, \varepsilon, Z_0) = (q_5, \varepsilon)$

final

EJERCICIO 3: $S \to abS \mid cdT$

$T \to bT \mid b$

Paso de gramática a autómata con pila:

* Cuando en el tope hay una variable, transición nula y sustituimos por cada una de las derivaciones en la pila.
* Cuando hay un terminal, lo leemos.

$Q = \{q\}$ $A = \{a,b,c,d\}$ $B = \{a,b,c,d,S,T\}$, $q_0 = q$

$Z_0 = S$, $F = \emptyset$

$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, abS), (q, cdT)\}$
$\delta(q, \varepsilon, T) = \{(q, bT), (q, b)\}$
} Variables en el tope

$\delta(q, a, a) = (q, \varepsilon)$ $\delta(q, b, b) = (q, \varepsilon)$
$\delta(q, c, c) = (q, \varepsilon)$ $\delta(q, d, d) = (q, \varepsilon)$
} Terminales en el tope.

EJERCICIO 4

•) $L_1 = \{a^p b^q : p, q \geq 1 , p > q\}$

POR ESTADOS FINALES:

$\delta(q_0, a, Z) = (q_1, XZ)$

$\delta(q_1, a, X) = (q_1, XX)$ ← Por lo menos una a $(p \geq 1)$

$\delta(q_1, b, X) = (q_2, \varepsilon)$ ← Por lo menos una b $(q \geq 1)$

$\delta(q_2, b, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, \varepsilon, X) = (q_F, \varepsilon)$

POR PILA VACÍA:

· A las transiciones anteriores añadimos

$\delta(q_2, \varepsilon, X) = (q_3, \varepsilon)$ $\delta(q_3, \varepsilon, \begin{smallmatrix} Z \\ X \end{smallmatrix}) = (q_3, \varepsilon)$

- $L_2 = \{a^p b^q : p, q \geq 1 ; p < q\}$

POR ESTADOS FINALES

$\delta(q_0, a, Z) = (q_1, XZ)$

$\delta(q_1, a, X) = (q_1, XX)$

$\delta(q_1, b, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, b, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, b, Z) = (\underline{\underline{q_F}}, Z)$ → ¡No puedo vaciar la pila!

Ya puedo terminar.

$\delta(q_F, b, Z) = (q_F, Z)$ ← Meto todas las b's que quiera.

POR PILA VACÍA.

$\delta(q_0, a, Z) = (q_1, XZ)$

$\delta(q_1, a, X) = (q_1, XX)$

$\delta(q_1, b, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, b, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_2, b, Z) = (q_3, Z)$ — No puedo quitarla. En q_3 ya sé que $q > p$. Permito meter tantas b's como quiera.

$\delta(q_3, b, Z) = \{\underbrace{(q_3, Z)}_{\text{meter más b's}}, \underbrace{(q_3, \varepsilon)}_{\text{vaciar la pila y terminar.}}\}$

- $L_3 = \{a^p b^q a^r : \underline{p+q} \geq r \geq 1\}$ ↙ Puedo empezar por b.

$\delta(\underline{q_0}, a, Z) = (q_0, XZ)$ $\quad$ $\delta(q_0, b, Z) = (q_1, XZ)$

$\delta(\underline{q_0}, a, X) = (q_0, XX)$ $\quad$ $\delta(q_0, b, X) = (q_1, XX)$

No hace falta q_1 porque $p \geq 0$.

En q_1 controlo que ya he metido b's

$\delta(q_1, b, X) = (q_1, XX)$

$\delta(q_1, a, X) = (q_F, \varepsilon)$ ← $r \geq 1$

$\delta(q_F, a, X) = (q_F, \varepsilon)$

(Por pila vacía añado $\delta(q_F, \varepsilon, \substack{X \\ Z}) = (q_F, \varepsilon)$ para vaciarla)

EJERCICIO 5 : $L = \{a^i b^j c^{i+j} \,/\, i,j \in \mathbb{N}\}$

$\delta(q_0, a, Z) = (q_0, XZ)$

$\delta(q_0, a, X) = (q_0, XX)$

Puede no haber a's

$\delta(q_0, b, X) = (q_1, XX)$ $\quad \delta(q_0, \underline{b, Z}) = (q_1, XZ)$

$\delta(q_1, b, X) = (q_1, XX)$

$\delta(q_0, c, X) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_1, c, X) = (q_2, \varepsilon)$

Se puede meter la c después de a's (q_0) o b's (q_1)

$\delta(q_2, c, X) = (q_2, \varepsilon)$ ← Meto tantas c's como X's.

$\boxed{\delta(q_2, \varepsilon, Z) = (q_F, \varepsilon)}$

Termina por ambos criterios.