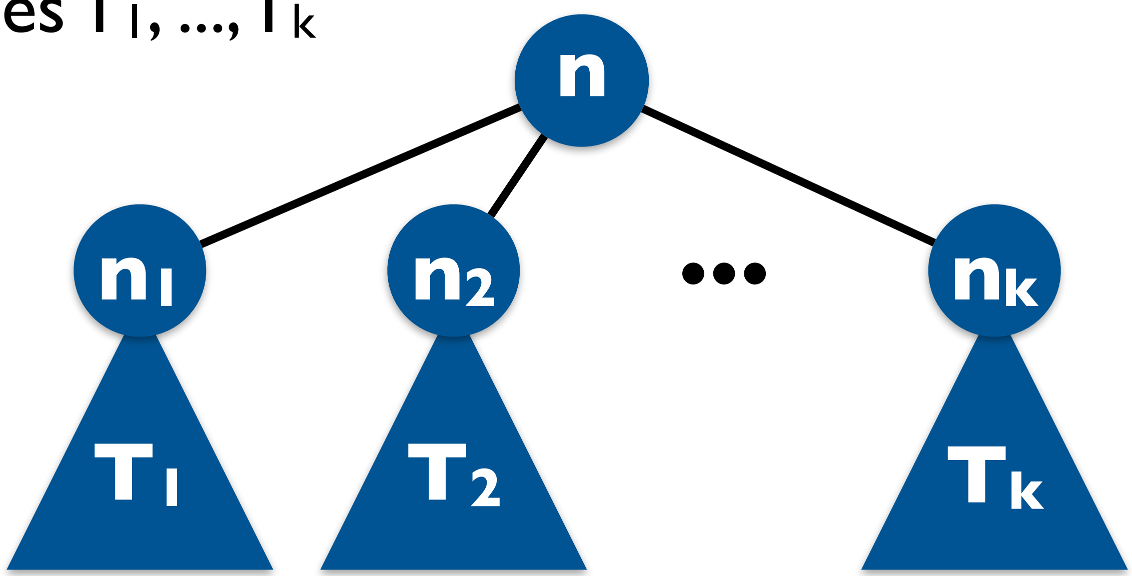
ÁRBOLES
Conceptos sobre árboles

Joaquín Fernández-Valdivia
Javier Abad
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
Universidad de Granada

DECSAI

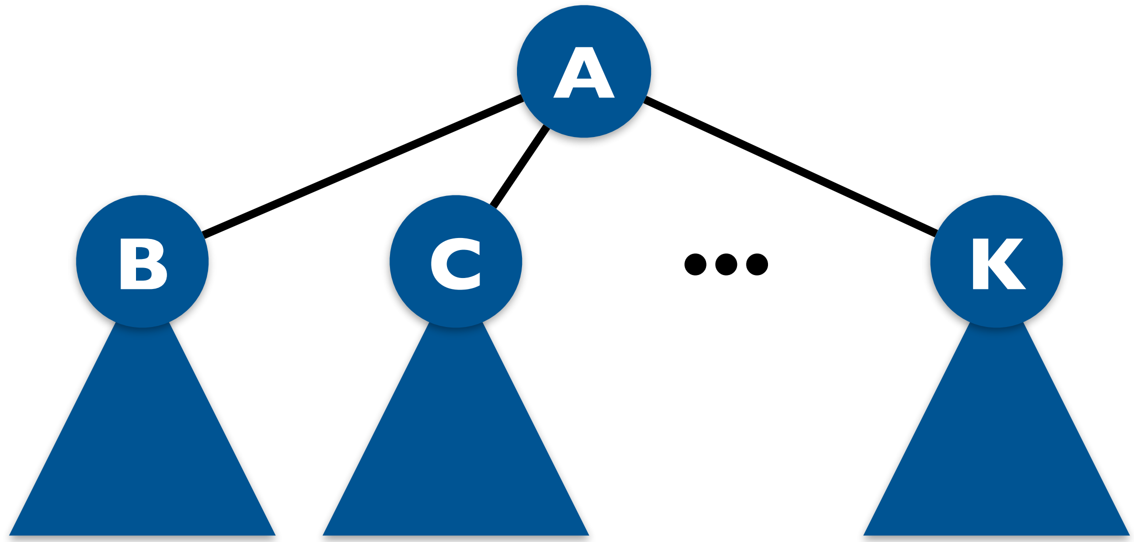
Árbol n-ario

- Base: Un nodo es un árbol n-ario (si el árbol tiene un sólo nodo, éste es el nodo raíz)
- Recurrencia: Si n es un nodo y $T_1, \ldots, T_k$ son árboles n-arios con raíces $n_1, \ldots, n_k$, respectivamente, podemos construir un árbol que tenga como raíz el nodo n y subárboles $T_1, \ldots, T_k$



Conceptos sobre árboles

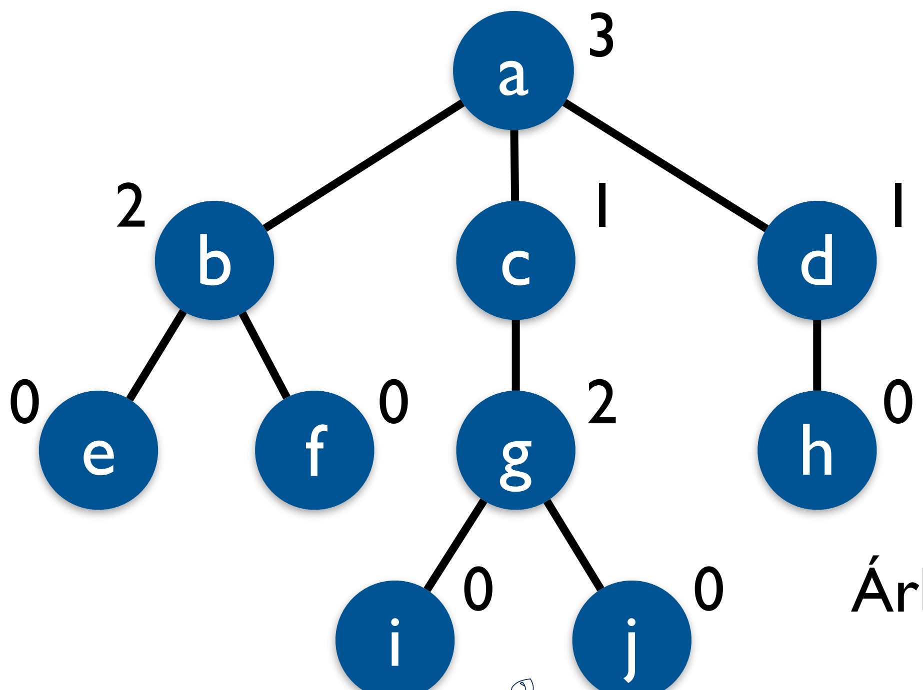
- Se dice que **un árbol está etiquetado** si todos sus nodos contienen una etiqueta



- A los nodos que son hijos de un mismo padre se les denomina **hermanos**

Conceptos sobre árboles

- Se llama **grado de un nodo** al número de subárboles (de hijos) que tiene dicho nodo. Los nodos de grado 0 se denominan **hojas** o **nodos terminales**. El resto se llaman nodos **no terminales** o **interiores**
- El **grado de un árbol** es el máximo de los grados de sus nodos



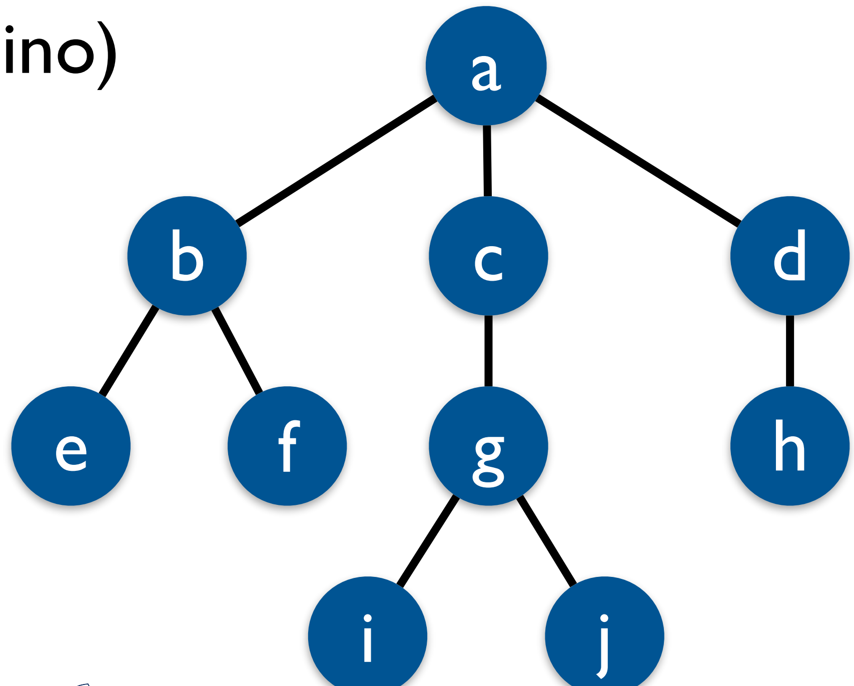
Árbol de grado 3

Conceptos sobre árboles

- El **camino entre dos nodos**, n_i y n_j se define como la secuencia de nodos del árbol necesaria para alcanzar el nodo n_j desde el nodo n_i
- La **longitud del camino entre dos nodos** es igual al número de nodos que forman el camino menos 1 (número de ejes del camino)

camino(a,f) = {a,b,f}

Longitud 2



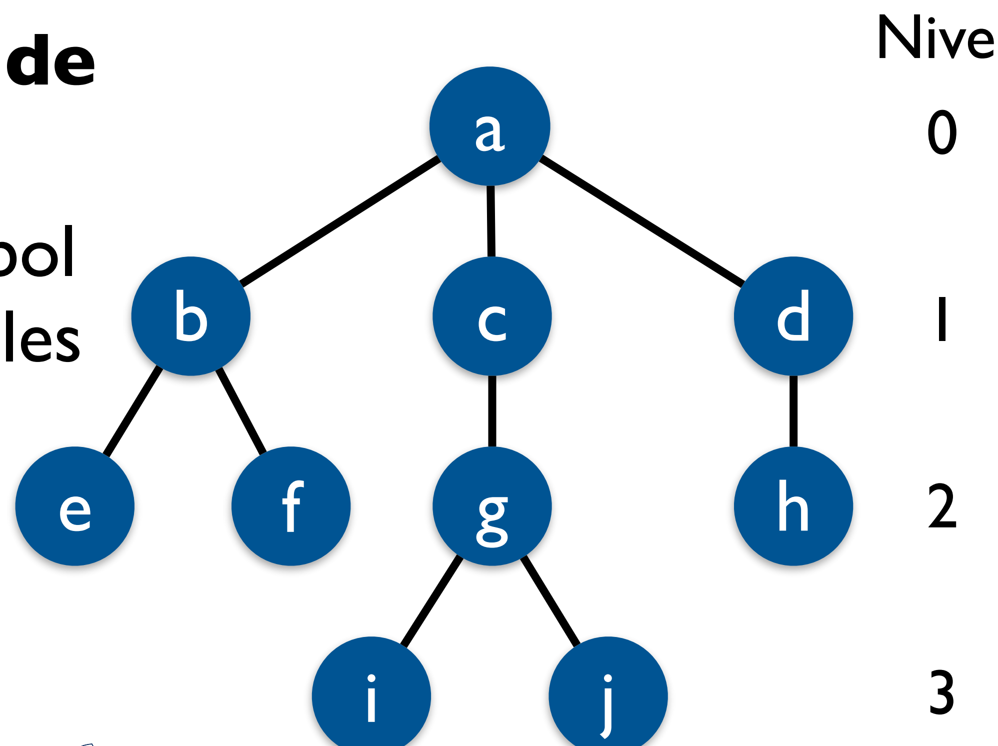
Conceptos sobre árboles

Nivel de un nodo

- Base: El nivel del nodo raíz es 0
- Recurrencia: si un nodo está en el nivel i, todos sus hijos están en el nivel i+1

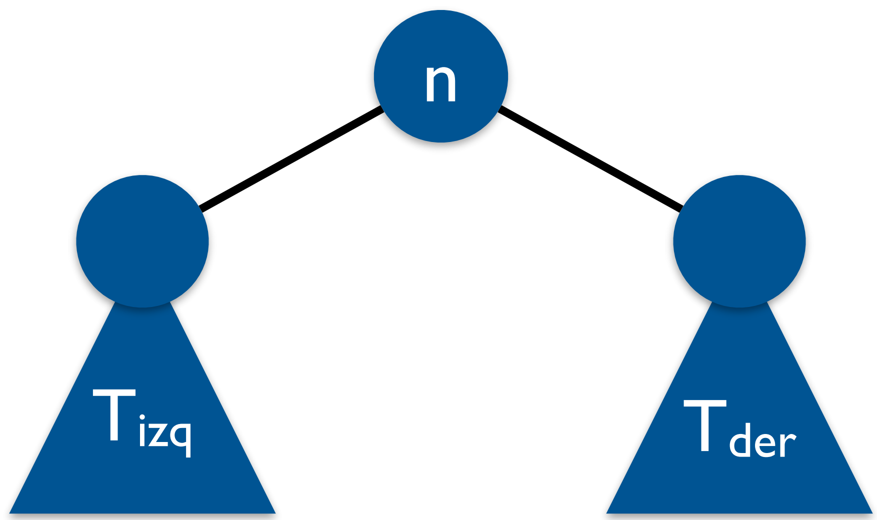
Altura y profundidad de un árbol

- La profundidad de un árbol es el máximo de los niveles de los nodos del árbol



Árboles binarios

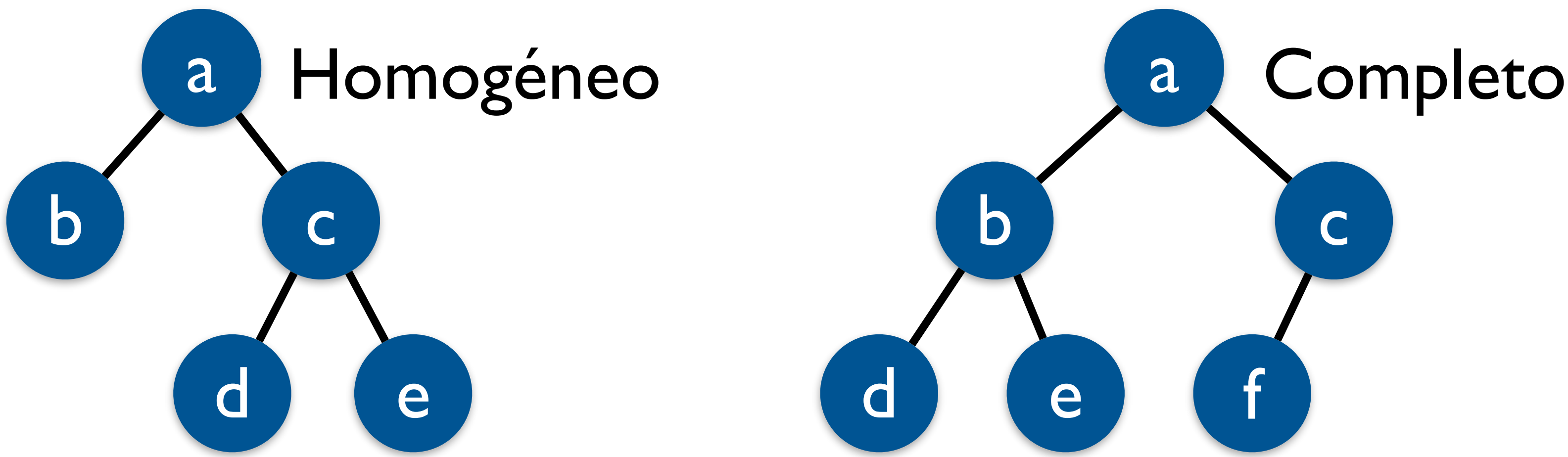
- Base: Un árbol vacío es un árbol binario
- Recurrencia: Si n es un nodo y T_{izq} y T_{der} son árboles binarios, podemos construir un nuevo árbol binario que tenga como raíz el nodo n y como subárboles T_{izq} y T_{der} (subárbol izquierdo y derecho, respectivamente)



Un árbol binario NO es un árbol n-ario de grado 2

Árboles binarios

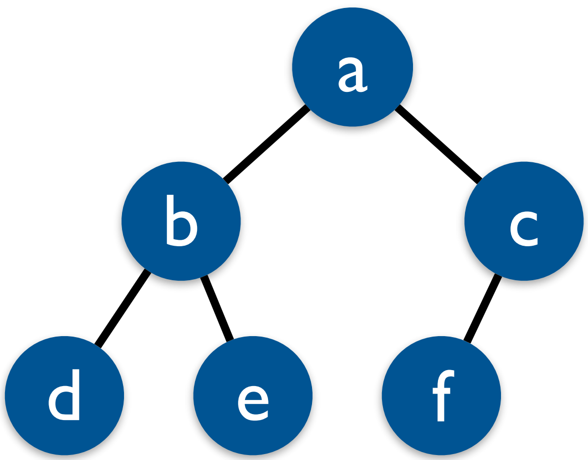
- **Árbol binario homogéneo**: aquél cuyos nodos tienen grado 0 ó 2 (no hay ninguno de grado 1)
- **Árbol binario completo**: aquél que tiene todos los niveles llenos excepto, quizá, el último, en cuyo caso los huecos deben quedar a la derecha



En un árbol binario completo con n nodos el camino más largo de la raíz a las hojas no atraviesa más de $\log_2$ n nodos

Árboles binarios

- En un árbol binario, el número máximo de nodos que puede haber en el nivel i es 2^i

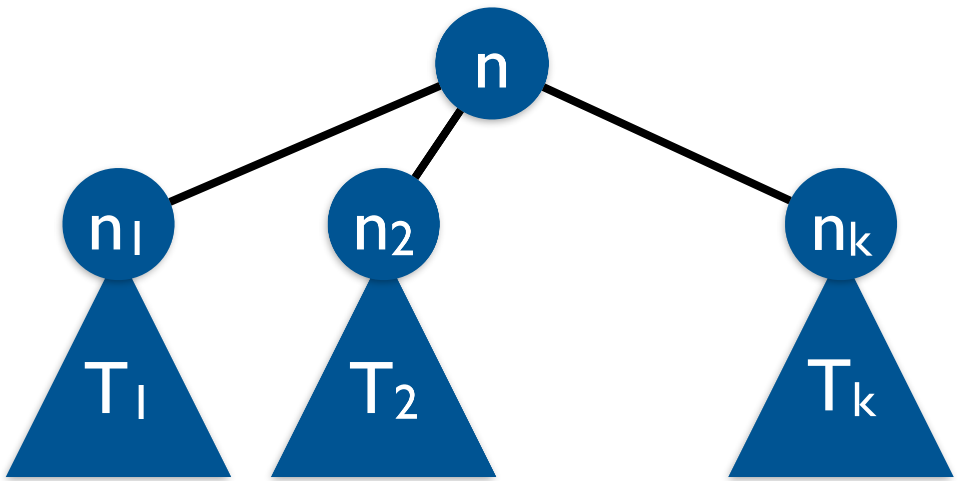


Nivel	Nodos
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$

- En un árbol binario completo de altura k, el número máximo de nodos es $2^{k+1}-1$

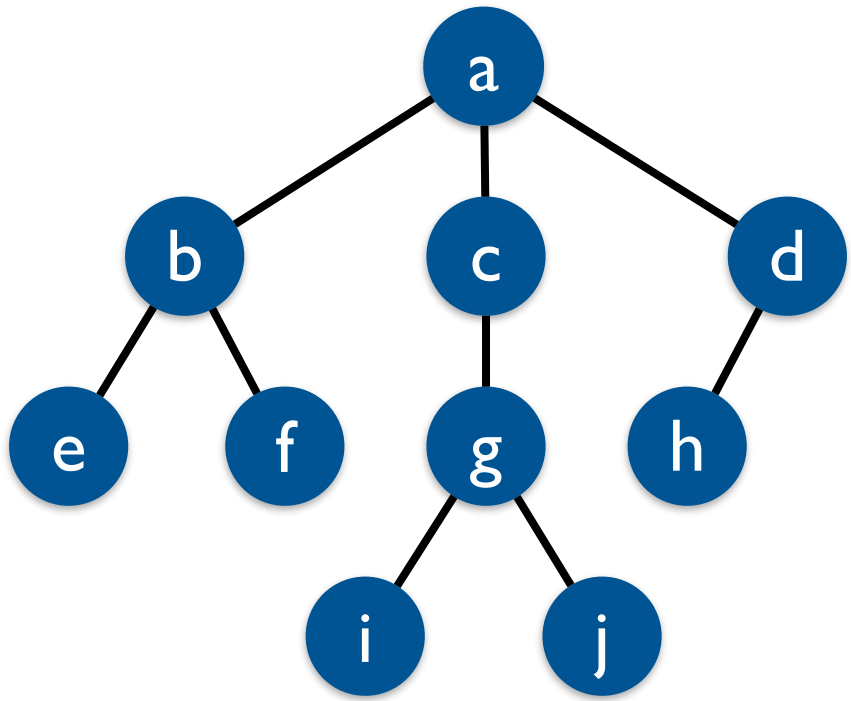
Recorridos en árboles n-arios

- Recorridos en profundidad:
  - **Preorden**: raíz, Pre(T_1), Pre(T_2),..., Pre(T_k)
  - **Inorden**: In(T_1), raíz, In(T_2),..., In(T_k)
  - **Postorden**: Pos(T_1), Pos(T_2),..., Pos(T_k), raíz



- Recorrido en anchura: por niveles ➢ de arriba a abajo y de izquierda a derecha, empezando por la raíz

Recorridos en árboles n-arios



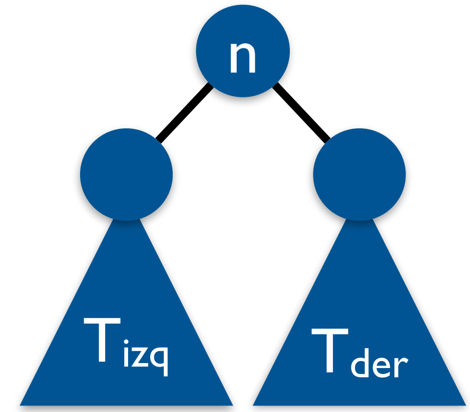
- Preorden: a b e f c g i j d h
- Inorden: e b f a i g j c h d
- Postorden: e f b i j g c h d a

Recursivos

- Por niveles: a b c d e f g h i j

Iterativo

Recorridos en árboles binarios



- Recorridos en profundidad:
  - **Preorden**: raíz, Pre(T_{izq}), Pre(T_{der})
  - **Inorden**: In(T_{izq}), raíz, In(T_{der})
  - **Postorden**: Pos(T_{izq}), Pos(T_{der}), raíz

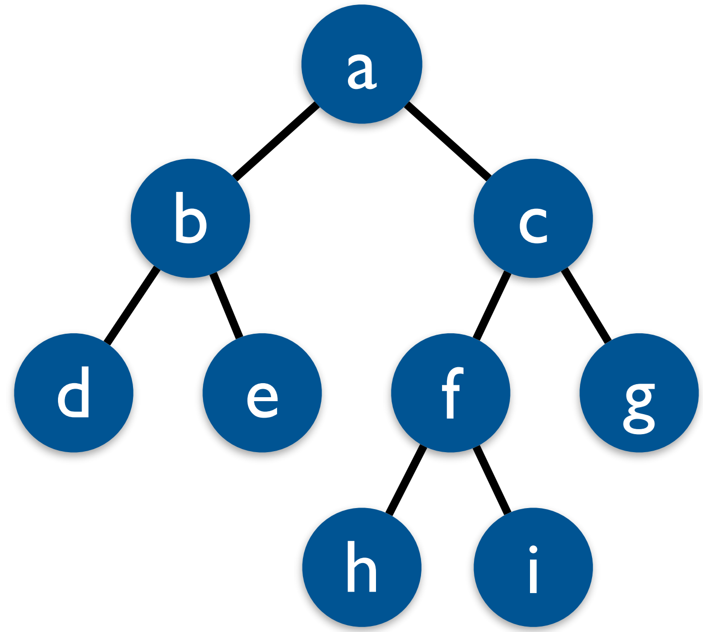
  Se pueden realizar de forma recursiva, siguiendo el esquema de construcción recursivo de árboles binarios

- Recorrido en anchura:
  - **Por niveles**, de izquierda a derecha

  Se realiza de forma iterativa

Recorridos en árboles binarios

- Preorden: a b d e c f h i g
- Inorden: d b e a h f i c g
- Postorden: d e b h i f g c a
- Por niveles: a b c d e f g h i

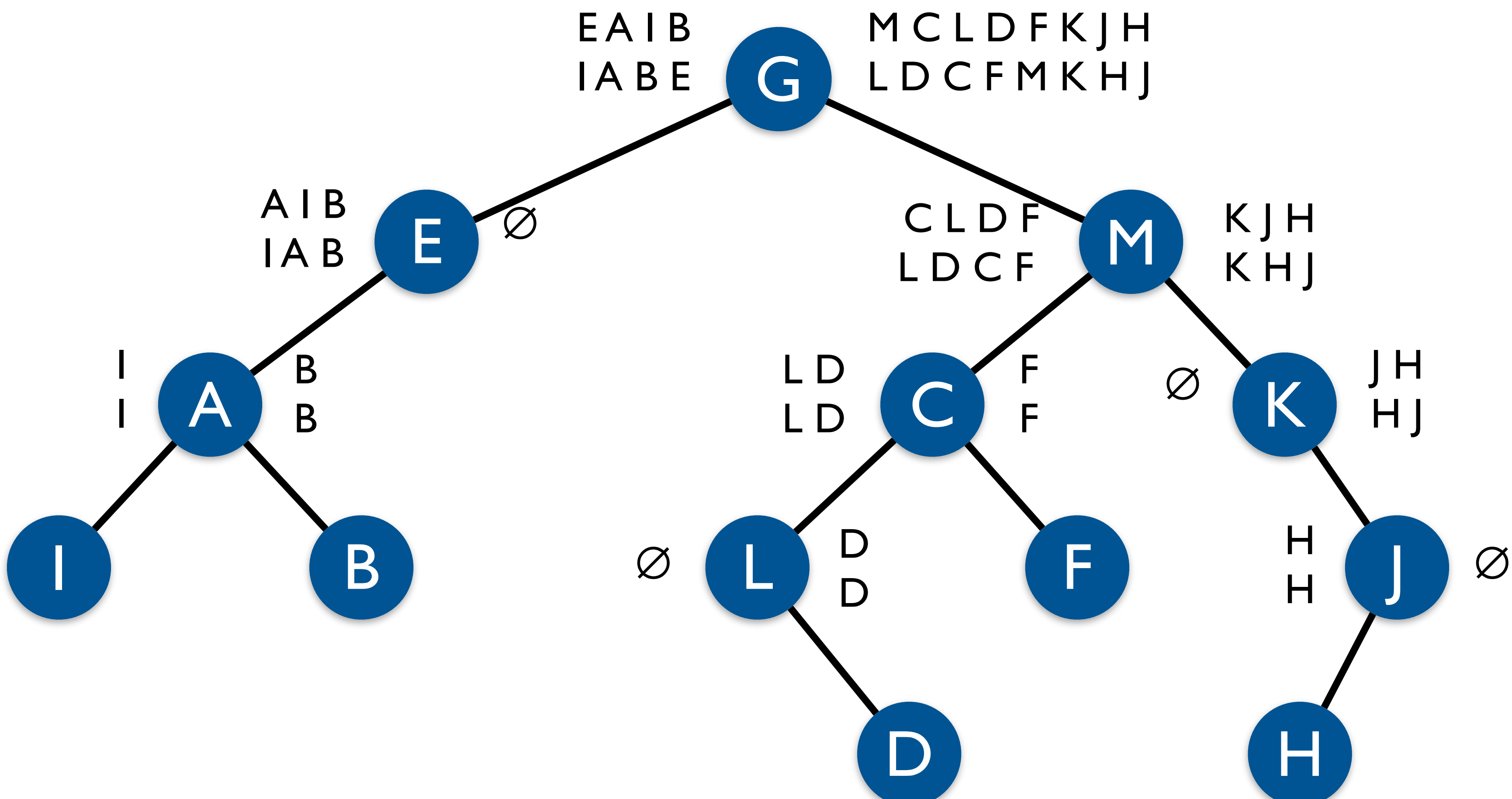


Recorridos en árboles binarios

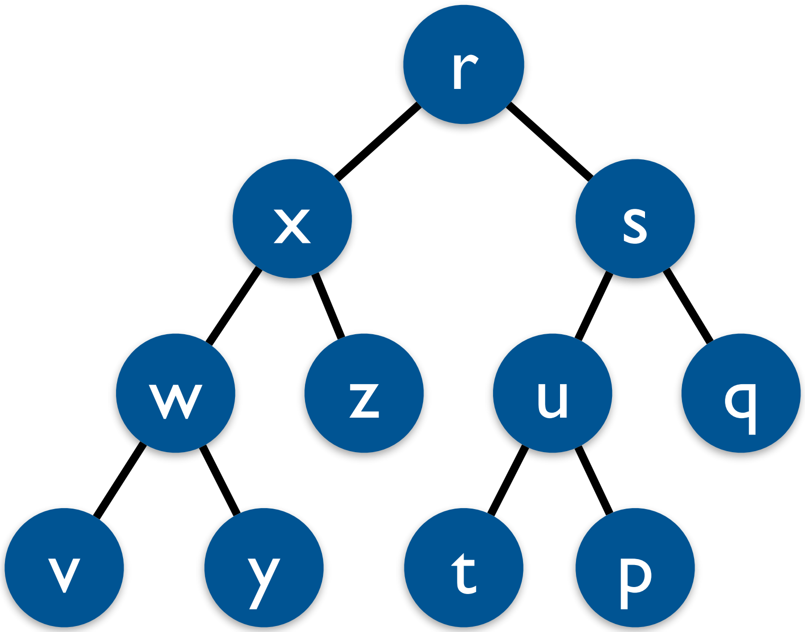
	Pre(n)<Pre(m)	In(n)<In(m)	Pos(n)<Pos(m)
n a la izquierda de m	✅	✅	✅
n a la derecha de m	❌	❌	❌
n descendiente de m	❌	✅❌	✅
n ancestro de m	✅	✅❌	❌

Recorridos en árboles binarios

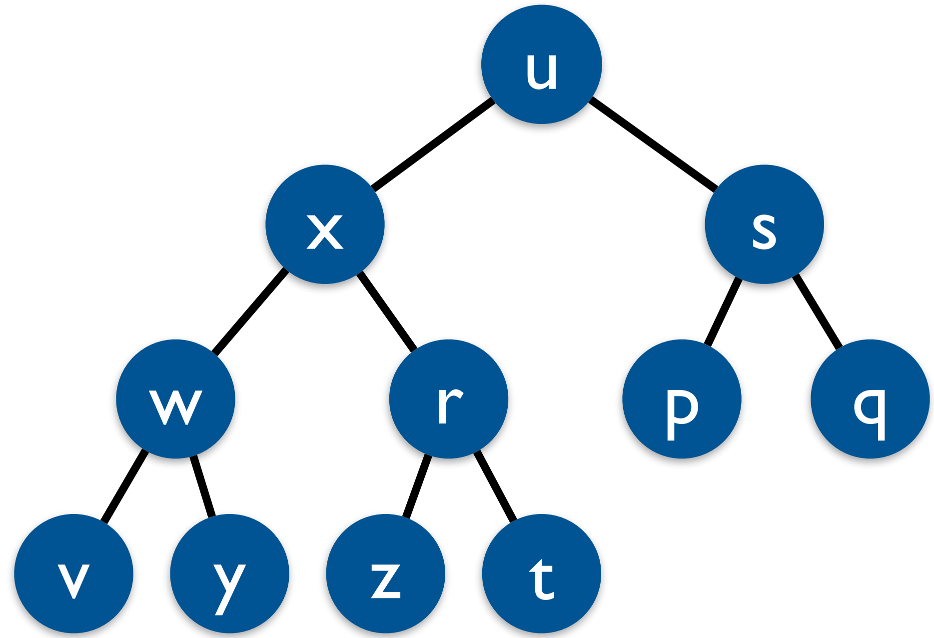
- Preorden: G E A I B M C L D F K J H
- Inorden: I A B E G L D C F M K H J



Recorridos en árboles binarios



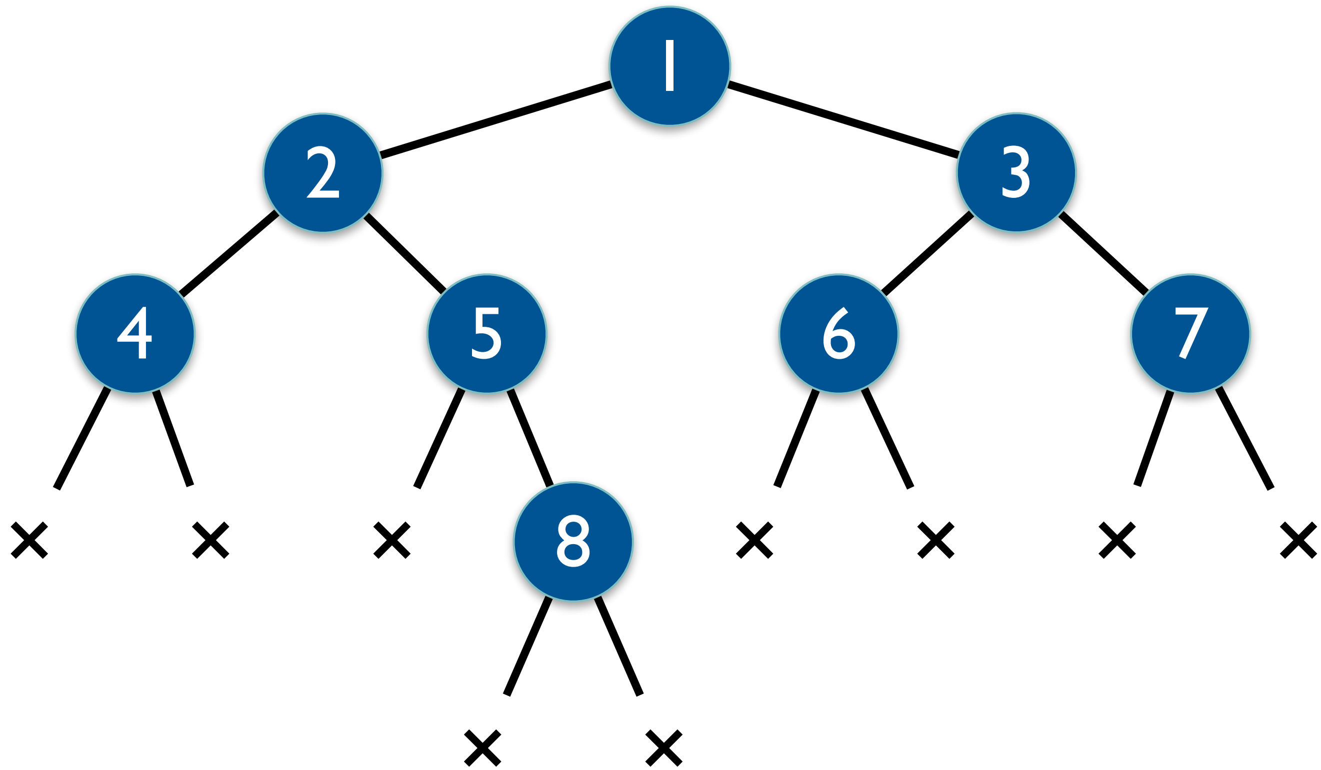
Inorden: v w y x z r t u p s q



Inorden: v w y x z r t u p s q

En general, un árbol no puede recuperarse con sólo uno de sus recorridos

Lectura/escritura de un árbol

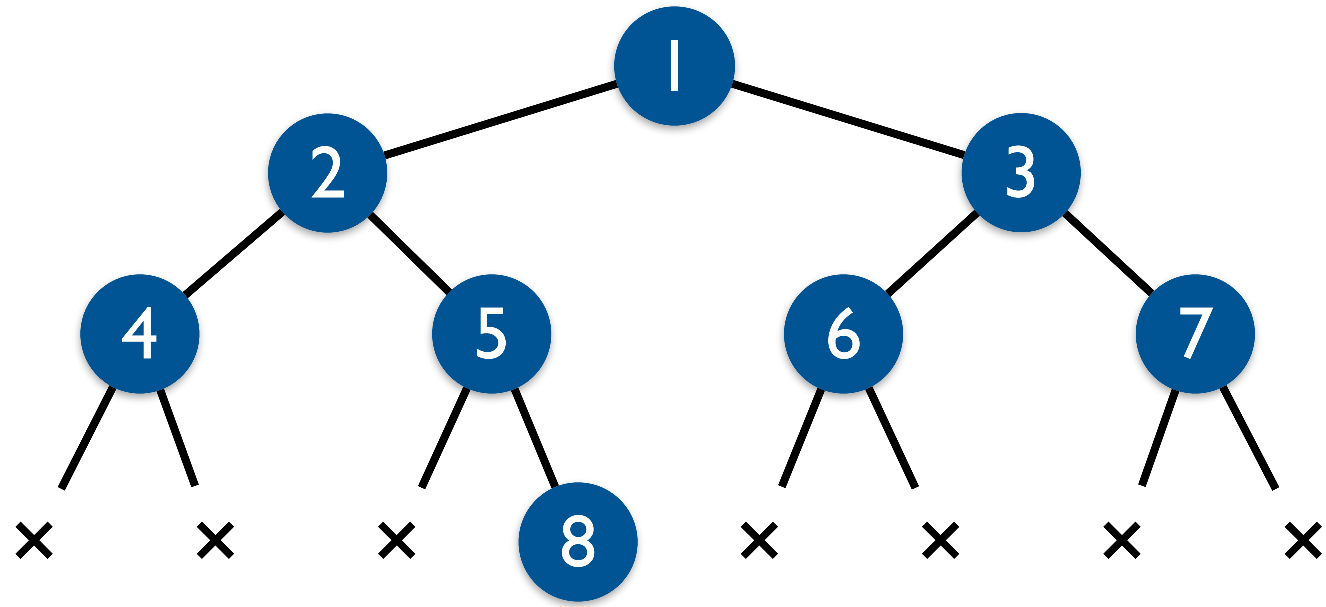


Preorden

n 1 n 2 n 4 x x n 5 x n 8 x x n 3 n 6 x x n 7 x x

1 2 4 5 8 3 6 7

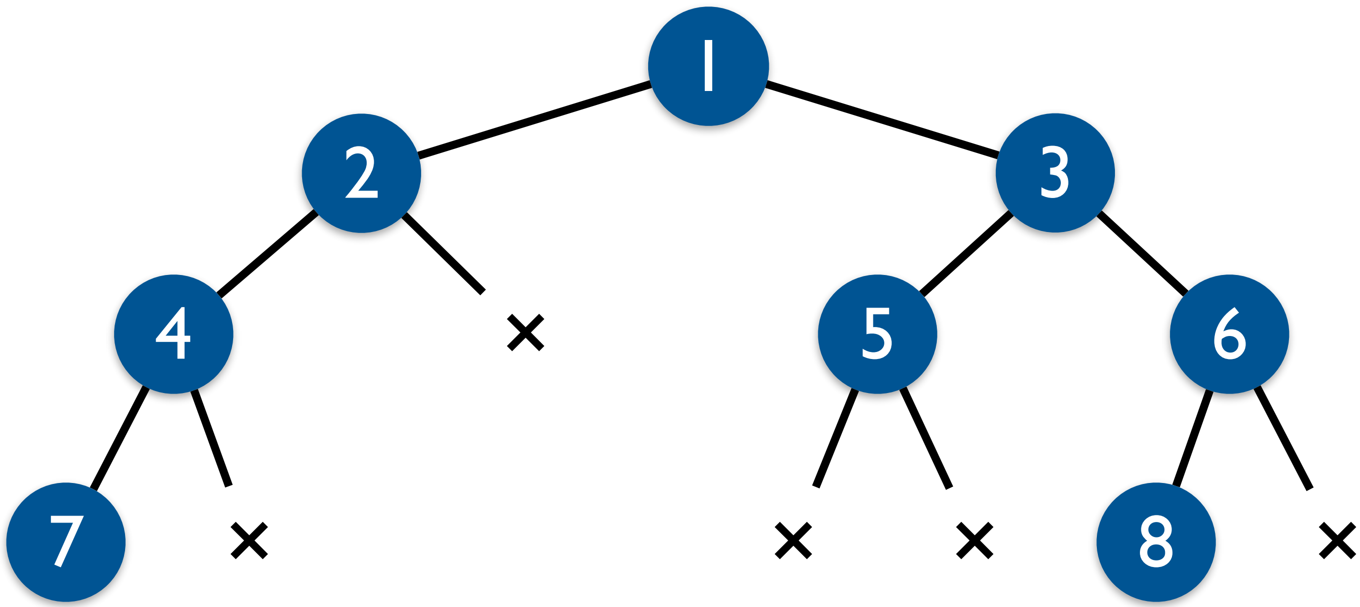
Lectura/escritura de un árbol



Por niveles

1 2 3 $\boxed{-1}$ 4 5 6 7 $\boxed{-1}$ -1 -1 -1 8 -1 -1 -1 -1 $\boxed{-1}$

Lectura/escritura de un árbol

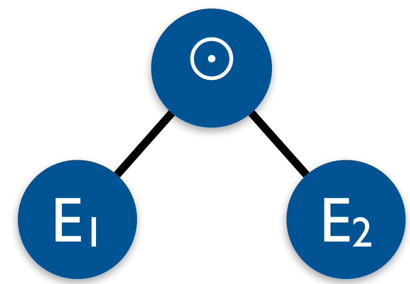


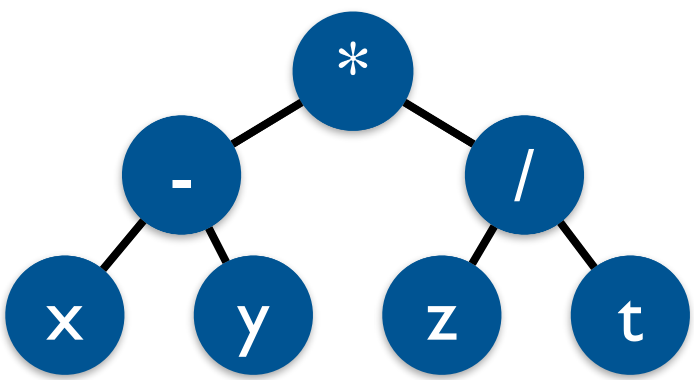
Por niveles

1 2 3 $\boxed{-1}$ 4 -1 5 6 $\boxed{-1}$ 7 -1 -1 -1 -1 -1 8 -1 $\boxed{-1}$

Aplicación: árboles de expresión

- **Árboles sintácticos**: árboles que contienen las derivaciones de una gramática necesarias para obtener una frase del lenguaje
- **Árboles de expresión**: etiquetamos
  - hojas con un operando
  - nodos interiores con un operador





$$((x)-(y))*((z)/(t))$$

$$\equiv$$

(x-y) * (z/t) Inorden

Preorden: *-xy/zt ➢ Representación prefija

Postorden: xy-zt/* ➢ Representación postfija

No necesita paréntesis

Aplicación: árboles de expresión

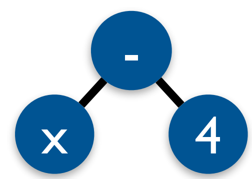
- **Resolución de ambigüedades**: recorridos en preorden o postorden más
  - Nivel de cada nodo, ó
  - Número de hijos de cada nodo

Ejemplo: x4-2^y2+3/* (postfijo)

Los operadores -, ^, +, / y * son binarios

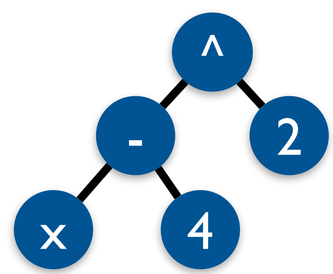
x 4 - 2 ^ y 2 + 3 / *

(x-4)



(x-4) 2 ^ y 2 + 3 / *

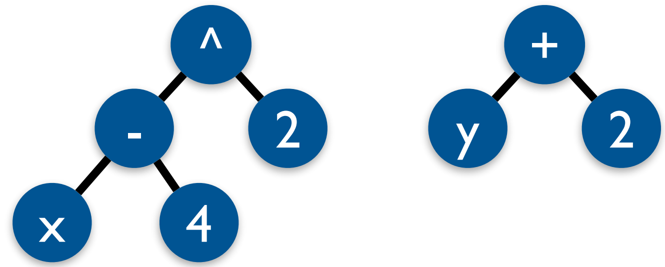
((x-4)^2)



Aplicación: árboles de expresión

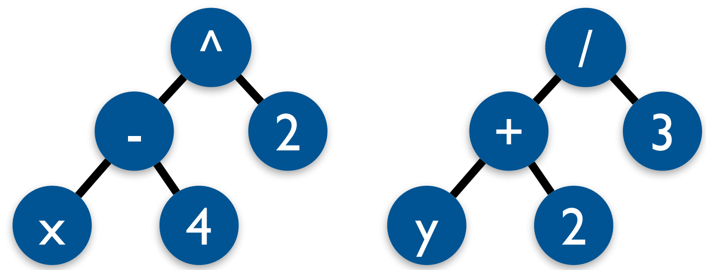
((x-4)^2) y 2 + 3 / *

((x-4)^2) (y+2)



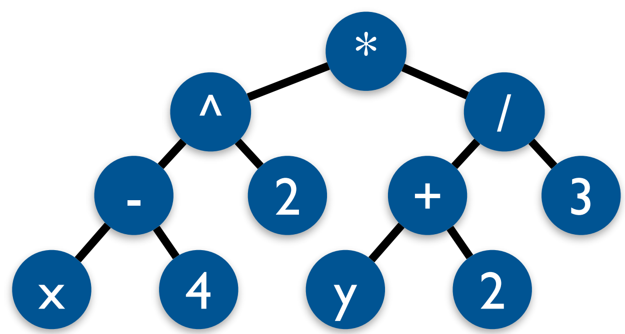
((x-4)^2) (y+2) 3 / *

((x-4)^2) ((y+2)/3)



((x-4)^2) ((y+2)/3) *

((x-4)^2)*((y+2)/3)



Aplicación: árboles de expresión

- Las notaciones prefija y posfija facilitan la evaluación automática de expresiones aritméticas
- Ejemplo: ((15 / (7 - (1 + 1))) * 3) - (2 + (1 + 1))

- * / 15 - 7 + 1 1 3 + 2 + 1 1 =

- * / 15 - 7 **2** 3 + 2 + 1 1 =

- * / 15 **5** 3 + 2 + 1 1 =

- * **3** 3 + 2 + 1 1 =

- **9** + 2 + 1 1 =

- 9 + 2 **2** =

- 9 **4** =

5

Aplicación: árboles de expresión

$$\underbrace{[(a+b)+(c*(d+e)+f)]}_{E_1} * \underbrace{(g+h)}_{E_2} \Rightarrow * E_1 E_2$$

$$\left.\begin{array}{l}
[\underbrace{(a+b)}_{E_{11}} + \underbrace{(c*(d+e)+f)}_{E_{12}}] \Rightarrow * + E_{11} E_{12} E_2
\end{array}\right.$$

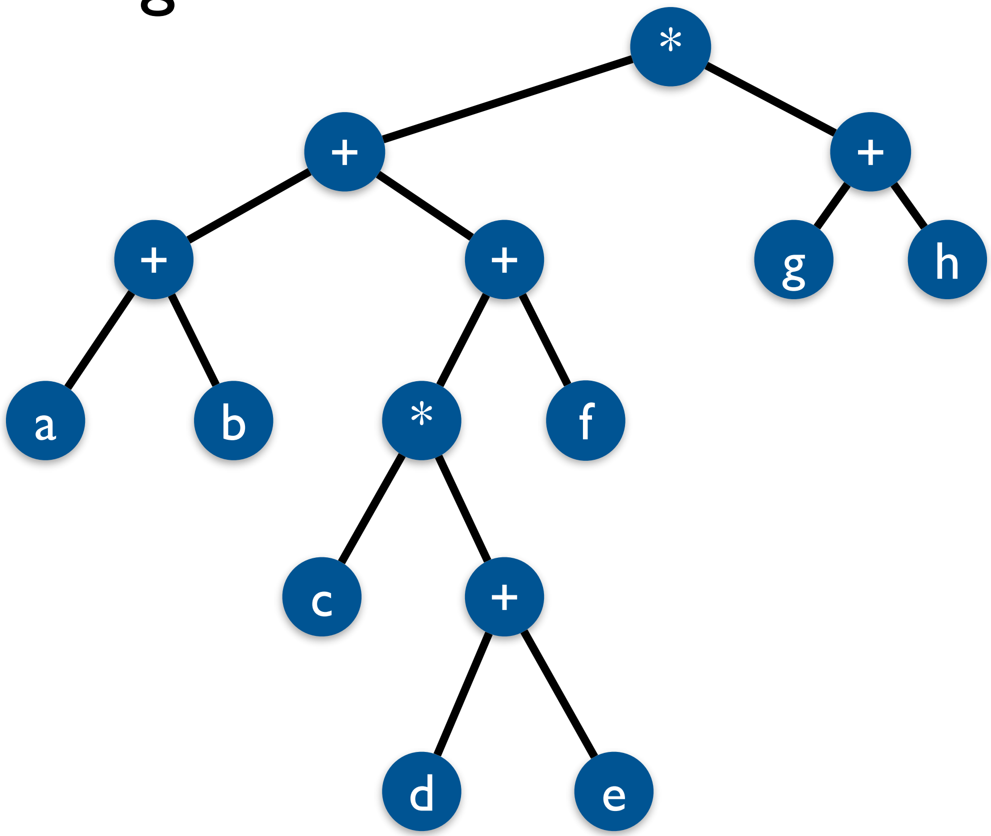
$$\left.\begin{array}{l}
E_{11} \equiv +ab \Rightarrow * + + a b E_{12} E_2 \\
E_{12} \equiv [\underbrace{(c*(d+e)}_{E_{121}} + \underbrace{f}_{E_{122}}] \Rightarrow + E_{121} E_{122}
\end{array}\right\} * + + a b + E_{121} E_{122} E_2$$

$$E_{121} \equiv \underbrace{c}_{E_{1211}} * \underbrace{(d+e)}_{E_{1212}} \Rightarrow * c E_{1212} \equiv * c + de$$

$$\left.\begin{array}{l}
* + + a b + * c + d e f E_2 \\
E_2 \equiv (g+h) \equiv + g h
\end{array}\right\} * + + a b + * c + d e f + g h$$

Aplicación: árboles de expresión

*++ab+*c+def+gh



Árboles binarios

- **Definición de funciones en árboles**: generalmente la forma más simple de definir una función sobre un árbol es trasladar la definición recurrente (recursiva) del dominio a la definición de ésta

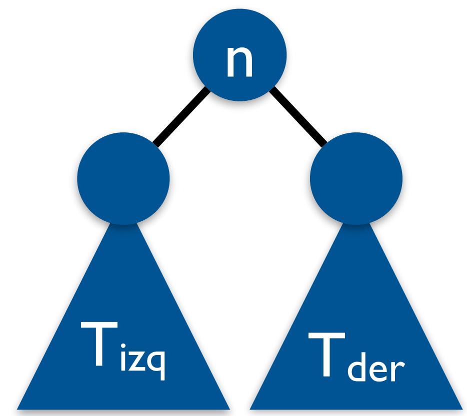
- Esto no quiere decir que toda función definida sobre un árbol deba ser recursiva. Podemos encontrar problemas cuya solución exija diseñar funciones iterativas, ya que no es posible encontrar una función recursiva (por extensión de la definición recurrente del dominio) que lo resuelva. Ej: el recorrido por niveles del árbol

Árboles binarios

- **Función f(t) sobre un árbol binario, t**: definición por extensión de la definición del conjunto de árboles binarios

- **Base**: Valor de la función si t es el árbol vacío
- **Recurrencia**: se supone conocida la función para cada uno de los subárboles T_{izq} y T_{der} de t.

  Se calcula el valor final de la función suponiendo conocidos los valores anteriores



Árboles binarios

Ejemplo: igualdad de árboles binarios

- Base: Si t_1 y t_2 son árboles binarios vacíos, son iguales
- Recurrencia: Hipótesis
  - igual(t_{izq1}, t_{izq2})
  - igual(t_{der1}, t_{der2})

t_{izqi} y t_{deri} son los subárboles izquierdo y derecho de t_i

- Tesis: Los árboles binarios t_1 y t_2 serán iguales si se cumplen las condiciones:
  - t_1.etiqueta() == t_2.etiqueta()
  - igual(t_{izq1}, t_{izq2}), e
  - igual(t_{der1}, t_{der2})

Árboles binarios

Ejemplo: altura de un árbol binario

- Base: Si t es un árbol binario vacío, su altura es 0
- Recurrencia: Hipótesis
  - altura(t_{izq}) = a_{izq}
  - altura(t_{der}) = a_{der}

t_{izq} y t_{der} son los subárboles izquierdo y derecho de t

- Tesis: la altura se calcula como:

$$1 + \text{máximo}(a_{izq}, a_{der})$$

- Ejercicios:
  - Contar el número de nodos de un árbol
  - Calcular el grado de un árbol

Árboles binarios

Ejemplo: árboles binarios isomorfos

- Base: Si t_1 y t_2 son árboles binarios vacíos, son isomorfos
- Recurrencia: Hipótesis
  - $iso(t_{izq1}, t_{izq2})$
  - $iso(t_{der1}, t_{der2})$
  - $iso(t_{izq1}, t_{der2})$
  - $iso(t_{der1}, t_{izq2})$

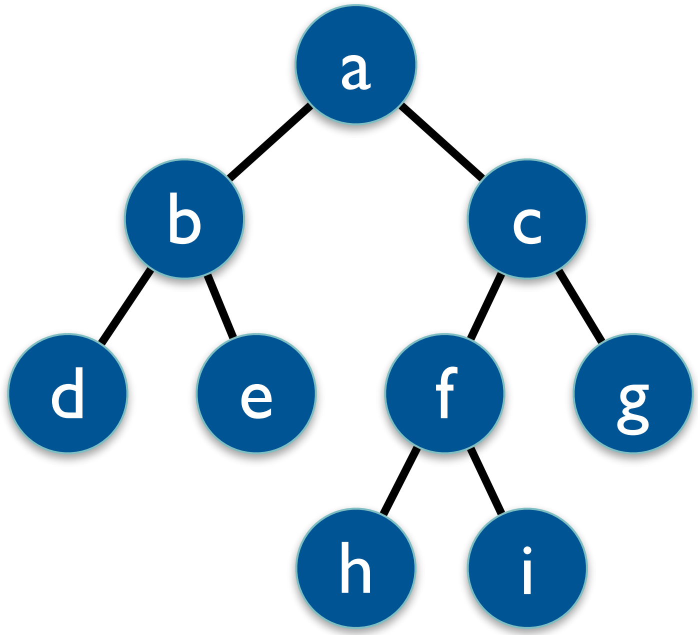
t_{izqi} y t_{deri} son los subárboles izquierdo y derecho de t_i

- Tesis: Los árboles binarios t_1 y t_2 serán isomorfos si se cumplen las condiciones:
  - t_1.etiqueta() == t_2.etiqueta()
  - $iso(t_{izq1}, t_{izq2})$ e $iso(t_{der1}, t_{der2})$, ó
  - $iso(t_{izq1}, t_{der2})$ e $iso(t_{der1}, t_{izq2})$

Representación mediante vectores

- Las etiquetas de los nodos se almacenan en un vector
- Los nodos se enumeran de la siguiente forma:
  - A la raíz le corresponde el índice 0
  - Si a un nodo le corresponde el índice k:
    - Su hijo izquierdo, si tiene, está en la posición $2*(k+1)-1 = 2*k+1$
    - Su hijo derecho, si tiene, está en la posición $2*(k+1) = 2*k+2$
    - Su padre, si tiene, está en la posición $(k-1)/2$

Representación mediante vectores



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…
a	b	c	d	e	f	g					h	i			…

Representación mediante celdas enlazadas