Fundamentos de Programación

Recursividad

Javier Abad (abad@decsai.ugr.es)
Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial
http://decsai.ugr.es

Contenidos

Objetivos

- Entender el concepto de recursividad.
- Conocer los fundamentos del diseño de algoritmos recursivos.
- Comprender la ejecución de algoritmos recursivos.
- Aprender a realizar trazas de algoritmos recursivos.
- Comprender las ventajas e inconvenientes de la recursividad frente a las soluciones iterativas.
- Entender los problemas de eficiencia que puede generar una solución recursiva.

Concepto de recursividad

- La recursividad constituye una de las herramientas más potentes en programación. Es un concepto ya conocido. Por ejemplo:
  - Definición recursiva:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

  - Demostración por inducción:
    - Demostrar la proposición para un caso base
    - Se demuestra que si se supone cierta la proposición para un tamaño, n, entonces también lo es para tamaños mayores que n.

> **Recursividad**
>
> En programación de ordenadores, una función que se llama a sí misma se denomina recursiva.

Concepto de recursividad

- En programación, podremos usar la recursividad si la solución de un problema se formula en términos de un problema de la misma naturaleza, aunque de menor tamaño, y conocemos la solución no recursiva para un determinado caso.
- Ventajas e inconvenientes de la recursividad:
  - Ventajas: No es necesario definir la secuencia de pasos exacta para resolver el problema. Podemos considerar que "tenemos resuelto" el problema (de menor tamaño).
  - Desventajas: Tenemos que encontrar una solución recursiva y, además, podría ser menos eficiente.

Concepto de recursividad

- Para que una definición recursiva esté completamente identificada es necesario tener un caso base que no se calcule utilizando casos anteriores y que la reducción del problema converja a ese caso base.

$$0! = 1$$

- Ejemplos:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Sucesión de Fibonacci de orden 2:

$$Fib(0) = 0$$

$$Fib(1) = 1$$

$$Fib(n) = Fib(n-1) + Fib(n-2), n > 1$$

Concepto de recursividad

- Ejemplo: cálculo del factorial con n=3

$3! = 3 * 2!$

$2! = 2 * 1!$

$1! = 1 * 0!$

Caso base ⇒ $0! = 1$

$3! = 3 * 2 = 6$

$2! = 2 * 1 = 2$

$1! = 1 * 1 = 1$

Diseño de algoritmos recursivos

- El primer paso será la identificación del algoritmo recursivo, es decir, la descomposición del problema en subproblemas de menor tamaño (aunque de la misma naturaleza del problema original) y la composición la solución final a partir de las subsoluciones obtenidas.

Por lo tanto, debemos diseñar:

- **Casos base**: son los casos del problema que se resuelve con un segmento de código no recursivo.

Siempre debe existir al menos un caso base

  - El número y forma de los casos base son hasta cierto punto arbitrarios. La solución será mejor cuanto más simple y eficiente resulte el conjunto de casos seleccionados.

Diseño de algoritmos recursivos

- **Casos generales**: debemos encontrar la solución a un problema (o varios) de la misma naturaleza, pero de menor tamaño (subproblemas).
  - Los casos generales siempre deben avanzar hacia un caso base. Esto es, la llamada recursiva se hace a un subproblema más pequeño y, en última instancia, los casos generales deberán alcanzar un caso base.

- **Composición**: una vez halladas las soluciones a los subproblemas, ejecutaremos un conjunto de pasos adicionales que, junto con las subsoluciones, componen la solución al problema general que queremos resolver.

Diseño de algoritmos recursivos

- Ejemplo: solución recursiva al cálculo de potencias enteras, x^n
  - Caso base: $x^0 = 1$
  - Caso general: x^{n-1}
  - Composición: $x^n = x * x^{n-1}$
- Ejemplo: solución recursiva a la sumatoria $\sum_{i=1}^{n} i$
  - Caso base: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$
  - Caso general: $\sum_{i=1}^{n-1} i$
  - Composición: $\sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i$
- Ejemplo: solución recursiva al producto de enteros, a*b
  - Caso base: 0 * b = 0, a * 0 = 0
  - Caso general: a * (b-1)
  - Composición: a * b = a + a * (b-1)

Funciones recursivas: definición

- ¿Cómo se traduce a un lenguaje de programación la solución recursiva de un problema? A través de una función que, dentro del código que la define, realiza una o más llamadas a sí misma. La clave está, claro, en los argumentos de la llamada.

Función recursiva

Una función que se llama a sí misma.

```
int factorial(int n){
  int resultado;

  if (n==0) //Caso base
    resultado = 1;
  else     //Caso general
    resultado = n * factorial(n-1);
  return resultado;
}
```

Solución estructurada

```
int factorial(int n){

  if (n==0)  //Caso base
    return 1;
  else       //Caso general
    return n * factorial(n-1);
}
```

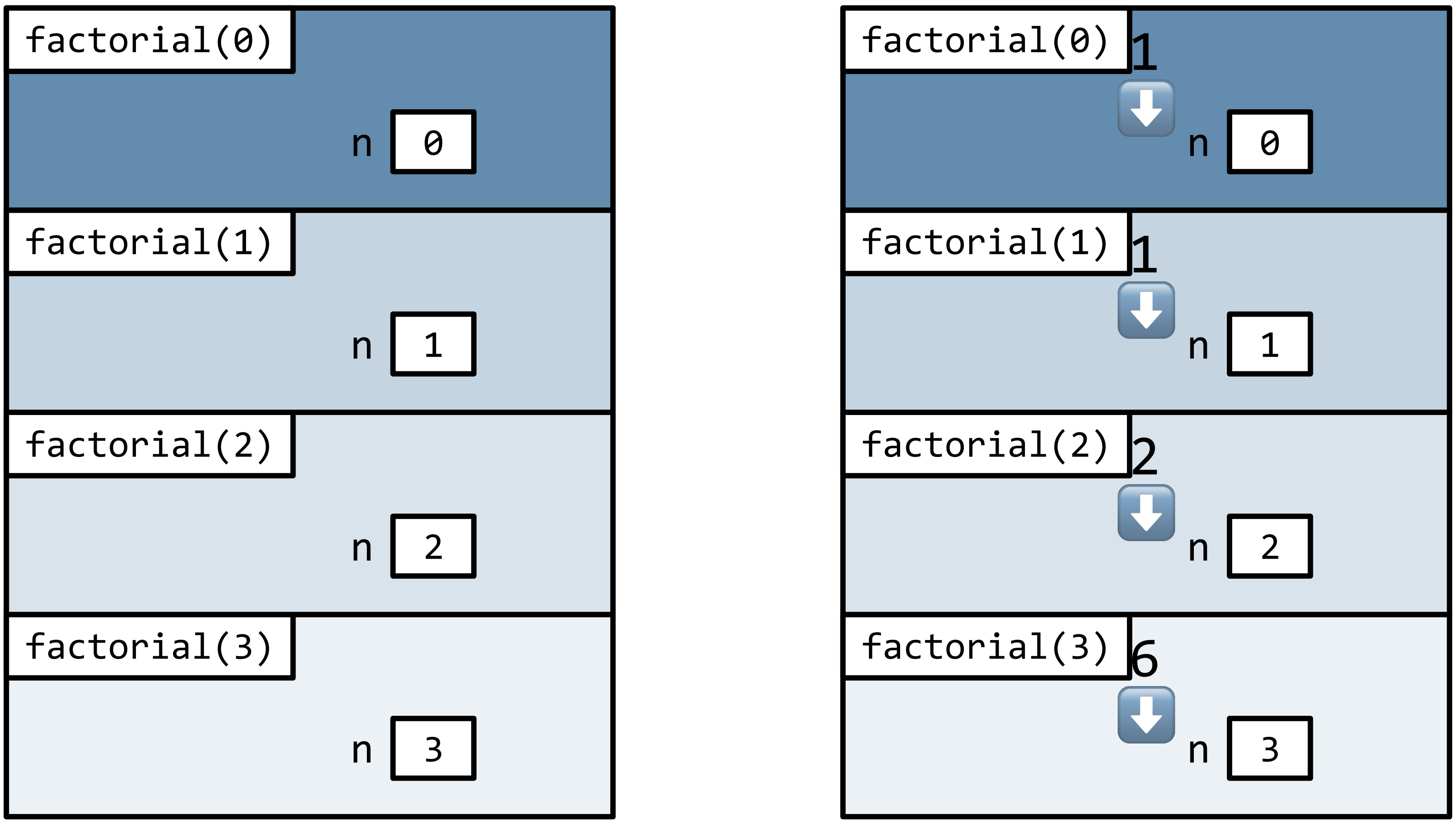
Solución no estructurada

Funciones recursivas: ejecución

- En general, en la pila se almacena el marco asociado a las distintas funciones que se van activando.
- En particular, en un módulo recursivo, cada llamada recursiva genera una nueva zona de memoria en la pila independiente del resto de llamadas.
- Ejemplo: ejecución del factorial con n=3
  1. Dentro de `factorial()`, cada llamada `return n*factorial(n-1)` genera una nueva zona de memoria en la pila, siendo `n-1` el correspondiente parámetro actual para esta zona de memoria y queda pendiente la evaluación de la expresión y la ejecución del `return`.
  2. El proceso anterior se repite hasta que se verifica la condición del caso base. Entonces:
     1. Se ejecuta la sentencia `return 1;`
     2. Comienza la vuelta atrás de la recursión, se evalúan las expresiones y se ejecutan los `return` pendientes.

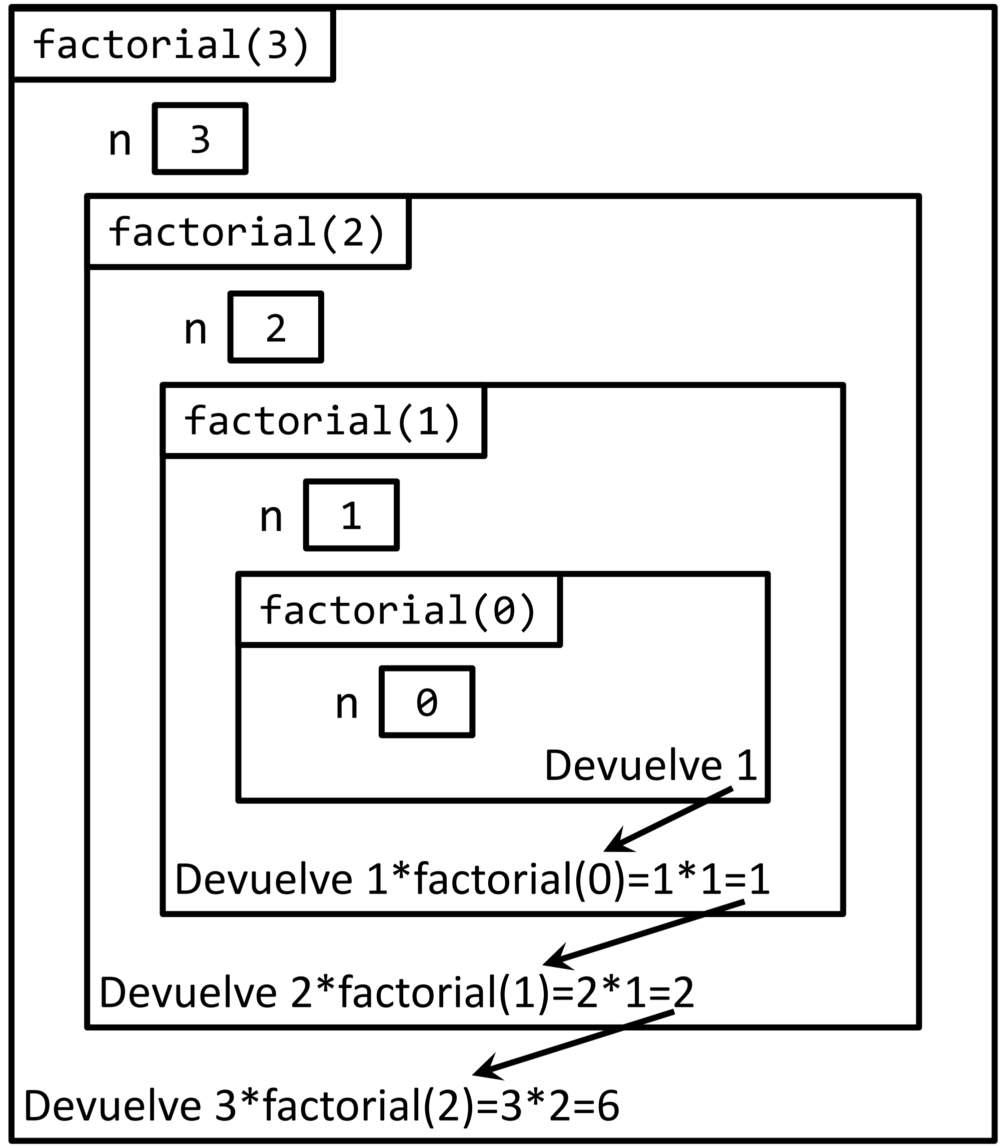
Funciones recursivas: ejecución

- Gráficamente:



Funciones recursivas: traza

- Cada una de las llamadas al módulo recursivo se representan en cascada, así como sus respectivas zonas de memoria y los valores que devuelven.
- Ejemplo: factorial(3)



Ejemplos

- Potencia de un número real elevado a una potencia entera,
  - Caso base(n=0): $x^0 = 1$
  - Caso general: x^{n-1}
  - Composición: $x^n = x * x^{n-1}$

```
double potencia(double base, int exponente){
  if (exponente==0)
    return 1;
  else
    return base * potencia(base, exponente-1);
}
```

Precondición: exponente>=0

Ejemplos

- Sumatoria $\sum_{i=1}^{n} i$
  - Caso base: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$
  - Caso general: $\sum_{i=1}^{n-1} i$
  - Composición: $\sum_{i=1}^{n} i = n + \sum_{i=1}^{n-1} i$

```
int sumatoria(int n){
  if (n==1)
    return 1;
  else
    return n + sumatoria(n-1);
}
```

Precondición: n>=1

Ejemplos

- Producto de enteros, $a * b$
  - Casos base: $0 * b = 0, \quad a * 0 = 0$
  - Caso general: $a * (b - 1)$
  - Composición: $a * b = a + a * (b - 1)$

```
int producto(int a, int b){
  if (a==0 || b==0)
    return 0;
  else
    return a + producto(a, b-1);
}
```

Precondición: a>=0 y b>=0

Ejemplos

- Suma de los elementos de un vector

$$SumaVector(v,n)=\begin{cases} v[0] & \text{si } n=0 \\ v[n]+SumaVector(v,n-1) & \text{si } n>0 \end{cases}$$

```
int SumaVectorHasta(int v[], int pos){
  if (pos==0)
    return v[0];
  else return v[pos] + SumaVectorHasta(v, pos-1);
  }
```

Precondición: n>=0 y n<=util_v

Ejemplos

- Búsqueda lineal en un vector

```
int BusquedaLineal(int v[], int izqda, int drcha, int buscado){
  if (izqda>drcha)
    return -1;
  else if (v[izqda] == buscado)
    return izqda;
  else
    return BusquedaLineal(v, izqda+1, drcha, buscado);
}
```

¡Importante!: En los problemas de búsqueda tendremos dos casos base: encontrado y no encontrado.

Ejemplos

- Máximo de un vector entre dos posiciones dadas

```
int maximo(int v[], int izqda, int drcha){
  int pos_maximo_resto;
  if (izqda == drcha)
    return izqda;
  else{
    pos_maximo_resto = maximo(v, izqda+1, drcha);
    return v[izqda]>v[pos_maximo_resto] ? izqda : pos_maximo_resto;
  }
}
```

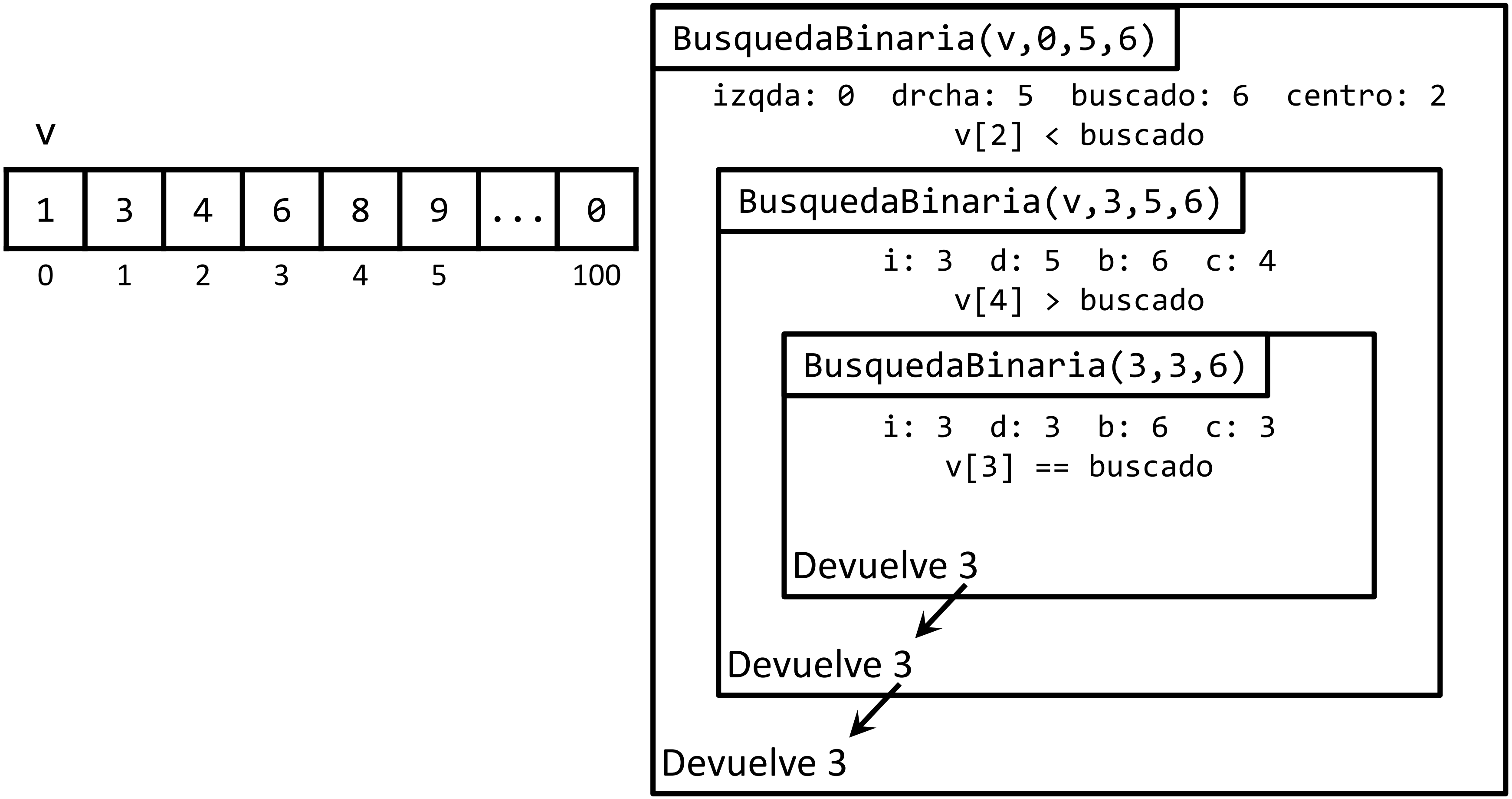
Precondición: izqda<=drcha

Ejemplos

- Búsqueda binaria

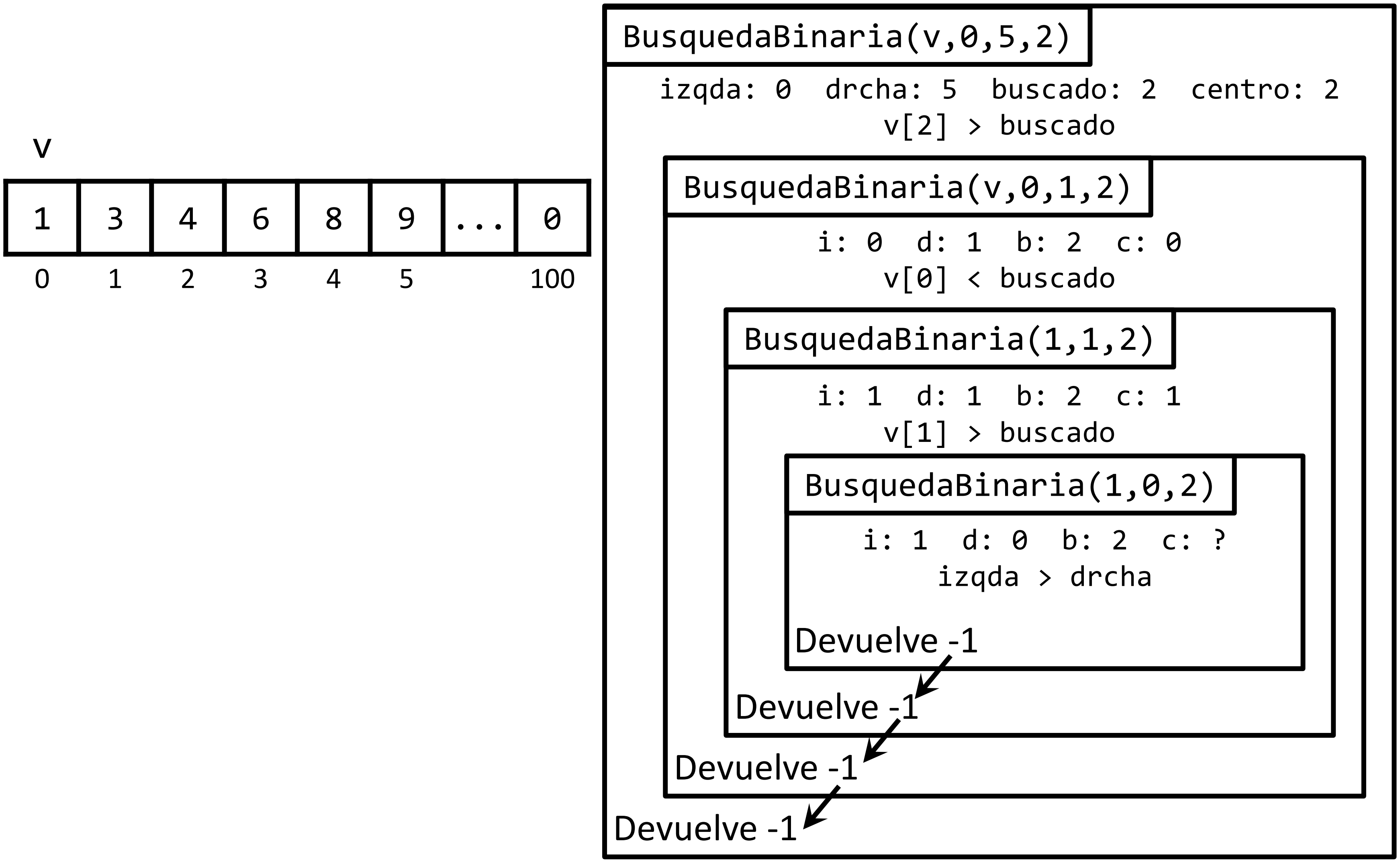
```
int BusquedaBinaria(int v[], int izqda, int drcha, int buscado){
  int centro;

  if (izqda>drcha)
    return -1;
  else {
    centro = (izqda + drcha)/2;
    if (v[centro] == buscado)
      return centro;
    else if (v[centro] > buscado)
      return BusquedaBinaria(v, izqda, centro-1, buscado);
    else
      return BusquedaBinaria(v, centro+1, drcha, buscado);
  }
}
```

- Búsqueda binaria: traza del algoritmo



Ejemplos

- Búsqueda binaria: traza del algoritmo



¿Recursividad o iteración?

- Inconvenientes de la recursividad:
  - La carga computacional (tiempo y memoria) asociada a la llamada a una función y al retorno a la función llamadora.
  - Algunas soluciones recursivas pueden llevar a que la solución para un determinado tamaño del problema se calcule varias veces.
  - Muchas soluciones recursivas tienen como caso base un problema de tamaño reducido, en ocasiones excesivamente reducido.
- Ventajas de la recursividad:
  - La solución recursiva suele ser concisa, legible y elegante.
  - Tal es el caso, por ejemplo, del recorrido de estructuras complejas como árboles, listas, grafos, etc, cuya definición y estructura es intrínsecamente recursiva. Se verá otras asignaturas del grado.

Problemas de eficiencia en la recursividad

Vamos a analizar algunos de los problemas que nos harán descartar una solución recursiva en favor de su homóloga iterativa:

- Recursividad de cola.
- Repetición de cómputos.
- Casos base excesivamente pequeños.
- Excesivas llamadas recursivas por una reducción del problema demasiado pequeña.

Recursividad de cola

- Diremos que una función tiene ***recursividad de cola*** si sólo se produce una llamada recursiva y después de ésta no se ejecuta ningún código.
- Estas funciones pueden traducirse fácilmente a un algoritmo no recursivo, mucho más eficiente. De hecho, algunos compiladores realizan automáticamente esta conversión cuando se activan las opciones de optimización.
- Así, por ejemplo, las funciones de búsqueda binaria y búsqueda lineal tienen recursividad de cola. En otros de los ejemplos vistos se realiza alguna acción adicional después de la llamada recursiva.
- En ambos casos, es muy sencillo encontrar la versión iterativa de estos algoritmos.

Repetición de cómputos

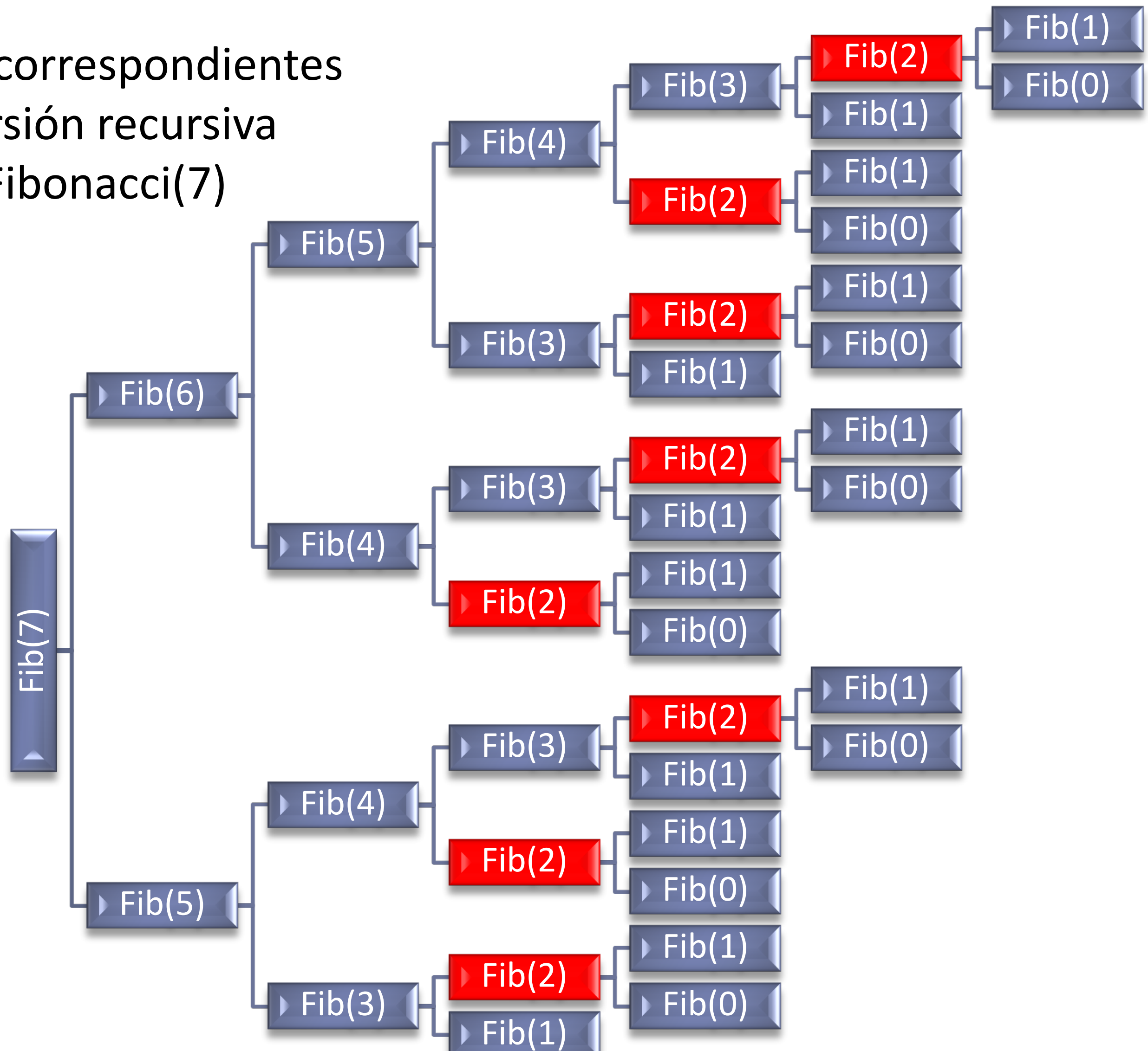
- Algunas soluciones recursivas implican una inaceptable repetición de cómputos. Un ejemplo muy evidente es la sucesión de Fibonacci, que resulta ser tan ineficiente como elegante.

```
int fibonacci(int n){
  if (n==0)
    return 0;
  else if (n==1)
    return 1;
  else
    return fibonacci(n-1) +
           fibonacci(n-2);
}
```

n	Nº de llamadas	n	Nº de llamadas
0	1	15	1973
1	1	20	21891
2	$n_1 + n_0 + 1 = 3$	25	242785
3	$n_2 + n_1 + 1 = 5$	30	2692537
4	$n_3 + n_2 + 1 = 9$	35	29860703
5	$n_4 + n_3 + 1 = 15$	40	331160281
6	$n_5 + n_4 + 1 = 25$	45	3672623805
7	$n_6 + n_5 + 1 = 41$	50	40730022147
8	$n_7 + n_6 + 1 = 67$	55	451702867433
9	$n_8 + n_7 + 1 = 109$	60	5009461563921

Repetición de cómputos

Llamadas correspondientes
a la versión recursiva
de Fibonacci(7)



Repetición de cómputos

- La versión iterativa puede ser menos elegante, pero es, sin duda, infinitamente más eficiente:

```
int fibonacci(int n){
  int actual=0, n_1=1, n_2=0, i;

  if (n == 0)
    actual = 0;
  else if (n == 1)
    actual = 1;
  else
    for (i=2; i<=n; i++){
      actual = n_1 + n_2;
      n_2 = n_1;
      n_1 = actual;
    }
  return actual;
}
```

Casos base excesivamente pequeños

- Muchos problemas recursivos tienen como caso base un problema de un tamaño reducido, en muchas ocasiones en exceso.
- Para resolverlo, suele aplicarse un algoritmo iterativo cuando se ha llegado a un caso base suficientemente pequeño.
- Ejemplo: La búsqueda binaria.
  - Aplicaremos el algoritmo recursivo en general y el iterativo cuando el tamaño del subvector en el que realizamos la búsqueda es pequeño.
  - Lo que hacemos es modificar el caso base, que en este caso es la búsqueda secuencial.

Casos base excesivamente pequeños

```
int BusquedaBinaria(int v[], int izqda, int drcha, int buscado){
  const int UMBRAL=10;
  int centro;

  if (drcha-izqda+1 <= UMBRAL)
    return BusquedaSecuencial(v,izqda, drcha, buscado);
  else {
    centro = (izqda + drcha)/2;
    if (v[centro] == buscado)
      return centro;
    else if (v[centro] < buscado)
      return BusquedaBinaria(v, centro+1, drcha, buscado);
    else
      return BusquedaBinaria(v, izqda, centro-1, buscado);
  }

}
```

Excesivas llamadas recursivas

- La mayoría de los problemas que hemos estudiado en este tema tienen una solución recursiva, pero es absurda.
- En general, no suele tener sentido una solución recursiva cuando los subproblemas a resolver no son significativamente menores que el problema original.
- Algunos ejemplos: la potencia, el producto, el factorial, la sumatoria...
- Corremos un serio peligro: que un gran número de llamadas recursivas desborde la pila. No podemos olvidar que **la pila es un recurso relativamente limitado**, y es bastante sencillo desbordarla con demasiadas llamadas a función anidadas.
- Además, el tiempo requerido para realizar una llamada es considerable, lo que debemos tener también en cuenta.

Ejemplo avanzado: Quicksort

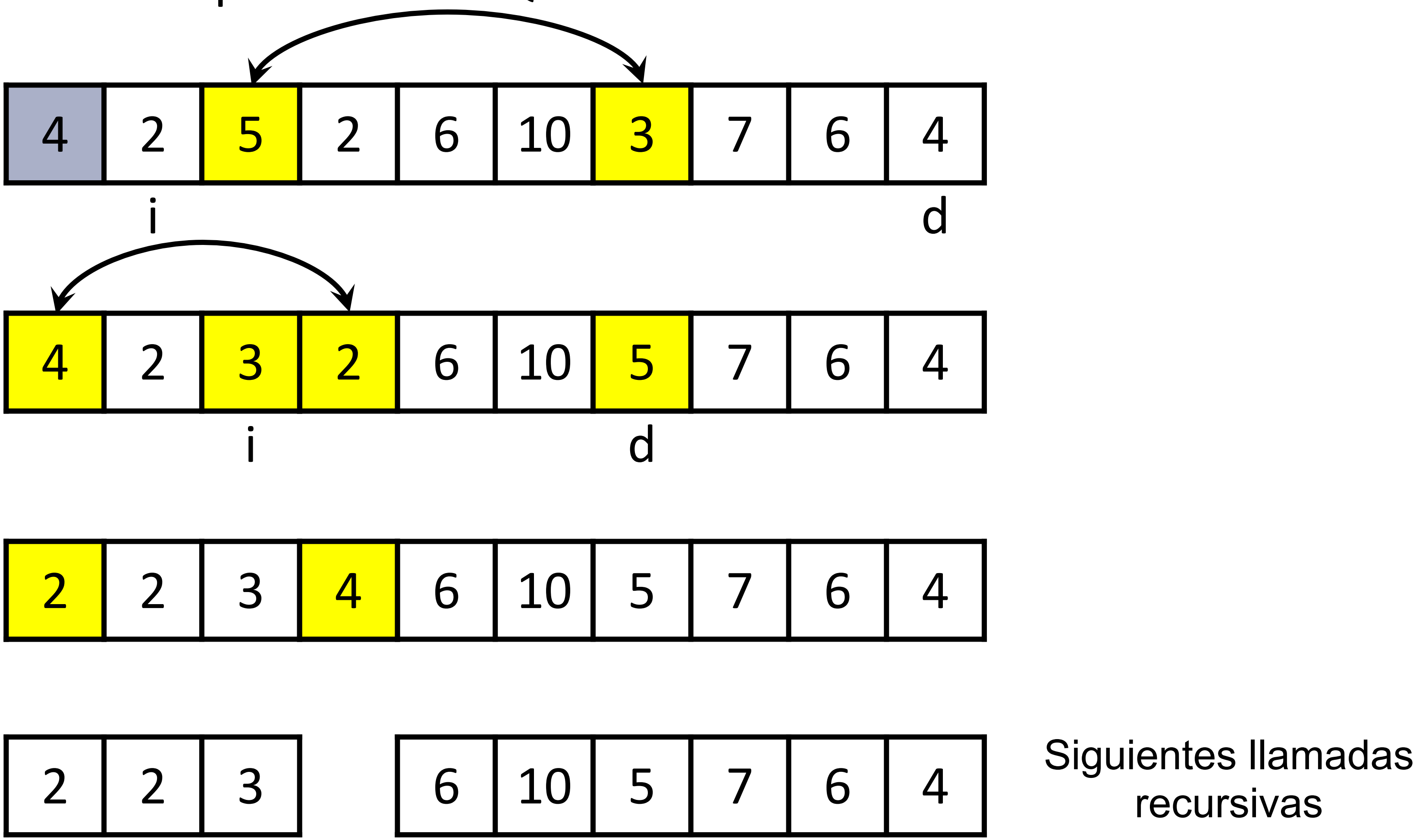
- Es un método de ordenación conceptualmente recursivo, cuya potencia se basa en dividir (aproximadamente) a la mitad el tamaño de los subproblemas.
  - Elegir un elemento, al que llamaremos pivote.
  - Reubicar los elementos de manera que los elementos menores que el pivote queden a su izquierda y los mayores que el pivote, a su derecha. Al hacerlo, el pivote queda en su posición definitiva en la lista ordenada.
  - La lista queda dividida en dos sublistas, a las que podemos aplicar de nuevo el proceso de forma recursiva.
  - Al terminar, todos los elementos estarán ordenados.
  - Lo ideal sería que el pivote fuera la mediana, porque así los dos subproblemas serían justo de la mitad del tamaño original, pero resulta costoso, por lo que lo elegiremos aleatoriamente.

Ejemplo avanzado: Quicksort

```
void quicksort(int v[], int izqda, int drcha){
  int pos_pivote;

  if(izqda<drcha){
    pos_pivote = partir(v, izqda, drcha);
    quicksort(v, izqda, pos_pivote-1);
    quicksort(v, pos_pivote+1, drcha);
  }
}


//Función auxiliar de intercambio
template <class T>
void intercambiar(T & v1, T & v2){
  T aux(v1);
  v1 = v2;
  v2 = aux;
}
```

Ejemplo avanzado: Quicksort

- Primera partición de Quicksort:



Ejemplo avanzado: Quicksort

```
int partir(int v[], int primero, int ultimo){
  int pivote = v[primero],
  izqda = primero+1,
  drcha = ultimo;

  while(izqda<=drcha){ //Mientras no se crucen los Ìndices
    //Busco por la izquierda el primer elemento mayor que el pivote

    while((izqda<=drcha) && (v[izqda]<pivote))
      izqda++;
    //Busco por la derecha el primer elemento menor que el pivote

    while((izqda<=drcha) && (v[drcha]>=pivote))
      drcha--;
    //Si no se han cruzado los índices, intercambiar
    if (izqda<drcha)
      intercambiar(v[izqda++], v[drcha--]);
  }
  //Al terminar la partición, situar el pivote en su posición
  intercambiar(v[primero], v[drcha]);
  return drcha; //Devolvemos la nueva posición del pivote
}
```

Ejemplo avanzado: Quicksort

- Quicksort es un algoritmo de ordenación muy eficiente, especialmente en comparación con los algoritmos básicos estudiados anteriormente.
- La clave de su eficiencia radica en la elección del pivote. La posible mejora pasa por diseñar buenas estrategias para elegir pivotes que dejen más o menos los mismos elementos a su izquierda que a su derecha.
- Además, Quicksort es fácilmente paralelizable, ya que las diferentes llamadas recursivas pueden ejecutarse en diferentes CPUs.

Ejemplo avanzado: Quicksort

- Podemos mejorar quicksort evitando aplicarlo a subproblemas de pequeño tamaño.

```
void quicksort(int v[], int izqda, int drcha){
  const int umbral = 10;
  int pos_pivote;

  if(drcha-izqda+1 < umbral)    //Si el problema es pequeño
    seleccion(v, izqda, drcha); //usamos un método simple

  else if(izqda<drcha){
    pos_pivote = partir(v, izqda, drcha);
    quicksort(v, izqda, pos_pivote-1);
    quicksort(v, pos_pivote+1, drcha);
  }
}
```