

BOOL CEBRİ (Devamı)

❖ Standart Formlar (Canonical Forms)

- Çarpımlar Toplamı Formu

Standart Çarpımlar Toplamı

Minterm Kavramı

- Toplamlar Çarpımı Formu

Standart Toplamlar Çarpımı

Maxterm Kavramı

- Çarpımlar Toplamı Formu ile Toplamlar Çarpımı Formu Arasındaki Dönüşüm İşlemleri

Standart Formlar (Canonical Forms)

Lojik ifadeler, çarpımlar toplamı ya da toplamlar çarpımı formunda ifade edilebilir ve aralarında dönüşümleri yapılabilir. Bu formlar sayesinde hem lojik ifadeler standardize edilmiş olur hem de lojik ifadelerin değerlendirilmesi, sadeleştirilmesi ve gerçekleştirilmesi daha kolay ve sistematik hale gelir.

Çarpımlar Toplamı Formu: Çarpımlar toplamı formu, değişkenlerin çarpımlarından ve bu çarpımların toplamlarından oluşur. Değişkenlerin ise ya normal ya da tümleyen formları olur. Çarpım terimleri, değişkenlerin tamamını içermek zorunda değildir.

$ABC + A'B + BC'D'$ veya $A' + AB + BC'$ ifadeleri çarpımlar toplamı formundadır. Oysa birden fazla değişkenin tümleyenini içeren terimler varsa çarpımlar toplamı formundadır diyemeyiz; örneğin lojik ifade $(ABC)'$ terimini içeriyorsa...

Verilen lojik bir ifadeyi çarpımlar toplamı formuna dönüştürmek için Boole cebrinin kuralları kullanılır.

Standart Formlar

Örnek: $A'B(C+BD')$ lojik ifadesini çarpımlar toplamı formuna dönüştürebilmek için dağılma kuralını uygulayabiliriz;

$$A'B(C+BD') = A'BC + A'BD'$$

Standart Çarpımlar Toplamı: Çarpımlar toplamı formunda ifade edilen bir lojik ifadenin içerdiği terimler, tüm değişkenleri içermeyebilir. Çarpımlar toplamı olarak elde edilmiş bir lojik ifadeyi standart çarpımlar toplamı biçiminde yazmak istiyorsak, lojik ifadedeki her terimin, tüm değişkenleri içerecek şekilde düzenlenmesi gerekir.

Örnek: $F(A,B,C) = A.B' + A.C$ lojik ifadesini standart çarpımlar toplamı biçiminde elde etmek istersek, ifadedeki birinci terimi $(C+C')$ ile ikinci terimi de $(B+B')$ ile genişletmemiz gerekir.

$$\begin{aligned} AB' + AC &= AB'(C+C') + A(B+B')C = \underline{AB'C} + AB'C' + ABC + \underline{AB'C} \\ &= AB'C + AB'C' + ABC \end{aligned}$$

Standart Formlar

Örnek: $F(A,B,C) = A+BC+A'C$ lojik ifadesini pratik olarak standart forma getirmek için aşağıdaki gibi bir tablo hazırlanabilir.

A	BC	A'C
<u>ABC</u>	<u>ABC</u>	<u>ABC</u>
100	011	001
101	111	011
110		
111		

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= AB'C' + AB'C + ABC' + \underline{ABC} + \underline{A'BC} + \underline{ABC} + A'B'C + \underline{A'BC} \\ &= AB'C' + AB'C + ABC' + \underline{ABC} + \underline{A'BC} + A'B'C \end{aligned}$$

- Standart çarpımlar toplamı formu özellikle doğruluk tablosu oluşturmada ve ileride göreceğimiz Karnaugh haritası yardımıyla sadeleştirme işlemlerinde gerekli olacaktır.

Minterm Kavramı

Standart çarpımlar toplamı şeklinde ifade edilmiş bir lojik ifadedeki her terim *minterm* ismiyle anılır. Üç değişken içeren bir lojik ifade, 8 adet minterm (2^3) içerir. Bu mintermler, girişlerin sadece belli bir kombinasyonunda 1 değerini alırlar. Mintermler m_{indis} ile ifade edilirler. İndis, mintermin değerini 1 yapan değişken kombinasyonunun decimal değeridir.

Değişkenler			Mintermler	
A	B	C	Terim	Simge
0	0	0	$A'B'C'$	m_0
0	0	1	$A'B'C$	m_1
0	1	0	$A'BC'$	m_2
0	1	1	$A'BC$	m_3
1	0	0	$AB'C'$	m_4
1	0	1	$AB'C$	m_5
1	1	0	ABC'	m_6
1	1	1	ABC	m_7

Minterm Kavramı

Örnek: $F=A'B'C+A'BC+ABC$ standart formda verilmiş ifadenin doğruluk tablosunu oluşturmak istediğimizde devrenin çıkışı, bu çarpım terimlerinin değerlerini 1 yapan kombinasyonlarda 1 olacaktır.

Girişler			Çıkış(F)	Mintermler
A	B	C		
0	0	0	0	
0	0	1	1	$A'B'C$
0	1	0	0	
0	1	1	1	$A'BC$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	ABC

$F(A,B,C)$ lojik ifadesini mintermler cinsinden ifade etmek istersek ' Σ ' sembolünü kullanırız:

$$F(A,B,C) = \Sigma (1,3,7) = m_1 + m_3 + m_7$$

Standart Formlar

Toplamlar Çarpımı Formu : Toplamlar çarpımı formu, değişkenlerin toplamlarından ve bu toplamların çarpımından oluşur.

$(A+B')(A'+B+C)$ veya $A(A'+B)(B+C')$ ifadeleri toplamlar çarpımı formundadır. Oysa birden fazla değişkenin tümleyenini içeren terimler varsa toplamlar çarpımı formundadır diyemeyiz; $(A+B+C)'$

Standart Toplamlar Çarpımı : Toplamlar çarpımı olarak elde edilmiş bir lojik ifadeyi, standart toplamlar çarpımı biçiminde yazmak istiyorsak, lojik ifadedeki her terimin, tüm değişkenleri içerecek şekilde düzenlenmesi gerekir.

Örnek: $F(A,B,C)=(A+B')(B+C)$ lojik ifadesini standart toplamlar çarpımı biçiminde elde etmek istersek,

$$\begin{aligned}(A+B')(B+C) &= (\underline{A+B'}+C.C')(A.A'+\underline{B+C}) \\ &= (A+B'+C).(A+B'+C').(A+B+C).(A'+B+C)\end{aligned}$$

Maxterm Kavramı

Standart toplamlar çarpımı şeklinde ifade edilmiş bir lojik ifadedeki her terim *maxterm* ismiyle anılır. Üç değişkene sahip bir lojik ifade 8 adet maxterm (2^3) içerir. Bu maxtermler girişlerin sadece belli bir kombinasyonunda 0 değerini alır. Maxtermler M_{indis} ile ifade edilirler. İndis, maxtermin değerini 0 yapan değişken kombinasyonunun decimal değeridir. Ayrıca maxtermler, mintermlerin değili olarak da düşünülebilir.

Değişkenler			Maxtermler		Mintermler	
A	B	C	Terim	Simge	Terim	Simge
0	0	0	$A+B+C$	M_0	$A'B'C'$	m_0
0	0	1	$A+B+C'$	M_1	$A'B'C$	m_1
0	1	0	$A+B'+C$	M_2	$A'BC'$	m_2
0	1	1	$A+B'+C'$	M_3	$A'BC$	m_3
1	0	0	$A'+B+C$	M_4	$AB'C'$	m_4
1	0	1	$A'+B+C'$	M_5	$AB'C$	m_5
1	1	0	$A'+B'+C$	M_6	ABC'	m_6
1	1	1	$A'+B'+C'$	M_7	ABC	m_7

Maxterm Kavramı

Örnek: $F(A,B,C)=(A+B+C).(A+B'+C).(A'+B+C).(A'+B+C').(A'+B'+C)$
standart formda verilmiş ifadenin doğruluk tablosunu oluşturmak istediğimizde $F(A,B,C)$ çıkışı, bu toplam terimlerinin değerlerini 0 yapan kombinasyonlarda 0 olacaktır. Diğer durumlar 1'dir.

Girişler			Çıkış(F)	Maxtermler
A	B	C		
0	0	0	0	$A+B+C$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$A+B'+C$
0	1	1	1	
1	0	0	0	$A'+B+C$
1	0	1	0	$A'+B+C'$
1	1	0	0	$A'+B'+C$
1	1	1	1	

$F(A,B,C)$ lojik ifadesini maxtermler cinsinden ifade etmek istersek 'Π' sembolünü kullanırız:

$$F = \prod (0,2,4,5,6) = M_0.M_2.M_4.M_5.M_6$$

Çarpımlar Toplamı Formu ile Topamlar Çarpımı Formu Arasındaki Dönüşüm İşlemleri

Çarpım terimlerinin değerlerini 1 yapan kombinasyonlar bulunur, daha sonra bu kombinasyonların dışındaki kombinasyonlar tespit edilir ve elde edilen kombinasyonların değerini 0 yapan toplam terimleri bulunur.

Örnek: $F(A,B,C) = \sum(4,5,6,7)$ lojik ifadesini maxtermler cinsinden bulalım.

Girişler			F	F'
A	B	C		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

F fonksiyonunun tümleyeni ,

$$F'(A,B,C) = \sum (0,1,2,3) = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

F' fonksiyonunun bir daha tümleyeni alınırsa,

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= (m_0 + m_1 + m_2 + m_3)' = m_0' \cdot m_1' \cdot m_2' \cdot m_3' \\ &= M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \\ &= \prod (0,1,2,3) \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

Özetle, çarpımlar toplamı formunun içerdiği terimlerin dışında kalan kombinasyonlardan, toplamlar çarpımı formu elde edilir. Bu ifadenin tersi de geçerlidir.

Dönüşüm İşlemleri

Örnek: $F(A,B,C) = AB'C + A'BC + AB'C' + ABC + A'B'C$ standart çarpımlar toplamı biçiminde verilmiş lojik ifadeyi standart toplamlar çarpımı formuna dönüştürelim.

Çarpım terimlerini 1 yapan kombinasyonlar; 101, 011, 100, 111, 001 dir. Bu kombinasyonların dışındakiler; 000, 010, 110 dir. O halde toplamaları 0 yapan terimler $(A+B+C)$, $(A+B'+C)$ ve $(A'+B'+C)$ olur. Bu üç terim çarpıldığında toplamaların çarpımı formu elde edilmiş olur;

$$F(A,B,C) = (A+B+C).(A+B'+C).(A'+B'+C)$$

Ayrıca $F(A,B,C)$ fonksiyonu mintermler cinsinden $\sum(1,3,4,5,7)$ şeklinde de ifade edilebilir. Bu mintermler dışındaki kombinasyonlar, maxtermleri oluşturur.

$$F(A,B,C) = \sum (1,3,4,5,7) = \prod (0,2,6) \text{ yazılabilir.}$$

Sadeleştirme İşlemleri

Örnek: Aşağıda verilen doğruluk tablosuna göre F fonksiyonunu minterm ve maxterm yöntemlerini kullanarak sadeleştirelim.

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

İlk olarak F fonksiyonunu mintermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \sum(0,2,3,5,7) = \underline{A'B'C'} + \underline{A'BC'} + A'BC + \underline{AB'C} + \underline{ABC} \\ &= A'C'(B'+B) + A'BC + AC(B'+B) = A'C' + \underline{A'BC} + \underline{AC} \\ &= A'C' + C(A'B+A) = A'C' + C(A+B) = A'C' + AC + BC \end{aligned}$$

Ya da $A'C' + A'BC + AC$ terimini C değil de A' parantezine alırsak,
 $A'(C' + BC) + AC = A'(B + C') + AC = A'C' + AC + A'B$ elde edilir.

Her iki ifade de birbirine lojik olarak eşdeğerdir.

Örnek: (Devamı)

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Şimdi de F fonksiyonunu maxtermler cinsinden yazarak sadeleştirelim;

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= \prod (1,4,6) = (A+B+C').(A'+B+C).(A'+B'+C) \\ &= (AA'+AB+AC+A'B+BB+BC+A'C'+BC'+C'C)(A'+B'+C) \\ &= (\underline{AB}+AC+\underline{A'B}+\underline{B}+\underline{BC}+A'C'+\underline{BC}')(A'+B'+C) \\ &= (B+AC+A'C')(A'+B'+C) \\ &= A'B+\underline{BB'}+BC+\underline{A'AC}+AB'C+ACC+A'A'C'+A'B'C'+\underline{A'C'C} \\ &= A'B+BC+\underline{AB'C}+AC+A'C'+\underline{A'B'C'} \\ &= A'B+B'(\underline{AC+A'C'})+\underline{AC+A'C'} \\ &= A'B+AC+A'C' \end{aligned}$$

Toplamlar çarpımı formunda farklı tip indirgemeler yapılarak diğer çözüm de bulunabilirdi.

Sonuç olarak, doğruluk tablosundaki 1'lerden yola çıkarak mintermler cinsinden ya da 0'lardan yola çıkarak maxtermler cinsinden F fonksiyonunu ifade edebilmekteyiz. Her iki form için sadeleştirme yapıldığında ise elde edilen lojik ifadeler birbirine denk olmaktadır.