Гапеев Д.А.
РК6-51Б

Задача 6.6 по вычислительной математике

Пусть A – положительно определенная матрица размерности $n \times n$ с коэффициентами a_{ij}, где $1 \le i, j \le n$. Требуется доказать, что:

1. $\max\limits_{1\le i\le n} |a_{ii}| \ge \max\limits_{1\le k,j\le n} |a_{kj}|$;

2. $a_{ii}a_{jj} > a_{ij}^2$, $i \ne j$.

Для доказательства первого пункта рассмотрите вектора $x^{(j,k)}$ и $z^{(j,k)}$:

$$x_i^{(j,k)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \ne j, i \ne k. \end{cases}$$

$$z_i^{(j,k)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ -1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \ne j, i \ne k. \end{cases}$$

и, используя определение положительно определенных матриц, докажите, что $|a_{kj}| < \frac{a_{jj}+a_{kk}}{2}$. Для доказательства второго пункта рассмотрите вектор $x^{(j,k)}$:

$$x_i^{(j,k)} = \begin{cases} \alpha & \text{при } i = j, \\ 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \ne j, i \ne k. \end{cases}$$

Решение:
Матрица называется положительно определенной, если она симметрична, и верным является неравенство $x^T A x > 0$ для любого вектора $x \ne 0$ подходящей размерности. Для доказательства первого пункта рассмотрим вектор $z^{(j,k)}$, так как матрица является симметричной по определению, тогда $z^{(j,k)}$:

$$(z^{(j,k)})^T A z^{(j,k)} = (z^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} a_{1j} - a_{1k} \\ a_{2j} - a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nj} - a_{nk} \end{bmatrix} = a_{jj} - a_{jk} - (a_{kj} - a_{kk}) > 0.$$

Так как $a_{kj} = a_{jk}$, тогда подставим в верхнее неравенство и получим:

$$a_{kj} < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \tag{1}$$

Затем рассмотрим вектор $x^{(j,k)}$, также используя свойство симметричности:

$$(x^{(j,k)})^T A x^{(j,k)} = (x^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} a_{1j} + a_{1k} \\ a_{2j} + a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nj} + a_{nk} \end{bmatrix} = a_{jj} + a_{jk} + (a_{kj} + a_{kk}) > 0$$

Так как $a_{kj} = a_{jk}$, получаем неравенство:

$$-a_{kj} < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \tag{2}$$

Согласуя формулы (1) и (2) получим следующее неравенство:

$$|a_{kj}| < \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2} \tag{3}$$

Рассмотрим максимальный по значению элемент диагонали матрицы. Легко заметить, что максимальный по значению элемент диагонали матрицы не равен половине суммы двух других элементов диагонали матрицы, тогда:

$$\max_{1 \le i \le n} |a_{ii}| \ge \frac{a_{jj} + a_{kk}}{2}, \tag{4}$$

Тогда, совместив формулы (3) и (4), получим:

$$\max_{1 \le i \le n} |a_{ii}| \ge \max_{1 \le k,j \le n} |a_{kj}|$$

Для доказательства второго пункта рассмотрим модифицированный вектор $x^{(j,k)}$:

$$(x^{(j,k)})^T A x^{(j,k)} = (x^{(j,k)})^T \begin{bmatrix} \alpha a_{1j} + a_{1k} \\ \alpha a_{2j} + a_{2k} \\ \vdots \\ \alpha a_{nj} + a_{nk} \end{bmatrix} = \alpha(\alpha a_{jj} + a_{jk}) + \alpha a_{kj} + a_{kk} > 0.$$

Так как $a_{kj} = a_{jk}$ тогда получим следующее неравенство:

$$\alpha^2 a_{jj} + 2\alpha a_{kj} + a_{kk} > 0 \tag{5}$$

Вычислим дискриминант:

$$D = (2a_{kj})^2 - 4a_{jj}a_{kk}$$

Неравенство (5) выполняется, когда дискриминант меньше нуля:

$$D < 0$$

$$(2a_{kj})^2 - 4a_{jj}a_{kk} < 0$$

Из чего следует:

$$a_{ii}a_{jj} > a_{ij}^2, \quad i \neq j.$$