Семинар 1. Задача 7

Антоненко Григорий, РК6-53Б

6 сентября 2023

1 Задача 1.7

Для интерполяционных узлов $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ и $f(x) \in C^1[a; b]$ многочлен Эрмита, согласующийся с $f(x_i)$ и $f'(x_i), i = \overline{1..n}$ имеет следующий вид:

$$H_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\hat{h}_i(x), \tag{1}$$

где $h_i(x)$ и $\hat{h}_i(x)$ заданы как

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l_i'(x)]l_i^2(x) \tag{2}$$

$$\hat{h}_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x), \tag{3}$$

где l_i - базисные полиномы Лагранжа $n - 1$ степени. Требуется найти выражение для многочлена Эрмита, проходящего через узлы $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, для функции $f(x) = e^{2x}$.

2 Решение задачи

Число узлов, через которое должна проходить кривая многочлена Эрмита равно двум $\implies$ порядок искомого многочлена равен трем $H_{2n-1} = H_3$

I. Расчитаем первую пару слагаемых по формуле (1):

$$H_3^{(1)} = \sum_{i=1}^{n=2} f(x_i)h_i(x) \tag{4}$$

Вместо $h_i(x)$ подставим выражение (2)

1. $x_1 = 0$

   $f(x_1)h_1(x) = f(x_1) \cdot [1 - 2(x - x_1)l_1'(x)]l_1^2(x) =$

   $= f(x_1)[1 - 2(x - x_1)\frac{1}{(x_1 - x_2)}](\frac{x - x_2}{x_1 - x_2})^2 == 1 \cdot [1 - 2(\frac{x - x_1}{x_1 - x_2})](\frac{x - x_2}{x_1 - x_2})^2 =$

   $= -2 \cdot \frac{(x - x_2)^2(x - x_1)}{(x_1 - x_2)^3} + (\frac{x - x_2}{x_1 - x_2})^2 = 16 \cdot (x - \frac{1}{2})^2 \cdot x + 4 \cdot (x - \frac{1}{2})^2) = 4 \cdot x(2x - 1)^2 + (2x - 1)^2$

$$f(x_1)h_1(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1 \tag{5}$$

2. $x_2 = \frac{1}{2}$

   $f(x_2)h_2(x) = f(x_2) \cdot [1 - 2(x - x_2)l_2'(x)]l_2^2(x) =$

   $= f(x_2)[1 - 2(x - x_2) \cdot \frac{1}{(x_2 - x_1)}](\frac{x - x_1}{x_2 - x_1})^2 == e \cdot [1 - 2(\frac{x - x_2}{x_2 - x_1})] \cdot (\frac{x - x_1}{x_2 - x_1})^2 =$

   $= e \cdot (2x)^2 - 2e \cdot (2x - 1)(2x)^2$

$$f(x_2)h_2(x) = -16e \cdot x^3 + 12e \cdot x^2 \tag{6}$$

II. Расчитаем вторую пару слагаемых по формуле (1)

$$H_3^{(2)} = \sum_{i=1}^{n=2} f'(x_i)\hat{h}_i(x) \tag{7}$$

Вместо $\hat{h}_i(x)$ подставим выражение (3)
$f'(x) = 2e^{2x}$

1. $x_1 = 0$

   $f'(x_1)\hat{h}_1(x) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2})^2 = 2 \cdot x(2x - 1)^2$

$$f'(x_1)\hat{h}_1(x) = 8x^3 - 8x^2 + 2x \tag{8}$$

2. $x_2 = \frac{1}{2}$

   $f'(x_2)\hat{h}_2(x) = f'(x_2) \cdot (x - x_2)(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}) == 4e \cdot (2x - 1)x^2$

$$f'(x_2)\hat{h}_2(x) = 8e \cdot x^3 - 4e \cdot x^2 \tag{9}$$

III. Составим многочлен Эримта третьей степени: $H_3(x) = H_3^{(1)} + H_3^{(2)}$
Подставим выражения (5), (6), (8), (9)
$H_3(x) = 16x^3 - 12x^2 + 1 + (-16)e \cdot x^3 + 12e \cdot x^2 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 8e \cdot x^3 - 4e \cdot x^2 =$
$= 8(3 - e) \cdot x^3 + 4(2e - 5) \cdot x^2 + 2x + 1$

IV. Подставим значения x_1 и x_2 чтобы проверить правильность составленного многочлена Эрмита

1. $x_1 = 0$

   $H_3(0) = 8(3 - e) \cdot x^3 + 4(2e - 5) \cdot x^2 + 2x + 1 = 1$

2. $x_2 = \frac{1}{2}$

   $H_3(\frac{1}{2} = 8(3 - e) \cdot x^3 + 4(2e - 5) \cdot x^2 + 2x + 1 = e$

Похоже на правду :)