Гавриш А.А.
РК6-51Б

Задача 5.2 по вычислительной математике

Требуется найти численное решение одной из представленных задач Коши с помощью метода Эйлера, используя шаг $h = 0.5$:

1. $\dfrac{dy}{dt} = \alpha e^{\beta(t-y)}$, $y(0) = 1$, $t \in [0; 1]$;
2. $\dfrac{dy}{dt} = \alpha \sin(\beta y)$, $y(0) = 1$, $t \in [0; 1]$;

где $\alpha \in \mathcal{A} = \{1, 0.5, 2\}$, $\beta \in \mathcal{B} = \{0.5, 3, 1, 2\}$.

Дополнительно требуется найти точное решение указанной задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решения на одной координатной плоскости, а также сравнить полученные абсолютные погрешности вычислений с верхней границей глобальной погрешности метода Эйлера.

В расчетах использовать: уравнение с номером $q = (N \bmod 2) + 1$, а также параметры с индексами: $id_{\mathcal{A}}[\alpha]$, $id_{\mathcal{B}}[\beta]$.

Вычислим значения индексов необходимых элементов для варианта №5:

$$\begin{aligned} q &= (N \bmod 2) + 1 = 5 \bmod 2 + 1 = 1 + 1 = 2, \\ id_{\mathcal{A}}[\alpha] &= (N \bmod |S|) + 1 = (5 \bmod 3) + 1 = 3, \\ id_{\mathcal{B}}[\beta] &= (N \bmod |S|) + 1 = (5 \bmod 4) + 1 = 2, \end{aligned}$$

где N - номер варианта по списку, $|S|$ - мощность множества.

Выбрав элементы с необходимыми индексами окончательно получим, что найти численное решение требуется следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin(3y),\ y(0) = 1,\ t \in [0; 1]$$

Решение:
Из лекций нам известна формулировка метода Эйлера:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha, \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + hf(t_i, \omega_i),\ i = 0, 1, \ldots, m-1, \end{aligned}$$

где $\omega_i \approx y(t_i)$, $m = \dfrac{b-a}{h}$, $f(t_i, \omega_i) = \alpha \sin(\beta \omega_i)$.

Так как f не зависит от t, в дальнейшем в функцию достаточно будет передавать только ω_i. Также $m = \dfrac{1-0}{0.5} = 2$.

Для нахождения значений f от ω_i реализуем функцию на языке программирования Python (листинг 1).

Листинг 1. Функция, возвращающая значение f от переданного ω_i

```
def f(omega: float) -> float:
    return alpha * np.sin(beta * omega)
```

Также разработаем функцию, которая реализует метод Эйлера (листинг 2).

Листинг 2. Реализация метода Эйлера

```
def time_integrate(omega_0, a, b, h):
    m = int((b - a) / h)
    omega = np.zeros(m + 1)
    t = np.linspace(a, b, m+1)

    omega[0] = omega_0
    for i in range(m):
        omega[i+1] = omega[i] + h * f(omega[i])

    return t, omega
```

Аналитическое решение данной задачи Коши:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin(3y) \Rightarrow \frac{dy}{2\sin(3y)} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{2\sin(3y)} = \int dt \Rightarrow$$

$$\left[\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{3y}{2}\right)\right| + C_1 = t + C_2 \Rightarrow$$

$$\left[C_3 = C_1 + C_2\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{3y}{2}\right)\right| = t + C_3 \Rightarrow \left[C = 2C_3\right] \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{3y}{2}\right) = e^{2t+C} \Rightarrow \frac{3y}{2} = \arctan e^{2t+C} \Rightarrow y = \frac{2\arctan e^{2t+C}}{3}$$

При подстановке начального условия $y(0) = 1$ получается:

$$1 = \frac{2}{3}\arctan e^C \Rightarrow \frac{3}{2} = \arctan e^C \Rightarrow \tan\frac{3}{2} = e^C \Rightarrow C = \ln\tan\frac{3}{2} \Rightarrow C \approx 2.64628$$

из чего следует:

$$y = \frac{2}{3}\arctan e^{2t + \ln\tan\frac{3}{2}}$$

Для нахождения значений функции $y(t)$ разработаем две функции на языке программирования Python: первая реализует нахождение значения функции $y(t)$ от переданного t, вторая вычисляет значения функции $y(t)$ на заданном отрезке (листинг 3).

Листинг 3. Нахождение значении функции

```python
def y_solution(t):
    return (2 / 3) * np.arctan(np.exp(2*t + np.log(np.tan(3/2))))

def accurate(points):
    t = np.linspace(a, b, points)
    y = np.zeros(len(t))

    y[0] = y_0
    for i in range(len(t)):
        y[i] = y_solution(t[i])

    return t, y
```

Построим графики аналитического и численного решения задачи Коши при заданном $h = 0.5$ (рис. 1).

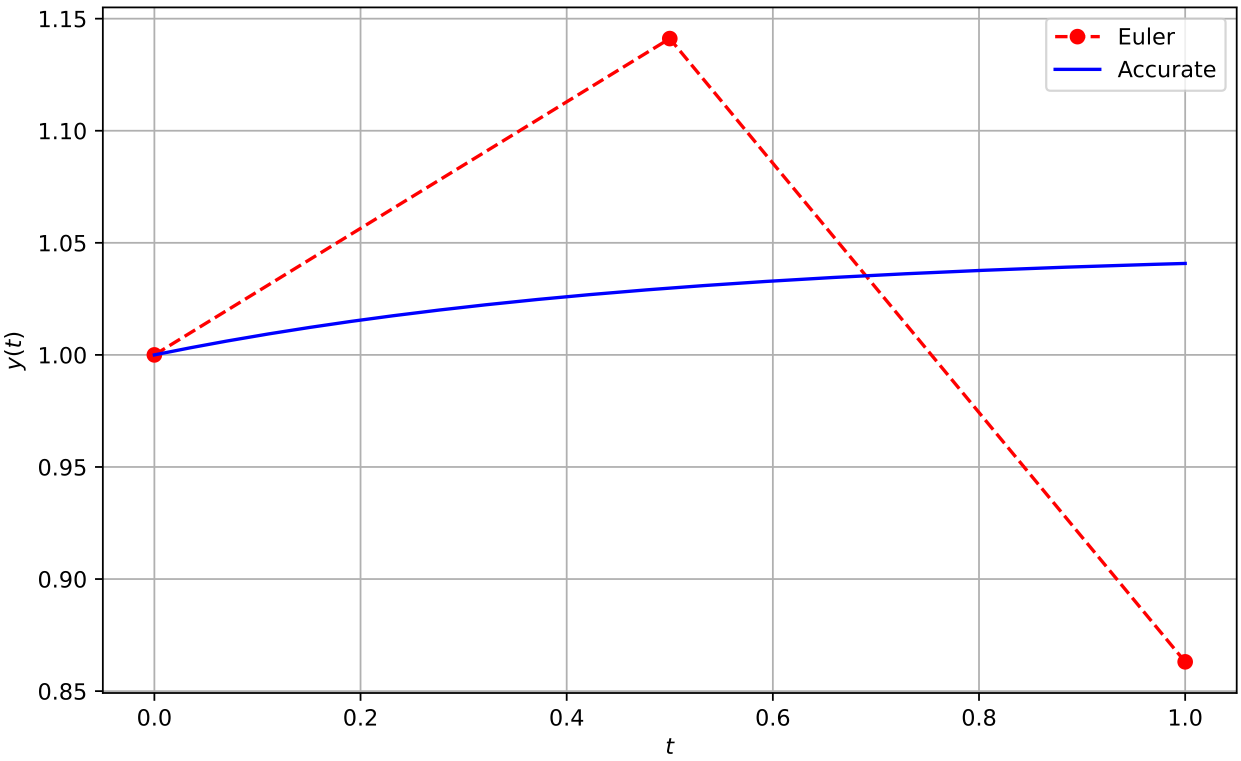

Рис. 1. Решение задачи Коши. Синяя линяя - аналитическое решение, красная - численное решение методом Эйлера

Из лекционного материала нам известно, что абсолютная погрешность приближенного значения a^* есть величина $\Delta(a^*)$ такая, что $\Delta(a^*) = |a - a^*|$, где a - точное значение.
Для нахождения абсолютных погрешностей реализуем функцию на языке Python (листинг 4).

Листинг 4. Нахождение абсолютных погрешностей

```
def abs_dev():
    m = int((b - a) / h)
    _, y_euler = time_integrate(y_0, a, b, h)
    _, y_accurate = accurate(m+1)

    devitations = np.absolute(y_accurate - y_euler)
    return devitations
```

Результатом работы функции стал список абсолютных погрешностей во всех точках $\Delta(\omega_i)$: $[0,\ 0.1113105,\ 0.17773331]$.

Теорема о верхней границе глобальной погрешности метода Эйлера, как известно из лекций, формулируется следующим образом:

Пусть функция $f(t_y)$ является липщиц-непрерывной в $D = \{(t_y) \mid t \in [a;b],\ y \in \mathbb{R}\}$ с константой Липшшица L. Пусть существует такое $M > 0$, что $|y''(t)| < M$ для любого $t \in [a;b]$, где $y(t)$ является единственным решением задачи Коши $y' = f(t,y)$, $y(a) = \alpha$. Тогда для последовательности $\{\omega_i\}_{i=0}^{m}$, сгенерированной методом Эйлера, верно следующее неравенство:

$$|y(t_i) - \omega_i| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_i - a)} - 1),\ i = 0, 1, \ldots, m,$$

где $h = \dfrac{b-a}{m}$

Так как $|y''(t)| < M$, то для определения M необходимо найти вторую производную $y''(t)$. Для нахождения первой и второй производной использовался математический калькулятор WolframAlpha.

$$y' = \frac{4e^{2x}\tan\left(\frac{3}{2}\right)}{3 + 3e^{4x}\tan^2\left(\frac{3}{2}\right)},$$

$$y'' = -\frac{8e^{2x}\tan\left(\frac{3}{2}\right)\left(-1 + e^{4x}\tan^2\left(\frac{3}{2}\right)\right)}{3\left(1 + e^{4x}\tan^2\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2}$$

График функции второй производной был построен с помощью графического калькулятора Desmos (рис. 2).

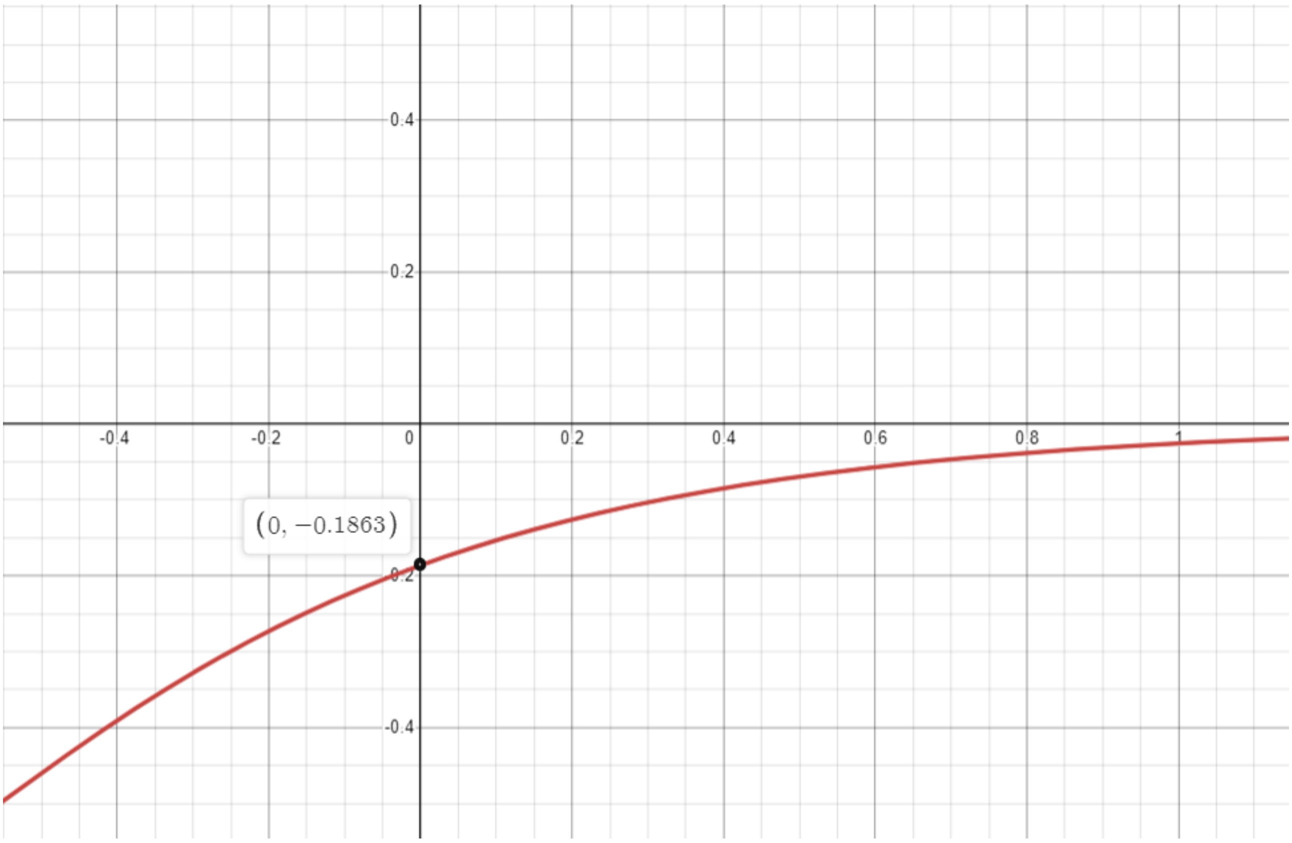

Рис. 2. График значений второй производной

Из рисунка 2 очевидно, что наибольшее по модулю значение на отрезке [0;1] вторая производная принимает в точке 0, и равна в этой точке -0.19 (с учетом округления). Тогда разумно взять $M = 0.20$, и для такого M будет гарантировано $|y''(t)| < M$.

Теперь необходимо найти константу Липщица $L = max(|y'(t)|)$. Функция первой производной была также построена с помощью графического калькулятора Desmos (рис. 3).

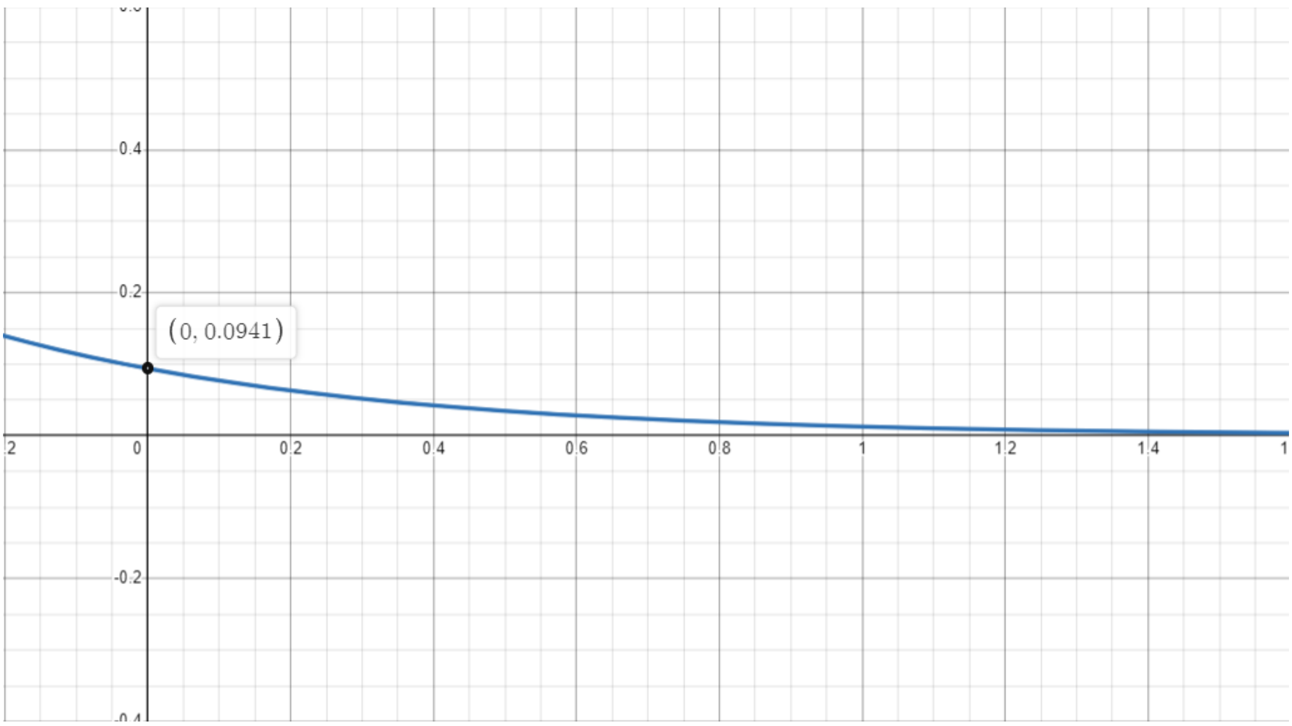

Рис. 3. График значений первой производной

Из рисунка 3 очевидно, что наибольшее значение на отрезке [0; 1] первая производная принимает в точке 0, и равна в этой точке 0.094 (с учетом округления). Тогда разумно взять $L = 0.094$.

Для нахождения границ глобальных погрешностей реализуем функцию на языке программирования Python (листинг 5).

Листинг 5. Нахождение границ глобальных погрешностей

```
def euler_upper_limit():
    M = 0.20
    L = 0.094

    m = int((b - a) / h)
    t = np.linspace(a, b, m + 1)
    return [(h*M)/(2*L)*(math.exp(L*(t[i]-a)) - 1) for i in range(m+1)]
```

Полученные верхние границы глобальной погрешности метода Эйлера: [0.0, 0.0255968, 0.0524253].

Сравним полученные значения абсолютных погрешностей с верхней границей глобальной погрешности метода Эйлера (таблица 1).

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3
Абсолютная погрешность	0	0.11131059	0.17773331
Верхняя граница глобальной погрешности	0	0.02431697	0.04980413

Таблица 1. Сравнение погрешностей для $h = 0.5$

В качестве эксперимента уменьшим шаг с 0.5 до 0.1 (рис. 4) и рассмотрим значения погрешностей для данной ситуации (таблица 2).

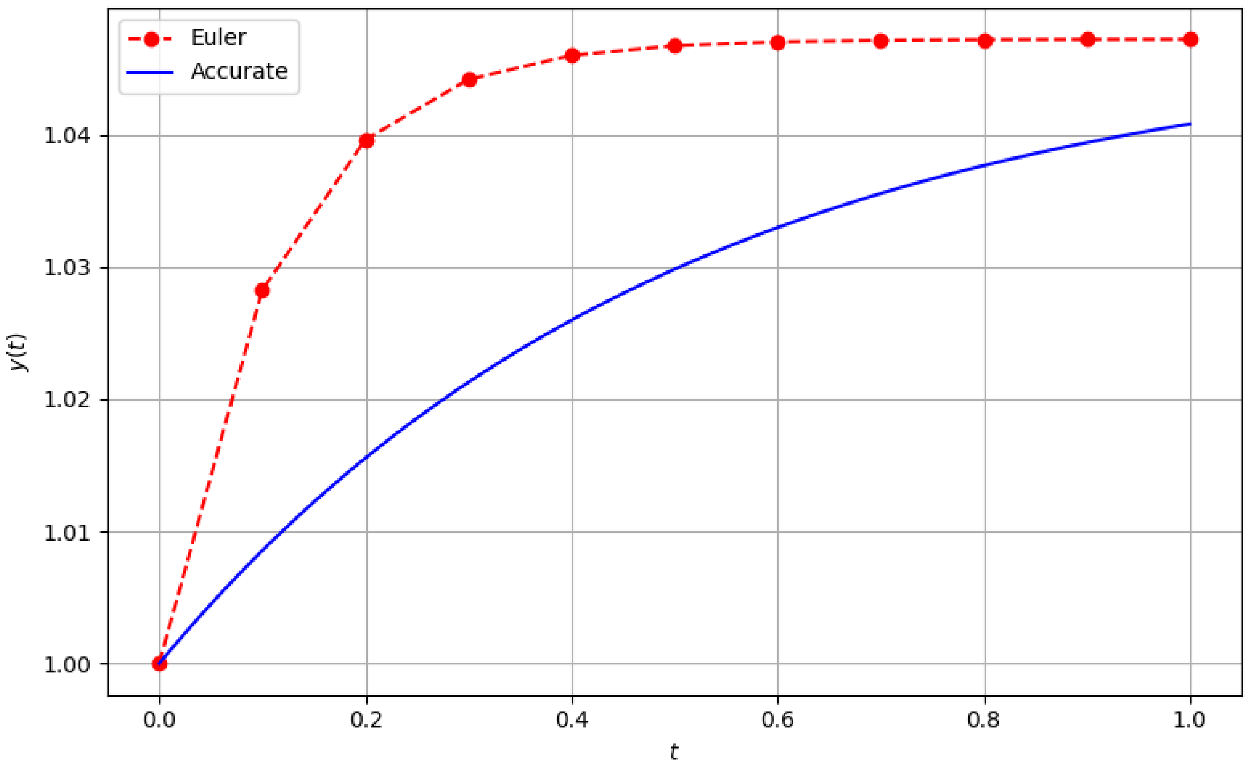

Рис. 4. Решение задачи Коши. Синяя линяя - аналитическое решение, красная - численное решение методом Эйлера

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	...	ω_9	ω_{10}	ω_{11}
Абс.	0	0.0196	0.0240	0.0228	0.0200	...	0.0095	0.0078	0.0063
Глоб.	0	0.0009	0.0019	0.0028	0.0038	...	0.0078	0.0089	0.0099

Таблица 2. Сравнение погрешностей для $h = 0.1$