Гапеев Д.А.
РК6-51Б

Задача 5.2 по вычислительной математике

Требуется найти численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера, используя шаг $h = 0.5$:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha * e^{\beta(t-y)}, y(0) = 1, t \in [0; 1],$$

где $\alpha = 1, \beta = 1$.
Дополнительно требуется найти точное решение указанной задачи Коши, продемонстрировать графики численного и точного решений на одной координатной плоскости, а также сравнить полученные абсолютные погрешности вычислений с верхней границей глобальной погрешности метода Эйлера.

Решение:

Рассмотрим следующее ОДУ:

$$\frac{dy}{dt} = e^{(t-y)}, \tag{1}$$

где $t \in [0; 1], y(0) = 1$.
Запишем формулировку метода Эйлера для решения ОДУ:

$$\omega_0 = \alpha, \tag{2}$$

$$\omega_{i+1} = \omega_i + hf(t_i, \omega_i), i = 0, 1, ..., m-1. \tag{3}$$

где, $\omega_i \approx y(t_i), t_i = \alpha + ih$.
Изменим выражения (2) и (3), учитывая что $h = 0.5, m = \frac{b-a}{h} = 2$:

$$y(t_0) \approx \omega_0 = 1; t_0 = 0,$$

$$y(t_1) \approx \omega_1 = \omega_0 + hf(t_0, \omega_0) = 1 + 0.5 * e^{-1} \approx 1.184; t_1 = 0.5,$$
$$y(t_2) \approx \omega_2 = \omega_1 + hf(t_1, \omega_1) = 1.184 + 0.5 * e^{0.5-1.184} \approx 1.436; t_2 = 1.$$

Значит численное решение задачи Коши с помощью метода Эйлера будет выглядеть следующим образом:

$$\{t_i, y_i\}_{i=0}^{m=2} : (t_0, y_0) = (0, 1), (t_1, y_1) = (0.5, 1.184), (t_2, y_2) = (1, 1.436). \tag{4}$$

Далее найдем точное аналитическое решение задачи Коши (1):

$$e^{y(t)}dy(t) = e^t dt$$

$$\int e^{y(t)}dy(t) = \int e^t dt$$

$$e^{y(t)} = e^t + C$$

$$y(t) = ln(e^t + C)$$

Так как y(0)=1, то:

$$1 = ln(e^0 + C)$$

$$e = (1 + C)$$

$$C = e - 1$$

Значит точное решение задачи Коши выглядит следующим образом:

$$y(t) = ln(e^t + e - 1) \tag{5}$$

Тогда для точек t_i получим:

$$\{t_i, y_i\}_{i=0}^{m=2} : (t_0, y_0) = (0, 1), (t_1, y_1) = (0.5, 1.214), (t_2, y_2) = (1, 1.490). \tag{6}$$

Выполним построение точного и численного методов решения задачи Коши. Код для решения данной задачи представлен на Листинге (1).

Листинг 1. Графики точного и численного решения задачи Коши.

```
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t,y):
    return math.e ** ( t - y )
def y_solution(t):
    return math.log(math.e ** t - 1 + math.e)
def time_integrate (y_0, a, b, h):
   m = int((b - a) / h)
    y = np.zeros ((m + 1,))
    t = np .linspace(a, b, m + 1)
    y[0] = y_0
    for i in range (m) :
        t_i = a + i * h
```

```
        y [i + 1] = y[i] + h * f (t_i ,y[i])
    return t, y

y_0 = 1
a = 0
b = 1
h = 0.5
t_approx , y_approx = time_integrate(y_0, a, b, h)
t = np.linspace(a, b, 200)
fig , ax =plt.subplots(1, 1, figsize=(10 ,6))
y = [y_solution(i) for i in t]
ax .plot(t, y, '-', linewidth=2, label=r"$y(t)$")
ax.plot(t_approx, y_approx, 'o--', linewidth=2,
label=r"$w_i$")
ax.set_xlabel(r'$t$', fontsize=16)
ax.set_ylabel(r'$y$', fontsize=16)
ax.grid( )
ax.legend(loc='lowerright', fontsize=16)
plt.show( )
```

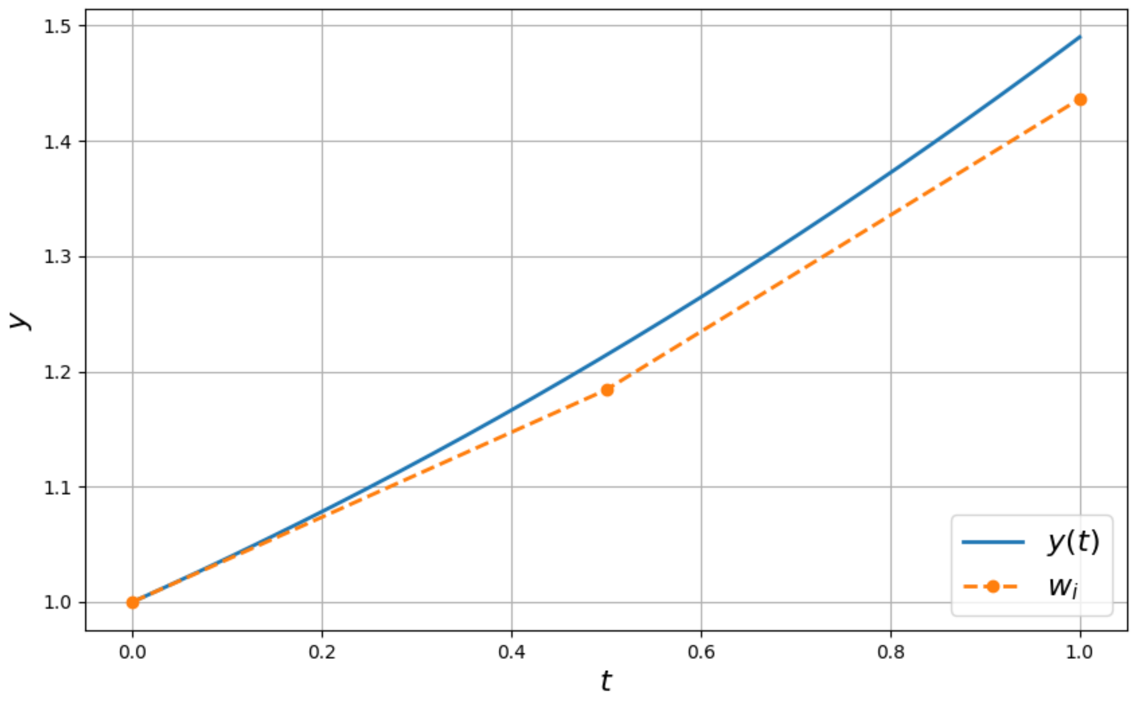

Рисунок 1. Графики точного и численнего решения задачи Коши

Вычислим абсолютные погрешности опираясь на выражения (4) и (6):

$$\delta_0 = 0,\ \delta_1 \approx 0.030,\ \delta_2 \approx 0.054.$$

Перейдем к рассмотрению теоремы о верхней границе глобальной погрешности метода Эйлера:

$$|y(t_i) - \omega_i| \le \frac{hM}{2L}(e^{L(t_i-\alpha)} - 1),$$

где $h = \frac{b-a}{m}$, L - константа Липшица, $M > max|f''(t)|,\ i = 0, 1, ..., m$.
Определим максимальное значение второй производной функции $y(t)$ на участке $[0; 1]$ и сопоставим абсолютные погрешности вычислений с верхним пределом глобальной погрешности.

$$y'(t) = \frac{e^t}{e^t + e - 1} \tag{7}$$

$$y''(t) = \frac{e^t(e^t + e - 1) - e^{2t}}{(e^t + e - 1)^2} \tag{8}$$

Выражения (7) и (8) найдены при помощи калькулятора WolframAlpha. Рассмотрим график функции (8) для нахождения максимального значения на участке $[0; 1]$:

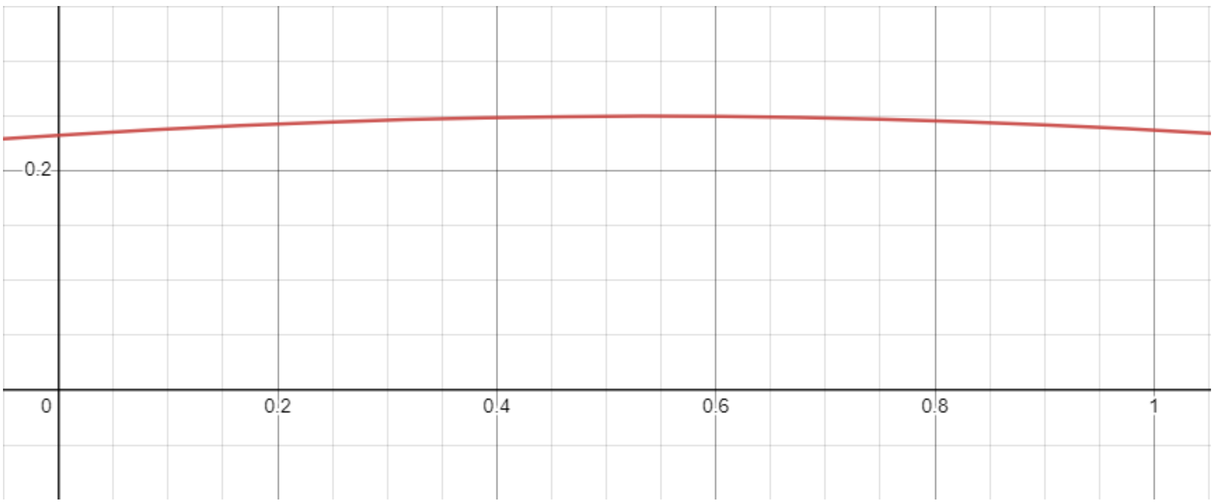

Рисунок 2. График второй производной y(t)

На графике наглядно видно, что $max|y''(t)|$ на участке $[0; 1]$ находится внутри этого участка, а не на границе. Используя калькулятор WolframAlpha вычислим $max|y''(t)|$:

$$max|y''(t)| \approx 0.5413$$

Возьмем $M = 0.542$. Далее вычислим константу Липшица по следующей формуле:

$$L = max|f'(t)|$$

Рассмотрим график функции (7) для нахождения максимального значения на участке $[0; 1]$:

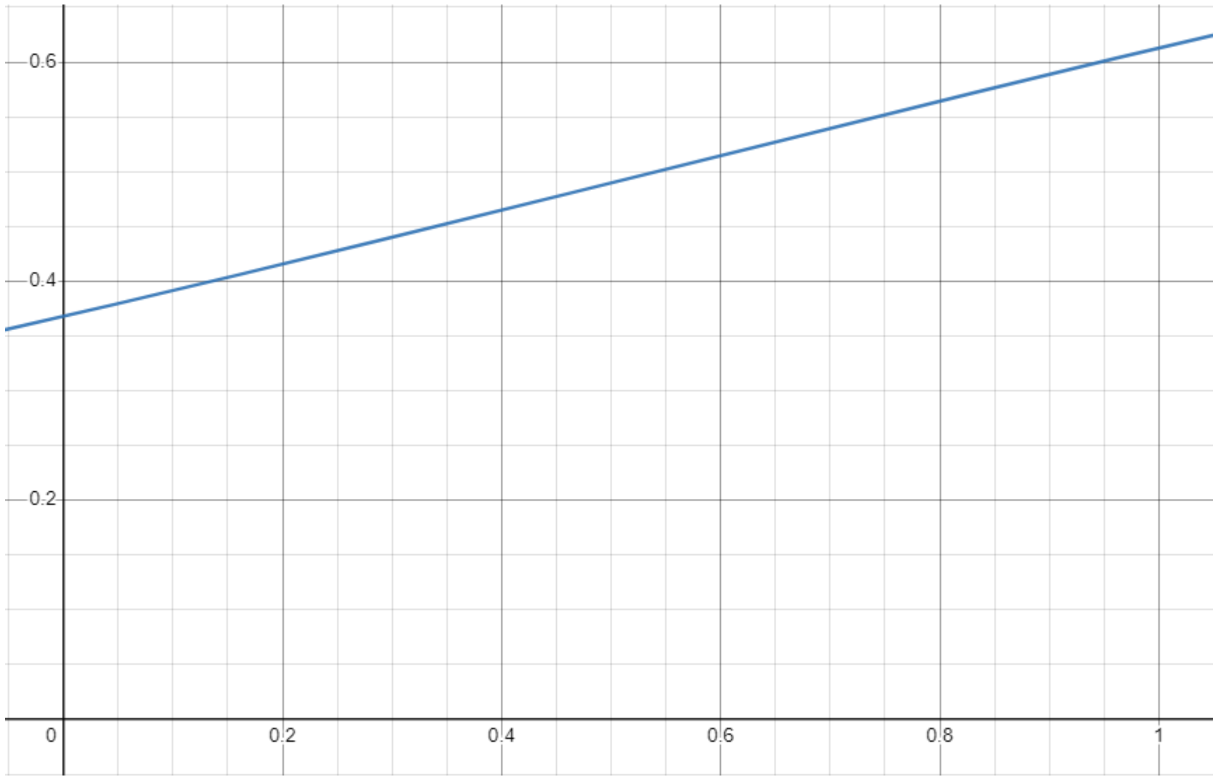

Рисунок 3. График первой производной y(t)

Заметим, что максимальное значения функция принимает в точке $t = 1$:

$$L = y'(1) \approx 0.6127$$

Сравним полученные абсолютные погрешности с верхней границей глобальной погрешности, используя вычисленные значения L и M:

$$t_0 : |y_0 - \omega_0| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_0-\alpha)} - 1) = 0$$

$$\Delta_0 = 0 - \delta_0 = 0$$

$$t_1 : |y_1 - \omega_1| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_1-\alpha)} - 1) = 0.079$$

$$\Delta_1 = 0.079 - \delta_1 = 0.049$$

$$t_2 : |y_2 - \omega_2| \leq \frac{hM}{2L}(e^{L(t_2-\alpha)} - 1) = 0.186$$

$$\Delta_2 = 0.186 - \delta_2 = 0.132$$