Задача 7.5. Требуется найти решение СЛАУ

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{11}{84} \end{bmatrix}$$

используя арифметику с двумя значащими цифрами и два метода: метод Гаусса и метод сопряженных градиентов. Определите, какой из методов дает более точный ответ.

Решение: 1) Метод Гаусса.

1) Объединим матрицу системы и вектор свободных членов в расширенную матрицу и выполним прямой ход:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{11}{84} \end{array}\right] -I\cdot 0{,}5 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{21} \\ 0 & 0.083 & 0{,}011 \end{array}\right]$$

2) Обратный ход: $0.08x_2 = 0.011$

$$x_2 = \frac{0.011}{0.083} \approx 0.13$$

Подставим x_2 в первую строку:

$$x_1 + 0.5\cdot 0{,}13 = \frac{5}{21}$$

$$x_1 \approx 0.17$$

Метод Гаусса: $\begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.13 \end{bmatrix}$

2) Метод сопряженных градиентов

Данный метод построен при рассмотрении задачи минимизации вектора невязки.

1) Инициализация: $x^{(0)} = [0, 0]$

Вычисление начального градиента: $g^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, где

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{11}{84} \end{bmatrix}$; $g^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{11}{84} \end{bmatrix}$

Начальное направление: $d^{(0)} = g^{(0)}$

2) Вычисление шага $\alpha^{(0)}$

Шаг $\alpha^{(0)}$ находится из условия минимизации функции вдоль направления $d^{(0)}$

$$\alpha^{(0)} = \frac{g^{(0)T} g^{(0)}}{d^{(0)T} A d^{(0)}} \approx 0,79$$

$$\left(g^{(0)T} \cdot g^{(0)} = \left[\frac{521}{7056} \right];\ d^{(0)T} \cdot A = \left[\frac{17}{56} \ \ \frac{41}{252} \right] \cdot d^{(0)} = \left[\frac{283}{3024} \right] \right)$$

3) Новая итерация решения:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha^{(0)} \cdot d^{(0)}$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{79}{420} \\ \frac{869}{8400} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,10 \end{bmatrix}$$

4) Вычисление нового градиента:

$$g^{(1)} = b - Ax^{(1)}$$

$$g^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,0019 \\ 0,0026 \end{bmatrix}$$

5) Вычисление нового направления:

$$\beta^{(0)} = \frac{g^{(1)T} \cdot g^{(1)}}{g^{(0)T} g^{(0)}} = 0,00014$$

$$d^{(1)} = g^{(1)} + \beta^{(0)} d^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,0019 \\ 0,0026 \end{bmatrix} + 0,00014 \begin{bmatrix} \frac{5}{21} \\ \frac{11}{84} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0019 \\ 0,0025 \end{bmatrix}$$

6) Вычисление шага $\alpha^{(1)}$

$$\alpha^{(1)} = \frac{g^{(1)T} g^{(1)}}{d^{(1)T} A d^{(1)}} \approx 11$$

7)
$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,17 \\ 0,12 \end{bmatrix}$$

Итерации дальнейшие не повлияют на ответ в виду использования арифметики с двумя значащими цифрами.

3) Сравнение методов.

Точное решение получено при помощи калькулятора WolframAlpha:

$$X = \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

Найдем погрешность методов:

Для метода Гаусса: $\left| \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.13 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.01 \end{bmatrix}$

Для метода сопряженных градиентов: $\left| \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.12 \end{bmatrix} \right| = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.02 \end{bmatrix}$

В контексте данной задачи и при использовании арифметики с двумя значащими цифрами метод Гаусса дал более точный ответ, в сравнении с методом сопряженных градиентов.