Гавриш А.А.
РК6-51Б

Задача 1.3 по вычислительной математике

Требуется найти интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{5},\ x_3 = \frac{9}{10}$$

для функции $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Решение:

Из материалов лекций нам известно, что интерполяционным многочленом Лагранжа для функции $f(x)$ и соответствующих узлов интерполяции называется функция вида:

$$\tilde{f}(x) = L_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

При n = 3 интерполяционных узлах функция $\tilde{f}(x)$ принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} \tilde{f}(x) = L_2(x) = f(x_1)\, \frac{(x-x_2)\,(x-x_3)}{(x_1-x_2)\,(x_1-x_3)} + \\ + f(x_2)\, \frac{(x-x_1)\,(x-x_3)}{(x_2-x_1)\,(x_2-x_3)} \ + \ f(x_3)\, \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_3-x_1)\,(x_3-x_2)} \end{gathered} \tag{2}$$

Рассчитаем значения функции при $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{3}{5},\ x_3 = \dfrac{9}{10}$

$$f(x_1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \tag{3.1}$$

$$f(x_2) = \sqrt{1 + \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \tag{3.2}$$

$$f(x_3) = \sqrt{1 + \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{19}{10}} = \frac{\sqrt{190}}{10} \tag{3.3}$$

Подставим полученные значения (3.1), (3.2), (3.3) в формулу (2):

$$L_2(x) = \sqrt{2}\frac{(x-\frac{3}{5})(x-\frac{9}{10})}{(1-\frac{3}{5})(1-\frac{9}{10})} + \frac{2\sqrt{10}}{5}\frac{(x-1)(x-\frac{9}{10})}{(\frac{3}{5}-1)(\frac{3}{5}-\frac{9}{10})} + \frac{\sqrt{190}}{10}\frac{(x-1)(x-\frac{3}{5})}{(\frac{9}{10}-1)(\frac{9}{10}-\frac{3}{5})}$$

Раскроем скобки и упростим полученное выражение:

$$L_2(x) = 25\sqrt{2}(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{27}{50}) + \frac{10\sqrt{10}}{3}(x^2 - \frac{19}{10}x + \frac{9}{10}) - \frac{10\sqrt{190}}{3}(x^2 - \frac{8}{5}x + \frac{3}{5}) =$$
$$= 25\sqrt{2}x^2 - \frac{75\sqrt{2}}{2}x + \frac{27\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{10}}{3}x^2 - \frac{19\sqrt{10}}{3}x + 3\sqrt{10} - \frac{10\sqrt{190}}{3}x^2 +$$
$$+\frac{16\sqrt{190}}{3}x - 2\sqrt{190} = (\frac{75\sqrt{2} + 10\sqrt{10} - 10\sqrt{190}}{3})x^2 +$$
$$+(\frac{32\sqrt{190} - 225\sqrt{2} - 38\sqrt{10}}{6})x + (\frac{27\sqrt{2} + 6\sqrt{10} - 4\sqrt{190}}{2}) =$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{3}(15 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{95})x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}(32\sqrt{95} - 225 - 38\sqrt{5})x + \frac{\sqrt{2}}{2}(27 + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{95})$$

Ответ: интерполяционный многочлен Лагранжа, проходящий через узлы $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $x_3 = \frac{9}{10}$ для функции $f(x) = \sqrt{1+x}$, имеет следующий вид:

$$L_2(x) = \frac{5\sqrt{2}}{3}(15 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{95})\ x^2 + \frac{\sqrt{2}}{6}(32\sqrt{95} - 225 - 38\sqrt{5})\ x +$$
$$+\ \frac{\sqrt{2}}{2}(27 + 6\sqrt{5} - 4\sqrt{95})$$

Отобразим на графике исходную функцию и полученный интерполяционный многочлен Лагранжа (рис. 1).

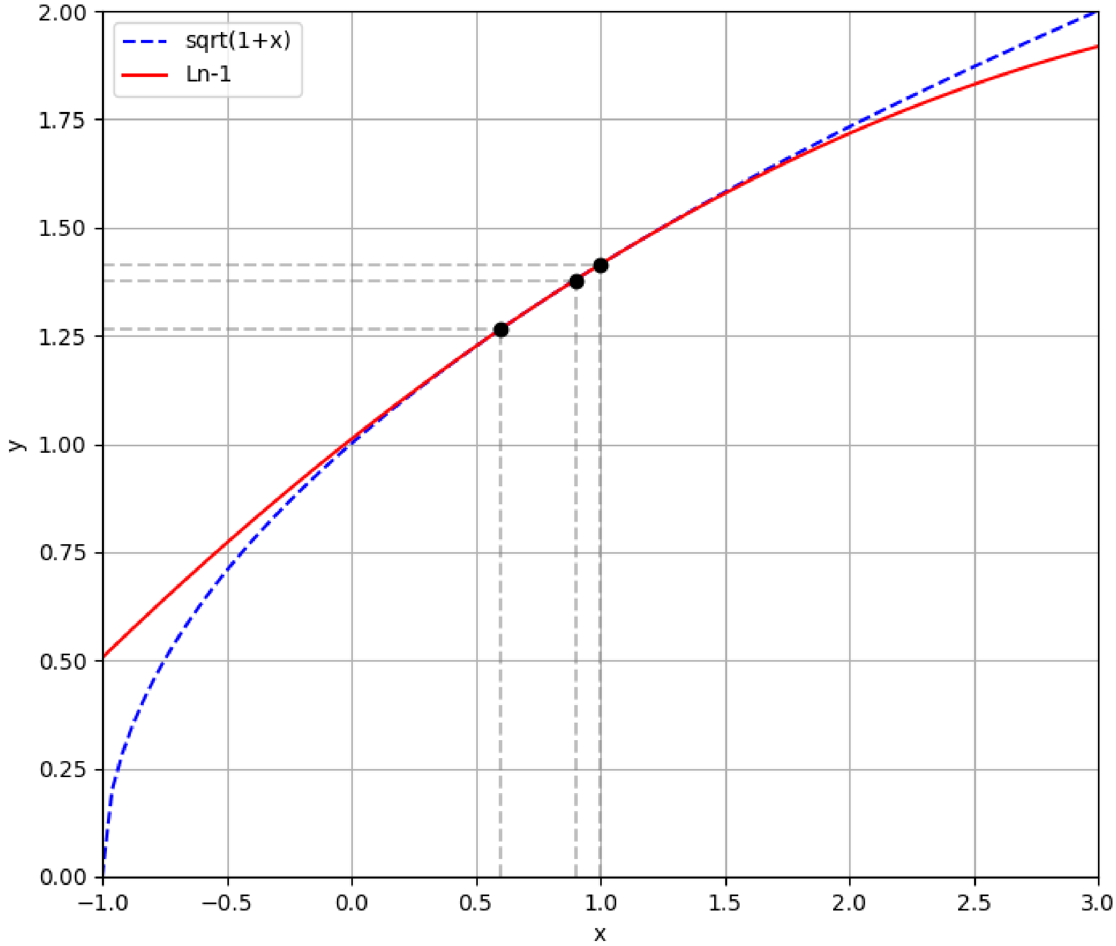

Рис. 1. Графическое сравнение исходной функции и интерполянта

Синей пунктирной линией отображена исходная функция, а красной линией интерполяционный многочлен Лагранжа.