Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Антоненко Григорий Андреевич
Группа:	РК6-53Б
Тип задания:	Домашнее задание
Тема:	Ортогональные системы функций

Студент ______ подпись, дата — Антоненко Г.А. Фамилия, И.О.

Преподаватель ______ подпись, дата — ______ Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Ортогональные системы функций

Задание

Задача 3.9

Ортогональные системы функций весьма широко используются в прикладной математике. Например, частью решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном являются так называемые многочлены Лагерра $L_k(x)$, где k обозначает степень многочлена, которые задаются следующей рекурсивной формулой:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)\right], \tag{1}$$

где $L_0(x) = 1$ и $L_1(x) = 1 - x$. Многочлены Лагерра составляют систему функций, ортогональных на интервале $[0; \infty)$ с весом $\omega(x) = e^{-x}$. Требуется продемонстрировать, что это верно для первых трех многочленов $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

Решение

Теоретическая часть

Теорема о линейно независимой системе функций

Пусть $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ — система полиномов, где полином ϕ_i имеет степень i. Тогда $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ является линейно независимой системой функций на $[a; b]$.
Если линейно независимая система полиномов является ортогональной, то верно следуюшее равенство:

$$\langle \phi_n(x), P_k(x) \rangle_\omega = \int_a^b \omega(x)\phi_n(x)P_k(x)dx = 0, \tag{2}$$

где n — максимальная степень полинома, $P_k(x)$ — полином любой степени $k < n$, $\omega(x)$ — весовая функция.

Практическая часть

Определим множество полиномов Лагерра $\{L_i\}_{i=0}^{n=2}$:

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = 1 - x$$
$$L_2(x) = \frac{x^2 - 4x + 2}{2}$$

Теперь для $k = 0, 1$ по формуле (2) найдем скалярное произведение полиномов с $L_2(x)$

1. $k = 0$

$$\langle L_2(x), L_0(x) \rangle_\omega = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x^2 - 4x + 2}{2}\right)dx = I_0$$

Интегрируем по частям (дважды): $\int udv = uv - \int vdu$

$$e^{-x}dx = dv \implies v = -e^{-x}, \quad \frac{x^2-4x+2}{2} = u \implies du = (x-2)dx$$

$$I_0 = -\frac{x^2-4x+2}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}(x-2)dx$$

Обозначим получившийся в качестве слагаемого интеграл как I_1

$$e^{-x}dx = dv \implies v = -e^{-x}, \quad x-2 = u \implies du = dx$$

$$I_1 = -(x-2)e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = -(x-2)e^{-x} - e^{-x}$$

Тогда

$$I_0 = -\frac{x^2-4x+2}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty - (x-2)e^{-x}\Big|_0^\infty - e^{-x}\Big|_0^\infty$$

При $x \to \infty$: $I_0 = 0$, так как $e^{-\infty} = 0$
При $x = 0$: $I_0 = -1 + 2 - 1 = 0$

2. $k = 1$

$$\langle L_2(x), L_1(x)\rangle_\omega = \int_0^\infty e^{-x}\left(\frac{x^2-4x+2}{2}\right)(1-x)dx = I_0$$
$$I_0 = \int_0^\infty \left(\frac{-x^3+5x^2-6x+2}{2}\right)e^{-x}dx$$

Интегрируем по частям (трижды): $\int udv = uv - \int vdu$

$$e^{-x}dx = dv \implies v = -e^{-x}, \quad \frac{-x^3+5x^2-6x+2}{2} = u \implies du = \frac{-3x^2+10x-6}{2}dx$$

$$I_0 = -\frac{-x^3+5x^2-6x+2}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \left(\frac{-3x^2+10x-6}{2}\right)e^{-x}dx$$

Обозначим получившийся в качестве слагаемого интеграл как I_1

$$e^{-x}dx = dv \implies v = -e^{-x}, \quad \frac{-3x^2+10x-6}{2} = u \implies du = (-3x+5)dx$$

$$I_1 = -\frac{-3x^2+10x-6}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty (-3x+5)e^{-x}dx$$

Обозначим получившийся в качестве слагаемого интеграл как I_2

$$e^{-x}dx = dv \implies v = -e^{-x}, \quad -3x+5 = u \implies du = -3dx$$

$$I_2 = -(-3x+5)e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty -3e^{-x}dx$$
$$I_2 = -(-3x+5)e^{-x}\Big|_0^\infty + 3e^{-x}\Big|_0^\infty$$

Выражение для I_0:

$$I_0 = -\frac{-x^3+5x^2-6x+2}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty - \frac{-3x^2+10x-6}{2}e^{-x}\Big|_0^\infty - (-3x+5)e^{-x}\Big|_0^\infty + 3e^{-x}\Big|_0^\infty$$

При $x \to \infty$: $I_0 = 0$, так как $e^{-\infty} = 0$
При $x = 0$: $I_0 = -1 + 3 - 5 + 3 = 0$

Заключение

1. Изучен признак ортогональности системы линейно нехависимых функции
2. Показано, что первые 3 полинома Лагерра образуют ортогональную систему линейно независимых функций.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2018-2021. С. 140. URL: https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046.

2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2021. С. 9. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

3. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению заданий к семинарским занятиям (общая). Москва: Соколов, А.П., 2018-2022. С. 7. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

4. Першин А.Ю. Сборник задач семинарских занятий по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. / Под редакцией Соколова А.П. [Электронный ресурс]. Москва, 2018-2021. С. 20. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

5. Першин А.Ю., Соколов А.П. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2021. С. 54. URL: https://archrk6.bmstu.ru. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Антоненко Г.А.Отчет о выполнении домашнего задания по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 6 с. URL: https://sa2systems.ru:88 (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка: *доцент кафедры РК-6, PhD А.Ю. Першин*

Решение и вёрстка: *студент группы РК6-53Б, Антоненко Г.А.*

2023, осенний семестр