



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ №3 по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Гавриш Александр Александрович
Группа:	РК6-51Б
Тип задания:	лабораторная работа
Тема:	Вынужденные колебания маятника

Студент

подпись, дата

Гавриш А.А.

Фамилия, И.О.

Преподаватель

подпись, дата

Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Вынужденные колебания маятника	3
Задание	3
Цель выполнения лабораторной работы	4
1 Моделирование движения математической модели маятника	5
1.1 Преобразование исходного ОДУ 2-го порядка в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	5
1.2 Разработка функционала для методов Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона в решении систем ОДУ первого порядка	5
1.3 Численное моделирование траекторий системы при различных начальных условиях с помощью реализованных методов	9
1.4 Сравнительный анализ использованных численных методов	11
1.5 Исследование устойчивости численных методов	11
2 Фазовые траектории и анализ асимптотических состояний динамической системы	15
2.1 Визуализация фазовых траекторий системы при различных начальных условиях для каждого из методов	15
2.2 Сравнение фазовых траекторий, полученных разными методами, для фиксированного начального условия	17
2.3 Сравнение численных методов по временным затратам	18
2.4 Исследование асимптотического поведения решений в зависимости от начальных условий и его физическая интерпретация	18
3 Идентификация и отображение динамических аттракторов	19
3.1 Области притяжения каждого из асимптотических состояний	19
3.2 Характерные детали полученных областей притяжения	20
Заключение	21

Вынужденные колебания маятника

Задание

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются для изучения динамических систем, траектории которых не удается найти с помощью аналитических методов. Одним из простейших примером являются вынужденные колебания маятника без предположения о малости угла отклонения маятника от вертикальной оси. Подобная математическая модель является фундаментальной для робототехники, и отчасти отражает процессы, моделируемые, например, в случае рук-манипуляторов. В данной лабораторной работе исследуются траектории, являющиеся решениями соответствующих задач Коши на основе такой модели, и проанализируем, к каким решениям они сходятся в зависимости от начальных условий.

Дано ОДУ 2-го порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + 0.1\frac{d}{dt}\theta + \sin(\theta) = \cos(t), \quad (1)$$

где $\theta(t)$ обозначает угол отклонения маятника от вертикальной оси как функцию времени t .

Требуется (базовая часть):

- Преобразовать данное ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка.
- Разработать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданной функцией f , начальным условием x_0 , шагом по времени h и конечным временем t_n :
 - `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка;
 - `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью неявного трехшагового метода Адамса-Моултона;
 - `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Милна-Симпсона (схема предиктор-корректор).
- Для каждого из реализованных методов:
 - численно каждым из методов найти траектории заданной динамической системы, используя шаг $h = 0.1$ и 15 различных начальных условий, для которых: $\theta(0) = 0$ и $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$ следует выбрать случайно из интервала $[1.85; 2.1]$;
 - вывести полученные траектории на едином графике как зависимости $\theta(t)$ (для каждого метода на отдельном графике).
- В чем принципиальные отличия реализованных методов друг от друга? В чем они схожи?
- Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой?

Требуется (продвинутая часть):

6. Вывести разными цветами фазовые траектории на едином двумерном графике: по оси абсцисс θ , по оси ординат - $\frac{d\theta}{dt}$, при всех различных начальных условиях (для каждого метода на отдельном графике).

7. Зафиксировать одно начальное условие (произвольно). Вывести фазовые траектории на одном двумерном графике, формируемые разными методами. Сделать вывод.

8. Какая из схем является наиболее затратной с точки зрения времени вычислений при произвольном значении шага, дающем устойчивое решение для каждой из схем? Наименее затратной?

9. Как вы можете охарактеризовать асимптотические состояния, к которым сходится решение в зависимости от начальных условий? Опишите их физический смысл.

Требуется (опциональные задания):

10. Построить области притяжения каждого из асимптотических состояний:

а) Каждому из асимптотических состояний назначить свой цвет.

б) Построить множество начальных условий на основе структурированной сетки, построенной путем разбиения области $[-4\pi; 4\pi] \times [-5; 5]$.

в) Выбрав наименее затратную по времени схему, построить траектории для каждого из начальных условий, соответствующих узлам сетки, и проклассифицировать, к какому асимптотическому состоянию сходится каждая из траекторий. Описать алгоритм, с помощью которого вы определяете, что данная траектория сходится к определенному асимптотическому состоянию.

г) Вывести на экран график начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний.

11. Какие характерные детали полученных областей притяжения вы можете выделить?

Цель выполнения лабораторной работы

Цель выполнения лабораторной работы: исследование трех различных численных методов для решения задачи Коши в контексте систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Эти методы включают явный четырехшаговый метод Рунге-Кутты, неявный трехшаговый метод Адамса-Моултона и метод Милна-Симпсона (схема предиктор-корректор). Определение оптимального шага, при котором система становится неустойчивой для каждого из методов. Анализ этих методов с точки зрения устойчивости и затрат по времени, а также анализ асимптотических состояний системы, к которым она сходится в зависимости от начальных условий.

1 Моделирование движения математической модели маятника

1.1 Преобразование исходного ОДУ 2-го порядка в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Для преобразования исходного дифференциального уравнения второго порядка (1) в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, произведем замену переменных:

$$\frac{d}{dt}\theta = \theta_1 \quad (2)$$

Подставим (2) в исходное ОДУ 2-го порядка и проведем некоторые преобразования:

$$\frac{d}{dt}\theta_1 = -0.1\theta_1 - \sin(\theta) + \cos(t)$$

Тогда исходное ОДУ 2-го порядка преобразуется в систему ОДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\theta = \theta_1 \\ \frac{d}{dt}\theta_1 = \cos(t) - 0.1\theta_1 - \sin(\theta) \end{cases} \quad (3)$$

Систему (3) также можно записать в векторном виде:

$$f(t, \theta, \theta_1) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \cos(t) - 0.1\theta_1 - \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Для дальнейшей работы необходимо программно реализовать функцию (листинг 1), которая будет возвращать правую часть каждого из ОДУ 1-го порядка системы (3).

Листинг 1. Функция для получения правой части каждого ОДУ системы

```
def f(t: float, theta: np.ndarray) -> np.ndarray:
    theta1, theta2 = theta
    return np.array([theta2, np.cos(t) - 0.1*theta2 - np.sin(theta1)])
```

1.2 Разработка функционала для методов Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона в решении систем ОДУ первого порядка

Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты является одношаговым итеративным методом. Это позволяет вычислять следующий шаг, зная информацию лишь об одном предыдущем шаге.

Приведем формулировку метода Рунге-Кутты 4-го порядка для систем ОДУ [1]:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \alpha, \\
k_1 &= hf(t_i, \omega_i), \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{k_1}{2}\right), \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \omega_i + \frac{k_2}{2}\right), \\
k_4 &= hf(t_i + h, \omega_i + k_3), \\
\omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

где ω - вектор приближенных решений ($\omega_i \approx y(t_i)$), α - начальные условия, k_1, k_2, k_3, k_4 - коэффициенты, h - шаг во времени, t - время.

Отметим, что использование метода Рунге-Кутты 4-го порядка обусловлено тем, что увеличение порядка формулы приводит к увеличению количества арифметических операций. В частности, формула метода Рунге-Кутты 3-го и 4-го порядка требуют 3 и 4 вычислений соответственно, в то время как формула 5-го порядка будет требовать уже 6 вычислений. Тренд на непропорциональное увеличение числа вычислений сохраняется и для формул большего порядка. Таким образом, оптимальным выбором среди прочих методов Рунге-Кутты является метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Программная реализация метода Рунге-Кутты 4-го порядка представлена на [листинге 2](#).

Листинг 2. Функция для получения дискретной траектории системы ОДУ с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка

```
def runge_kutta(x_0: np.ndarray, t_n: float,
               f: Callable, h: float) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    t_values = np.arange(0, t_n + h, h)
    y_values = np.zeros((len(t_values), len(x_0)))

    y_values[0] = x_0
    for i in range(1, len(t_values)):
        t = t_values[i - 1]
        y = y_values[i - 1]

        k1 = h * f(t, y)
        k2 = h * f(t + 0.5*h, y + 0.5*k1)
        k3 = h * f(t + 0.5*h, y + 0.5*k2)
        k4 = h * f(t + h, y + k3)

        y_values[i] = y + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6

    return t_values, y_values
```

Метод Адамса-Моултона

В отличие от метода Рунге-Кутты, метод Адамса-Моултона является многошаговым. Эта особенность позволяет увеличить порядок точности за счет использования уже посчитанных значений функции на предыдущих шагах. Помимо этого, метод Адамса-Моултона является неявным, что требует вычисления текущего значения

функции с его же участием, повышая тем самым устойчивость метода. Однако это также накладывает необходимость решать нелинейное уравнение на каждом этапе вычислений.

Приведем формулировку неявного $(p-1)$ -шагового метода Адамса-Моултона [1]:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha_0, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \omega_{p-2} = \alpha_{p-2}, \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + h \sum_{j=1}^p a_j f(t_{i-j+2}, \omega_{i-j+2}), \quad i = p-2, p-1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты a_j имеют следующий вид:

$$a_j = \int_0^1 \prod_{k \neq j} \frac{s+k-2}{k-j} ds, \quad j = 1, \dots, p, \quad (5)$$

В рамках лабораторной работы рассматривается трехшаговый метод Адамса-Моултона ($p=4$). Найдем коэффициенты a_j при помощи формулы (5):

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^1 \left(\frac{s+2-2}{2-1} \cdot \frac{s+3-2}{3-1} \cdot \frac{s+4-2}{4-1} \right) ds = \frac{1}{6} \left[s^4 + \frac{3}{2}s^3 + \frac{2^2}{2}s^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) = \frac{3}{8}; \\ a_2 &= \int_0^1 \left(\frac{s+1-2}{1-2} \cdot \frac{s+3-2}{3-2} \cdot \frac{s+4-2}{4-2} \right) ds = -\frac{1}{2} \left[\frac{s^4}{4} + \frac{2^3}{3}s^3 - \frac{s^2}{2} - 2s \right]_0^1 = \frac{19}{24}; \\ a_3 &= \int_0^1 \left(\frac{s+1-2}{1-3} \cdot \frac{s+2-2}{2-3} \cdot \frac{s+4-2}{4-3} \right) ds = \frac{1}{2} \left[\frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3} - \frac{2^2 s^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{5}{24}; \\ a_4 &= \int_0^1 \left(\frac{s+1-2}{1-4} \cdot \frac{s+2-2}{2-4} \cdot \frac{s+3-2}{3-4} \right) ds = -\frac{1}{6} \left[\frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставим полученные значения коэффициентов (6) в формулу (4) и получим неявную формулу для трехшагового метода Адамса-Моултона:

$$\omega_{i+1} = \omega_i + h \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + \frac{19}{24} \cdot f(t_i, \omega_i) - \frac{5}{24} \cdot f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + \frac{1}{24} \cdot f(t_{i-2}, \omega_{i-2}) \right) \quad (7)$$

Отметим, что полученное выражение (7) содержит ω_{i+1} в левой и правой частях, что подтверждает слова о том, что метод является неявным и требует решение нелинейного уравнения на каждом этапе вычислений. Для решения нелинейного уравнения в программной реализации воспользуемся функцией `scipy.optimize.root`. Программная реализация данного метода представлена на [листинге 3](#).

Листинг 3. Функция для получения дискретной траектории системы ОДУ с помощью метода Адамса-Моултона

```
def adams_moulton(x_0: np.ndarray, t_n: float,
                  f: Callable, h: float) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    t_values = np.arange(0, t_n + h, h)
    y_values = np.zeros((len(t_values), len(x_0)))

    _, y_rk_values = runge_kutta(x_0, 2*h, f, h)
    for j in range(3):
        y_values[j] = y_rk_values[j]

    for i in range(3, len(t_values)):
        t = t_values[i - 1]
        y = y_values[i - 1]
        y_prev = y_values[i - 2]
        y_prev2 = y_values[i - 3]

        def func(y_next):
            return y_next - (y + h/24 * (9*f(t + h, y_next) +
                                         19*f(t, y) - 5*f(t - h, y_prev) +
                                         f(t - 2*h, y_prev2)))

        sol = root(func, y)
        y_values[i] = sol.x

    return t_values, y_values
```

Метод Милна-Симпсона

Методы Адамса - не единственные многошаговые методы, построенные на основе интегрирования ОДУ и дальнейшей полиномиальной интерполяции. Другой класс многошаговых методов можно построить, если проинтегрировать ОДУ $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ на интервале $[t_j; t_{i+1}]$ для $j < i$ вместо $[t_i; t_{i+1}]$, как в методах Адамса:

$$\int_{t_j}^{t_{i+1}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \Rightarrow y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_j}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt$$

Так, например, для интервала $[t_{i-3}; t_{i+1}]$ и квадратичного интерполянта для $f(t, y(t))$ мы получаем явный метод, называемый методом Милна [1]:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha_0, & \omega_1 &= \alpha_1, & \omega_2 &= \alpha_2, & \omega_3 &= \alpha_3, \\ \omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{4h}{3} [2f(t_i, \omega_i) - f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, \omega_{i-2})], & i &= 3, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (8)$$

Подобным же образом для интервала $[t_{i-1}; t_{i+1}]$ и квадратичного интерполянта для $f(t, y(t))$ мы получаем неявный метод, называемый методом Симпсона [1]:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \alpha_0, & \omega_1 &= \alpha_1, \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \frac{h}{3} [f(t_{i+1}, \omega_{i+1}) + 4f(t_i, \omega_i) + f(t_{i-1}, \omega_{i-1})], & i &= 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотренные методы (8, 9) часто используются в комбинации по схеме предиктор-корректор. Приведем формулировку метода Милна-Симпсона (схема предиктор-корректор) [1]:

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \alpha_0, \quad \omega_1 = \alpha_1, \quad \omega_2 = \alpha_2, \quad \omega_3 = \alpha_3, \\ \tilde{\omega}_{i+1} &= \omega_i + \frac{4h}{3} [2f(t_i, \omega_i) - f(t_{i-1}, \omega_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, \omega_{i-2})], \\ \omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{h}{3} [f(t_{i+1}, \tilde{\omega}_{i+1}) + 4f(t_i, \omega_i) + f(t_{i-1}, \omega_{i-1})], \quad i = 3, \dots, m-1.\end{aligned}$$

На первой стадии с помощью явного метода Милна находится приближение $\tilde{\omega}_{i+1} \approx \omega_{i+1}$, а на второй стадии с помощью неявного метода Симпсона находится само значение ω_{i+1} . Программная реализация метода Милна-Симпсона по схеме предиктор-корректор приведена на [листинге 4](#).

Листинг 4. Функция для получения дискретной траектории системы ОДУ с помощью метода Милна-Симпсона

```
def milne_simpson(x_0: np.ndarray, t_n: float,
                  f: Callable, h: float) -> Tuple[np.ndarray, np.ndarray]:
    t_values = np.arange(0, t_n + h, h)
    y_values = np.zeros((len(t_values), len(x_0)))

    _, y_rk_values = runge_kutta(x_0, 3*h, f, h)
    for j in range(4):
        y_values[j] = y_rk_values[j]

    for i in range(4, len(t_values)):
        t = t_values[i - 1]
        y = y_values[i - 1]
        y_prev = y_values[i - 2]
        y_prev2 = y_values[i - 3]
        y_prev3 = y_values[i - 4]

        y_pred = y_prev3 + 4*h/3 * \
            (2*f(t, y) - f(t - h, y_prev) +
             2*f(t - 2*h, y_prev2))

        y_next = y_prev + h/3 * \
            (f(t + h, y_pred) + 4*f(t, y) +
             f(t - h, y_prev))

        y_values[i] = y_next

    return t_values, y_values
```

[giti] * (None) @ (None) * (None), (None) [(None)]

1.3 Численное моделирование траекторий системы при различных начальных условиях с помощью реализованных методов

Для моделирования траекторий системы ОДУ (3) воспользуемся ранее реализованными функциями ([листинг 2](#), [листинг 3](#), [листинг 4](#)), которые соответствуют методам Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона.

В качестве шага выберем значение $h = 0.1$, а временной интервал моделирования - $[0, 100]$. Для исследования влияния начальных условий сгенерируем 15 случайных значений производной $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0}$ из интервала $[1.85, 2.1]$ с помощью функции `numpy.random.uniform`. Начальное значение $\theta(0)$ зададим нулевым.

На рисунках 1, 2 и 3 представлены траектории системы, полученные методами Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона соответственно.

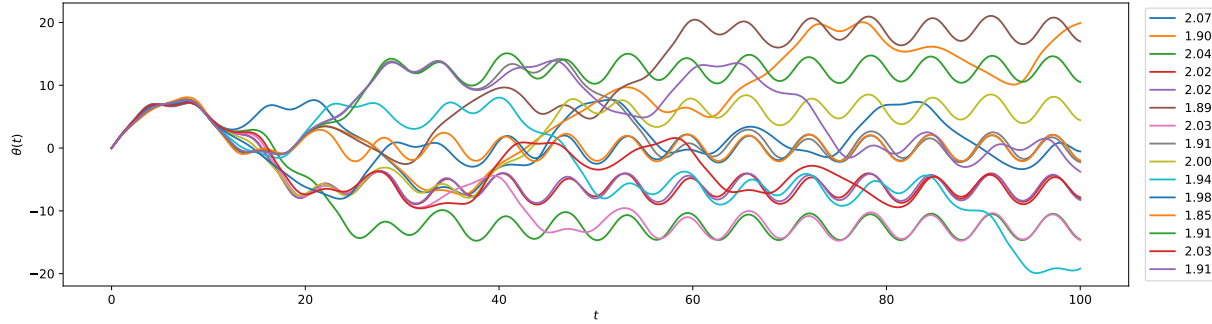


Рис. 1. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Рунге-Кутты

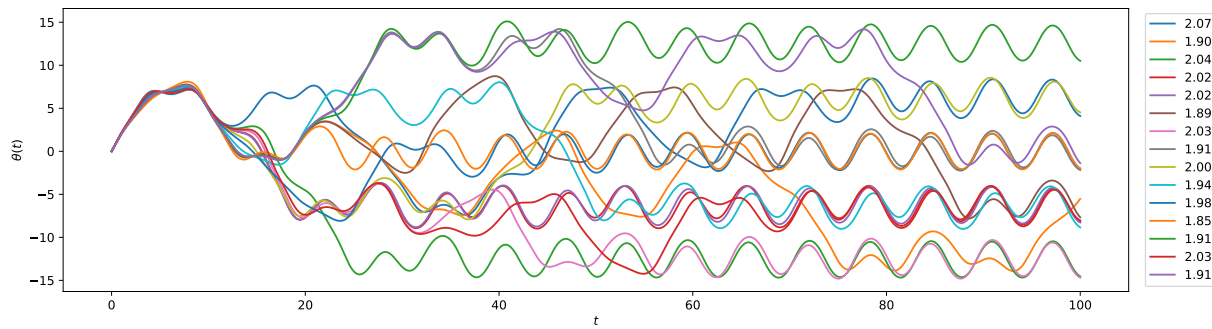


Рис. 2. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Адамса-Моултона

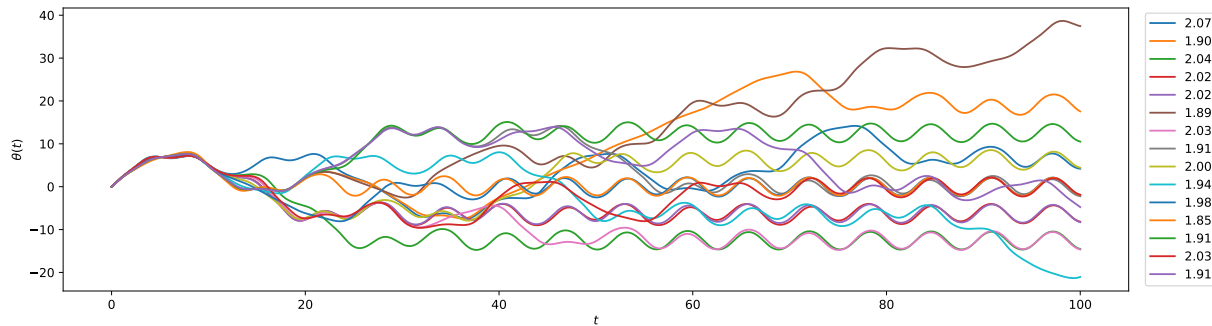


Рис. 3. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Милна-Симпсона

Отметим, что для некоторых начальных значений траектории, полученные разными методами, выглядят схожими при $t \approx 50$, но затем при $t > 50$ начинают расходиться. В итоге решения, найденные методами Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона, сходятся к разным асимптотическим значениям.

Однако для других начальных условий подобной картины не наблюдается. Таким образом, сходство траекторий на начальном этапе (при $t \approx 50$) и их последующее расхождение проявляется лишь для отдельных начальных значений производной.

1.4 Сравнительный анализ использованных численных методов

Сходства рассмотренных численных методов заключаются в следующем:

1. Все методы имеют одинаковый порядок аппроксимации, равный 4. Это означает, что погрешность методов за один шаг пропорциональна $O(h^4)$, где h - шаг интегрирования по времени.
2. Реализованные алгоритмы предназначены для численного решения задачи Коши применительно к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Основные отличия методов заключаются в следующем:

1. Метод Рунге-Кутты относится к классу одношаговых методов, тогда как методы Адамса-Моултона и Милна-Симпсона являются многошаговыми схемами, использующими решения из предыдущих шагов.
2. Алгоритм Рунге-Кутты является явной разностной схемой, не содержащей решение текущего шага в вычислении правой части. Метод же Адамса-Моултона относится к неявным схемам, где решение текущего шага участвует в вычислениях. Метод Милна-Симпсона комбинирует явный метод Милна и неявную схему Симпсона.
3. Для запуска метода Рунге-Кутты требуется задать только начальные условия в текущей точке. Метод Адамса-Моултона необходимо инициализировать тремя начальными значениями решения, а для старта метода Милна-Симпсона используют четыре предварительно вычисленные точки решения.

1.5 Исследование устойчивости численных методов

Для исследования устойчивости численных методов использовался подход, основанный на анализе изменения решений при вариации шага интегрирования h . Схема считается устойчивой, если небольшое изменение h не приводит к значительным отклонениям в результатах при фиксированных начальных условиях.

В качестве тестовой задачи рассматривалась система дифференциальных уравнений с параметрами: $\theta(0) = 0$, $\frac{d\theta}{dt}|_{t=0} = 1.9$. Моделирование проводилось на интервале $t \in [0, 200]$.

Начальное значение шага выбрано равным $h = 0.1$, что соответствует устойчивому поведению всех тестируемых методов. Далее шаг увеличивался и анализировались получаемые траектории.

Следует отметить, что для некоторых схем при заданных начальных данных рост h не приводил к потере устойчивости в исследуемом диапазоне, поэтому некоторые графики целенаправленно опускались.

Метод Рунге-Кутты

Для метода Рунге-Кутты использовался шаг $h \in [0.1; 3]$ с $\Delta h = 0.1$, поскольку при меньшем h метод оказался устойчивым и отображать графики начиная с меньшего h не имело смысла.

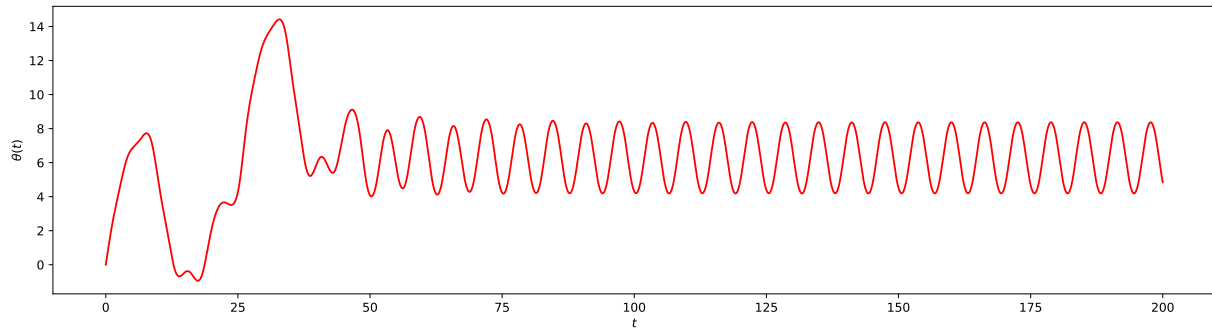


Рис. 4. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка при $h = 0.1$

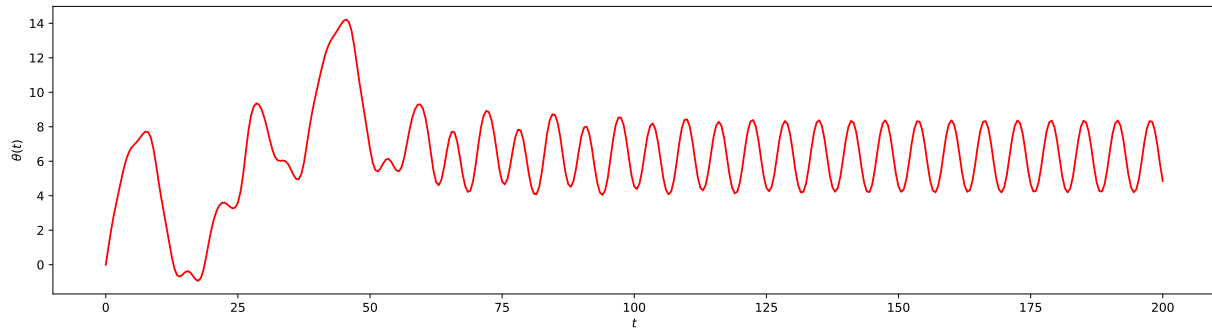


Рис. 5. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка при $h = 0.5$

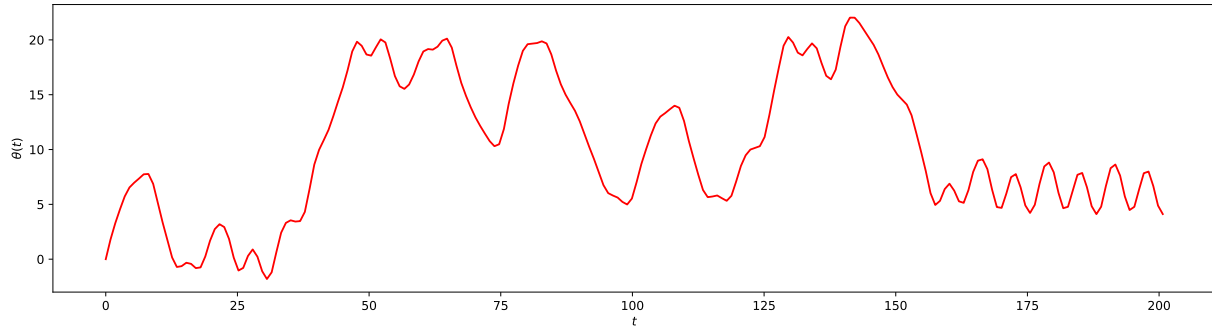


Рис. 6. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка при $h = 0.9$

Исходя из результатов, представленных на рисунках 4, 5 и 6 можно сделать вывод, что при шаге $h = 0.9$ метод Рунге-Кутты перестает быть устойчивым.

Метод Адамса-Моултона

В методе Адамса-Моултона был выбран шаг h , находящийся в диапазоне $[0.1; 3]$ с $\Delta h = 0.1$. Это обусловлено тем, что при использовании меньших значений h , метод продемонстрировал устойчивость.

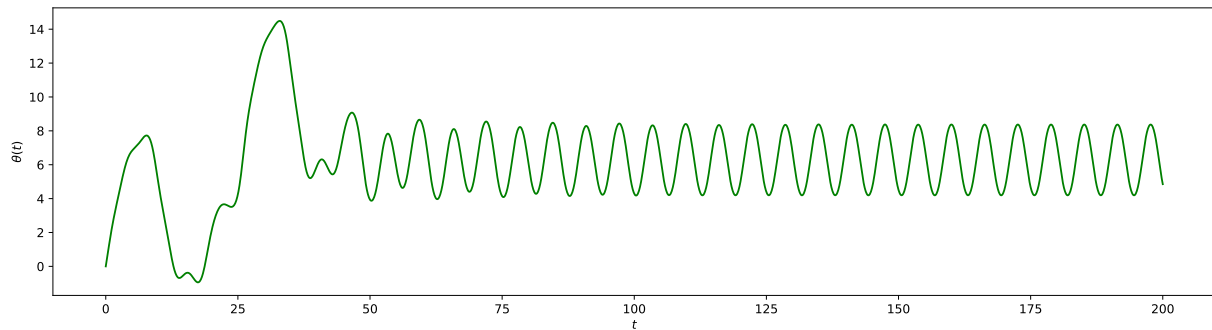


Рис. 7. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Адамса-Моултона при $h = 0.1$

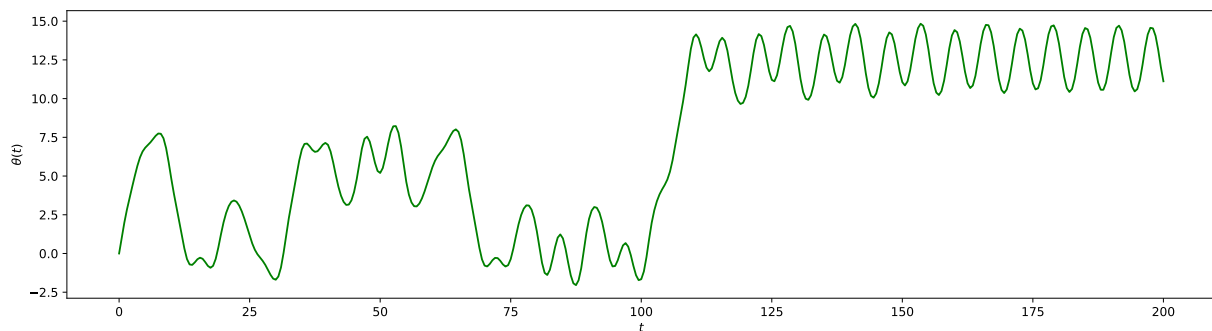


Рис. 8. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Адамса-Моултона при $h = 0.5$

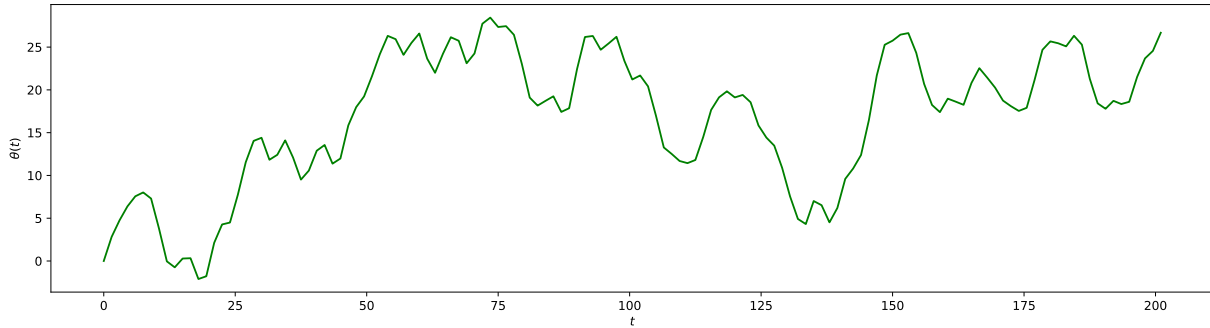


Рис. 9. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Адамса-Моултона при $h = 1.5$

Исходя из результатов, представленных на рисунках 7, 8 и 9 можно сделать вывод, что при шаге $h = 1.5$ трехшаговый метод Адамса-Моултона перестает быть устойчивым.

Метод Милна-Симпсона

Для метода Милна-Симпсона использовался шаг $h \in [0.1; 2.45]$ с $\Delta h = 0.005$, поскольку при меньшем h метод оказался устойчивым.

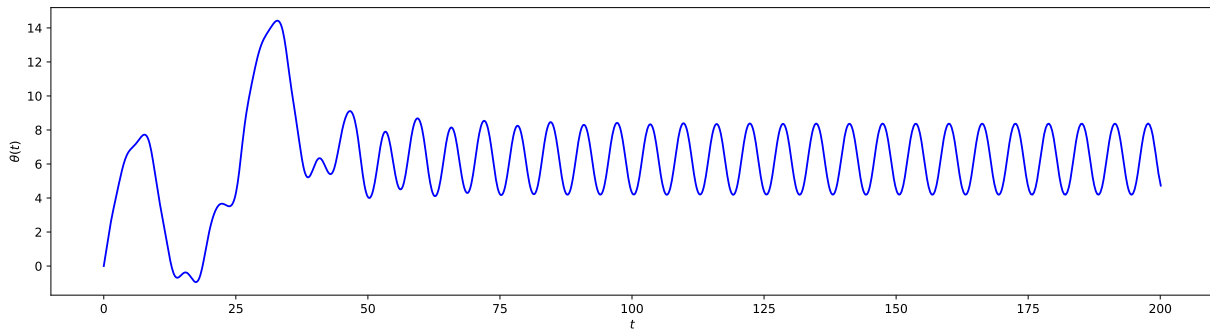


Рис. 10. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Милна-Симпсона при $h = 0.150$

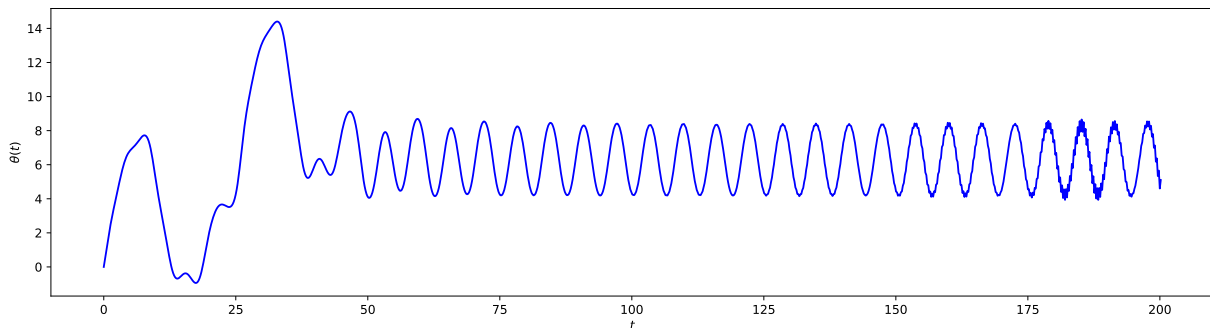


Рис. 11. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Милна-Симпсона при $h = 0.185$

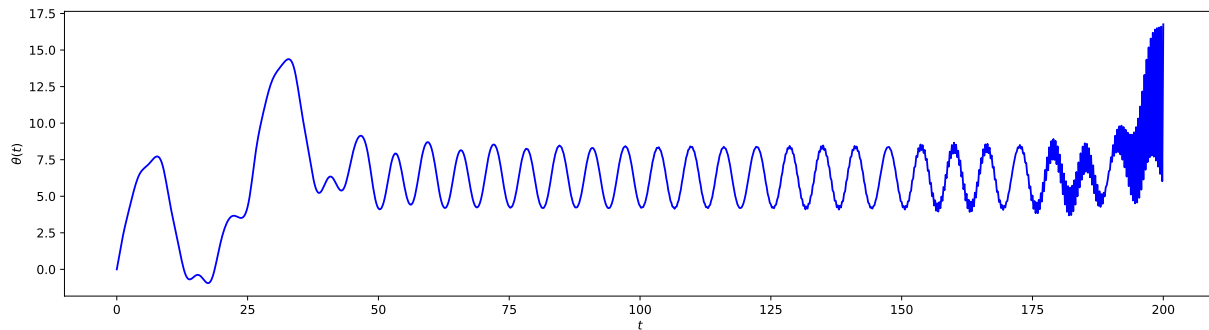


Рис. 12. График зависимости угла θ от времени $t_n \in [0; 100]$, полученные при помощи метода Милна-Симпсона при $h = 0.200$

Исходя из результатов, представленных на рисунка 10, 11 и 12, можно сделать вывод, что при шаге $h = 0.2$ метод Милна-Симпсона перестает быть устойчивым, а "шумы" появляются уже при шаге $h = 0.185$. Значит, если оценивать по устойчивости, то трехшаговый неявный метод Адамса-Моултона оказался наиболее устойчивым, а метод Милна-Симпсона продемонстрировал самую низкую устойчивость среди рассмотренных. Стоит отметить, что данные результаты получены эмпирическим путем, то есть при конкретном значении начального условия x_0 и для конкретной рассматриваемой системы ОДУ 1-го порядка (1).

2 Фазовые траектории и анализ асимптотических состояний динамической системы

2.1 Визуализация фазовых траекторий системы при различных начальных условиях для каждого из методов

Фазовой траекторий (или орбитой) называется множество состояний, идущих от начального состояния $x_0 \in X$ и определенных для всех моментов времени $t \in T$:

$$\gamma(x_0) = \{x \in X : x = \phi_t x_0 \forall t \in T\}$$

Для рассматриваемого ОДУ 2-го порядка, которое моделирует движение маятника, фазовыми переменными являются угол θ и его производная $\frac{d}{dt}\theta$, которые представляют собой положение и угловую скорость маятника соответственно. Для нахождения фазовых траекторий использовались ранее разработанные функции (листинг 2, листинг 3, листинг 4). Визуализация фазовых траекторий представлена на рисунках 13, 14 и 15.

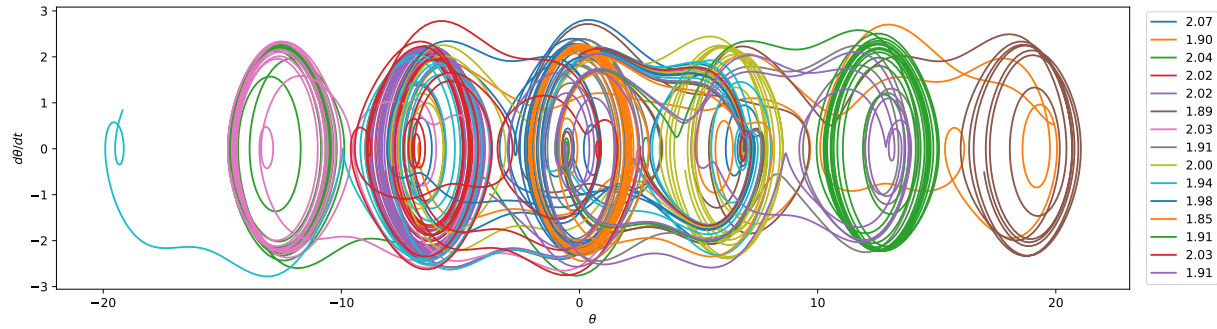


Рис. 13. График зависимости производной по времени от угла, полученный при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка

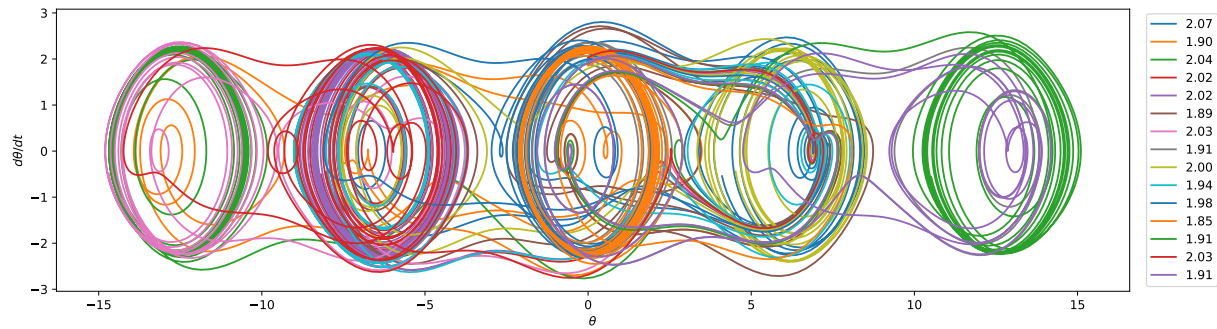


Рис. 14. График зависимости производной по времени от угла, полученный при помощи метода Адамса-Моултона

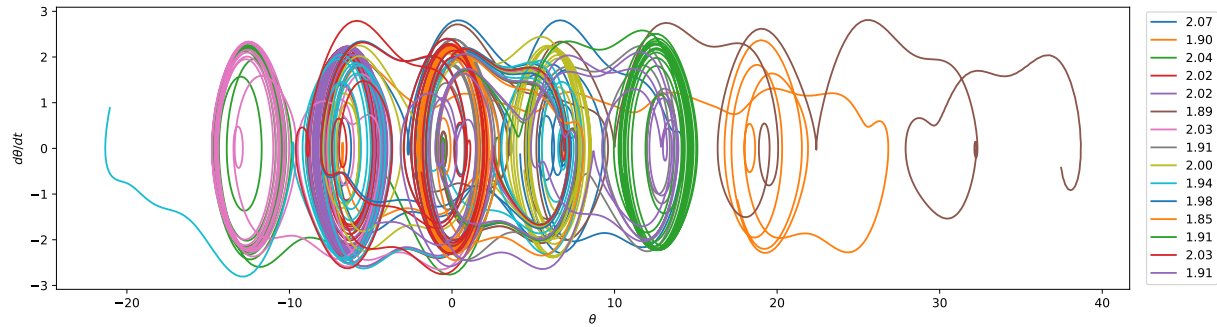


Рис. 15. График зависимости производной по времени от угла, полученный при помощи метода Милна-Симпсона

На основе полученных графиков (рис. 13, рис. 14 и рис. 15) можно сделать вывод, что при разных начальных условиях траектории могут сходиться к одним и тем же асимптотическим состояниям.

2.2 Сравнение фазовых траекторий, полученных разными методами, для фиксированного начального условия

Для сравнения фазовых траекторий, построенных разными методами, рассмотрим фиксированное начальное условие:

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d\theta(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = 2$$

Результат визуализации фазовых траекторий, полученных при помощи методов Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона представлен на рисунке 16.

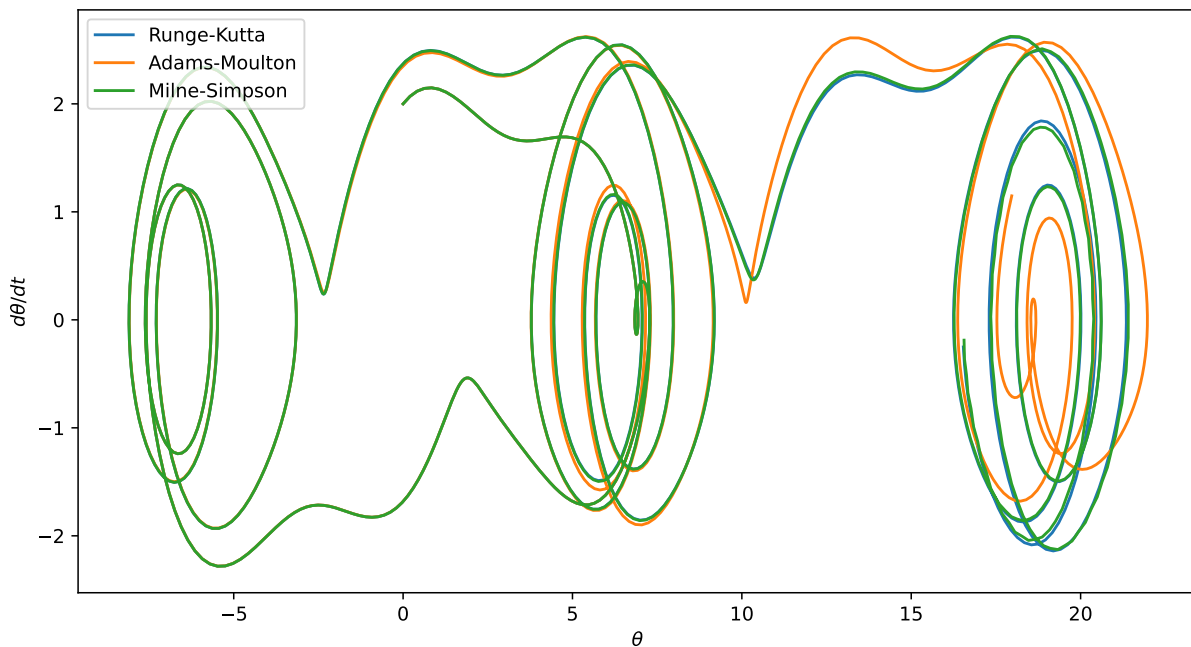


Рис. 16. График фазовых траекторий при начальном условии $\theta(0) = 0$ и $\frac{d\theta(t)}{dt}\big|_{t=0} = 2$, полученные при помощи различных методов

На основе рисунка 16 можно сделать вывод, что все три метода (Рунге-Кутты, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона) показывают схожие траектории на некоторых участках графика, что указывает на их согласованное моделирование динамической системы при данных начальных условиях. В районе где линии наиболее плотные, формируется периодическая эллиптическая орбита.

Метод Рунге-Кутты выделяется своей гладкостью и кажущейся стабильностью траектории на всем протяжении. Траектория метода Адамса-Моултона во многом похожа на Рунге-Кутты, особенно в правой части графика, хотя имеет мелкие расхождения. В свою очередь, метод Милна-Симпсона отличается больше всего, преимущественно в левой части графика. Эти наблюдения дают основания считать метод Рунге-Кутты наиболее подходящим для точного моделирования динамики маятника.

2.3 Сравнение численных методов по временным затратам

В [таблице 1](#) представлены результаты расчета времени вычислений различными методами. Для замеров времени использовалась функция `timeit.default_timer()`. Начальные условия были выбраны аналогично описанному ранее образцу.

Таблица 1. Время вычислений (в секундах) для методов Рунге-Кутты 4-го порядка, Адамса-Моултона и Милна-Симпсона

h	Рунге-Кутты	Адамса-Моултона	Милна-Симпсона
1	0.17	1.42	0.17
0.5	0.35	2.32	0.30
0.1	1.47	10.57	1.61
0.05	2.85	19.33	3.57
0.01	13.75	93.48	15.41
0.005	28.77	180.51	30.87
0.001	144.01	860.92	156.67

Исходя из результатов, представленных в [таблице 1](#), можно сделать вывод, что метод Адамса-Моултона является наиболее затратным по времени вычислений, а метод Рунге-Кутты — наименее. Время выполнения метода Адамса-Моултона в несколько раз больше, что обусловлено необходимостью решения нелинейного уравнения на каждом шаге. Метод Милна-Симпсона демонстрирует относительно меньшую эффективность по сравнению с методом Рунге-Кутты, что связано с его двухшаговым процессом вычисления, включающим расчёт предиктора и последующий корректор.

2.4 Исследование асимптотического поведения решений в зависимости от начальных условий и его физическая интерпретация

На представленных графиках зависимости угла отклонения маятника θ от времени t (рис. [1](#), [2](#), [3](#)) с некоторого момента наблюдается сходство с графиками периодических функций. Появление таких асимптотических режимов обусловлено особенностями механизма возникновения вынужденных колебаний.

Внешнее воздействие на колебательную систему вызывает переходный процесс, при котором система одновременно совершает два вида колебаний: затухающие свободные и незатухающие периодические колебания с частотой вынуждающей силы. Затем система переходит к режиму установившихся вынужденных колебаний.

Установившиеся колебания происходят в окрестности значений $\theta = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{N}$. Подобные предельные циклы часто называют аттракторами. Аттрактор — это минимально возможное инвариантное множество точек, к которому стремятся траектории из некоторой окрестности при $t \rightarrow \infty$. Визуально аттракторы наблюдаются на фазовой плоскости.

Для маятника, совершающего колебания, аттрактором является замкнутая кривая. Таким образом, физический смысл аттрактора состоит в том, что независимо от

начальных условий, траектория стремится к циклическому аттрактору, и система выходит на определённый режим колебаний при $t \rightarrow \infty$. В конечном счёте, динамическая система приходит к предельному циклу с фиксированными амплитудой и частотой.

3 Идентификация и отображение динамических аттракторов

3.1 Области притяжения каждого из асимптотических состояний

Для каждого асимптотического состояния цвет был присвоен согласно цветовой палитре `magma`, что облегчает визуальную идентификацию различных аттракторов. Разработанный алгоритм фокусируется на анализе устойчивости аттракторов, исследуя поведение системы на длительных временных промежутках и обеспечивая сходимость траекторий из любой начальной точки к конкретному асимптотическому состоянию при $t \rightarrow \infty$. Для определения среднего угла отклонения θ анализируются данные последних 50 шагов вычисления, что позволяет точно классифицировать асимптотические состояния.

По результатам сравнительного анализа методов решения ОДУ первого порядка метод Рунге-Кутты демонстрирует наилучшие временные показатели. Сетка начальных условий была построена для диапазона $[-4\pi; 4\pi] \times [-5; 5]$ с размерностью $[300; 200]$. В качестве шага интегрирования выбрано значение $h = 0.1$, а расчеты проводились до достижения времени $t_n = 300$. Визуализация начальных условий, отображающая соответствие между цветом и асимптотическим состоянием, представлена на рисунке 17.

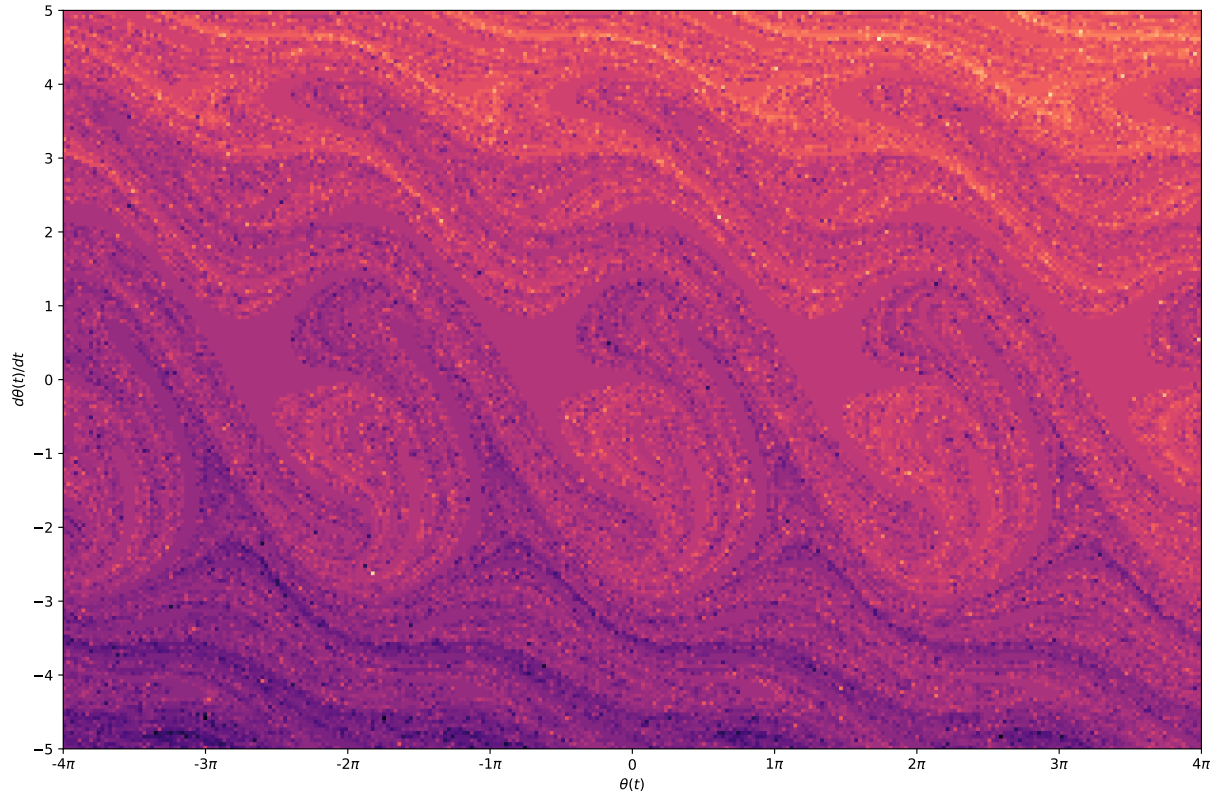


Рис. 17. График асимптотических состояний области $[-4\pi; 4\pi] \times [-5; 5]$ начальных условий сеткой $[300; 200]$

3.2 Характерные детали полученных областей притяжения

Из анализа графика, представленного на рисунке 17, можно выделить следующие ключевые аспекты областей притяжения:

1. Структура областей притяжения представляет собой фрактальную геометрию, что свидетельствует о сложной и чувствительной динамике системы. Наличие сложных, повторяющихся узоров может указывать на богатое множество динамических режимов и возможность хаотического поведения системы.

2. Зоны с повторяющимися узорами, кажущиеся "вихрями" или "спиралями" могут указывать на наличие локальных центров или фокусов аттракторов, к которым система стремится со временем.

3. Плавный переход цветов в рисунке намекает на то, что между различными аттракторами нет резких границ, а скорее существует непрерывное множество переходных состояний, что характерно для систем с непрерывным спектром динамических состояний.

4. Вероятно, система имеет множество седловых точек, что обусловлено наличием зон, где цветовые узоры сходятся в одной точке, что характерно для седловых точек в динамических системах.

5. Различия в плотности цветowych узоров могут указывать на разные скорости сходимости к аттракторам: более плотные узоры могут соответствовать областям с быстрой сходимостью, в то время как более разреженные узоры могут свидетельствовать о более медленной динамике системы.

Заключение



В ходе выполнения лабораторной работы были рассмотрены одношаговые и многошаговые методы для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Исследование включало анализ метода Рунге-Кутты, а также методов Адамса-Моултона и Милна-Симпсона. Для различных начальных условий были найдены траектории динамической системы. В процессе работы были выявлены как достоинства, так и ограничения каждого из методов. Особое внимание было уделено анализу затратности времени на вычисления и влиянию шага на стабильность и эффективность методов. В рамках продвинутой части были детально охарактеризованы асимптотические состояния, что позволило установить, что все рассматриваемые методы сходятся к одному и тому же аттрактору — эллипсу. В заключение, был раскрыт физический смысл аттракторов и определены области притяжения для каждого асимптотического состояния.

Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика». Москва, 2021. С. 140. URL: <https://archrk6.bmstu.ru/index.php/f/810046>.
2. Соколов, А.П. Инструкция по выполнению лабораторных работ (общая). Москва: Соколов, А.П., 2021. С. 9. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).
3. Першин А.Ю., Соколов А.П., Гудым А.В. Сборник постановок задач на лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»: Учебное пособие. [Электронный ресурс]. Москва, 2023. С. 47. URL: <https://archrk6.bmstu.ru>. (облачный сервис кафедры РК6).

Выходные данные

Гавриш А.А. Отчет о выполнении лабораторной работы №3 по дисциплине «Вычислительная математика». [Электронный ресурс] — Москва: 2023. — 22 с. URL: <https://sa2systems.ru:88> (система контроля версий кафедры РК6)

Постановка:  ассистент кафедры РК-6, PhD Першин А.Ю.
Решение и вёрстка:  студент группы РК6-51Б, Гавриш А.А.

2023, осенний семестр