Гавриш А.А.
РК6-51Б

Задача 3.4 по вычислительной математике

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$
$$f(x) \in F = \{\cos x; \cos^2 2x; \cos^2 x\},$$
$$(a, b) \in B = \{(-1/4, 1/2); (-1/2, 1/2); (-1/3, 1/3), (-3/4, 3/2)\}$$

с помощью составной формулы Симпсона, используя сначала 3 и затем 9 узлов. Вычислите погрешность аппроксимации для каждого из случаев. Во сколько раз увеличилась точность вычисления при увеличении числа узлов в три раза? Объясните полученное значение.

В расчетах использовать элементы с индексами $id_F[f(x)]$, $id_B[(a, b)]$.

Вычислим значения индексов необходимых элементов:

$$id_F[f(x)] = (N \bmod |S|) + 1 = (5 \bmod 3) + 1 = 3,$$
$$id_B[(a, b)] = (N \bmod |S|) + 1 = (5 \bmod 4) + 1 = 2,$$

где N - номер варианта по списку, $|S|$ - мощность множества.

Выбрав элементы двух множеств с необходимыми индексами окончательно получим, что

$$I = \int_{(-1/2)}^{(1/2)} \cos^2 x dx$$

Решение:

Составная формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1}(f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right], \qquad (1)$$

где

n - число подотрезков,

$h = \dfrac{b-a}{n}$,

$i = 1, \ldots, n+1$ - количество узлов.

Найдем аппроксимацию значения интеграла для 3 узлов (2 подотрезков):

$$h = \frac{1/2 - (-1/2)}{2} = 1/2 \tag{2}$$

i	1	2	3
x_i	$1/2$	0	$1/2$
$\cos^2 x_i$	0.770151	1	0.770151

Таблица 1. Значения узлов и функции в узлах

$$\int_{(-1/2)}^{(1/2)} \cos^2 x dx \approx \frac{1}{6}\Big[0.770151 + 4 \cdot 1 + 0.770151\Big] \approx 0.923384 \tag{3}$$

Найдем аппроксимацию значения интеграла для 9 узлов (8 подотрезков):

$$h = \frac{1/2 - (-1/2)}{8} = 1/8 \tag{4}$$

i	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	9
x_i	-1/2	-3/8	-1/4	-1/8	0	1/8	$\cdots$	1/2
$\cos^2 x_i$	0.770151	0.865844	0.938791	0.984456	1	0.984456	$\cdots$	0.770151

Таблица 2. Значения узлов и функции в узлах

$$\begin{aligned}\int_{(-1/2)}^{(1/2)} \cos^2 x dx \approx \frac{1}{24}\Big[&0.770151 + 2 \cdot (0.938791 + 1 + 0.938791) + \\ &+ 8 \cdot (0.865844 + 0.984456) + \\ &+ 0.770151\Big] \approx 0.920744\end{aligned} \tag{5}$$

Вычислим значение интеграла для вычисления погрешности аппроксимации для каждого из случаев:

$$\begin{aligned}\int_{(-1/2)}^{(1/2)} \cos^2 x dx = \int_{(-1/2)}^{(1/2)} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_{(-1/2)}^{(1/2)} 1+\cos 2x dx = \\ = \frac{1}{2}\left[\int_{(-1/2)}^{(1/2)} 1 dx + \int_{(-1/2)}^{(1/2)} \cos 2x dx\right] = \\ = \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2} \approx 0.920735\end{aligned} \tag{6}$$

Погрешность для 3 узлов: $|0.920735 - 0.923384| = 0.002649$
Погрешность для 9 узлов: $|0.920735 - 0.920744| = 0.000009$
Точность вычисления увеличилась в $\dfrac{0.002649}{0.000009} \approx 294$ раза.

Это значительное увеличение, которое можно объяснить тем, что формула Симпсона имеет четвертый порядок точности $O(h^4)$. Таким образом, при уменьшении h в k раз (в нашем случае $k = \frac{1}{2}/\frac{1}{8} = 4$), ошибка уменьшается пропорционально k^4 (в нашем случае $4^4 = 256$). Наше увеличение точности (294) близко к этой теоретической оценке (256), что подтверждает эффективность использования большего числа узлов.