Гапеев Д.А.
РК6-51Б

Задача 4.12 по вычислительной математике

Даны дискретные данные в m-мерном пространстве $\{x_i\}_{i=1}^n$, где $x_i \in \mathbb{R}^m, x_i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_m^i)^T$. Пусть в качестве аппроксимирующей функции рассматривается m-мерный эллипсоид с неизвестными полуосями $r_j, j = 1, 2, ..., m$. Требуется записать формулировку оптимизационной задачи для МНК для идентификации такого эллипсоида(аналогично задаче 4.11). Сформулировать условия, при которых данная задача: а) будет иметь единственное решение, б) не будет иметь решения.

Решение:

Допустим в $\mathbb{R}^m$ имеется некий ортонормированный базис. Если в данном базисе известны координаты n точек $x_i, i = 1, 2, .., n$. Тогда в указанном базисе используем формулу, которая описывает квадратичную форму:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ii}X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}X_iX_j + \sum_{i=1}^{m} c_iX_i - b = 0 \tag{1}$$

Представим данную формулу в матричном виде, для этого введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},\ c = (c_1, c_2, ..., c_m), \mathbb{X} = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$$

Тогда формула (1) примет следующий вид:

$$\mathbb{X}A\mathbb{X}^T + c\mathbb{X}^T - d = 0 \tag{2}$$

В зависимости от свойств матрицы А, формула (2) может описывать различные типы квадратичных поверхностей. Поэтому, так как целью является аппроксимация дискретных данных с помощью эллипсоида, в последующем решении будем считать что **матрица А положительно определена**. Для удобства формирования оптимизационной задачи введем следующие вектора:

$$h = (a_{11}, a_{22}, ..., a_{mm}, a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{m-1,m}, c_1, c_2, ..., c_m, d) \tag{3}$$

$$g(\mathbb{X}) = (X_1^2, X_2^2, ..., X_m^2, X_1X_2, X_1X_3, ..., X_{m-1}X_m, X_1, X_2, ..., X_m, -1) \tag{4}$$

Введём следующую функцию используя формулы (3) и (4) для определения эллипса: $F(h, g(\mathbb{X})) = h * [g(\mathbb{X})]^T$ Сформулируем оптимизационную задачу для МНК:
1.$E_2(h) = \sum\limits_{i=1}^{n}[F(h, g(x_i))]^2$, где $x_i \in \{x_i\}_{i=1}^{n}$.
2.Необходимо минимизировать $E_2(h)$ по h, то есть найти $\min\limits_{h}(E_2(h))$.

После того, как будет найден вектор h можно привести квадратичную форму к каноническому виду:
1) Необходимо диагонализировать матрицу A, поскольку в общем случае присутствуют смешанные члены $a_{ij}X_iX_j$(где $i \neq j$).
Для этого решим характеристическое уравнение $det(A - \lambda I) = 0$, где I - единичная матрица. Из этого уравнения находим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.
Затем для каждого значения λ решаем систему уравнений $(A - \lambda I)v = 0$ для нахождения собственных векторов $v_1, v_2, ..., v_m$
Матрица перехода P состоит из собственных векторов $v_1, v_2, ..., v_m$ в качестве столбцов:

$$P = [v_1, v_2, ..., v_m]$$

Теперь мы можем перейти к новому базису используя матрицу перехода P:

$$\mathbb{Y} = P^T\mathbb{X}$$

Тогда формула (2) в новом базисе будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbb{Y}D\mathbb{Y}^T + \tilde{c}\mathbb{Y}^T - \widetilde{d} = 0 \tag{5}$$

Предположим, что у нас остались ненулевые $\tilde{c}_i$. Тогда выделим полные квадраты:

$$\lambda_i(Y_i + \frac{\tilde{c}_i}{\lambda_i})^2$$

Выполним замену : $Z_i = Y_i + \frac{\tilde{c}_i}{\lambda_i}$. Тогда получим уравнение эллипса в каноническом виде:

$$\lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2 + ... + \lambda_m Z_m^2 = \tilde{\tilde{d}} \tag{6}$$

Тогда исходя из формулы (6) длины полуосей r_j будут равны:

$$r_1 = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{d}}}{\lambda_1}}, r_2 = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{d}}}{\lambda_2}}, .., r_j = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{d}}}{\lambda_m}}$$

Базисные вектора в исходном базисе будут совпадать с собственными векторами $v_1, v_2, .., v_m$, которые являются столбцами матрицы перехода P.

а) Данная задача будет иметь единственное решение если количество измерений n будет равно количеству неизвестных. В данном случае количество неизвестных равно $\frac{m(m+1)}{2} + m + 1$.

$$n = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1$$

б) Данная задача не будет иметь решений если количество измерений n будет меньше количества неизвестных.

$$n < \frac{m(m+1)}{2} + m + 1$$