Гапеев Д.А.
РК6-51Б

Задача 6.8 по вычислительной математике

Требуется найти с помощью метода прогонки решение следующей СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Решение:
Метод прогонки - специальный метод решения СЛАУ, имеющих трёхдиагональную матрицу. Пусть имеется следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда используя рекуррентные соотношения необходимо вычислить прогоночные коэффиценты γ_i и β_i:

$$\gamma_{i+1} = -\frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i-1}\gamma_i + a_{ii}}, \tag{3}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{b_i - a_{i,i-1}\beta_i}{a_{i,i-1}\gamma_i + a_{ii}}. \tag{4}$$

Учтем что $\gamma_1 = \beta_1 = 0$ (или, эквивалентно, $a_{10} = 0$). Используя найденные γ_i и βi(формулы 3 и 4) можем найти решение СЛАУ:

$$x_{n-1} = \gamma_n x_n + \beta_n, \tag{5}$$

$$x_n = \frac{b_n - a_{n,n-1}\beta_n}{a_{nn} + a_{n,n-1}\gamma_n}. \tag{6}$$

Вычислим коэффициенты γ_i и β_i для исходного СЛАУ(формула 1) используя рекуррентные соотношения(формулы 3 и 4):

$$\gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$
$$\gamma_{1+1} = -\frac{a_{1,1+1}}{a_{1,1-1}\gamma_1 + a_{11}} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{1+1} = \frac{b_1 - a_{1,1-1}\beta_1}{a_{1,1-1}\gamma_1 + a_{11}} = \frac{3}{2}$$
$$\gamma_{2+1} = -\frac{a_{2,2+1}}{a_{2,2-1}\gamma_2 + a_{22}} = \frac{2}{5}, \quad \beta_{2+1} = \frac{b_2 - a_{2,2-1}\beta_2}{a_{2,2-1}\gamma_2 + a_{22}} = 1$$
$$\gamma_{3+1} = -\frac{a_{3,3+1}}{a_{3,3-1}\gamma_3 + a_{33}} = \frac{5}{8}, \quad \beta_{3+1} = \frac{b_3 - a_{3,3-1}\beta_3}{a_{3,3-1}\gamma_3 + a_{33}} = \frac{5}{8}$$

Далее исходя из вычисленных прогоночных коэффициентов найдем решение СЛАУ используя формулы 5 и 6:

$$x_4 = \frac{b_4 - a_{4,4-1}\beta_4}{a_{44} + a_{4,4-1}\gamma_4} = \frac{6 - 1 \cdot \frac{5}{8}}{2 + 1 \cdot \frac{5}{8}} = \frac{43}{21}$$

$$x_3 = x_{4-1} = \gamma_4 x_4 + \beta_4 = \frac{5}{8} \cdot \frac{43}{21} + \frac{5}{8} = \frac{40}{21}$$
$$x_2 = x_{3-1} = \gamma_3 x_3 + \beta_3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{40}{21} + 1 = \frac{37}{21}$$
$$x_1 = x_{2-1} = \gamma_2 x_2 + \beta_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{37}{21} + \frac{3}{2} = \frac{50}{21}$$

Значит решение исходной СЛАУ выглядит следующим образом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{21} \\ \\ \frac{37}{21} \\ \\ \frac{40}{21} \\ \\ \frac{43}{21} \end{pmatrix}$$