Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Антоненко Григорий Андреевич
Группа:	РК6-53Б
Тип задания:	домашнее задание
Тема:	Интерполяция сплайнами. Численное дифференцирование

Студент ______________ Антоненко Г.А.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ______________ ______________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Интерполяция сплайнами. Численное дифференцирование

Задание

Требуется найти оптимальный шаг дифференцирования для функции $f(x) = sinx - e^x$, учитывая, что используется центральная формула численного дифференцирования второго порядка точности для нахождения первой производной в некоторой точке $x \in (-\infty; \pi/2]$.
Предполагается, что вычислительные погрешности ограничены машинным эпсилон $\epsilon = 10^{-16}$

1 Решение

Центральная формула численного дифференцирования:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

Числа $f(x_i+h)$ и $f(x_i-h)$ сохраняются в памяти компьютера с точностью до 16-ого знака, т.е. возникает погрешность округления. Введем обозначения $e(x_i+h)$ и $e(x_i-h)$, отображающие эту погрешность. Тогда истинные значения выглядят следующим образом:

$$f(x_i+h) = \tilde{f}(x_i+h) + e(x_i+h),$$
$$f(x_i-h) = \tilde{f}(x_i-h) + e(x_i-h)$$

Полная погрешность E определяется как

$$E = \left| f'(x_i) - \frac{\tilde{f}(x_i+h) - \tilde{f}(x_i-h)}{2h} \right| = \left| \frac{e(x_i+h) + e(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) \right|$$

Оценка верхней границы E:

$$E = \left| \frac{e(x_i+h) - e(x_i-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi) \right| \le \frac{|e(x_i+h)| - |e(x_i-h)|}{2h} + \frac{h^2}{6} \left| f^{(3)}(\xi) \right|$$

Сделаем два допущения:

1. $|e(x_i)| \le \epsilon$
2. $|f^{(3)(\xi)}| \le M$

Тогда справедлива следующая оценка E сверху:

$$E \leq \frac{\epsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M \implies h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3\epsilon}{M}} \tag{1}$$

M выбирается из условия $M = max|f'(x)|$
$f'(x) = cosx - e^x$ принимает максимальное значение, если $f''(x) = -sinx - e^x = 0$ При малых x $e^x \to 0$, так что $M = max|f'(x)| = 1$

Подставивив M в (1) получим оптимальный шаг

$$h_{opt} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-16}} = 6.69433 \cdot 10^{-6}$$

2 Заключение

1. Исходя из оценки погрешности, можно сделать вывод, что есть предел уменьшения шага дифференцирования, перейдя который точность дифференцирования начинает снижаться.

2. Оптимальный шаг диффренцирования $h_{opt} = 6.69433 \cdot 10^{-6}$