Algorithmique Avancée

http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/algav2019

Binh-Minh Bui-Xuan

SORBONNE UNIVERSITÉ
CRÉATEURS DE FUTURS DEPUIS 1257

Paris, Octobre 2019

Résumé

Géométrie algorithmique (3 séances) :

- collision d'objets, conteneur (cercle, rectangle, polygone)

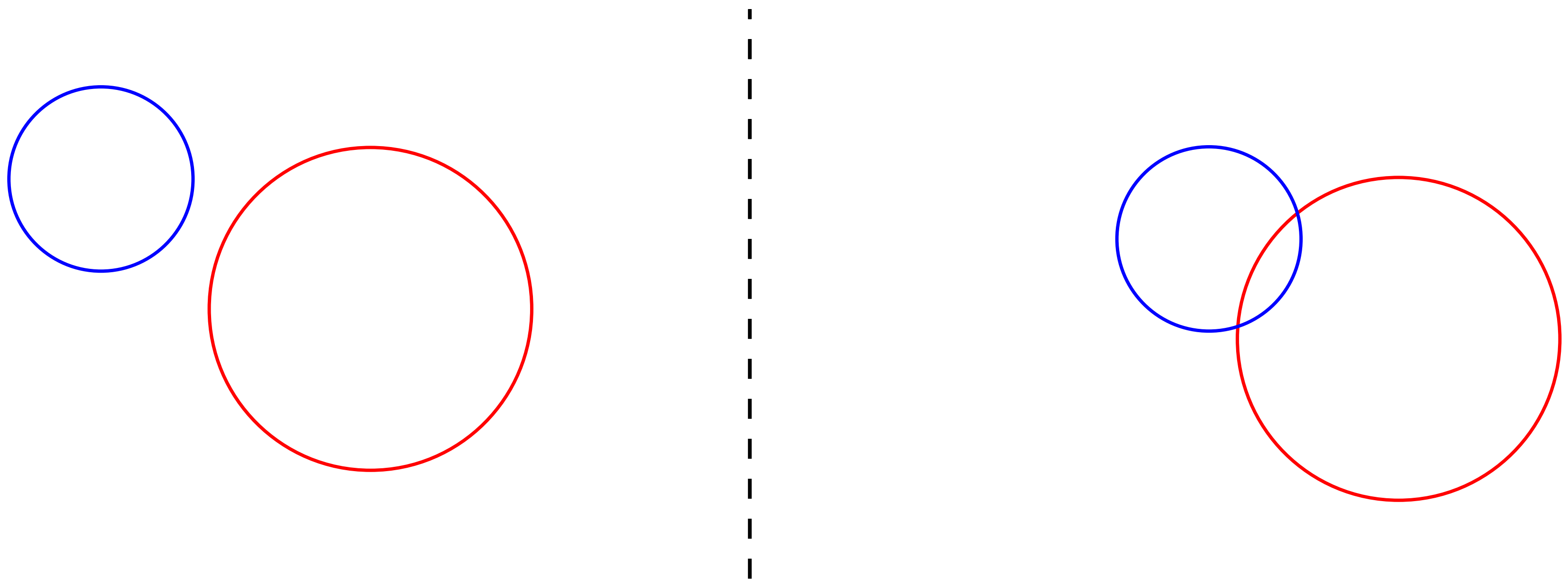
Suite :

- CPA : Conception et Pratique de l'Algorithmique
- DAAR : Développement des Algorithmes d'Appli. Réticulaire
- AAGA : Analyse des Algorithmes et Génération Aléatoire
- Concours en ligne #HashCode, Code Jam, TopCoder, ...

Géométrie algorithmique

Collision d'objets géométriques

Question : touché ?



Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

Exercice : collision entre cercles

EXERCICE : Soient deux cercles `c1` et `c2` de rayons `c1.radius` et `c2.radius`, dont les coordonnées des centres sont `(c1.x,c1.y)` et `(c2.x,c2.y)`. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles s'intersectent.

SUPPORT :
`http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/files/RBB_collision_canevas.html`

Exercice : collision entre cercles

EXERCICE : Soient deux cercles `c1` et `c2` de rayons `c1.radius` et `c2.radius`, dont les coordonnées des centres sont `(c1.x,c1.y)` et `(c2.x,c2.y)`. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles s'intersectent.

SUPPORT :
`http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/files/RBB_collision_canevas.html`

QUESTION : erreurs d'arrondi ?

Problème du cercle minimum

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : cercle couvrant tous les points de la liste, de rayon minimum

Solution naïve

LEMME 1 : *si un cercle de diamètre égale à la distance de deux points de la liste couvre tout autre point de la liste, alors ce cercle est un cercle couvrant de rayon minimum.*

LEMME 2 : *en 2D, il existe un et un seul cercle passant par 3 points non-colinéaires.*

Solution naïve

LEMME 1 : *si un cercle de diamètre égale à la distance de deux points de la liste couvre tout autre point de la liste, alors ce cercle est un cercle couvrant de rayon minimum.*

LEMME 2 : *en 2D, il existe un et un seul cercle passant par 3 points non-colinéaires.*

THÉORÈME : *le problème du cercle minimum peut être résolu en temps* $O(n^4)$.

QUESTION : algorithme prouvant ce théorème ?

Exercice : estimation du temps

QUESTION : un ordinateur de l'ordre du Giga-Hertz exécutant un algorithme en $O(n^4)$, avec $n = 10000$, quel est le temps d'exécution attendu (en ordre de grandeur) ?

- algorithme en $O(n^3)$?
- algorithme en $O(n^2)$?
- algorithme en $O(n)$?
- algorithme en $O(\log n)$?

Trade-off algorithmique

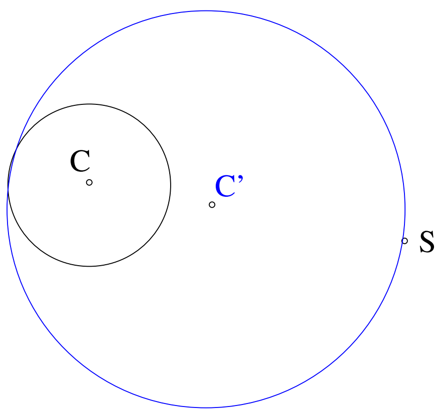
Qualité du résultat vs. temps d'exécution :

Qualité gagne	Temps gagne	Trade-off
imagerie médicale	audio-visuel	concours de prog.
systèmes critiques	appli. en temps réel	critère d'optimisation

Techniques d'approximation

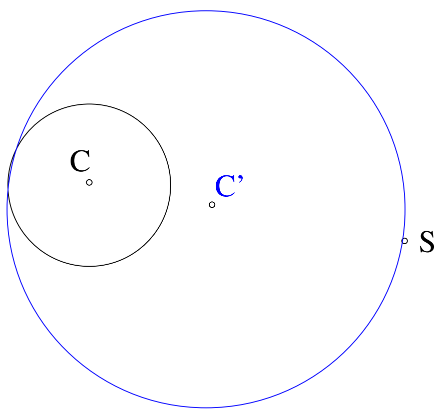
Algorithme incrémental

IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.



Algorithme incrémental

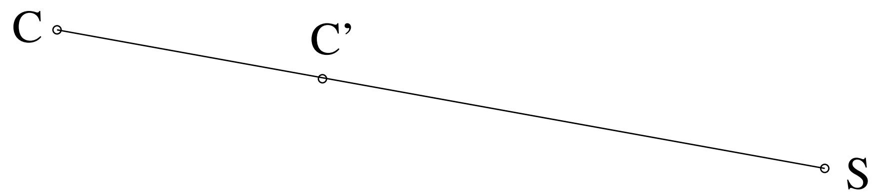
IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.



QUESTION : coordonnées de C' sachant C, S, ancien rayon r ?

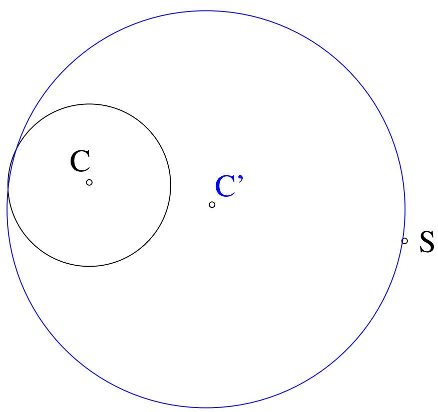
Coordonnées barycentriques

FORMULE : $C' = \alpha \cdot C + \beta \cdot S$, avec $\alpha = \frac{|C'S|}{|CS|}$ et $\beta = \frac{|C'C|}{|CS|}$.



Algorithme incrémental

IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.



QUESTION : coordonnées de C' sachant C, S, ancien rayon r ?

Peut on faire mieux ?

Vue générale de l'algorithmique

BRUTE-FORCE : parcours exhaustif de l'espace de recherche

EXEMPLE : pour toute coordonnée possible du centre du cercle, pour toute valeur possible du rayon du cercle, vérifier si tous les points sont couverts.

Vue générale de l'algorithmique

RECHERCHE ORDONNÉE : réorganisation de l'espace de recherche

EXEMPLE : pour toute coordonnée possible du centre ***définie à partir de deux ou de trois points de la liste, soit $\times\times\times$ la seule valeur intéressante du rayon***, vérifier si tous les points sont couverts.

EXEMPLE : algorithme naïf pour cercle couvrant.

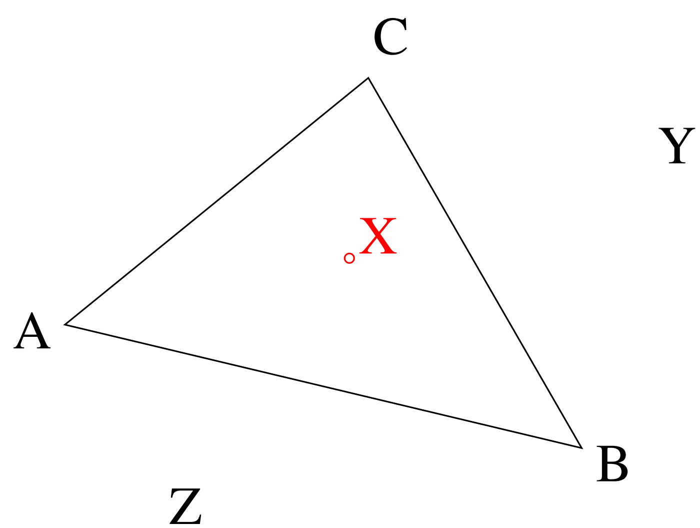
Vue générale de l'algorithmique

RECHERCHE PARCIMONIEUSE : réorganisation de l'espace de recherche + localisation

IDÉE : filtrer l'espace de recherche par un précalcul.

Borner la recherche par un précalcul

IDÉE : filtrer le "INPUT" pour écarter les zones de recherche inutiles



QUESTION : X est inutile, comment le détecter, numériquement ?

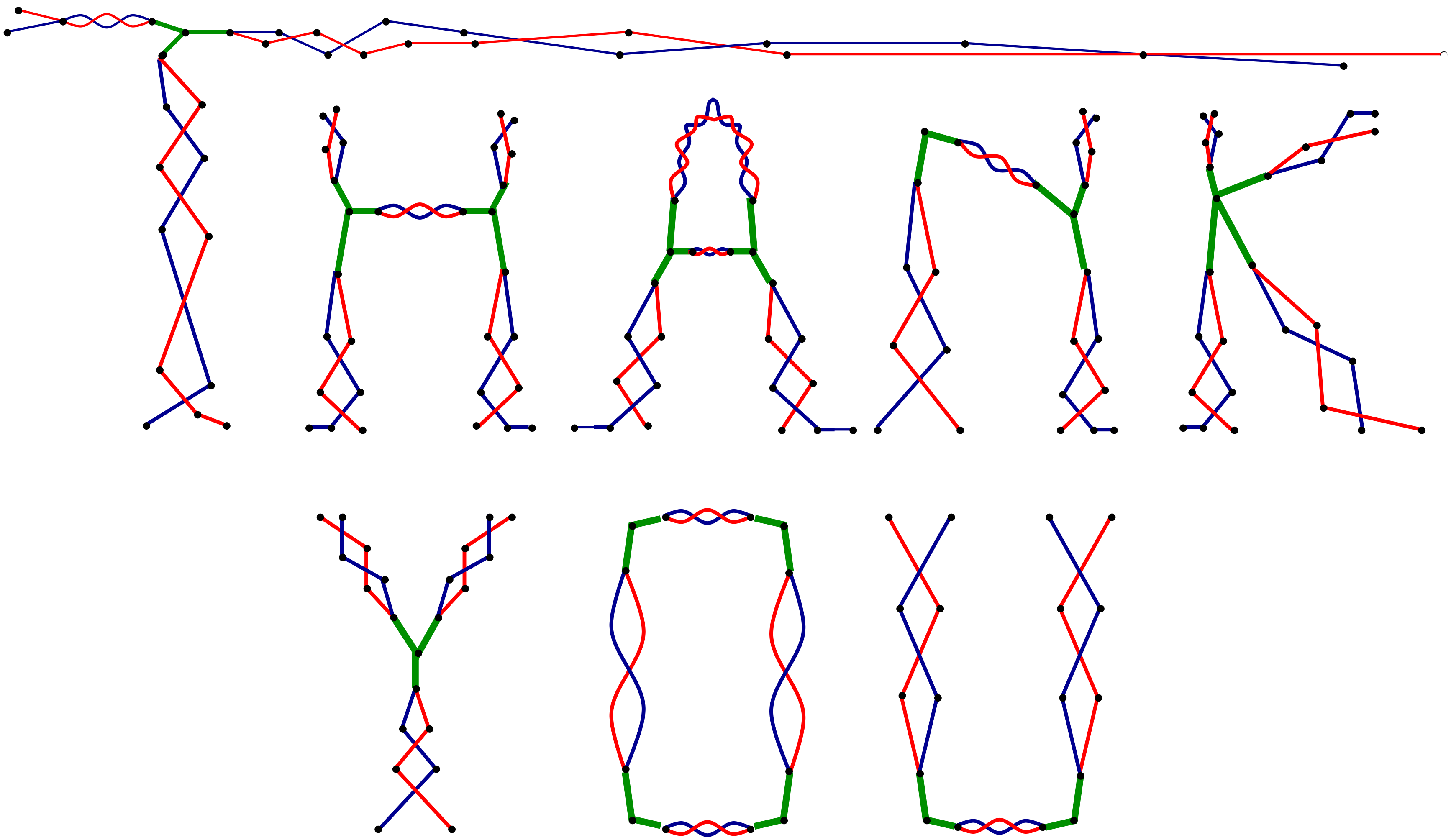
Conclusion, question

CONCLUSION :

- algorithme naïf
- technique incrémental
- technique de filtrage (précalcul)

QUESTION :

- meilleur précalcul ? (voir TME pour une réponse)


THANK
YOU