Laboratorio de Física Contemporánea I: Constante de Stefan-Boltzmann

Aldo Javier Gamboa Castillo*, Víctor Knapp Pérez, Jesús Alberto Aguirre Caro

Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, Circuito Exterior S/N, Coyoacán, Ciudad Universitaria, 04510, Ciudad de México

18 de marzo de 2019

Resumen

En este trabajo se obtuvo la constante de Stefan-Boltzmann. El arreglo experimental consistió en hacer pasar una corriente en un alambre de cobre hollinado de dimensiones conocidas dentro de un tubo al vacío. Los valores de voltaje y corriente en los que el alambre se rompía por fusión eran registrados y utilizando consideraciones de equilibrio termodinámico se calculó la constante de Stefan-Boltzmann. Se obtuvo el valor de $(6 \pm 1) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ con una diferencia porcentual de 6 % con el valor de referencia. Se repitió el experimento para otras condiciones experimentales obteniendo: $(10 \pm 3) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ para un alambre hollinado sin tubo con un error de 76 %; $(9.3 \pm 0.7) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ para un alambre hollinado con el tubo sin vacío con un error de 64.0 %; y $(6.7 \pm 0.6) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ para un alambre sin hollinar con el tubo al vacío con un error de 18.2 %.

1. Introducción

John Tyndall (1820-1893) realizó las primeras mediciones de transferencia de energía térmica por radiación entre un cuerpo y sus alrededores. Con base en estos experimentos, Josef Stefan (1835-1893) determinó en 1879 que la energía radiada era proporcional a la diferencia de las cuartas potencias de las temperaturas absolutas. Estos resultados experimentales fueron derivados a partir de consideraciones termodinámicas por Ludwig Boltzmann (1844-1906) en sus estudios del cuerpo negro. [1]

Un *cuerpo negro* es un objeto físico ideal que absorbe toda la radiación electromagnética incidente. La radiación de cuerpo negro posee propiedades que tienen un carácter universal, debido a esto es un fenómeno de gran interés desde el punto de vista teórico. [2]

En la naturaleza los objetos que más se asemejan a un cuerpo negro son algunos materiales hechos de carbón, las estrellas, los planetas, la radiación cósmica de fondo y una cavidad cerrada con un pequeño hoyo [3]. Este último ejemplo facilita estudiar la radiación de un cuerpo negro. La radiación que entre en la cavidad es reflejada en las paredes interiores hasta que es absorbida antes de que pueda escapar por el orificio. En equilibrio, las paredes de la cavidad se encontrarán a una misma temperatura T, y debido a esto, la *cavidad térmica* emitirá su propia radiación a través del orificio. Ésta se asemejará a la radiación emitida por un cuerpo negro del mismo tamaño del orificio y a la misma temperatura. [2]

Utilizando la segunda ley de la termodinámica es posible mostrar que en la cavidad térmica la radiación debe ser isotrópica y homogénea, y debe ser la misma para cualquier cavidad que esté a la misma temperatura. Además, estos resultados deben ser válidos para cada componente de la radiación tomada por separado. [2]

*aldojavier@ciencias.unam.mx

G. Kirchhoff (1824-1887) encontró que la distribución espectral de la energía de radiación, u_ω, en la cavidad no depende del material del que esté hecha y es determinada únicamente por su temperatura. Un tratamiento completamente clásico de esta distribución conduce a la fórmula de Rayleigh-Jeans para la radiación de cuerpo negro y provoca la catástrofe ultravioleta, que predice densidades de energías infinitas. Este problema fue solucionado en 1900 con la hipótesis de Planck de que la energía de la radiación estaba cuantizada, dando como resultado la fórmula de Planck para u_ω: [4]

$$u_\omega(T)d\omega = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1}\frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}d\omega. \tag{1}$$

Integrando la ecuación (1) para todas las frecuencias y utilizando el resultado de que la energía S emitida por unidad de segundo por unidad de área se relaciona con la densidad de energía u a través de $S = c\,u/4$ [4], se encuentra que:

$$S = \sigma T^4, \tag{2}$$

con σ la *constante de Stefan-Boltzmann* que tiene un valor de: [5]

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.670367(13) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}.$$

Notamos que las unidades de σ son de potencia por unidad de área y temperatura a la cuarta potencia.

Un método experimental para calcular σ consiste en considerar una cavidad térmica cuya temperatura es T_c, dentro de la cual se coloca un cuerpo negro que recibe un suministro de energía eléctrica a una tasa constante VI, donde V es el potencial eléctrico e I es la corriente. De acuerdo a la ec. (2), la potencia con la cual el cuerpo negro en equilibrio a temperatura T radiará energía deberá satisfacer: [1]

$$VI = A\sigma(T^4 - T_c^4),$$

donde A es la superficie del cuerpo negro. De esta última expresión obtenemos:

$$\sigma = \frac{VI}{A(T^4 - T_c^4)}. \tag{3}$$

En este trabajo se determinará la constante de Stefan-Boltzmann. Para ello se hará circular una corriente en un alambre de cobre hollinado dentro de un tubo de plástico al vacío. Para conocer la temperatura del alambre se utilizará su punto de fusión como referencia, pues cuando el alambre se rompa, dejará de pasar corriente. Se utilizará la ec. (3) para encontrar σ.

La organización de este trabajo se presenta a continuación: en la sección 2 se menciona el arreglo experimental utilizado, así como los detalles técnicos; en la sección 3 se presentan los resultados y discusiones; y por último, en la sección 4 se desarrollan las conclusiones.

2. Desarrollo Experimental

2.1. Arreglo experimental

Con un mechero de petróleo mezclado con agua y una lija se retiró el esmalte de un alambre de cobre delgado. El alambre era hollinado con esta misma lámpara y posteriormente se medían sus dimensiones con un flexómetro y un micrómetro. Las medidas con el micrómetro se realizaron en cinco distintos puntos del alambre para conocer su diámetro promedio.

El dispositivo experimental se muestra en la Figura 1. Consistió de un tubo cilíndrico de plástico con tapas de metal, sujetado por un soporte universal. Un extremo del alambre de cobre se sujetaba a un tornillo en la tapa superior y una plomada colgaba del extremo inferior del alambre para que hiciera contacto con la otra tapa de metal. Para verificar la continuidad del circuito se utilizaba un multímetro.

Al tubo se conectaba una bomba de vacío para disminuir la interacción del alambre con el aire; la bomba se dejaba encendida durante todo el proceso. Posteriormente, con una fuente de poder se hacía circular una corriente directa a través del alambre hasta que éste se fundiera. Este proceso era registrado por dos multímetros cuyas lecturas se grababan con la cámara de un celular para determinar los valores de corriente y voltaje en los cuales dejaba de circular la corriente, indicando el rompimiento del alambre.

Este procedimiento se repitió 20 veces en condiciones similares. Después, se hizo el experimento para distintas configuraciones: alambre hollinado al aire libre, alambre hollinado sin vacío en el tubo y alambre sin esmalte no hollinado al vacío. Cada una de estas configuraciones se repitió con dos alambres.

Figura 1: Arreglo experimental utilizado para determinar la constante de Stefan-Boltzmann. No se muestra la bomba de vacío.

2.2. Especificaciones técnicas

Las mediciones de corriente y voltaje se efectuaron con multímetros Steren MUL-600. En el rango trabajado, la incertidumbre para la corriente es de $(\pm 1.5\,\% + 5)A$ y la incertidumbre para el voltaje es de $(\pm 0.8\,\% + 3)V$ [6]. Sin embargo, debido a la rapidez con la que se cortaba la circulación, se decidió tomar solamente $\pm 1.5\,\%$ y $\pm 0.8\,\%$ como incertidumbres, respectivamente.

El multímetro usado para verificar continuidad era un Steren MUL-050. La bomba de vacío era una DuoSeal modelo 1402. La fuente de poder era una TENMA modelo 72-6910.

El flexómetro usado era Truper con una mínima escala de $0.1\,cm$ y el micrómetro era Scala con una mínima escala de $0.01\,mm$. Como las mediciones eran mecánicas, se decidió tomar la mitad de la mínima escala como incertidumbre física para el micrómetro. Sin embargo, para las mediciones del flexómetro se tomó la mínima escala como incertidumbre para tomar en cuenta los errores sistemáticos que pudieron ocasionar alteraciones en la medida de la longitud del alambre.

El análisis de los datos se realizó con el programa Microsoft Excel 2010 [8].

3. Resultados y Análisis

La longitud del alambre L necesaria para que la plomada justo hiciera contacto con la tapa inferior fue de $26.8 \pm 0.1\,cm$. Esta medida se usó como referencia para todas las mediciones que se hicieron dentro del tubo. La superficie A del alambre se calculó con la longitud y el diámetro promedio D a través de la fórmula $A = \pi DL$. La temperatura del alambre se tomó como la temperatura de fusión del cobre, que tiene un valor de $T = 1084^\circ = 1357.15\,K$ [7]. La temperatura del tubo, que fungió como cavidad térmica, se tomó como la temperatura ambiente $T_c = 293.15\,K$. Notamos que

$$\frac{1}{T^4 - T_c^4} \approx 2.954 \times 10^{-13}, \quad \frac{1}{T^4} \approx 2.947 \times 10^{-13},$$

por lo que ambas expresiones son básicamente iguales, sin embargo en este trabajo sí consideraremos la temperatura T_c a pesar de que no marque diferencia en el resultado puesto que el orden de la constante de Stefan-Boltzmann es de 10^{-8} y los aparatos utilizados no nos permiten tener incertidumbres que lleguen al orden de 10^{-13}. Para un experimento en el que se tenga mucha mayor precisión, sería completamente necesario considerar T_c.

Los datos experimentales del diámetro promedio, la corriente y voltaje en los cuales se rompía el alambre se muestran en la Tabla 1 junto a sus respectivos valores de la constante de Stefan-Boltzmann calculados con la ec. (3).

El valor calculado de la constante de Stefan-Boltzmann es:

$$\sigma = (6 \pm 1) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4},$$

que presenta una diferencia porcentual con el valor de [5] de $6\,\%$, lo que nos indica que el experimento tuvo una buena exactitud. El valor de referencia se encuentra dentro del rango de error, sin embargo el error relativo del resultado es de $17\,\%$ debido a que le hizo falta mayor precisión al experimento. [1] Notamos que únicamente retuvimos una cifra significativa en el valor reportado. Esto se debe a que la incertidumbre calculada tuvo un valor de $1 \times 10^{-8}\,[\sigma]$, por

[1] La diferencia porcentual se calcula con la fórmula $\frac{|x_{ref} - x_{exp}|}{x_{ref}} \times 100\,\%$, donde x_{ref} es un valor de referencia de la cantidad x, y x_{exp} es un valor experimental medido. El error relativo se calcula como $\frac{\delta x}{x} \times 100\,\%$, con δx la incertidumbre de x.

lo que no es posible dar más cifras al valor central. La manera en la que se calculó ésta incertidumbre fue a través de la suma estadística:

$$\Delta\sigma = \sqrt{S_\sigma^2 + \delta_\sigma^2}, \tag{4}$$

donde S_σ es la desviación estándar y δ_σ es el promedio de las incertidumbres dadas por la ec. (5) del Apéndice B, obtenidas de los datos de la Tabla 1.

En la Tabla 2 se muestran los datos de las otras configuraciones experimentales utilizadas para calcular la constante de Stefan-Boltzmann. Los resultados son los siguientes:

Alambre hollinado sin tubo (error porcentual de 76 % y error relativo de 30 %):

$$\sigma = (10 \pm 3) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}.$$

Alambre hollinado con tubo sin vacío (error porcentual de 64.0 % y error relativo de 7.5 %):

$$\sigma = (9.3 \pm 0.7) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}.$$

Alambre no hollinado con tubo en vacío (error porcentual de 18.2 % y error relativo de 9.0 %):

$$\sigma = (6.7 \pm 0.6) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}.$$

Debido a que la incertidumbre fue un orden menor en las últimas dos configuraciones, se incluyó una segunda cifra significativa en el valor central.

El mejor valor central obtenido fue cuando el alambre se encontraba hollinado y con vacío. El menor error relativo se obtuvo en las últimas dos configuraciones. Sin embargo, esto se debe a que las únicas dos medidas que se realizaron para esas dos config. resultaron en valores cercanos de σ, como puede verse en la columna de σ en la Tabla 2. Esto ocasionó que la desviación estándar fuera pequeña y por lo tanto la suma estadística (4) también.

La función del hollín es evitar que la superficie del alambre de cobre refleje la radiación incidente para que el alambre se asemeje a un cuerpo negro. El tubo de plástico funcionaba como cavidad térmica con la cual el alambre entraba en equilibrio termodinámico; el material del que está hecho el tubo no afecta los resultados, de acuerdo a lo discutido en la Introducción. El vacío en el tubo tenía como objetivo disminuir la interacción de la radiación con las moléculas del aire, de modo que el cuerpo negro interactuara directamente con la cavidad térmica a través de la radiación. Debido a las razones anteriores, se esperaba que el alambre hollinado en el tubo al vacío tuviera el mejor valor de la constante de Stefan-Boltzmann, lo cual fue confirmado experimentalmente.

El segundo mejor valor central de la constante de Stefan-Boltzmann fue el del alambre no hollinado en el tubo al vacío (configuración 3). Luego, el alambre hollinado en el tubo sin vacío fue el tercer mejor valor (configuración 2), y por último, el alambre hollinado sin tubo (configuración 1) otorgó el valor más alejado de la constante de Stefan-Boltzmann. Estos resultados nos indican que el hollín era un factor menos importante que el vacío y la cavidad térmica para la obtención de σ.

Entre las posibles fuentes de error se tiene que incluir que, debido a la manipulación del alambre, una parte del hollín era retirada al momento de armar el dispositivo experimental, por lo que la superficie del alambre no estaba uniformemente hollinada. Esto explicaría por qué el valor de σ de la configuración 3 no se aleja tanto del valor de referencia (18.2 %) en comparación con las otras configuraciones. Otra fuente de error fue que la bomba utilizada no generaba un buen vacío. Además, el dispositivo utilizado no permitía saber con certeza si el alambre y la plomada se encontraban completamente verticales, es decir, no se sabía si la longitud de referencia $L = 26.8 \pm 0.1\,cm$ era correcta. Si el alambre no se encuentra vertical entonces los esfuerzos debido a la plomada no son uniformes, ocasionando que el alambre se rompa antes de que la mayor parte del alambre llegue a su temperatura de fusión. Por último, otra posible fuente de error fue que no se le dio suficiente tiempo al alambre para entrar en equilibrio con la cavidad térmica cuando se le hacía pasar una corriente.

4. Conclusiones

Se obtuvo la constante de Stefan-Boltzmann con un alambre de cobre hollinado dentro de un tubo de plástico al vacío. El valor obtenido fue $(6 \pm 1) \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$ con una diferencia porcentual de 6 % con el valor de referencia, y un error relativo de 17 %, indicando una buena exactitud pero una baja precisión. El valor de referencia se encontró en el intervalo de error del resultado obtenido.

Se utilizaron otras tres configuraciones experimentales para encontrar el valor de σ. En la primera se utilizó un alambre hollinado sin tubo y se encontró el valor de $\sigma = (10 \pm 3) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ con un error porcentual de 76 % y un error relativo de 30 %; en la segunda se utilizó un alambre hollinado con el tubo sin vacío y se encontró el valor de $\sigma = (9.3 \pm 0.7) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ con un error porcentual de 64.0 % y un error relativo de 7.5 %; y en la tercera se utilizó un alambre sin hollinar con el tubo al vacío y se obtuvo el valor de $\sigma = (6.7 \pm 0.6) \times 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$ con un error porcentual de 18.2 % y un error relativo de 9.0 %. De estos resultados concluímos que el hollín, el tubo y el vacío juegan un papel importante para la determinación de la constante de Stefan-Boltzmann.

Para futuros experimentos se sugiere tener cuidado con la manipulación del alambre para que no pierda el hollín. También, se sugiere el uso de una mejor bomba de vacío. Además, cuando se efectúe el paso de corriente a través del alambre se sugiere que antes de que se llegue a la temperatura de fusión (lo cual ocurría aproximadamente a los $4\,A$, de acuerdo a la Tabla 1) se suba muy lentamente la corriente para que la temperatura en el alambre se uniformice y para que el alambre junto con la cavidad térmica tengan tiempo para entrar en equilibrio.

Referencias

[1] Zemansky, M., Dittman, R. (1997), *"Heat and Thermodynamics. An Intermediate Textbook"*, McGraw Hill, Séptima Edición.

[2] Richtmyer, F.K., *et al* (1955), *"Introduction to Modern Physics"*, McGraw Hill, Quinta Edición.

[3] En línea: Wikipedia, "Black body".
Fecha de consulta: 17 de marzo de 2019.

[4] Becker, R. (1964), *"Electromagnetic Fields and Interactions"*, Dover Publications.

[5] En línea: NIST, "Stefan-Boltzmann constant".
Fecha de consulta: 15 de marzo de 2019.

[6] En línea: Steren, MUL-600, "Manual de instrucciones".
Fecha de consulta: 21 de febrero de 2019.

[7] En línea: The Engineering Toolbox, "Metals - Melting Temperatures ".
Fecha de consulta: 17 de marzo de 2019.

[8] Microsoft Office Proffesional Plus 2010, *"Microsoft Excel"*, Versión 14.0.4760.1000 (32 bits)

A. Datos experimentales

Diámetro prom. $[D]$ ($\pm 0.005\,mm$)	**Corriente** $[I]$ (A)	δ_I (A)	**Voltaje** $[V]$ (V)	δ_V (V)	σ $(Wm^{-2}K^{-4})$	δ_σ $(Wm^{-2}K^{-4})$
0.16	4.47	0.07	5.81	0.05	5.8E-08	3E-09
0.15	4.07	0.06	4.89	0.04	4.7E-08	3E-09
0.15	4.03	0.06	5.73	0.05	5.3E-08	3E-09
0.15	4.59	0.07	6.39	0.05	6.8E-08	4E-09
0.16	4.60	0.07	5.28	0.04	5.4E-08	3E-09
0.15	4.29	0.06	9.24	0.07	9.0E-08	5E-09
0.15	4.22	0.06	6.04	0.05	5.8E-08	3E-09
0.16	4.41	0.07	6.28	0.05	6.2E-08	4E-09
0.16	4.18	0.06	5.76	0.05	5.3E-08	3E-09
0.16	4.40	0.07	7.29	0.06	7.1E-08	4E-09
0.16	4.42	0.07	5.73	0.05	5.6E-08	3E-09
0.16	4.37	0.07	6.41	0.05	6.2E-08	4E-09
0.15	3.80	0.06	5.17	0.04	4.7E-08	3E-09
0.15	3.60	0.05	5.52	0.04	4.8E-08	3E-09
0.16	4.19	0.06	4.70	0.04	4.3E-08	3E-09
0.15	4.23	0.06	6.08	0.05	6.2E-08	4E-09
0.15	4.12	0.06	5.35	0.04	5.0E-08	3E-09
0.15	4.04	0.06	5.51	0.04	5.1E-08	3E-09
0.15	4.46	0.07	6.66	0.05	6.8E-08	4E-09
0.15	4.15	0.06	6.03	0.05	5.9E-08	4E-09

Tabla 1: Datos recolectados de 20 alambres de cobre hollinados que se colocaron en un tubo al vacío. Todos los alambres tenían una longitud de $L = 26.8 \pm 0.1\,cm$. Se decidió tomar la incertidumbre del diámetro promedio como la mitad de la mínima escala pues la desviación estándar de las mediciones del diámetro resultó pequeña a comparación de la mitad de la mín. escala. La incertidumbre de la corriente es de $\pm 1.5\,\%$ y la del voltaje de $\pm 0.8\,\%$. La constante σ y su incertidumbre δ_σ se calcularon con las ecs. (3) y (5).

Configuración	**Diámetro prom.** $[D]$ $(\pm 0.005\,mm)$	**Corriente** $[I]$ (A)	δ_I (A)	**Voltaje** $[V]$ (V)	δ_V (V)	σ $(Wm^{-2}K^{-4})$	δ_σ $(Wm^{-2}K^{-4})$
1	0.16	5.00	0.08	7.33	0.06	7.9E-08	5E-09
	0.16	5.52	0.08	11.09	0.09	1.1E-07	7E-09
2	0.16	5.49	0.08	8.09	0.06	9.6E-08	6E-09
	0.16	5.23	0.08	7.58	0.06	8.9E-08	5E-09
3	0.14	4.11	0.06	6.77	0.05	7.1E-08	4E-09
	0.14	3.95	0.06	6.49	0.05	6.4E-08	4E-09

Tabla 2: Datos recolectados de 2 alambres de cobre en distintas configuraciones experimentales. En la configuración 1, se usó un alambre hollinado sin tubo; en la configuración 2, se usó un alambre hollinado con tubo y sin vacío; y en la configuración 3, se usó un alambre no hollinado con tubo en vacío. Las longitudes de los alambres en la configuración 1 eran de $28.1 \pm 0.1\,cm$ y $30.9 \pm 0.1\,cm$, respectivamente. Los demás alambres tenían la longitud de referencia $26.8 \pm 0.1\,cm$. Se decidió tomar la incertidumbre del diámetro promedio como la mitad de la mínima escala pues la desviación estándar de las mediciones del diámetro resultó pequeña a comparación de la mitad de la mín. escala. La incertidumbre de la corriente es de $\pm 1.5\,\%$ y la del voltaje de $\pm 0.8\,\%$. La constante σ y su incertidumbre δ_σ se calcularon con las ecs. (3) y (5).

B. Ecuaciones de incertidumbre

La incertidumbre de la expresión de la constante de Stefan-Boltzmann (3) es: [2]

$$\delta_\sigma = \left|\frac{I}{\pi DL(T^4 - T_c^4)}\right| \delta_V + \left|\frac{V}{\pi DL(T^4 - T_c^4)}\right| \delta_I + \left|-\frac{VI}{\pi D^2 L(T^4 - T_c^4)}\right| \delta_D + \left|-\frac{VI}{\pi DL^2(T^4 - T_c^4)}\right| \delta_L. \quad (5)$$

[2]La ecuación de incertidumbre de una variable $f = f(x_1, ..., x_n)$, está dada por $\delta_f = \sum_{i=1}^{n} |\partial f/\partial x_i| \delta_{x_i}$.