Centro Universitário Mauricio de Nassau

Engenharia Elétrica

2ª. Avaliação – Série de Maclaurin

Antônio Venceslau de Aguiar Neto

Iggor Cesar Silva Rodrigues

Recife

Junho / 2021

CENTRO UNIVERSITÁRIO MAURICIO DE NASSAU
ENGENHARIA ELÉTRICA

ANTÔNIO VENCESLAU DE AGUIAR NETO

IGGOR CESAR SILVA RODRIGUES

2ª. Avaliação – Série de Maclaurin

Atividade apresentada durante a disciplina **Variáveis Complexas** (GSER023900) ministrada pelo **Professor Dr. Henrique TMCM Baltar** em 2021.1 no curso de **Engenharia Elétrica** do Centro Universitário Maurício de Nassau como requisito parcial para aprovação na disciplina.

Recife

Junho / 2021

Recife

Junho / 2021

Lista de Figuras

Sumário

Dedução da Série de Maclaurin

O cosseno hiperbólico $\cosh(z)$ e o seno hiperbólico $\mathrm{senh}(z)$ são definidos da seguinte forma (SOARES, 2014)

$$cosh(z) \triangleq \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1}$$

$$senh(z) \triangleq \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{2}$$

E essas funções são, respectivamente, a derivada uma da outra

$$\frac{d}{d(z)} cosh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = senh(z) \tag{3}$$

$$\frac{d}{d(z)} senh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = cosh\ (z) \tag{4}$$

Também sabemos que se uma função f tiver uma representação (expansão) em série de potências em z_0, isto é, se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad |z-a| < R \tag{5}$$

Então seus coeficientes são dados pela fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{6}$$

Substituindo essa fórmula para a_n na equação (5), obtemos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (z-a)^n \tag{7}$$

A série apresentada na equação (7) é denominada de *Série de Taylor da função* f *em* a (i.e. centrada em a) (STEWART, 2016). Para o caso especial $a = 0$, a série de Taylor torna-se:

$$f(z) = f(0) + f'(0) + \frac{z^2}{2!} f''(0) + \frac{z^3}{3!} f'''(0) + \frac{z^4}{4!} f^{iv}(0) + \cdots + \frac{z^n}{n!} f^n(0) \tag{8}$$

Esse caso surge com frequência e lhe foi dado o nome especial de *Série de Maclaurin*, e é representada da seguinte forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n \tag{9}$$

Ao tabelarmos as derivadas de $f(z) \ = cosh(z)$ (das equações 3 e 4) avaliadas em $z = 0$ observamos que

n	$f^{(n)}(z)$	$f^{(n)}(0)$
0	$cosh\ (z)$	1
1	$senh\ (z)$	0
2	$cosh\ (z)$	1
3	$senh\ (z)$	0
4	$cosh\ (z)$	1
5	$senh\ (z)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Então podemos perceber que uma série de Maclaurin para $f(z) \ = cosh(z)$ é dada por

$$f(z) = cos(z) = \frac{1}{0!}z^0 + \frac{0}{1!}z^1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{0}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{0}{5!}z^5 \dots \tag{10}$$

$$f(z) = cos(z) = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 + \frac{1}{8!}z^8 \dots \tag{11}$$

$$f(z) = cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2n!} \tag{12}$$

■

Cálculo do Raio de Convergência

O raio de convergência r de uma série pode ser obtido pelo teste da razão

$$r \ = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{13}$$

dado que esse limite exista. Substituindo a_n pela eq. (12)

$$r \ = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\frac{z^{2n}}{2n!}}\right| \tag{14}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{2n!}{z^{2n}}\right| \tag{15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{2n+1}}{z^{2n}} \cdot \frac{2n!}{(2n+1)!}\right| \tag{16}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z}{2n!}\right| \tag{17}$$

$$= z \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2n!} \right| \tag{18}$$

$$\therefore r = z \cdot 0 \tag{19}$$

O teste da razão indica que $r < 1$. Logo, a série converge para todo z. Portanto, o raio de convergência de $cosh(z)$ é $R = \infty$ ■

Análise Gráfica da Função

Como $R = \infty$ para $cosh(z)$, delimitamos arbitrariamente um intervalo de z real e simétrico em torno da origem $(-A \leq z \leq A)$, com $A = 6$ com o objetivo de demonstrar a convergência da série (detalhes para a geração da figura podem ser obtidos no Anexo A).

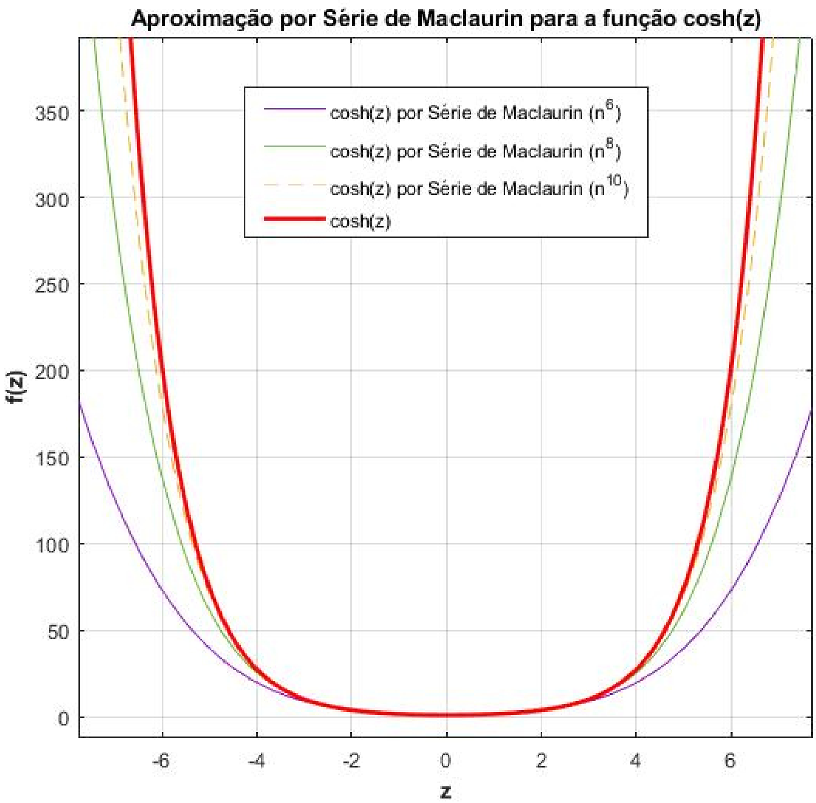

Figura 1- Gráfico da função $f(z) = cosh(z)$ $f(z) = cosh(z)$ e as aproximações por Série de Maclaurin de ordem $n = 6$, $n = 8$, e $n = 10$.

Análises Complementares

O cosseno hiperbólico é uma função que satisfaz identidade

$$cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{20}$$

Conforme observado na Eq.1. Em outras palavras, $f(z) = cosh(z)$ informa a média entre e^z e e^{-z}. Isso pode ser observado pelo gráfico das três funções quando plotadas em conjunto

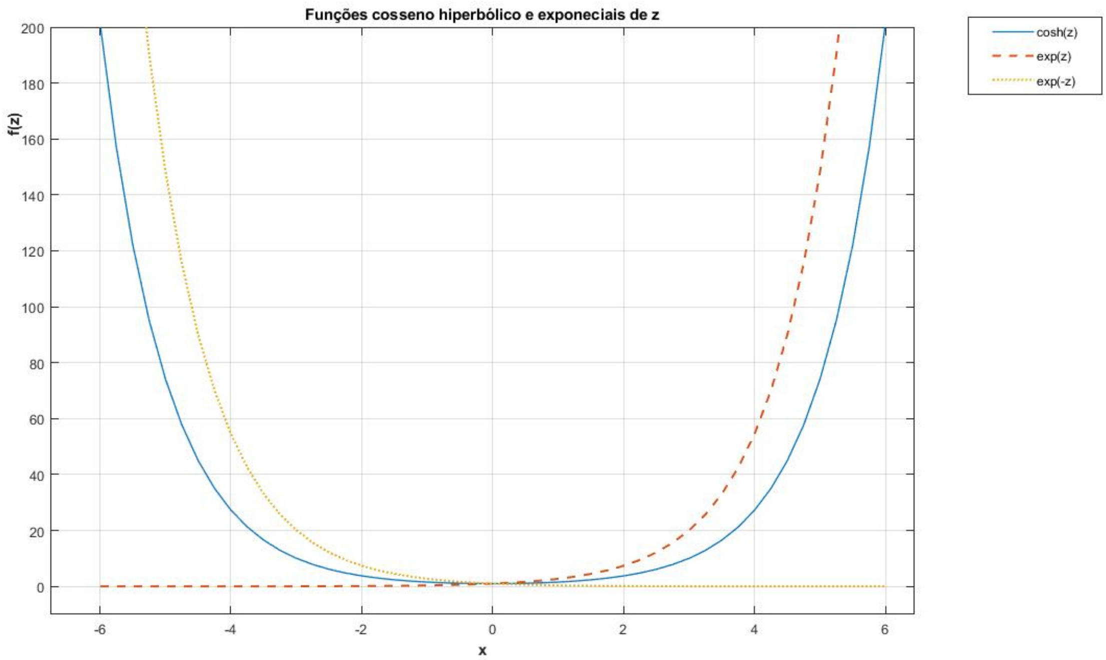

Figura 2 – Gráfico do Cosseno Hiperbólico e funções exponenciais de z.

Referências

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. Rio de Janeiro - RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Brazil), 2014.

STEWART, J. **Cálculo: Volume II**. 8a. ed. São Paulo: [s.n.]. v. II

Anexos

Anexo A: Código de MATLAB/Octave usado para gerar a Figura 1

```
%% Nome do script: conver_maclaurin_cosh
% Descrição: Cria um gráfico de uma aproximação da função cosh(z)
usando
% um caso específico de Séries de Taylor (Série de Maclaurin)
% Premissas: Nenhuma
% Autores: aaguiarn, iggorcr
% $Data: 07 de Junho, 2021$
%-----------------------------------------------------------

%% Faxina para assegurar a clareza e bom funcionamento do script%%
clear, clc, close all
%clear: remove as variáveis e funções da memória/área de trabalho%
%clc: Limpa o prompt de comando%
%close all: fecha todas as janelas de figuras atualmente abertas%
%%Fim da faxina%%

syms z %cria uma variável simbólica
f = cos(i*z); %Estabelece a funçao cosseno hiperbólico usando sua
%identidade com a função cossseno
T6 = taylor(f, z); %Cria uma aproximação por série de Taylor da função
% f até a 6a ordem
T8 = taylor(f, z, 'Order', 8); %Cria uma aproximação por série de
Taylor da função % f até a 8a ordem
T10 = taylor(f, z, 'Order', 10); %Cria uma aproximação por série de
Taylor da função % f até a 10a ordem

fplot([T6 %Cria um gráfico de linha em x das variáveis selecionadas
    T8
    T10
    f]);
xlim([-6 6]) %Estabelece os limites do eixo x
grid on %Ativa o grid da figura

%Cria e edita elementos de apoio (i.e.legenda, título) do gráfico
legend('cosh(z) por Série de Maclaurin (n^{6})',...
       'cosh(z) por Série de Maclaurin (n^{8})',...
       'cosh(z) por Série de Maclaurin (n^{10})',...
       'cosh(z)','Location','Best')
title('Aproximação por Série de Maclaurin para a função cosh(z)')
```

Anexo B: Código de MATLAB/Octave usado para gerar a Figura 2

```
%% Nome do script: cosh_media_ez.m
% Descrição: Cria um gráfico das funções cosh(z), exp(-z), e exp(z)
% Premissas: Nenhuma
% Autores: aaguiarn, iggorcr
% $Data: 08 de Junho, 2021$
%---------------------------------------------------------

%% Faxina para assegurar a clareza e bom funcionamento do script%%
clear, clc, close all
%clear: remove as variáveis e funções da memória/área de trabalho%
%clc: Limpa o prompt de comando%
%close all: fecha todas as janelas de figuras atualmente abertas%
%%Fim da faxina%%

x = -6:0.25:6; %Define um vetor x de de x0=-6 a xn=6 com 0.25 de
intervalo
%entre xn-1 a xn
y1 = cosh(x); %cria a variável y1 (cosseno hiperbolico) para os
valores de x%
y2 = exp(x); %cria a variável y2 (exponencial de -x) para os valores
de x%
y3 = exp(-x); %cria a variável y3 (exponencial de x) para os valores
de x%

p=plot(x,y1,x,y2,x,y3) %Cria o gráfico das três funções
p(1).LineWidth=1; %Define estilos de linha para cada uma das funções
p(2).LineStyle='--';
p(2).LineWidth=1.5;
p(3).LineStyle=':';
p(3).LineWidth=1.5;

grid on %Ativa o grid do gráfico
legend('cosh(z)','exp(z)','exp(-z)','Location','bestoutside')
title('Funções cosseno hiperbólico e exponeciais de z')
%%Cria e edita elementos de apoio (i.e.legenda, título) do gráfico
```