

1. Докажите, что величины  $\alpha, \beta, \gamma$  независимы в совокупности (вероятность события  $(\alpha = \alpha_i, \beta = \beta_i, \gamma = \gamma_i)$  равна произведению трех отдельных вероятностей) тогда и только тогда, когда

$$H(\alpha, \beta, \gamma) = H(\alpha) + H(\beta) + H(\gamma).$$

### Определение 1

Взаимной информацией между случайными величинами  $\alpha$  и  $\beta$  будем называть функцию  $I(\alpha : \beta) = H(\alpha) - H(\alpha|\beta)$ .

Также определим взаимную информацию в  $\alpha$  и  $\beta$  при условии  $\gamma$ .  $I(\alpha : \beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) - H(\alpha|\beta, \gamma)$ .

2. Докажите следующие свойства взаимной информации:

- а)  $I(\alpha : \beta) = I(\beta : \alpha)$
- б)  $\alpha$  и  $\beta$  независимы тогда и только тогда, когда  $I(\alpha : \beta) = 0$ .
- с)  $I(f(\alpha) : \beta) \leq I(\alpha : \beta)$  для любой функции  $f$ .

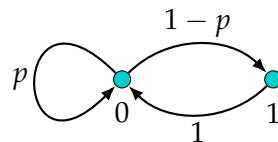
3 (неравенство Шерера). Пусть  $T_1, \dots, T_k$  — произвольные кортежи, составленные из переменных  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , причем каждая переменная входит ровно в  $r$  кортежей. Докажите, что  $rH(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq H(T_1) + \dots + H(T_k)$ .

4. Докажите, что следующее неравенство выполнено не для всех троек случайных величин  $(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$2H(\alpha, \beta, \gamma) \leq H(\alpha, \beta) + H(\alpha, \gamma|\beta) + H(\beta, \gamma|\alpha).$$

5. Пусть случайная величина  $\alpha$  имеет распределение  $1/3, 2/3$ , а случайная величина  $\beta$  имеет распределение  $1/2, 1/2$ . В каких пределах может изменяться  $H(\alpha, \beta)$ ?

6. Пусть  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  — случайная величина, задающая последовательность состояний Марковской цепи, изображенной на рисунке. Чему равен предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\alpha)}{n}$ ?



7. Пусть  $\alpha, \alpha'$  две независимые одинаково распределенные величины. Докажите, что  $\Pr[\alpha \neq \alpha'] \geq 2^{-H(\alpha)}$ .

8. Имеется набор из  $n$  камней. Сколько взвешиваний необходимо, чтобы найти самый тяжелый и самый легкий камни (на каждую чашу можно класть не более одного камня)?

