

**Р 1.** Рассмотрим функцию  $f: \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ . Докажите, что размер максимального трудного множества случайной функции  $f$  не более  $\mathcal{O}(\log n)$  с высокой вероятностью (хотя бы константной).

**Р 2.** Пусть в матрице функции  $f: \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  все строки различны. Докажите, что  $(f) \geq \log n$ .

### Определение 1

Пусть  $f: X \times Y \rightarrow Z$  и  $\mu$  — распределение на  $X \times Y$ . Заметим, что для любого коммуникационного протокола  $\Pi$  для функции  $f$  распределение  $\mu$  индуцирует распределение на листьях данного протокола естественным образом. **Внешней информационной стоимостью** (или внешним информационным разглашением) протокола  $\Pi$  по распределению  $\mu$  будем называть величину:

$$IC_{\mu}^{\text{ext}}(\Pi) = I(\Pi(X, Y) : X, Y).$$

**Внутреннее информационное разглашение** протокола  $\Pi$  на распределении  $\mu$ :

$$IC_{\mu}^{\text{int}}(\Pi) = I(\Pi(X, Y) : X | Y) + I(\Pi(X, Y) : Y | X).$$

Также определим внешнюю информационную сложность самой функции  $IC_{\mu}^{\text{ext}}(f) = \min_{\Pi} IC_{\mu}^{\text{ext}}(\Pi)$ .

**Р 3.** Докажите, что для любой булевой функции  $f$  и любого распределения  $\mu$  существует такой протокол  $\Pi$  для  $KW_f$ , что  $IC_{\mu}^{\text{int}}(\Pi) \leq 2 \log n$ .  
Подсказка: попробуйте рассмотреть прокол, где Алиса пересылает Бобу биты входа до тех пор, пока они не найдут бит различия.

### Определение 2

Пусть  $F: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$  — вычислимая функция. **Сложность описания**  $x$  относительно  $F$  определим следующим образом:  $K_F(x) := \min\{|p| \mid F(p) = x\}$ . Будем говорить, что способ описания  $F$  не хуже  $G$ , обозначим  $F \prec G$ , если существует такая константа  $c_G$ , что для  $\forall x \in \{0,1\}^*$ ,  $K_F(x) \leq K_G(x) + c_G$ .

**Оптимальным** будем называть такой способ описания  $U$ , который не хуже любого другого. **Колмогоровской сложностью**  $x$  будем называть значение  $K(x) := K_U(x)$ .

**Р 4.** Колмогоровская сложность обладает следующими свойствами.

- а) Существует  $c$  такая, что для всех  $x$ :  $K(x) \leq |x| + c$ .
- б) Существует  $c$  такая, что для всех  $x$ :  $K(xx) \leq |x| + c$ .
- в) Для любых оптимальных  $F_1$  и  $F_2$  выполняется  $F_1 \prec F_2$  и  $F_2 \prec F_1$ , т.е. существует такая константа  $c$ , что  $|K_{F_1}(x) - K_{F_2}(x)| \leq c$ .

**Р 5.** Докажите, что ряд  $\sum_{x \in \{0,1\}^*} 2^{-K(x)}$  расходится.

**Р 5.1.** Приведите пример такой матрицы  $M_f$ , что  $L(f) > \chi(f) = \chi_0(f) + \chi_1(f)$ .

**Р 5.2.** Докажите, что

$$\log \chi(f) \leq C(f) \leq \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где  $\chi_0(f), \chi_1(f)$  — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении  $M_f$ .

**Р 5.9.** Докажите, что  $C(\text{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$ . Где  $x$  интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе  $G$ , а  $y$  — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе  $G$ .  $\text{CIS}_G(x, y) = 1$ , если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф  $G$ .

**Р 6.7.** Докажите, что  $R_{\frac{1}{10}}^{\text{pub}}(\text{DISJ}_n^{\leq k}) = \mathcal{O}(2^{2k})$ , где в функции  $\text{DISJ}_n^{\leq k}$  множества игроков имеют размеры не больше  $k$ ,  $\text{DISJ}_n^{\leq k}(x, y) = 1$ , если множества не пересекаются.

