

**Задача 4.1.** Приведите пример, когда  $L(f) > \chi(f)$ .

**Задача 4.2.** Для  $n = 2^k$  покажите, что  $C(KW_{\oplus n}) \leq 2k$ .

**Задача 4.3.** Для  $n = 2^k$  покажите, что  $C(KW_{\vee n}) = k$ .

**Задача 4.4.** У Алисы имеется  $n$ -битная строка  $x$ , а у Боба  $n$ -битная строка  $y$ . Известно, что  $y$  получен из  $x$  инвертированием одного бита.

- а) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности  $O(\log n)$ , который позволяет Бобу узнать  $x$ .
- б) Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности  $O(\log n)$ , который позволяет Бобу узнать  $x$ . (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

**Задача 4.5.** Пусть дан граф  $G$  без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа  $x, y$  и хотят узнать существует ли ребро  $(x, y)$ . Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее  $\log \chi(G)$ , где  $\chi(G)$  — хроматическое число графа  $G$ .

Подсказка: попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.

**Задача 4.6.** Докажите, что  $C(CIS_G) = O(\log^2 n)$ . Где  $x$  интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе  $G$ , а  $y$  — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе  $G$ .  $CIS_G(x, y) = 1$ , если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф  $G$ .

**Задача 4.7.** Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция  $GT(x, y)$  определена на парах  $x, y$  целых чисел в интервале  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  и принимает значение 1, если  $x > y$ , и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что  $x, y$  выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

**Задача 4.8.** Докажите, что коммуникационная сложность IP равна  $n - O(1)$ .

**Открытая задача 4.9 (очень сложно)**

Предлагается улучшить верхнюю оценку из статьи [Andrew Chin](#) для отношения  $KW_{\text{MOD } p_n}$  для конкретного значения  $p > 2$ .

- а) Для  $p = 3$  лучше  $2.881 \log_2 n$ ,
- б) Для  $p = 5$  лучше  $3.475 \log_2 n$ ,
- в) Для  $p = 11$  лучше  $4.930 \log_2 n$ .