4 Коммуникационная сложность

Задача 4.1. Приведите пример, когда $L(f) > \chi(f)$.

Задача 4.2. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\oplus_n}) \le 2k$.

Задача 4.3. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\vee_n}) = k$.

Задача 4.4. У Алисы имеется n-битная строка x, а у Боба n-битная строка y. Известно, что y получен из x инвертированием одного бита.

a) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x.

b) Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

Задача 4.5. Пусть дан граф G без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа x, y и хотят узнать существует ли ребро (x, y). Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее $\log \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G. *Подсказка:* попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.

Задача 4.6. Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф G.

Задача 4.7. Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ определена на парах x, y целых чисел в интервале $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ и принимает значение 1, если $x > y$, и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что x, y выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

Задача 4.8. Докажите, что коммуникационная сложность IP равна $n - \mathcal{O}(1)$.

Открытая задача 4.9 (очень сложно)

Предлагается улучшить верхнюю оценку из статьи Andrew Chin для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD}p_n}$ для конкретного значения $p > 2$.

a) Для $p = 3$ лучше $2.881 \log_2 n$,

b) Для $p = 5$ лучше $3.475 \log_2 n$,

c) Для $p = 11$ лучше $4.930 \log_2 n$.

Задача 4.10. Улучшите константу в балансировке протоколов. Доказать, что $C(f) \le c \log_2 L(f)$ для $c < 3$.

Задача 4.11. Докажите, что

$$C(f) \le \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении M_f.

Задача 4.12. Докажите, что $C(f) \le \mathcal{O}(\min(\log^2 \chi_0(f), \log^2 \chi_1(f)))$.

Задача 4.13. Докажите, что $\operatorname{rank}(M_{\mathrm{IP}}) \ge 2^n - 1$.

Задача 4.14. Докажите, что $\operatorname{rank}(M_{\mathrm{DISJ}}) = 2^n$.

Задача 4.15. Пусть Алиса и Боб получают битовые строки длины n и хотят вычислить функцию $\mathrm{MAX}(x, y)$. Докажите, что:

a) $C(\mathrm{MAX}) \le \frac{3}{2}n + \mathcal{O}(1)$,

b) $C(\mathrm{MAX}) \le n + o(n)$.

5 Оракулы

Задача 5.1. Покажите, что $C(f) \ge C^{\mathrm{EQ}}(f)$. Примером лучшего разделения может служить сама же задача EQ, $C^{\mathrm{EQ}}(\mathrm{EQ}) = 1$, $C(\mathrm{EQ}) = \Theta(n)$.

Задача 5.3. $C^{\mathrm{EQ}^1}(\mathrm{EHD}_1) = n/2 + \mathcal{O}(1)$.

Задача 5.4. Оцените сложность $C^{\mathrm{EQ}^1}(\mathrm{EHD}_k)$ в зависимости от k. (под EQ^1 имеется ввиду оракул, который на вход принимает однобитовые строки)

Открытая задача 5.5 (сложно)

Оцените сложность $C^{\mathrm{EQ}}(\mathrm{EHD}_k)$ в зависимости от k.

Открытая задача 5.6 (сложно)

Попробуйте улучшить нижнюю оценку на $C^{\mathrm{EHD}_\ell}(\mathrm{EHD}_k)$.

Открытая задача 5.7

Попробуйте улучшить верхнюю оценку на $C^{\mathrm{EHD}_\ell}(\mathrm{EHD}_k)$ и $C^{\mathrm{HD}_{\le \ell}}(\mathrm{HD}_{\le k})$.