4 Коммуникационная сложность

Задача 4.1. Приведите пример, когда $L(f) > \chi(f)$.

Задача 4.2. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\oplus_n}) \le 2k$.

Задача 4.3. Для $n = 2^k$ покажите, что $C(\mathrm{KW}_{\vee_n}) = k$.

Задача 4.4. У Алисы имеется n-битная строка x, а у Боба n-битная строка y. Известно, что y получен из x инвертированием одного бита.

a) Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x.

b) Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности $\mathcal{O}(\log n)$, который позволяет Бобу узнать x. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).

Задача 4.5. Пусть дан граф G без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа x, y и хотят узнать существует ли ребро (x, y). Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее $\log \chi(G)$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа G. *Подсказка:* попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.

Задача 4.6. Докажите, что $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$. Где x интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе G, а y — как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф G.

Задача 4.7. Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию GT, передавая в среднем константу битов. Функция $\mathrm{GT}(x, y)$ определена на парах x, y целых чисел в интервале $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ и принимает значение 1, если $x > y$, и значение 0, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что x, y выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.

Задача 4.8. Докажите, что коммуникационная сложность IP равна $n - \mathcal{O}(1)$.

Открытая задача 4.9 (очень сложно)

Предлагается улучшить верхнюю оценку из статьи Andrew Chin для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD}p_n}$ для конкретного значения $p > 2$.

a) Для $p = 3$ лучше $2.881 \log_2 n$,

b) Для $p = 5$ лучше $3.475 \log_2 n$,

c) Для $p = 11$ лучше $4.930 \log_2 n$.

Задача 4.10. Улучшите константу в балансировке протоколов. Доказать, что $C(f) \le c \log_2 L(f)$ для $c < 3$.

Задача 4.11. Докажите, что

$$C(f) \le \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ — количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении M_f.

Задача 4.12. Докажите, что $C(f) \le \mathcal{O}(\min(\log^2 \chi_0(f), \log^2 \chi_1(f)))$.

Задача 4.13. Докажите, что $\operatorname{rank}(M_{\mathrm{IP}}) \ge 2^n - 1$.

Задача 4.14. Докажите, что $\operatorname{rank}(M_{\mathrm{DISJ}}) = 2^n$.

Задача 4.15. Пусть Алиса и Боб получают битовые строки длины n и хотят вычислить функцию $\mathrm{MAX}(x, y)$. Докажите, что:

a) $C(\mathrm{MAX}) \le \frac{3}{2}n + \mathcal{O}(1)$,

b) $C(\mathrm{MAX}) \le n + o(n)$.

c) $C(\mathrm{MAX}) \le n + \mathcal{O}(\log n)$

5 Оракулы

Задача 5.1. Покажите, что $C(f) \ge C^{\mathrm{EQ}}(f)$. Примером лучшего разделения может служить сама же задача EQ, $C^{\mathrm{EQ}}(\mathrm{EQ}) = 1$, $C(\mathrm{EQ}) = \Theta(n)$.

Задача 5.3. $C^{\mathrm{EQ}^1}(\mathrm{EHD}_1) = n/2 + \mathcal{O}(1)$.

Задача 5.4. Оцените сложность $C^{\mathrm{EQ}^1}(\mathrm{EHD}_k)$ в зависимости от k. (под EQ^1 имеется ввиду оракул, который на вход принимает однобитовые строки)

Открытая задача 5.5 (сложно)

Оцените сложность $C^{\mathrm{EQ}}(\mathrm{EHD}_k)$ в зависимости от k.

Открытая задача 5.6 (сложно)

Попробуйте улучшить нижнюю оценку на $C^{\mathrm{EHD}_\ell}(\mathrm{EHD}_k)$.

Открытая задача 5.7

Попробуйте улучшить верхнюю оценку на $C^{\mathrm{EHD}_\ell}(\mathrm{EHD}_k)$ и $C^{\mathrm{HD}_{\le \ell}}(\mathrm{HD}_{\le k})$.

6 Полудуплексная коммуникационная сложность

Задача 6.5. Докажите, что $C_0(R) \ge C(R)/2$.

Задача 6.6. Докажите, что $C_{\text{т}}(R) \ge C(R)/3$.

Задача 6.8. Докажите, что для каждой вершины полудуплексного протокола (в обоих деревьях) множество пар входов, при которых путь проходит через эту вершину, является комбинаторным прямоугольником.

При решение следующих задач полезно вспомнить, как доказывались аналогичные оценки в классической коммуникационной сложности.

Задача 6.9. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $C_{\text{т}}(\mathrm{EQ}_n) \ge \log_5 2^n = n/\log 5$,

Задача 6.10. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $C_0(\mathrm{EQ}_n) \ge \log_3 2^n = n/\log 3$,

Задача 6.11. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $C_{\text{т}}(\mathrm{DISJ}_n) \ge \log_5 2^n = n/\log 5$,

Задача 6.12. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $C_0(\mathrm{DISJ}_n) \geq \log_3 2^n = n/\log 3$,

Задача 6.13. Пусть $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Докажите, что $C_{\text{т}}(f) \leq \lceil n/\log_2 3 \rceil + 1$.

Задача 6.14. Пусть для коммуникационной задачи $\mathcal{P} \subset X \times Y \times Z$ задана полуаддитивная мера μ на подмножествах $X \times Y$ такая, что существует константа $M > 0$, что для любого одноцветного прямоугольника $R \subset X \times Y$ верно $\mu(R) \leq M$. Докажите, что

$$C_{\text{т}}(\mathcal{P}) \geq \log_5 \frac{\mu(X \times Y)}{M}, \text{ и } C_0(\mathcal{P}) \geq \log_3 \frac{\mu(X \times Y)}{M}.$$

6.1 Исследовательские задачи

Открытая задача 6.15

Можно ли получить какую-то связь между коммуникационной сложность с оракулом EQ_1 и полудуплексной сложность с тишиной?

a) Пример функции, на которой сложность не совпадают $C^{\mathrm{EQ}_1}(f) < C_{\text{т}}(f)$. Пример, на котором $C^{\mathrm{EQ}_1}(f) > C_{\text{т}}(f)$.

b) Можно ли получить какую-то явную связь?

Известные оценки на полудуплексную сложность набора функций представлены в таблице 1.

Функция / Модель	EQ/GT	IP	DISJ	$\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD2}}$
$C_{\text{т}}$	$\geq n/\log 5$ $\leq n/\log 5 + o(n)$	$\geq n/2$ $\leq n/2 + O(1)$	$\geq n/\log 5$ $\leq n/2 + 2$	$\geq \log n$ $\leq 2\log_3 n$
C_0	$\geq n/\log 3$ $\leq n/\log 3 + o(n)$	$\geq n/\log \frac{2}{3-\sqrt{5}}$ $\leq 7n/8 + O(1)$	$\geq n/\log 3$ $\leq 3n/4 + o(n)$	$\geq \log n$ $\leq 3\log_3 n$
$C_{\text{а}}$	$\geq n/\log 2.5$	$\geq n/\log(7/3)$	$\geq n/\log 2.5$	$= 2\log n$

Таблица 1. Известные результаты

Задача 6.16. Предложите более эффективный полудуплексный протокол для EQ_n

a) в модели с тишиной (лучше $n/\log_2 3$),

b) в модели с нулём (лучше n).

Задача 6.17. Предложите эффективный полудуплексный протокол для GT_n

a) в модели с тишиной (лучше $n/\log_2 3$),

b) в модели с нулём (лучше n).

Задача 6.18. Предложите эффективный полудуплексный протокол для DISJ_n

a) в модели с тишиной (лучше $n/\log_2 3$),

b) в модели с нулём (лучше n).

Задача 6.19. Предложите эффективный полудуплексный протокол для IP_n

a) в модели с тишиной (лучше $n/\log_2 3$),

b) в модели с нулём (лучше n).

Задача 6.20. Предложите эффективный полудуплексный протокол для отношения $\mathrm{KW}_{\oplus_n}$

a) в модели с тишиной (лучше $2\log_2 n$),

b) в модели с нулём (лучше $2\log_2 n$).

Задача 6.21. Докажите, что $C_{\text{т}}(\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD3}_n}) \le 3\log_3 n$.

Открытая задача 6.22

Предложите эффективный полудуплексный протокол для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD3}_n}$ в модели с нулём (лучше $3\log_3 n$).

Определение 6.1

Функция рекурсивного большинства $\mathrm{RecMaj}_k : \{0,1\}^{3^k} \to \{0,1\}$ для натурального k определяется следующими соотношениями

$$\mathrm{RecMaj}_1(a,b,c) = \begin{cases} 0, & a+b+c<2 \\ 1, & a+b+c \ge 2. \end{cases}$$

$$\mathrm{RecMaj}_k(a_1,\ldots,a_{3^k}) = \mathrm{RecMaj}_1(\mathrm{RecMaj}_{k-1}(a_1,\ldots,a_{3^{k-1}}),$$
$$\mathrm{RecMaj}_{k-1}(a_{3^{k-1}+1},\ldots,a_{2\cdot 3^{k-1}}), \mathrm{RecMaj}_{k-1}(a_{2\cdot 3^{k-1}+1},\ldots,a_{3^k}))$$

Задача 6.23. Предложите эффективный полудуплексный протокол для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}$

a) в модели с тишиной (лучше $3\log_3 n$),

b) в модели с нулём (лучше $3\log_3 n$).

Открытая задача 6.24

Предложите эффективный полудуплексный протокол для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{RecMaj}_k}$

a) в модели с тишиной (лучше $2\log_3 n$),

b) в модели с нулём (лучше $2\log_3 n$).

Задача 6.25. Алиса получает строку длины n с ровно одной единицей, а Боб получается строку с не менее двумя единицами. Их задача найти индекс бита, в котором их входы различаются. Предложите эффективный протокол для этой задачи

a) в классической модели (лучше $2\log_2 n$),

b) в модели с тишиной (лучше $\log_2 n$),

c) в модели с нулём (лучше придуманного вами в пункте «a»).

Открытая задача 6.26 (сложно)

Улучшите известные оценки (из таблицы 1) на функцию DISJ_n.

Открытая задача 6.27 (сложно)

Улучшите известные оценки (из таблицы 1) на функцию IP_n.

Открытая задача 6.28

Покажите оценку на сложность случайной функции в полудуплексной модели с тишиной.

Задача 6.29. Рассмотрим функцию f, которая задана матрицей 1.
Докажите, что $C(f) \geqslant 4$, а $C_h(f) \leqslant 3$.
C_h — коммуникационная сложность с честным противником. То есть противник каждый тихий раунд выбирает либо `0` либо `1` и отправляет игрокам одинаковую информацию

1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1

Рис. 1. Матрица f.

7 Вероятностная коммуникационная сложность

Задача 7.1. Докажите, что $R_\varepsilon^{pub}(\mathrm{EQ}) \le \mathcal{O}(\log \frac{1}{\varepsilon})$.

Задача 7.2. Докажите, что $R_{1/3}^{pub}(\mathrm{GT}) \le \mathcal{O}(\log n \cdot \log\log n)$.

8 Недетерминированная коммуникационная сложность

Задача 8.1. Постройте покрытие единиц матрицы M_{NEQ_n} размера $2n$.

Задача 8.2. Докажите, что для любого $z \in \{0, 1\}$

$$C(f) \le c_z(f) + 1.$$

Задача 8.3. Докажите, что

a) $N^0(\mathrm{EQ}) = n$;

b) $N^1(\mathrm{EQ}) = \log n + \Theta(1)$.

Задача 8.4. Докажите, что $N^0(\mathrm{GT}) = n$ и $N^1(GT) = n$.

Задача 8.5. Докажите, что $C(f) = \mathcal{O}(\log c_0(f) \cdot \log c_1(f))$.