

# Протоколы в графах

Пименов Марк

11 июня 2024 г.

## 1 Введение

Пусть имеется некоторая функция  $f : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$  от двух аргументов, и два игрока, Алиса и Боб, получают входы  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , соответственно, и хотят вычислить значение  $f(x, y)$ . Алиса и Боб имеют устройство связи, которое позволяет передавать друг другу битовые сообщения. Они могут заранее договориться, как им требуется отправлять сообщения. Обозначим через  $C(f)$  минимальное количество сообщений, которые понадобятся Алисе и Бобу, чтобы **обоим** узнать, чему равно  $f(x, y)$ . Для этой игры определим **протокол общения**.

### Определение 1.1

**Протокол общения** для функции  $f$  — это упорядоченное корневое двоичное дерево со следующими пометками:

- Каждая внутренняя вершина помечена буквой «А» или «Б».
- Каждое ребро к левому потомку помечено нулём, к правому — единицей.
- Каждый лист помечен элементом множества  $Z$ .

Для каждой внутренней вершины  $v$  с пометкой «А» определена функция  $A_v : X \rightarrow \{0, 1\}$ , а для каждой внутренней вершины  $u$  с пометкой «Б» определена функция  $B_u : Y \rightarrow \{0, 1\}$ .

- Первая вершина  $\pi(x, y)$  — это корень.
- Каждая следующая вершина пути является потомком предыдущей, причём
  - Каждая вершина пути  $v$  с пометкой «А» соединена с потомком ребром с пометкой  $A_v(x)$ .
  - Каждая вершина  $u$  с пометкой «Б» соединена с потомком ребром с пометкой  $B_u(y)$ .
- Последняя вершина  $\pi(x, y)$  — лист.

Протокол  $\Pi$  называется **корректным протоколом** для функции  $f$ , если для каждой пары входов  $(x, y)$  выполняется  $\Pi(x, y) = f(x, y)$ .

Теперь перейдём к формулировке нашей задачи. Для этого нам потребуется ввести несколько обозначений.

1.  $\chi(G)$  — хроматическое число графа  $G$ .
2. Функция связности графа  $f_G(x, y)$  равна 1, если между вершинами  $x$  и  $y$  есть ребро, и равна 0 иначе.

3. Для двудольного подграфа  $H$  графа  $G$  с долями  $A_k$  и  $A_l$  функция связности  $g_H(v, u), v \in A_k, u \in A_l$  принимает значение 1, если между  $u$  и  $v$  есть ребро, и 0, если этого ребра нет.
4.  $C(G)$  — максимальное  $C(g_H)$  среди всех существующих двудольных подграфов  $H$  графа  $G$ .

### Задача 1.1

Пусть дан граф  $G$  без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа  $x, y$  и хотят узнать, существует ли в графе ребро  $(x, y)$ . Или, иначе говоря, хотят вычислить значение функции связности  $f_G(x, y)$ . Доказать, что:

$$\max(C(G), \log(\chi(G))) \leq C(f_G) \leq 2 \cdot \log(\chi(G)) + C(G).$$

## 2 Результаты

Для начала будет доказана оценка снизу, а после — сверху. Также хотелось бы отметить, что нижняя и верхняя оценка отличаются не более чем в 3 раза.

### Лемма 2.1

Пусть  $\Pi$  — некоторый протокол для функции  $f: X \times Y \rightarrow Z$ . Тогда если пути  $\pi(x_1, y_1)$  и  $\pi(x_2, y_2)$  заканчиваются в одном и том же листе, то и  $\pi(x_1, y_2)$ , и  $\pi(x_2, y_1)$  заканчиваются в том же листе.

*Доказательство.* Заметим, что так как наш граф — это дерево, то если пути от корня заканчиваются в одном и том же листе, то пути просто совпадают. Ведь иначе в дереве есть цикл. Тогда это означает, что при числах  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  Алиса и Боб отправили друг другу абсолютно одинаковые сообщения в этих двух случаях. Это означает, что когда Алиса получит  $x_1$ , а Боб  $y_2$ . То Боб будет отправлять то же самое что и при  $(x_2, y_2)$  (что тоже самое что он отправлял при  $(x_1, y_1)$ ), ведь у него  $y_2$  и Алиса ему отправляет аналогично то же самое что и она отправляла в  $(x_1, y_1)$ , ведь у неё  $x_1$  и Боб отправляет ей то же самое что и в  $(x_1, y_1)$ . Ну то есть у них у обоих та же информация при себе в случае Алисы что и в случае  $(x_1, y_1)$ , а у Боба та же информация что и в случае  $(x_2, y_2)$ . А потому они будут действовать также что и в этих случаях. Тогда путь при  $(x_1, y_2)$  точно такой же что и при  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . И аналогично такой же путь при  $(x_2, y_1)$ . Ну значит пути  $(x_1, y_2)$  и  $(x_2, y_1)$  одинаковые, а значит и заканчиваются они в одном и том же листе.  $\square$

### Теорема 2.1

Для всякого графа  $G$  верно неравенство:  $\max(C(G), \log(\chi(G))) \leq C(f_G)$ .

*Доказательство.* Пользуясь леммой 2.1 докажем, что  $\log(\chi(G)) \leq C(f_G)$ . Предположим обратное. Рассмотрим протокол, глубина  $H$  которого меньше  $\log(\chi(G))$ . Рассмотрим множество  $S$  вершин протокола, в которых заканчиваются пути вида  $\pi(v, v)$ , где  $v$  — вершина  $G$ . Каждую вершину  $v$  графа  $G$  покрасим в цвет с тем же номером, что и у элемента  $S$ , соответствующего пути  $\pi(v, v)$ .

Поймём теперь, почему рёбер между вершинами одного цвета в данной раскраске не будет. Пусть  $\pi(x, x)$  и  $\pi(y, y)$  заканчиваются в одной вершине, тогда по лемме 2.1  $\pi(x, y)$  также заканчивается в том же листе. А так как значение, соответствующее данному листу — 0, то между  $x$  и  $y$  нет ребра. Заметим, что при этом мы использовали не более чем  $2^H$  цветов, ведь один лист — один цвет.

Второе неравенство  $C(G) \leq C(f_G)$  тривиально, так как  $C(G)$  является подфункцией функции связности всего графа  $f_G$ .  $\square$

**Теорема 2.2**

$$2 \cdot \log(\chi(G)) + C(G) \geq C(f_G).$$

*Доказательство.* Зафиксируем раскраску графа  $G$  в  $\chi(G)$  цветов. Алиса и Боб за  $2 \cdot \log(\chi(G))$  битов отправят друг другу цвет своей вершины. Если цвет одинаковый, то сразу понятно, что ребра нет. Если же цвет разный, то, используя не более  $C(G)$  сообщений, игроки могут понять, есть ли ребро между вершинами, ведь задача сведена к двудольному графу.  $\square$