Задачи на *зачет* не идут в общее количество баллов и не будут учитываться на *экзамене*. Всех этих задач хватит, чтобы дойти с 0% до 100%. Если вы хотите увеличить букву за *зачет*, то можно решать задачи и набирать дополнительные баллы.

Сдавать задачи можно в формате pdf (только LaTeX или typst) на ✉ aaignatiev@hse.ru. Или устно на зачете 31 мая.

P 1. 6 баллов Дано шесть монет разного веса и известно, что первая монета легче второй, третья легче четвертой, а четвертая легче пятой. Имеются весы, позволяющие сравнить по весу любые две монеты. Доказать, что для того, чтобы упорядочить по весу все монеты, необходимо и достаточно 7 взвешиваний.

P 2. 6 баллов Имеются две карточки, на каждой из которых написано целое число от 0 до 8. Алисе сообщили сумму x этих чисел. При каких x Алисе необходимо и достаточно задать два вопроса с ответами ДА/НЕТ, чтобы узнать оба написанных числа?

P 3. 6 баллов Пусть в слове длины 1000 количества букв a, b, c, d, e, f, g равны, соответственно, $50, 100, 150, 150, 150, 200, 200$. Найдите энтропию Шеннона для этих частот. Постройте код Хаффмана для алфавита a, b, c, d, e, f, g, и этих частот. Найдите длину кода этого слова, полученного применением кодирования Хаффмана к каждой букве.

P 4. 6 баллов Пусть случайная величина α имеет распределение $p(0) = \frac{1}{9}, p(1) = \frac{1}{6}, p(2) = \frac{1}{6}, p(3) = \frac{5}{9}$. Положим $\beta = \alpha \bmod 2$. Найти $H(\alpha), H(\beta), H(\alpha, \beta)$.

P 5. 6 баллов Для каждого натурального $n > 0$ приведите пример таких распределений a и b, что $I(a : b) = n, H(a) = 2n, H(b) = 2n$.

P 6. 8 баллов Докажите неравенство:

$$H(\alpha) \leq H(\alpha \mid \beta) + H(\alpha \mid \gamma) + I(\beta : \gamma).$$

P 7. 6 баллов У Алисы имеется целое число x в интервале $\{0, ..., 2n - 1\}$, а у Боба целое число y в том же интервале. Докажите, что для того, чтобы найти $2x + y$, необходимо всего передать $2n$ бит.

P 8. 10 баллов Рассмотрим функцию $\mathrm{IP}_n : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, где $\mathrm{IP}_n(x, y) = \sum x_i y_i \bmod 2$. Докажите, что коммуникационная сложность IP_n равна $n - O(1)$.

P 9. 6 баллов Рассмотрим функцию $\mathrm{OR}_n(x) := x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$. Докажите, что $C\left(\mathrm{KW}_{\mathrm{OR}_n}\right) = \log n$.

P 10. 10 баллов Пусть в слове x длины n не более np единиц. Докажите, что

$$K(x) \leq h(p)n + O(1),$$

где $h(p)$ — энтропия нечестной монетки.

P 11. 10 баллов Докажите, что

$$K(x,y) \leq K(x) + 2\log K(x) + K(y) + c,$$

для любых x, y и некоторой константы c.