Задача 4.1. *Приведите пример, когда* $L(f) > \chi(f)$.

Задача 4.2. *Для* $n = 2^k$ *покажите, что* $C(\mathrm{KW}_{\oplus_n}) \le 2k$.

Задача 4.3. *Для* $n = 2^k$ *покажите, что* $C(\mathrm{KW}_{\vee_n}) = k$.

Задача 4.4. *У Алисы имеется* n*-битная строка* x*, а у Боба* n*-битная строка* y*. Известно, что* y *получен из* x *инвертированием одного бита.*

a) *Придумайте детерминированный коммуникационный протокол сложности* $\mathcal{O}(\log n)$*, который позволяет Бобу узнать* x.

b) *Придумайте однораундовый детерминированный коммуникационный протокол сложности* $\mathcal{O}(\log n)$*, который позволяет Бобу узнать* x*. (В однораундовом протоколе Алиса посылает некоторое сообщение Бобу, после чего Боб вычисляет результат).*

Задача 4.5. *Пусть дан граф* G *без петель. Алиса и Боб получают две вершины данного графа* x, y *и хотят узнать существует ли ребро* (x, y)*. Докажите, что детерминированная сложность данной задачи не менее* $\log \chi(G)$*, где* $\chi(G)$ *— хроматическое число графа* G.
Подсказка: *попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол.*

Задача 4.6. *Докажите, что* $C(\mathrm{CIS}_G) = \mathcal{O}(\log^2 n)$*. Где* x *интерпретируется как характеристическая функция некоторой клики в графе* G*, а* y *— как характеристическая функция некоторого независимого множества в графе* G. $\mathrm{CIS}_G(x, y) = 1$*, если клика и независимое множество имеют общую вершину, обе стороны знают граф* G.

Задача 4.7. *Постройте детерминированный коммуникационный протокол, который вычисляет функцию* GT*, передавая в среднем константу битов. Функция* $\mathrm{GT}(x, y)$ *определена на парах* x, y *целых чисел в интервале* $\{0, \ldots, 2^n - 1\}$ *и принимает значение* 1*, если* $x > y$*, и значение* 0*, иначе. Говоря о среднем, мы имеем в виду, что* x, y *выбираются случайно и независимо среди всех чисел указанного интервала с равномерным распределением.*

Задача 4.8. *Докажите, что коммуникационная сложность* IP *равна* $n - \mathcal{O}(1)$.

Открытая задача 4.9 (очень сложно)

Предлагается улучшить верхнюю оценку из статьи Andrew Chin для отношения $\mathrm{KW}_{\mathrm{MOD}p_n}$ для конкретного значения $p > 2$.

a) Для $p = 3$ лучше $2.881 \log_2 n$,

b) Для $p = 5$ лучше $3.475 \log_2 n$,

c) Для $p = 11$ лучше $4.930 \log_2 n$.

Задача 4.10. *Улучшите константу в балансировке протоколов. Доказать, что* $C(f) \le c \log_2 L(f)$ *для* $c < 3$.

Задача 4.11. *Докажите, что*

$$C(f) \le \mathcal{O}(\log \chi_0(f) \log \chi_1(f)),$$

где $\chi_0(f), \chi_1(f)$ *— количество нулевых (единичных) прямоугольников в минимальном разбиении* M_f.

Задача 4.12. *Докажите, что* $C(f) \le \mathcal{O}(\min(\log^2 \chi_0(f), \log^2 \chi_1(f)))$.

Задача 4.13. *Докажите, что* $\mathrm{rank}(M_{\mathrm{IP}}) \ge 2^n - 1$.

Задача 4.14. *Докажите, что* $\mathrm{rank}(M_{\mathrm{DISJ}}) = 2^n$.