

Advanced Dynamics  
The Plutonian Course Project

Anni Järvenpää

30. huhtikuuta 2017

# 1 Integraattorit

Valitsin toteutettaviksi integraattoreiksi leapfrog-integraattorin ja neljännen asteen Runge-Kutta -integraattorin. Kummankin lähdekoodi löytyy GitHub-repositoriosta <https://github.com/aajarven/AD-integrators> löytyvästä `integrators.c`-tiedostosta. Repositorio sisältää myös muut ohjelman suorittamiseen tarvittavat tiedostot `makefilen`, joka luo ajettavan binäärin polkuun `bin/main`. Tämän jälkeen ohjelma on mahdollista ajaa komennolla

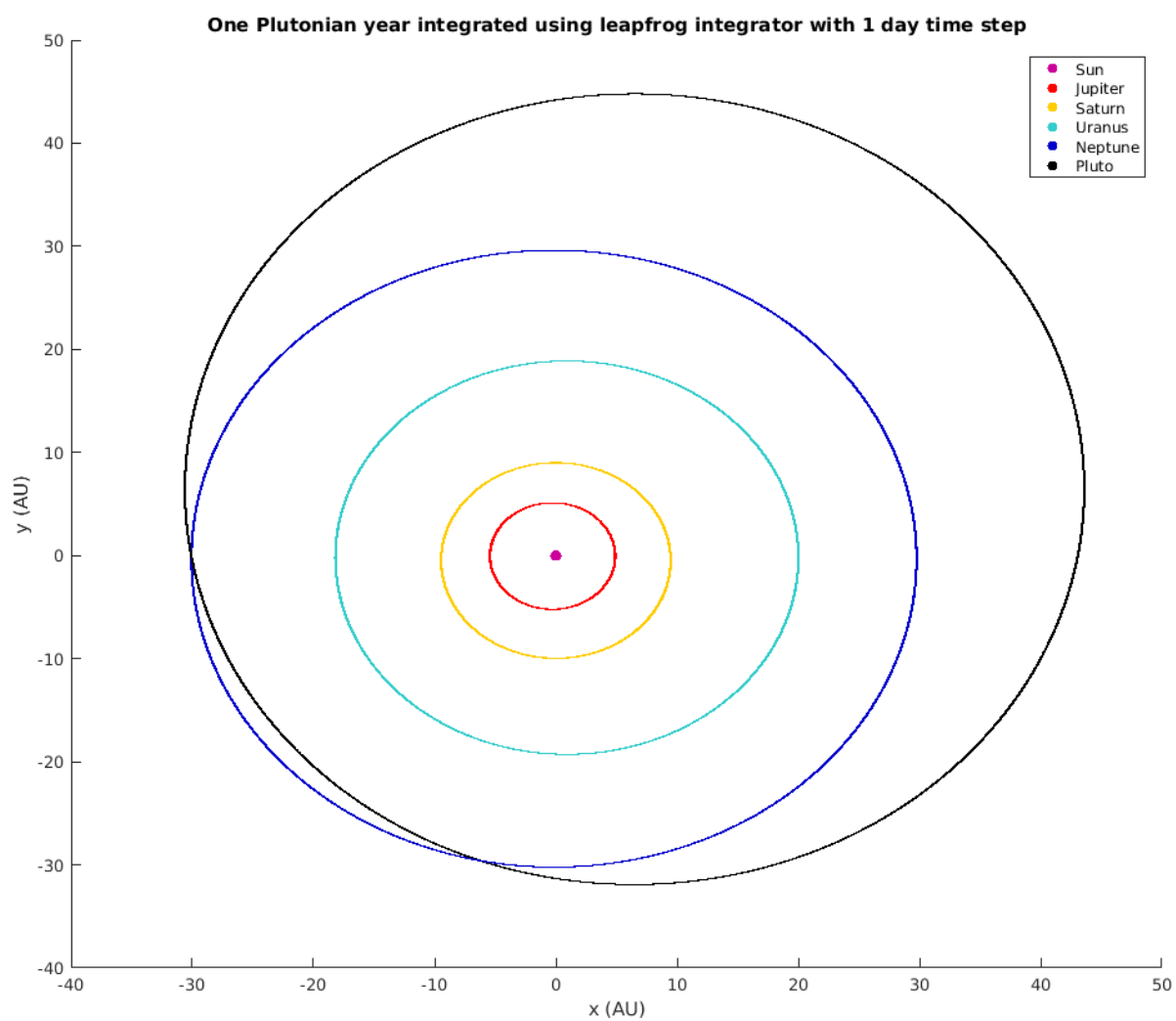
```
./bin/main input nBodies dimensions step end outFreq output  
integrator
```

missä `input` on polku alkuehtoihin, `nBodies` kertoo simulaation kappaleiden määrän, `dimensions` käytettyjen ulottuvuuksien määrän, `step` on aika-askelen pituus päivissä, `end` on simulaation pituus päivissä, `outFreq` määrää kuinka monen aika-askelen välein tilanne kirjoitetaan tiedostoon ja `integrator` on joko `l` tai `r` jolloin käytetään integraattorina joko leapfrogia tai Runge-Kuttaa. Liian pieni määrä parametreja johtaa virheilmoituksen näyttämiseen ja ohjelman suorituksen päättymiseen, virheelliset parametrit puolestaan johtavat ohjelman kaatumiseen määrittelemättömällä tavalla tai virheellisiin tuloksiin.

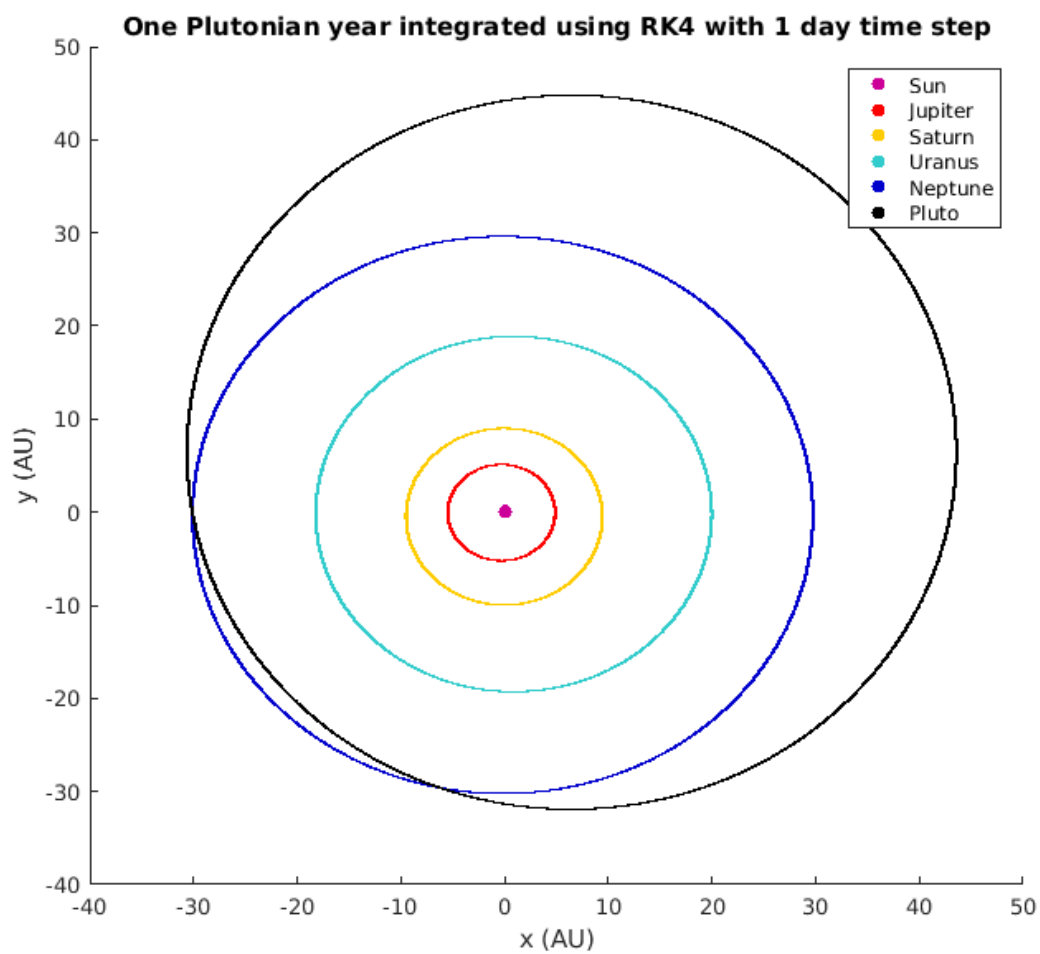
Input-tiedoston tulee sisältää kunkin kappaleen koordinaatit, nopeudet ja massat tässä järjestyksessä välilyönnein eroteltuna omilla riveillään. Kommenttimerkkinä toimii `asdf`, jolla alkavia rivejä ei käsitellä. Samoin tyhjät rivit jätetään huomiotta.

Kumpikin integraattori vaikuttaa toimivan ja tuottaa järkeviä ratoja. Kuvassa 1 on esitetty ulkoplaneettojen ja Auringon paikat noin yhtä Pluton radan etäisyydellä tehtyä ratakierrosta vastaavan 250 vuoden ajanjakson aikana integroituna leapfrog-integraattorilla ja vastaavasti kuvassa 2 on käytetty RK4-integraattoria. Ennen kunkin outputin kirjoittamista tiedostoon kappaleiden massakeskipiste siirretään koordinaatiston origoon, jolloin Aurinko pysyy aina likimain origossa.

Integraattorin outputit sisältävät sarakkeittain kunkin kappaleen indeksin, tallennushetken, koordinaatit ja nopeudet. Kappaleet on indeksoitu nollasta alkaen siten, että järjestys on sama kuin input-tiedostossa. Yksikköinä on ajoille päivä, koordinaateille AU ja nopeuksille AU/d.



Kuva 1: Ulkoplaneettojen radat 250 vuoden ajanjakson aikana leapfrogilla integroituna. Aurinkoa edustava merkki on muita suurempi, jotta se erottuu, vaikka sen liike on hyvin vähäistä.



Kuva 2: Ulkoplaneettojen radat 250 vuoden ajanjakson aikana RK4-integraattorilla integroituna. Aurinkoa edustava merkki on muita suurempi, jotta se erottuu, vaikka sen liike on hyvin vähäistä.

## 2 Rataelementit

Rataelementtien laskemisen toteutin Matlabilla. Tähän tarkoitukseen luotu funktio `planetElements(planetNumber, mu, x, y, z, vx, vy, vz, t, index)` laskee annetun indeksin omaavan planeetan inklinaation  $i$ , keskianomalian  $M$ , perihelin argumentin  $\omega$ , nousevan solmun pituuden  $\Omega$ , eksentrisyyden  $e$ , näitä vastaavat ajanhetket sekä parametrin  $\lambda = \Omega + \omega + M$  ja perihelin pituuden  $\varpi$

Funktio ottaa parametrina lisäksi planeetan ja keskuskappaleen yhteisen massan kerrottuna gravitaatiovakiolla (yksiköissä  $\text{AU}^3/\text{yr}^2$ ), kaikkien kappaleiden x-, y- ja z-sijainnit(AU) sekä näitä vastaavat nopeudet ( $\text{AU}/\text{yr}$ ) ja ajanhetket (yr) sekä kappaleiden indeksit. Aikayksiköiden muuntamiseen input-tiedoston päivistä rataelementtilaskurin vaatimiin vuosiin voi käyttää `dayToYr.m`-skriptiä.

### 2.1 Pluton eksentrisyys ja inklinaatio

Pluton radan eksentrisyyden ja inklinaation vaihtelu on esitetty kuvissa 3 ja 4. Integraattorin valinnan vaihtelu näkyy lähinnä yksittäisissä datapisteissä ja kummallakin integraattorilla saadut tulokset ovat konsistentteja eksentrisyyden ja inklinaation vaihtelun eksentrisyydelle noin 0.005 ja inklinaatiolle korkeintaan  $4^\circ$  suuruisten vaihteluvälien kanssa.

### 2.2 Nousevan solmun prekessio

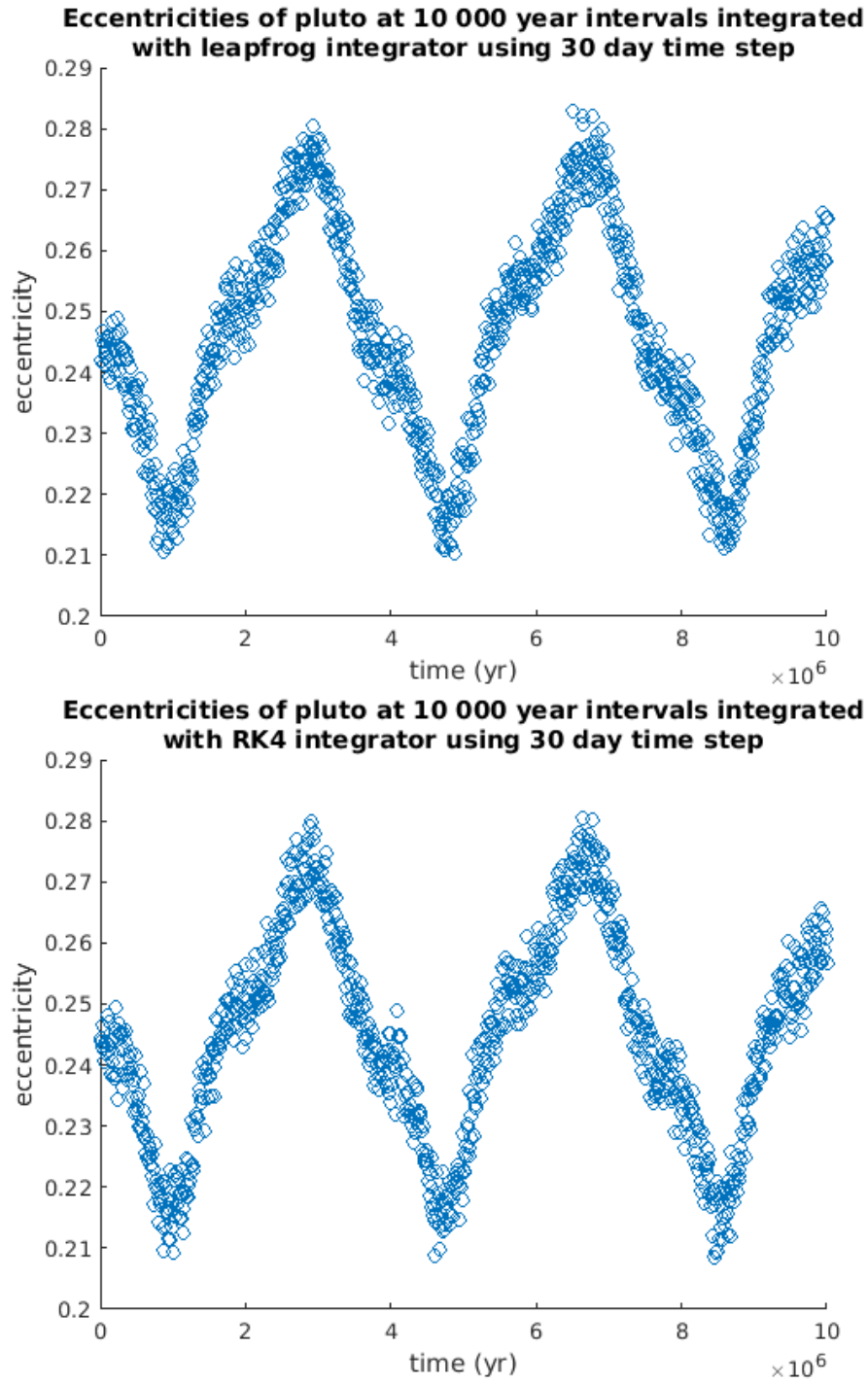
Pluton nousevan solmun prekessio kumpaakin integraattoria käyttäen on nähtävissä kuvassa 5. Etsimällä ajanhetket, joita seuraavalla hetkellä nousevan solmun pituuden arvo on suurempi kuin edellisellä ajanhetkellä (eli on ylitetty  $360^\circ$  raja), saadaan yhteen kierrokseen kuluva ajaksi 3 700 000 vuotta, joka vastaa prekessionopeutta  $-9,7 \times 10^{-5} \text{ }^\circ/\text{yr}$ .

### 2.3 Perihelin argumentti

Kuten kuvasta 6 nähdään, Pluton perihelin argumentti muuttuu periodisesti. Käytin Matlabin `cftool`ia sovittamaan dataan muotoa

$$a \sin(bt + c) + d$$

olevan käyrän, jolloin sain kummankin integraattorin datalla käyrän amplitudiksi  $a$  noin  $26^\circ$  ja periodiksi  $2\pi/b$  noin 3 800 000 vuotta.

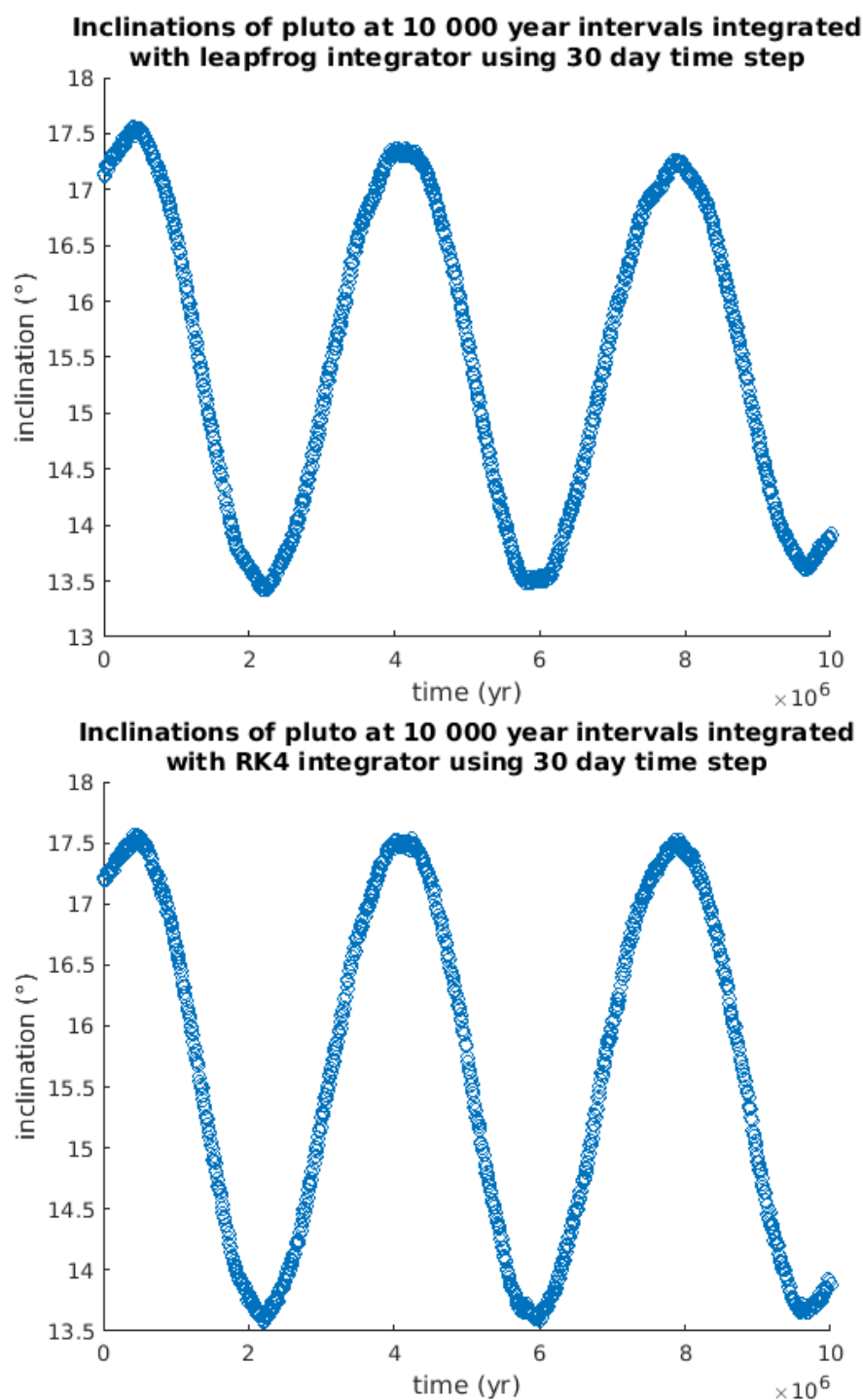


Kuva 3: Pluton radan eksentrisyyden vaihtelu  $10^7$  vuoden aikana integroituna sekä leapfrog- että RK4-integraattorilla

## 2.4 Pluto ja Neptunus

Laskin lisäksi kummankin integraattorin datalla Pluton ja Neptunuksen dynamiikkaa kuvaavan parametrin

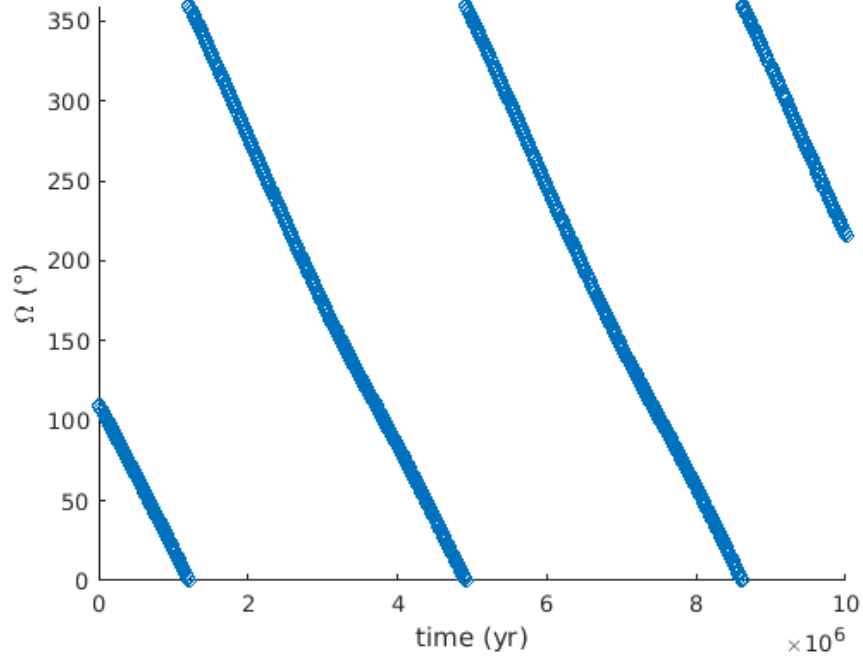
$$\phi_{32} = 3\lambda_P - 2\lambda_N - \varpi.$$



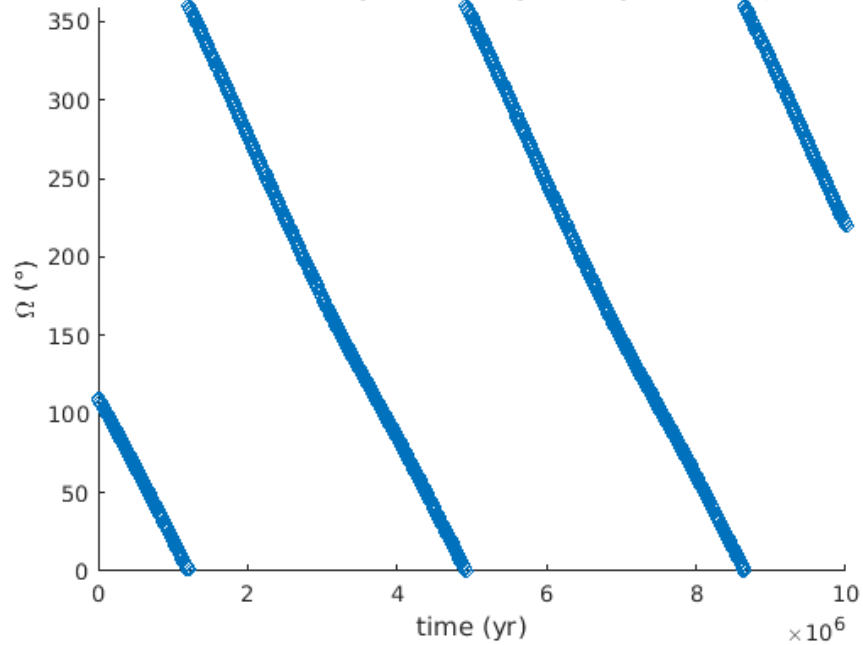
Kuva 4: Pluton radan inklinaatoin vaihtelu  $10^7$  vuoden aikana integroituna sekä leapfrog-että RK4-integraattorilla

Kummankin integraattorin tulosten mukaan oskillointi tapahtuu välillä  $110\text{--}250^\circ$  mikä vastaa amplitudia  $70^\circ$  ja keskiarvo periodin yli on noin  $180^\circ$ . On kuitenkin huomattavaa, että tutkittava väli ei ole periodin monikerta, jolloin keskiarvo ei täysin vastaa keskiarvoa yhden periodin yli. Paremmiin oskillointia kuvaava luku saattaisi olla esimerkiksi ääriarvojen keskiarvo  $180$ .

**Ascending nodes of pluto at 10 000 year intervals integrated with leapfrog integrator using 30 day time step**

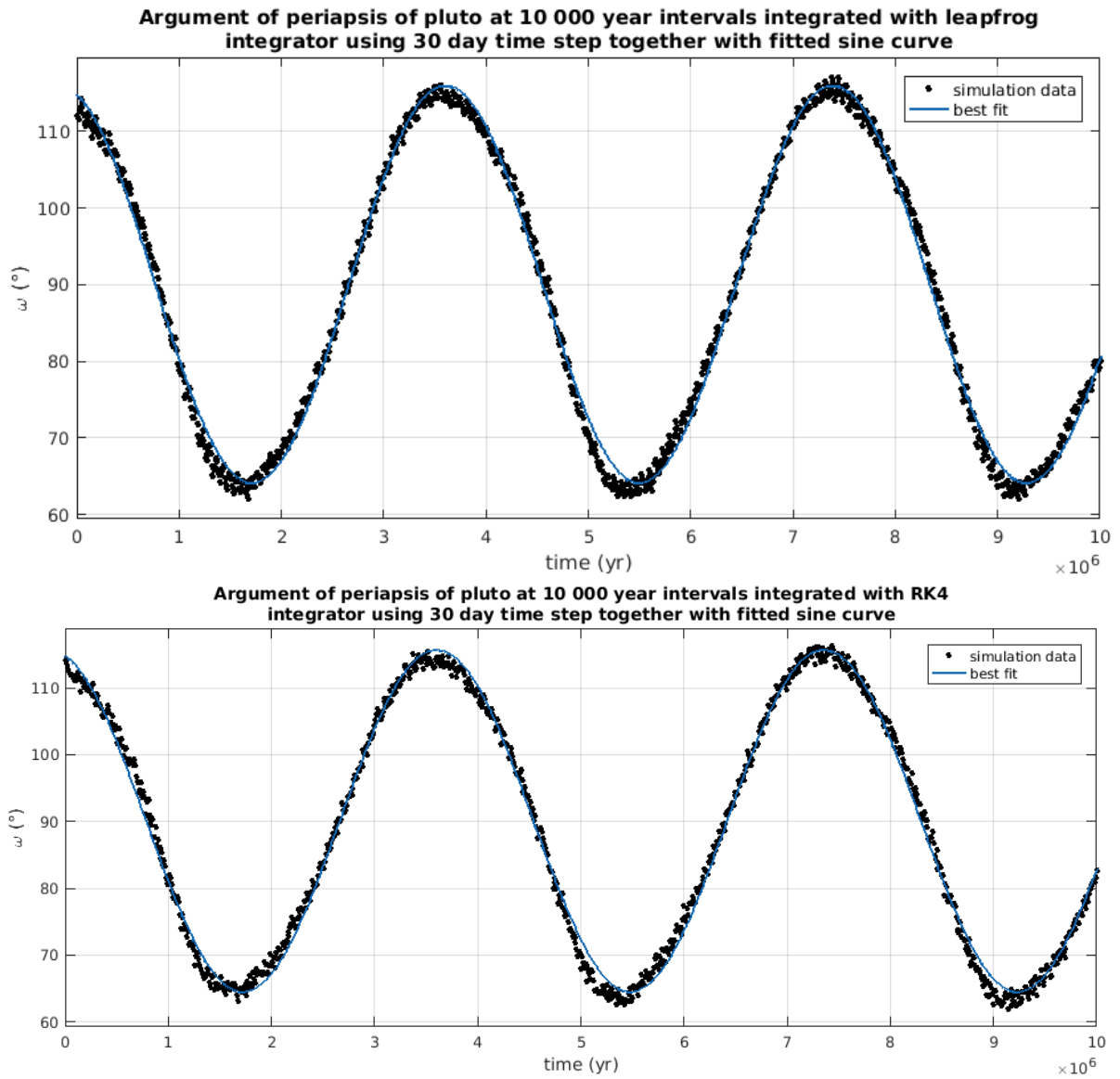


**Ascending nodes of pluto at 10 000 year intervals integrated with RK4 integrator using 30 day time step**

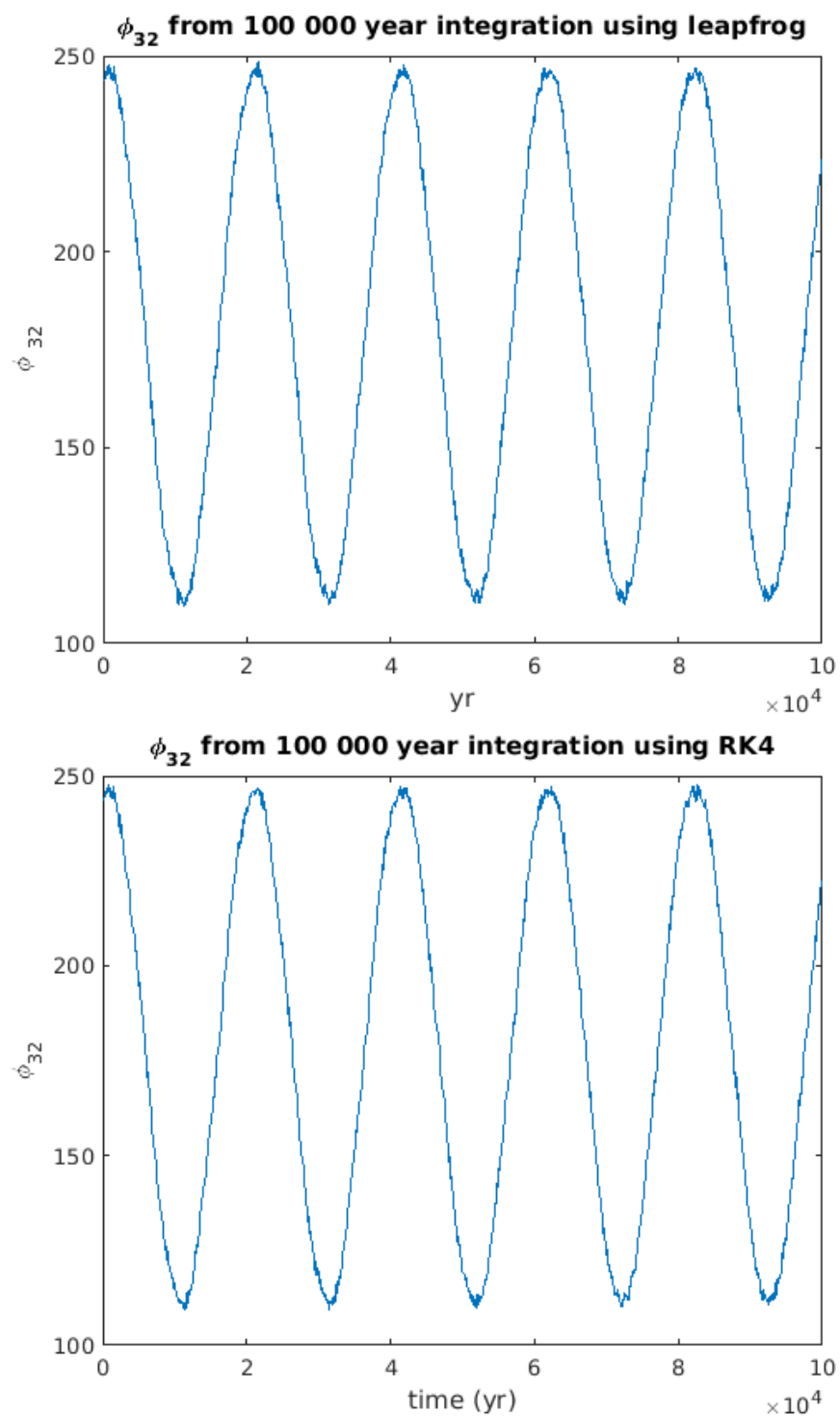


Kuva 5: Pluton radan nousevan solmun pituuden vaihtelu  $10^7$  vuoden aikana integroituna sekä leapfrog- että RK4-integraattorilla





Kuva 6: Pluton radan perihelin argumentin vaihtelu  $10^7$  vuoden aikana integroituna sekä leapfrog- että RK4-integraattorilla. Kummassakin kuvaajassa on lisäksi sinimuotoinen sovitus dataan yhtenäisellä viivalla esitettynä.



Kuva 7:  $\phi_{32}$ :n vaihtelu 10000 vuoden aikana integroituna sekä leapfrog- että RK4-integraattorilla.