

Taivaanmekaniikka
Lineaarinen pienimmän neliösumman sovitus

Anni Järvenpää

17. lokakuuta 2015

1 Lineaarinen pienimmän neliösumman menetelmä

Lineaarisen pienimmän neliösumman menetelmän tavoitteena on sovittaa n muotoa (x_i, y_i) olevasta pisteestä koostuvaan havaintoaineistoon suora, joka edustaa pisteitä mahdollisimman hyvin. Tyypillisesti sovituksen hyvyyttä mitataan pisteiden vertikaalisena etäisyytenä $|e|$ sovitetusta suorasta (merkitty sinisellä kuvassa 1). Pienimmän neliösumman menetelmässä näiden vertikaalisten poikkeamien neliöiden summa pyritään minimoimaan, siis etsimään funktion $f(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \dots + \beta_{m+1} x^m$ kertoimet $\beta_1 \dots \beta_{m+1}$ siten, että virhe S on mahdollisimman pieni, kun S on määritelty yhtälön 1 mukaisesti. [3]

$$S = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \quad (1)$$

Virheen minimiarvot löytyvät derivaatan nollakohdista: [1]

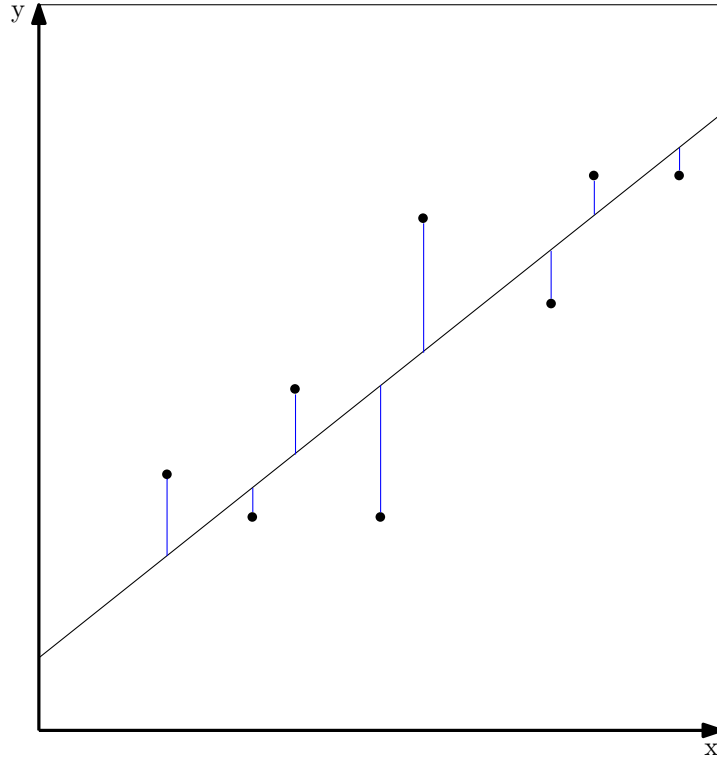
$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n [y - (\beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_{m+1} x^m)] = 0 \\ \frac{\partial R^2}{\partial \beta_2} &= -2 \sum_{i=1}^n [y - (\beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_{m+1} x^m)] = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial R^2}{\partial \beta_{m+1}} &= -2 \sum_{i=1}^n [y - (\beta_1 + \beta_2 x + \dots + \beta_{m+1} x^m)] = 0 \end{aligned}$$

Näistä saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \beta_1 n + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i + \dots + \beta_{m+1} \sum_{i=1}^n x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i \\ \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + \beta_{m+1} \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^m + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} + \dots + \beta_{m+1} \sum_{i=1}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{aligned}$$

eli matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \\ \beta_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m y_i \end{bmatrix}. \quad (2)$$



Kuva 1: Pistejoukko, johon sovitettu suora mustalla ja pisteiden vertikaaliset etäisyydet suorasta pisteinä.

Voidaan myös huomata, että yhtälöön 2 voidaan päästä hyödyntämällä Vandermonden matriisia [2]

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ja kirjoittamalla tämän avulla

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Nyt voidaan kertoa edellinen yhtälö puolittain vasemmalta Vandermonden matriisin

transpoosilla \mathbf{X}^T , jolloin yhtälö saadaan seuraavaan muotoon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Suoritetaan yhtälön matriisien kertolaskut, jolloin saadaan

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_1 \\ \sum_{i=1}^n y_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_m \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Nyt voidaan huomata yhtälöiden 5 ja 2 olevan identtiset. Koska Vandermonden matriisi on kääntyvä¹, on kaikille yhtälöstä 4 yhtälöön 5 pääsemiseksi tehdyille operaatioille käänteisoperaatio. Täten yhtälöt 4 ja 2 ovat yhtäpitävät, eli pienimmän neliösumman antavat kertoimet β_i voidaan ratkaista yhtälöstä 4.

Otetaan kerroinvektorin ratkaisemisen helpottamiseksi käyttöön seuraavat merkinnät:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix},$$

jolloin yhtälö 2 voidaan kirjoittaa lyhyesti

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \quad (6)$$

ja tästä ratkaista $\boldsymbol{\beta}$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} & ||\mathbf{X}^T. \\ \mathbf{X}^T\mathbf{Y} &= \mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} & ||(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^{-1} \\ \boldsymbol{\beta} &= (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (7)$$

¹Mikä voidaan helposti osoittaa, ks. esim https://proofwiki.org/wiki/Inverse_of_Vandermonde's_Matrix

Samankaltaisella päättelyketjulla voidaan ratkaista yleinen lauseke myös tilanteelle, jossa kaikkien pisteiden mittaustarkkuus ei ole sama, jolloin pisteille halutaan käyttää erilaisia painokertoimia sovitusta tehtäessä. Tähän voidaan käyttää varianssimatriisia \mathbf{V} , jonka avulla voidaan määritellä painokerroinmatriisi $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}\sigma^2$. Tässä σ on tutkittavan aineiston varianssi ja \mathbf{V} määritelty seuraavasti: [3]

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Näitä merkintöjä käyttäen kerroinvektori β voidaan ratkaista yhtälöstä 8 [3].

$$\beta = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} \quad (8)$$

2 Pienimmän neliösumman ratkaisu kaksiulotteiselle havaintoaineistolle

Kun pienimmän neliösumman sovitusta sovelletaan asteroidin radanmäärittelyyn, on käytössä kaksiulotteinen havaintoaineisto, joka koostuu asteroidin paikoista (x_i, y_i) ajanhetkellä t_i . Asteroidin paikkavektori $\mathbf{r}(t)$ mielivaltaisella ajanhetkellä t voidaan ratkaista asteroidin rataelementtien avulla. Rataelementeiksi voidaan valita asteroidin paikka $\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0)$ ja nopeus $\mathbf{V}_0 = (\dot{X}_0, \dot{Y}_0)$ ajanhetkellä $t = 0$, jolloin asteroidin paikka saadaan seuraavasti:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}_0 t. \quad (9)$$

Havaintoaineiston ollessa kaksiulotteinen, täytyy \mathbf{Y} -vektorin tallentaa sekä havaitut x -että y -koordinaatit, jolloin

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Koska tahdotaan ratkaista aiemmin määritelty rataelementit, on myös ratkaistava ker-

roinvektori erilainen:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \end{bmatrix}.$$

Viitteet

- [1] Least squares fitting-polynomial. <http://mathworld.wolfram.com/LeastSquaresFittingPolynomial.html>. Luettu: 15.10.2015.
- [2] Vandermonde matrix. <http://mathworld.wolfram.com/VandermondeMatrix.html>. Luettu: 16.10.2015.
- [3] Peter J. Bickel. *Mathematical statistics: basic ideas and selected topics*. Holden-Day, Oakland, CA, 1977.

A Liittyvä liite.

Liian laaja leipätekstiin.