

Tähtienväisen aineen fysiikkaa

Tähtienväisen aineen eri ”olomuodot”

Tähtienvälinen kaasu $\sim 10\%$ Galaksin massasta

Tähtienvälinen pöly $\sim 1\%$ kaasun massasta

Tähtienvälinen magneettikenttä $B \approx 2 \cdot 10^{-6}$ gauss ($= 2\mu\text{G}$)

Tähtienvälinen säteilykenttä $u \approx 7 \cdot 10^{-13}$ erg cm $^{-3}$ ($T_{\text{bb}} \approx 3K$)

Kosminen säteily (e , p , ym.) $u \approx 10^{-12}$ erg cm $^{-3}$

Kaasun eri komponentit:

Neutraali kaasu:

	Tiheys [cm $^{-3}$]	T [K]	Pääasiallinen koostumus
tiheät pilvet	$10^3 - 10^5$	10 - 70	H ₂
”standardi” pilvet	~ 30	60 - 100	HI
pilvien välissä	~ 0.3	6000-8000	HI

Ionisoitunut kaasu:

	Tiheys [cm $^{-3}$]	T [K]	Pääasiallinen koostumus
1. Fotoionisaatio:			
HII-alueet	10^2	$\sim 10\ 000$	HII
diffuusi ionisoitunut kaasu	0.3	$\sim 10\ 000$	HII
2. Törmäysionisaatio			
korona-kaasu	$10^{-2} \dots 10^{-4}$	$10^5 - 10^6$	HII

Painetasapaino: $P = NkT$

1 Tähtienväisen kaasun ionisaatio

1.1 Ionisaatiotasapaino

$N_{i,n} = i$ kertaa ionisoituneiden, viritystilassa n olevien atomien lukumäärä cm^3 :ssä

$N_i = \sum_n N_{i,n}$, summa yli viritystilojen

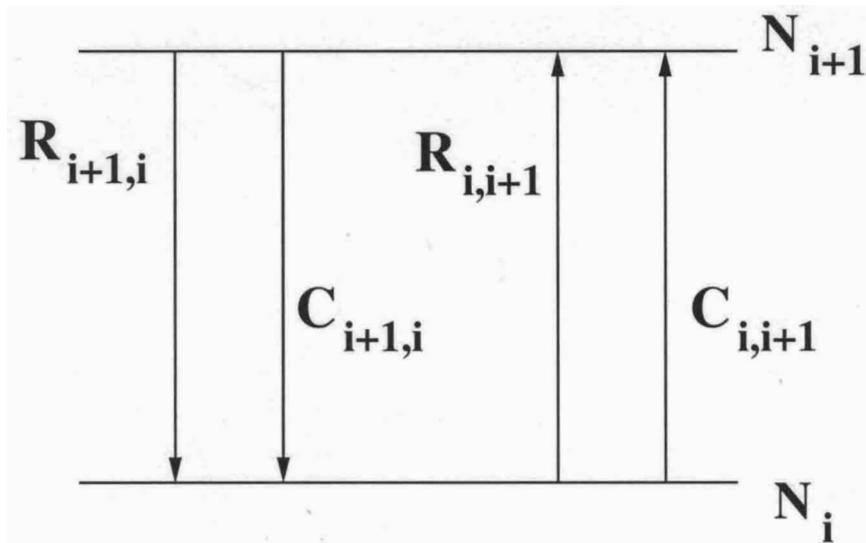
Tasapainossa siirtymille $i \rightarrow i+1$ ja $i+1 \rightarrow i$ pätee

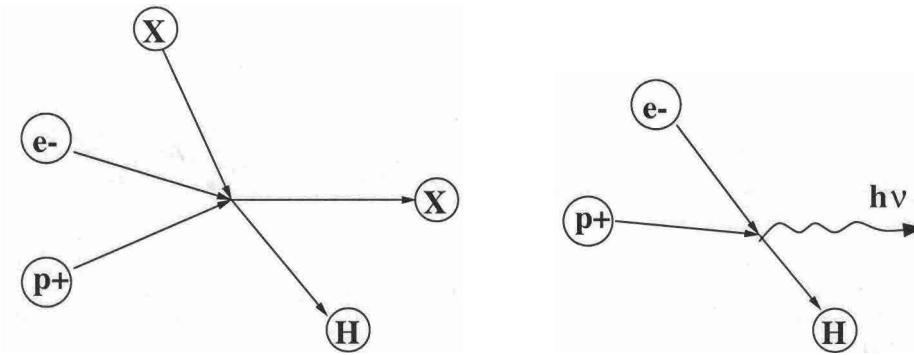
$$\underbrace{N_i(R_{i,i+1} + C_{i,i+1})}_{\text{siirtymät } i \rightarrow i+1} = \underbrace{N_{i+1}(R_{i+1,i} + C_{i+1,i})}_{\text{siirtymät } i+1 \rightarrow i}$$

- $R_{i,i+1}$, fotoionisaatio
- $C_{i,i+1}$, törmäysionisaatio
- $C_{i+1,i} \propto N_e N' \propto N^2$ (3 kpl törmäys!)

$$R_{i+1,i} \propto N_e$$

$$\Rightarrow \text{yleensä } N^2 \ll N_e \Rightarrow C_{i+1,i} \ll R_{i+1,i}$$





1.2 Vedyn ionisaatio ja rekombinaatio

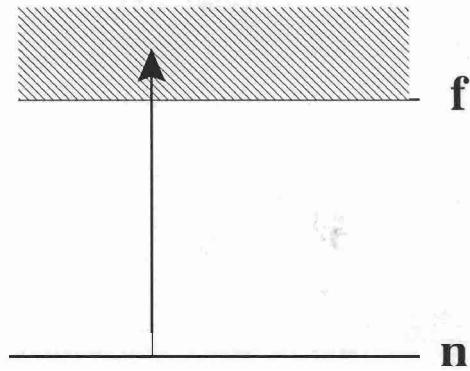
a) Fotoionisaatio

- $N_0(R_{0,1} + C_{0,1}) = N_1 R_{1,0}$
- Törmäyskerroin $C_{1,0}$ voidaan unohtaa. Atomit ovat perusviritystilassa $n=1$, ts. $N_i \simeq N_{i,1}$
- $N_0 R_{0,1} = N_{0,1} R_{0,1} = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\kappa_{\nu}(1 \rightarrow f) I_{\nu}}{h\nu} d\nu$
 $\nu_0 = 912 \text{ Å} \sim 13.6 \text{ eV}$
- Absorboitujen fotonien lukumäärä cm^3 ja taajuusväliä $d\nu$ kohden 1 sekunnissa, integroituna yli kaikkien saapumissuuntien:

$$N_{phot} = \frac{4\pi I_{\nu} \kappa_{\nu}(1 \rightarrow f) d\nu}{h\nu} = \frac{\text{Absorboitunut energia}}{\text{yhden fotonin energia}}$$
- bound-free absorptiokerroin:

$$\kappa_{\nu}(b - f) = \frac{64\pi^4 m_e e^{10} Z^4}{3\sqrt{3} c h^6 n^5 \nu^3} g_{bf} \cdot N_{0,n} \simeq 3 \cdot 10^{29} \frac{Z^4}{n^5 \nu^3} g_{bf} N_{0,n}$$

 $[\nu] = \text{Hz}, \quad [N_{0,n}] = \text{cm}^{-3}, \quad [\kappa_{\nu}] = \text{cm}^{-1},$
- g_{bf} = Gauntin kerroin ≈ 1 optisessa alueessa;
n=1 : $g_{bf} = 0.8 \dots 1.0$, kun $\lambda = 912 \text{ Å} \dots 50 \text{ Å}$
- $R_{0,1}$ on suurimmillaan kuumien tähtien lähellä, ts. HII alueissa.



Oletetaan että $I_\nu = W \cdot \bar{I}_\nu^*$

- $W \simeq 10^{-14}$ (= ohennuskerroin, dilution factor)
- $\bar{I}_\nu^* = B_\nu(T_r)$, $T_r \simeq T_{eff} \simeq 48000\text{K}$ (O5), T_r = säteilylämpötila
 $\Rightarrow R_{0,1} \simeq 10^{-8}\text{s}^{-1}$
- → atomi on neutraalissa tilassa $\sim 10^8\text{s}$ eli oleellisesti pidemmän ajan kuin sen elinikä on virityissä tiloissa, mukaan lukien metastabiilit tilat
- → kaukana kuumista tähdistä vaihtoehtoisia ionisaatiomekanismeja:

b) Diffuusin kosmisen röntgensäteilyn aiheuttama ionisaatio (taustasäteily)

- absorptiokerroin $\kappa_\nu(b - f)$ (ks 1.2) pienenee $\propto \frac{1}{\nu^3}$ taajuuden kasvaessa \Rightarrow
Röntgensäteily $E > 1\text{ keV}$ ei vaikuta
- -"- $E = 0.2 \dots 1\text{ keV}$ tärkeää mutta huonosti tunnettu...
arvio $R_{0,1} = 10^{-17}\text{s}^{-1}$

c) Törmäysionisaatio (kosmisen säteilyn (= CR) hiukkaset)

- $C_{0,1} = N' Q_{0,1} = N' \overline{v \sigma_{CR}(v)}$, $N' = \text{CR hiukkasten lkm/cm}^3$

- vedyn törmäysionisaatio:

$$\sigma_{\text{CR}} = \frac{2\pi e^4 Z^2}{m_e \chi_0 v^2} \cdot 0.285 \left[\ln \frac{2m_e v^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2}) \chi_0} + 3.04 - \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (\text{H.Bethe 1933})$$

χ_0 = ionisaatioenergia, CR hiukkasten varaus $Z \cdot e$ ja nopeus v

- $\Rightarrow \sigma_{\text{CR}} \propto v^{-2}$ ts. pienienergiset hiukkaset ($e < 100$ MeV) määrääviä σ_{CR} :lle.
- käytämällä havainnoista arvioitua N'_{CR} arvoa $\Rightarrow C_{0,1} \simeq 10^{-17} \text{s}^{-1}$

Termisten elektronien aiheuttama törmäysionisaatio:

- $T \gg 10\ 000$ K
- $E \approx 10^2 \dots 10^3$ eV $\Rightarrow \sigma(H) \sim 10^{-17} \text{cm}^2$
 $\Rightarrow Q_{0,1}(H) \approx \bar{v} \cdot \sigma = 10^{-11} \sqrt{T}$

d) Rekombinaatiot:

- rekombinaationopeus

$$R_{i+1,i} = N_e \sum_n \alpha_{i,n} = N_e \alpha_i$$

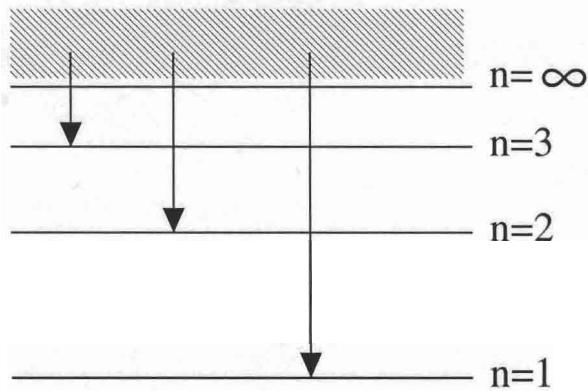
$\alpha_{i,n}$ rekombinaatiokerroin, ionisaatiotila $i+1 \rightarrow i$, viritystila n

- α_i (kokonais)rekombinaatiokerroin

$$\alpha_{i,n} = \overline{v \sigma_{\gamma n}(v)} = \int v \sigma_{\gamma n}(v) \varphi(v, T) dv$$

$\sigma_{\gamma n}(v)$ = vaikutusala vapaan elektronin rekombinaatiolle ($\gamma \rightarrow n$)

$\varphi(v, T)$ = Maxwellin nopeusjakauma

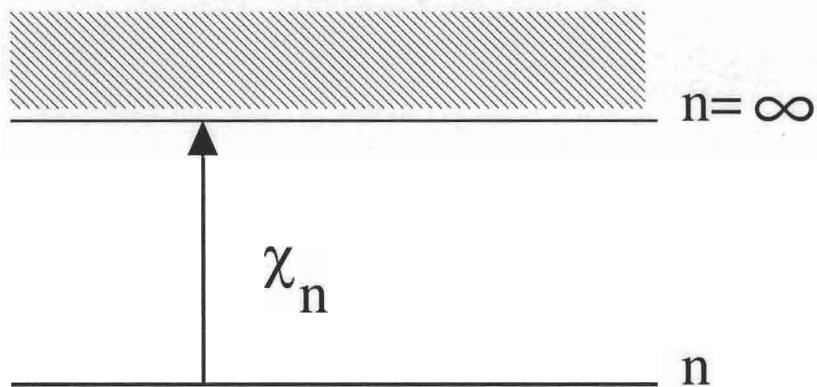


Vety ja vedynkaltaiset ionit:

- $\alpha_{0,n} = \frac{2^9 \pi^5 e^{10} Z^4}{m_e^2 c^3 h^3} \left(\frac{m_e}{6\pi kT} \right)^{3/2} e^{\chi_n/kT} F\left(\frac{\chi_n}{kT}\right) \frac{g_{nf}}{n^3}$

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t} dt}{t}$$

$$\overline{\chi_n} = \chi_0 - \chi_{0,n} = \text{ionisaatioenergia tilasta } n$$

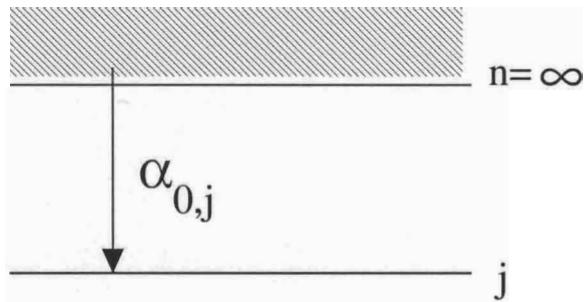


- merkitään:

$$\alpha_0^{(j)} = \sum_{n=j}^{\infty} \alpha_{0,n} = \frac{2.06 \cdot 10^{-11} Z^2}{\sqrt{T}} \phi_j\left(\frac{\chi_1}{kT}\right) \quad [\text{cm}^3 \text{s}^{-1}]$$

- $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0$
- $\alpha_0^{(2)} = \alpha_0 - \alpha_{0,1}$

- $\alpha_0^{(j)}$: Rekombinaatiot ionisaatiotilaan $i = 0$
ja viritystiloille, joilla $n \geq j$



1.3 HII alueet

Vedyn ionisaatiosapaino kuuman tähden läheellä

- Oletetaan:
 1. $N_0 + N_1 = N_H = \text{vakio}$
 2. elektronit pelkästään vedystä peräisin $\Rightarrow N_e = N_1$
 3. törmäysionisaatot merkityksettömiä
- statistinen tasapainoyhtälö: ionisaatot = rekombinaatiot

$$N_0 R_{0,1} = N_1 R_{1,0} = N_1 N_e \alpha_0$$

- Edellä arvioitu: $R_{0,1} \approx 10^{-8} \text{s}^{-1}$ (spektriluokka O5)

$$\alpha_0 \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{s}^{-1} \text{cm}^3, T \approx 10^4 \text{K}$$

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{R_{0,1}}{N_e \alpha_0} = \frac{10^{-8}}{4 \cdot 10^{-13} N_e} = 2.5 \cdot 10^4 / N_e$$

$$N_e \approx 10^2 \dots 10^3 \text{cm}^{-3} \Rightarrow \frac{N_1}{N_0} \gg 1 \text{ (Korkea ionisaatioaste!)}$$

$$N_{0,1} \approx N_0 \approx \frac{N_1 N_e}{2.5 \cdot 10^4} \approx \frac{N_e^2}{2.5 \cdot 10^4}$$

$$N_e = 10^2 \dots 10^3 \text{cm}^{-3} \Rightarrow N_{0,1} \approx 0.4 \dots 40 \text{cm}^{-3}$$

- Absorptiokerroin: (bound-free): $n \rightarrow f$

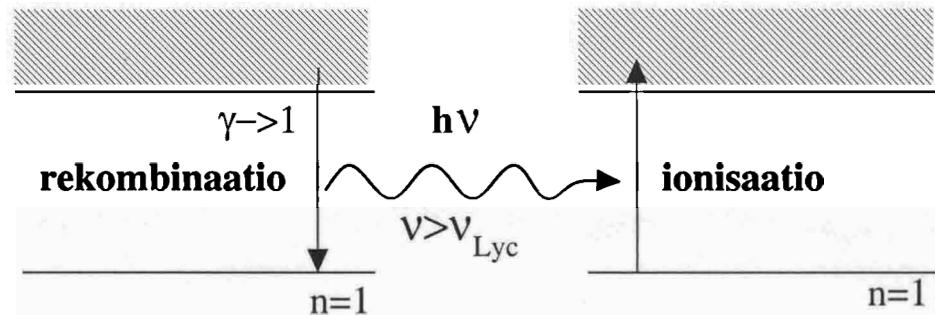
$$\kappa_\nu(n-f) \approx 3 \cdot 10^{29} \frac{Z^4}{n^5 \nu^3} g_{n-f} \cdot N_{0,n}$$

$n = 1$; $\lambda \approx 912 \text{ Å}$; $g_{n-f} \approx 0.8$

$\Rightarrow \kappa_\nu(b-f) \approx 0.4 \cdot 10^{-17} \dots 0.4 \cdot 10^{-19} \text{ cm}^{-1}$ (Lyman kontinuumiabsorptio)

\Rightarrow optinen paksuus $\tau_{\nu_0} \approx 1$, kun $d = 2.5 \cdot 10^{17} - 2.5 \cdot 10^{19} \text{ cm} = 0.1 - 10 \text{ pc}$

\Rightarrow HII alueet optisesti paksuja Lyman kontinuumissa ($\lambda < 912 \text{ Å}$)



- Sätelynkuljetusongelma: ionisaatiokaavassa esiintyvä säteilyintensiteetti on

$$I_\nu = I_\nu^{(s)} + I_\nu^{(d)}$$

(s):tähden suora säteily, (d):diffuusi säteily rekombinaatioista

– huom.: $I_\nu^{(d)}$ voidaan jättää pois, jos tarkastellaan vain rekombinaatioita tiloihin $n \geq 2$, ts.

$$\alpha_0 \rightarrow \alpha_0^{(2)} = \alpha_0 - \alpha_{0,1}$$

- Merkitään ionisaatioastetta

$$x = \frac{N_1}{N_0+N_1} = \frac{N_1}{N_H}$$

$$N_e = N_1 = x \cdot N_H$$

$$N_0 = (1-x) \cdot N_H$$

- Tasapainoyhtälö:

$$(1-x)N_H R_{0,1} = x^2 N_H^2 \alpha_0$$

$$4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\kappa_{\nu} I_{\nu}^{(s)}}{h\nu} d\nu = x^2 N_H^2 \alpha_0^{(2)}$$

- Säteilynkuljetusyhtälö (pallosymmetrisen geometrija):

$$\frac{\partial I_{\nu}}{\partial r} \cos \vartheta - \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \vartheta} \frac{\sin \vartheta}{r} = -\kappa_{\nu} I_{\nu} + \varepsilon_{\nu} \quad (1)$$

- $\phi_{\nu} = \int_{\Omega} I_{\nu}(\vartheta) \cos \vartheta d\omega = \int_{\Omega} I_{\nu}(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi =$ säteilyvuo

(vrt. $F = \int I_{\nu}(\vartheta) \cos \vartheta d\omega$ tasogeometriassa)

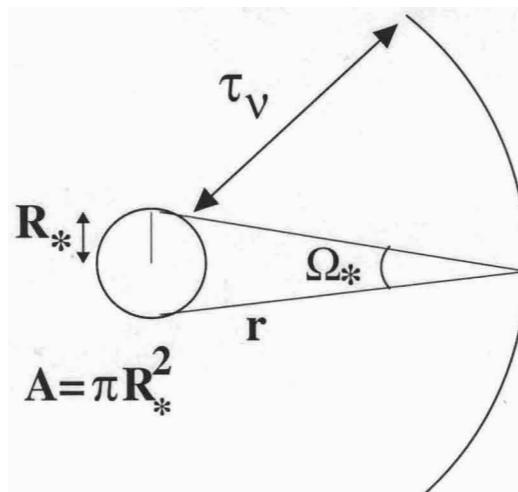
\Rightarrow säteilynkuljetusyhtälöstä (1) seuraa (todistus harjoitusteht.):

$$\frac{d\phi_{\nu}}{dr} + \frac{2}{r} \phi_{\nu} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \phi_{\nu}) = -4\pi \kappa_{\nu} I_{\nu} + 4\pi \varepsilon_{\nu} \quad (2)$$

- $\int \int I_{\nu}^* d\omega = \overline{I_{\nu}^*} \Omega_*$

$$\Omega_* = \frac{\pi R_*^2}{r^2}$$

$\overline{I_{\nu}^*}$ = keskimääräinen intensiteetti tähden pinnan yli



- Määritellään

- ekvivalentti isotrooppinen säteilyintensiteetti

$$I_{\nu} = 4\pi \cdot I_{\nu} = \overline{I_{\nu}^*} \cdot \Omega_*$$

– Ohennuskerroin

$$W = \frac{\Omega_*}{4\pi} = \frac{R_*^2}{4r^2}$$

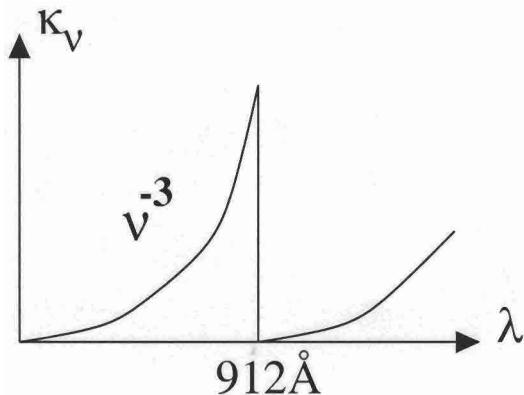
ts. I_ν -n ja \overline{I}_ν^* -n aiheuttama säteilytiheys sama.

- Absorptio kaasussa: $\overline{I}_\nu^* \rightarrow \overline{I}_\nu^* \cdot e^{-\tau_\nu}$

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu dr = \kappa_{\nu,atom} \cdot N_0 \cdot dr = \kappa_{\nu,atom} (1-x) N_H dr$$

$$\kappa_\nu \propto \nu^{-3}, \quad \nu < \nu_0 \quad (\nu_0 : 912\text{\AA})$$

\Rightarrow lyhyet aallonpituuudet heikkenevät vähiten



- $I_\nu = I_\nu^{(s)} + I_\nu^{(d)}$

$I_\nu^{(d)}$: diffuusi säteily ($\lambda < 912\text{\AA}$) syntyy rekombinaatioista tilaan $n = 1$

vastaavasti: $\phi_\nu = \phi_\nu^{(s)} + \phi_\nu^{(d)}$

- Tilavuusemissio: $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu^{(s)} + \varepsilon_\nu^{(d)} = \varepsilon_\nu^{(d)}$ sumussa tähden ulkopuolella.
- Integroidaan kaava (2) yli Ly_c taajuuksien, $\lambda < 912\text{\AA}$ ja kerrotaan $4\pi r^2$:lla.

- otetaan huomioon, että

$$[4\pi r^2 \int_{\nu_0}^{\infty} (\phi_\nu^{(s)} + \phi_\nu^{(d)}) \frac{d\nu}{h\nu}] = L_c(r),$$

missä $L_c(r)$ = niiden fotonien lukumäärä Lyman kontinuumissa ($\nu > \nu_0$), jotka kulkevat r -säteisen pallopinnan läpi sekunnissa.

Säteilynkuljetusyhtälö (2) saadaan muotoon:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dr} \underbrace{\left[4\pi r^2 \int_{\nu_0}^{\infty} (\phi_{\nu}^{(s)} + \phi_{\nu}^{(d)}) \frac{d\nu}{h\nu} \right]}_{L_c(r)} = \\
 & \underbrace{4\pi r^2 \left[-4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\kappa_{\nu} (I_{\nu}^{(s)} + I_{\nu}^{(d)})}{h\nu} d\nu \right]}_{N_0 R_{0,1} = x^2 N_H^2 \alpha_0} + 4\pi r^2 \underbrace{\left[4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{\nu}^{(d)}}{h\nu} d\nu \right]}_{x^2 N_H^2 \alpha_{0,1}} \\
 & I_{\nu}^{(s)} = \overline{I}_{\nu}^* e^{-\tau_{\nu} \frac{\Omega_*}{4\pi}} = \overline{I}_{\nu}^* \cdot e^{-\tau_{\nu}} \cdot W \\
 & \frac{dL_c(r)}{dr} = 4\pi r^2 x^2 N_H^2 \underbrace{(\alpha_0 - \alpha_{0,1})}_{\alpha_0^{(2)}} \quad (3)
 \end{aligned}$$

Kaava (3) \Rightarrow jokaisella etäisyydellä r : Ulospäin liikkuvien Ly_c fotonien lukumäärän väheneminen/pituusyksikkö = rekombinaatioiden lukumäärä tiloihin $n \geq 2$.

Perustelu: Rekombinaatiot tiloihin $n \geq 2$ tuottavat fotoneita, jotka eivät voi aiheuttaa vedyn ionisaatioita. Nämä fotonit pääsevät sen vuoksi (lähes) esteettömästi pakennemaan HII alueesta (päinvastoin kuin ne fotonit jotka syntyvät rekombinaatiosta perustilaan $n = 1$ eivätkä pääse pakennemaan).

1.4 Ionisaatioasteen muutos säteen funktiona $x = x(r)$

Annettu: \overline{I}_{ν}^* = tähden spektrin energijakautuma

N_H = vedyn kokonaistiheys

Edellisen kappaleen perusteella:

- tähden lähettämän säteilyn intensiteetti etäisyydellä r
- $$I_{\nu}^{(s)}(r) = \overline{I}_{\nu}^* e^{-\tau_{\nu} \frac{R_*^2}{4r^2}} = \overline{I}_{\nu}^* e^{-\tau_{\nu}} W$$

- optinen paksuus

$$d\tau_\nu = \kappa_\nu dr = \kappa_{\nu,atom} \cdot (1-x) N_H dr$$

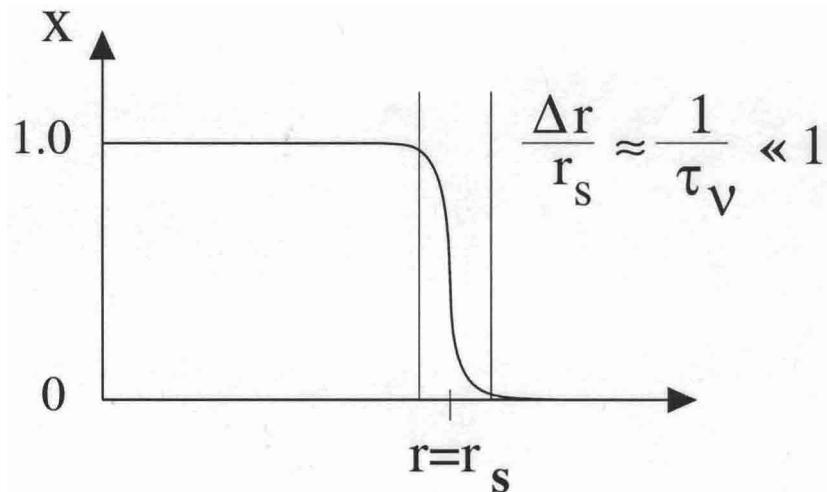
- ionisaatiotasapaino

$$(1-x) N_H R_{0,1} = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\kappa_\nu I_\nu^{(s)}}{h\nu} d\nu = x^2 N_H^2 \alpha_0^{(2)}$$

Yhtälöistä voidaan ratkaista $x = x(r)$ (Bengt Strömgren, 1939)

1. $x(r)$ pysyy aluksi melkein vakiona ≈ 1
2. $x(r)$ pienenee sitten lyhyellä matkalla $1 \rightarrow 0$

- τ kasvaa \rightarrow ionisaatio pienenee $\rightarrow N_0$ kasvaa $\rightarrow \tau \propto N_0$ kasvaa...



- Strömgrenin pallon sisällä $x \approx 1$: H^+ (HII)
- Strömgrenin pallon ulkopuolella $x \approx 0$: H^0 (HI)

Strömgrenin pallon säde:

$$r_s = r_s(\overline{I}_\nu^*, N_H)$$

vastaa vastaa etäisyyttä, joilla $L_c(r_s) = 0$. Kaavasta (3) saadaan

$$\int_{R_*}^{r_s} \frac{dL_c(r)}{dr} dr = \underbrace{L_c(r_s) - L_c(R_*)}_{0} = -L_c(R_*) = -4\pi N_H^2 \alpha_0^{(2)} \frac{1}{3} (r_s^3 - R_*^3)$$

Tässä $R_* \ll r_s$, joten Strömgrenin pallon säteelle saadaan lauseke

$$r_s^3 = 3 \frac{L_c(R_*)}{4\pi} \frac{1}{N_H^2 \alpha_0^{(2)}} = \frac{3 \cdot 4\pi R_*^2}{4\pi} \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\pi I_\nu^*}{h\nu} d\nu}{N_H^2 \alpha_0^{(2)}}$$

- $T = 10^4 K \Rightarrow \alpha_0^{(2)} = \alpha_0 - \alpha_{0,1} = 2.6 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^3 \text{s}^{-1}$
- $r_s = 1.23 \cdot 10^{-7} \left(\frac{R_*}{R_\odot}\right)^{2/3} N_{\text{Ly}}^{1/3} N_{\text{H}}^{-2/3} \text{ [pc]}$

Pääsarjan tähtien Strömgrenin pallojen säteet, kun $N_{\text{H}} \approx 1 \text{ H-atomi/cm}^3$

Spektril.	M_v	$T_L(K)$	$L_c(R_*)$ photons/s	r_s pc
O5	-5.6	48 000	$4.7 \cdot 10^{49}$	108
O6	-5.5	40 000	$1.7 \cdot 10^{49}$	74
O7	-5.4	35 000	$6.9 \cdot 10^{48}$	56
O8	-5.2	33 000	$4.0 \cdot 10^{48}$	51
O9	-4.8	32 000	$1.7 \cdot 10^{48}$	34
O9.5	-4.6	31 000	$6.9 \cdot 10^{47}$	29
B0	-4.4	30 000	$4.7 \cdot 10^{47}$	23
B0.5	-4.2	26 000	$6.8 \cdot 10^{46}$	12

Tähden viritysparametri (excitation parameter)

$$u = r_s N_{\text{H}}^{2/3} \approx r_s N_{\text{e}}^{2/3} \text{ [pc cm}^{-2}\text{]}$$

$u^3 \propto R_*^2 N(Ly_c) =$ tähdestä tulevien Ly_c fotonien lukumäärä.

- jos N_{H} on riittävän pieni, saadaan hyvinkin laajoja HII alueita. Havainnot osoittavat, että Linnunradassa on diffuusia H_{α} ja termistä radioemissiota laajoista, heikoista HII alueista.
- pölyhiukkasten aiheuttama ekstinktio voi pienentää Strömgrenin sädettä: mitä suurempi tiheys sitä suurempi efekti ($A_V = 1.0 \rightarrow r'_s/r_s \approx 0.5$)
- heliumin ionisoituminen vaatii $h\nu > 24.6 \text{ eV}$, $\lambda < 504 \text{ Å} \rightarrow$ vain spektriluokkaa $\sim O8$ kuumempien tähtien ympäristössä ($r_s^{\text{He}} \lesssim r_s^{\text{H}}$)

1.5 Ionisoituneen ja neutraalin vedyn rajakerroksen paksuus

$$dr \ll r \Rightarrow$$

1. voidaan olettaa tasolevy
2. ohennuskerroin W on vakio koko kerroksessa
3. $N_{\text{H}} = \text{vakio}$

$$\bullet x^2 N_{\text{H}}^2 \alpha_0^{(2)} = (1-x) N_{\text{H}} R_{0,1} \quad \text{ja} \quad R_{0,1} \propto e^{-\tau}, \quad x = x(r)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1-x} N_{\text{H}} = C \cdot e^{-\tau}$$

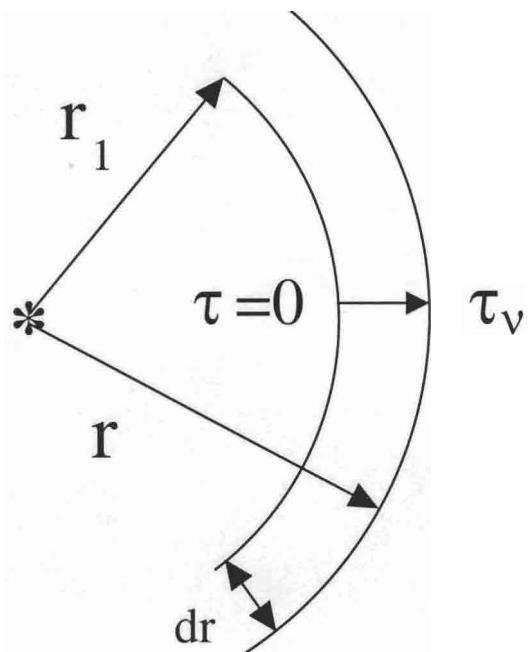
$$\bullet d\tau = (1-x) N_{\text{H}} \cdot \kappa dr \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = N_{\text{H}} \kappa \int_{r_1}^r (1-x) dr'$$

Näistä saadaan

$$\ln\left(\frac{x^2}{1-x} N_{\text{H}}\right) = \ln C - \tau, \quad \tau(r) = 0 \text{ kun } r = r_1$$

Derivoidaan x :n suhteenv

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^2} \cdot \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} dx &= -d\tau \\ \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx &= -d\tau = -(1-x)N_H\kappa dr \\ \Rightarrow N_H\kappa dr &= \left(-\frac{2}{x(1-x)} - \frac{1}{(1-x)^2}\right) dx \end{aligned}$$



Integroidaan rajakerroksen yli

$$N_H\kappa \int_{r_1}^r dr = N_H\kappa(r - r_1) = 2/r_1 \ln \frac{1-x}{x} - /_{r_1}^r \frac{1}{1-x}$$

$$N_H\kappa(r - r_1) = 2 \ln\left(\frac{1-x}{x} \cdot \frac{x_0}{1-x_0}\right) - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x_0}$$

$$\Rightarrow x = x(r)$$

$$x = x_0 \text{ kun } \tau = 0, r = r_1$$

Oletetaan arvot $x = x_0 = 0.999$, kun $\tau = 0$.

x	$N_{\text{H}}\kappa(r - r_1)$	τ
0.999	0	0
0.997	669	1.1
0.990	907	2.3
0.970	963	3.5
0.900	999	4.7
0.700	1009	6.4
0.500	1012	7.6

Siirtymäkerros $x = 0.90 \rightarrow 0.50$ vastaa geometrista paksuutta $N_{\text{H}}\kappa(r - r_1) = 13$

Oletetaan:

$$N_{\text{H}} = 10^3 \text{ cm}^{-3}, \quad \sigma = 10^{-17} \text{ cm}^2 \rightarrow N_{\text{H}}\kappa \approx 10^{-14} \text{ cm}^{-1} = 10^4 \text{ pc}^{-1}$$
$$\Rightarrow \underline{r - r_1} = \Delta r = \frac{13}{10^4} \text{ pc} \approx \underline{10^{-3} \text{ pc}}$$

2 Einsteinin kertoimet

Atomien ja molekyylien energia on kvantittunut. Energiatasojen välillä tapahtuu siirtymiä, osa spontaanisti, osa säteilykentän vaikutuksesta. Siirtymätodennäköisyyksiä kuvaavia kertoimia kutsutaan myös Einsteinin kertoimiksi.

Seuraavassa merkitään tason n energiaa E_n . Oletetaan $E_n > E_{n'}$, jolloin siirtymässä $n \rightarrow n'$ syntyyvien fotonien energia on $h\nu = \Delta E = E_n - E_{n'}$

1. Spontaani emissio

- todennäköisyys, että tilassa n oleva atomi/molekyyli siirtyy ajassa dt alemalle energiatasolle n' on

$$\frac{N(n \rightarrow n')}{N_n} = A_{n,n'} \cdot dt,$$

N_n on tilassa n olevien atomien (tai molekyylien) lukumäärä [cm^{-3}]

$A_{n,n'}$ = siirtymän spontaanin emission siirtymätodennäköisyys

l. Einsteinin kerroin [s^{-1}]

- siirtymien kokonaismäärä tilavuusyksikköä kohden ajassa dt

$$N(n \rightarrow n') = N_n \cdot A_{n,n'} \cdot dt$$

- atomeille siirtymätodennäköisyys on tyypillisesti $A_{n,n'} \sim 10^8 - 10^9 \text{ s}^{-1}$, toisaalta esim. CO molekyylin alimmille rotaatiosiirtymille $A_{n,n'} < 10^{-6} \text{ s}^{-1}$
- spontaani emissio on riippumaton säteilykentästä ja syntyvä säteily on isotrooppista (ei suuntariippuvuutta)

2. Indusoitu emissio

- saapuva foton laukaisee siirtymän ylemmältä energiatasolta alemalle (ei absorboidu!)

- siirtymätodennäköisyys on verrannollinen säteilyn intensiteettiin, I_ν

$$N(n \rightarrow n') = N_n \cdot B_{n,n'} \cdot I_\nu \cdot dt$$

$B_{n,n'}$ = indusoidun emission siirtymätodennäköisyys
(Einsteinin kerroin) $[s^{-1} W^{-1} m^2 Hz sr]$

- indusoitu emissio on epäisotrooppista: emittoitunut foton etenee samaan suuntaan ja samassa vaiheessa kuin siirtymän indusoinut foton

3. Absorptio

- saapuva foton voi absorboitua, ja aikaansaada siirtymän alemmalta energiasolalta ylemmälle

$$N(n' \rightarrow n) = N_{n'} \cdot B_{n',n} \cdot I_\nu \cdot dt$$

$B_{n',n}$ = absorption todennäköisyyskerroin (Einsteinin kerroin)
 $[s^{-1} W^{-1} m^2 Hz sr]$

- vain fotonit, joiden taajuus vastaa energiasojojen erotusta voivat absorboitua, $h\nu = E_n - E_{n'}$

- Nettoabsorptio

- edellä nähtiin, että saapuvat fotonit voivat joko absorboitua (\rightarrow säteilyn intensiteetti pienenee) tai indusoida uusien fotonien emission (\rightarrow säteilyn intensiteetti kasvaa)
- nettoabsorptio saadaan vähentämällä absorboituneiden fotonien määrää indusoituneiden fotonien lukumäärää

absorptio:	$N(n' \rightarrow n) = N_{n'} \cdot B_{n',n} \cdot I_\nu \cdot dt$
indusoitu emissio	$N(n \rightarrow n') = N_n \cdot B_{n,n'} \cdot I_\nu \cdot dt$
nettoabsorptio	$(N_{n'} \cdot B_{n',n} - N_n \cdot B_{n,n'})I_\nu dt$

- Spontaani ja indusoitu emissio

- oletetaan, että hiukkasten törmäysten aiheuttamat energiasiirtymät voidaan jättää huomiotta \Rightarrow energiasojojen miehitys riippuu ainoastaan edellä luetelluista spontaaneista ja säteilykentän indusoimista siirtymistä
- oletetaan säteilytasapaino: siirtymien $n \rightarrow n'$ lukumäärä on yhtä suuri kuin siirtymien $n' \rightarrow n$ lukumäärä

$$N_n A_{n,n'} = (N_{n'} B_{n',n} - N_n B_{n,n'}) I_\nu$$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{N_n}{N_{n'}} A_{n,n'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} (B_{n',n} - B_{n,n'} \frac{N_n}{N_{n'}})$$

$$\text{Bolzmann: } \frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-(E_n - E_{n'})/kT} \Rightarrow$$

$$\frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu/kT} A_{n,n'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} (B_{n',n} - B_{n,n'} \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu/kT})$$

$$\underbrace{\frac{g_n}{g_{n'}}}_{\text{vakio}} A_{n,n'} = \underbrace{\frac{2h\nu^3}{c^2} B_{n',n}}_{\text{vakio}} \frac{e^{h\nu/kT} - \frac{g_n}{g_{n'}} \frac{B_{n,n'}}{B_{n',n}}}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

- koska atomaariset vakiot $A_{n,n'}$, $B_{n,n'}$ ja $B_{n',n}$ eivät riipu lämpötilasta, on edellisen lausekkeen osoittajan ja nimittäjän oltava yhtäsuuret, eli

$$\frac{g_n}{g_{n'}} \frac{B_{n,n'}}{B_{n',n}} = 1$$

ja Einsteinin kerrointen A ja B välille saadaan riippuvuus

$$\frac{g_n}{g_{n'}} A_{n,n'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{n',n} \Rightarrow A_{n,n'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{n,n'}$$

- huom.

* jotta Planckin säteilylaki, $I = I(T_{\text{ex}})$, olisi voimassa, on atomissa tapahduttava indusoitua emissiota (Einstein, 1917)

* Wienin approksimaatio ($h\nu/kT \gg 1$)

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}, \Rightarrow$$

$$B_{n,n'} I_\nu = \underbrace{B_{n,n'} \frac{2h\nu^3}{c^2}}_{A_{n,n'}} e^{-h\nu/kT}, \Rightarrow$$

$$B_{n,n'} I_\nu = A_{n,n'} \underbrace{e^{-h\nu/kT}}_{\ll 1} \ll A_{n,n'}$$

\Rightarrow spontaanit emissiot dominoivat UV-alueessa

* Rayleigh-Jeans approksimaatio ($h\nu/kT \ll 1$)

$$I_\nu = \frac{2h\nu^2 kT}{c^2}, \Rightarrow$$

$$B_{n,n'} I_\nu = B_{n,n'} \frac{2\nu^2 kT}{c^2}, \Rightarrow$$

$$B_{n,n'} I_\nu = A_{n,n'} \underbrace{\frac{kT}{h\nu}}_{\gg 1} \gg A_{n,n'}$$

\Rightarrow indusoituneet emissiot dominoivat radioalueessa

- Einsteinin kertoimien yhteyts viiva-absorptiokertoimeen, \bar{k}

- yhteen kuutiosenttimetriin absorboituva säteilytaho on

$$P_\nu = 4\pi I_\nu \bar{k} \rho$$

- toisaalta energia voidaan esittää absorboituneiden fotonien aiheuttamien siirtymien avulla

$$4\pi I_\nu \bar{k} \rho dt = N(n' \rightarrow n) h\nu_0 = N_{n'} B_{n',n} I_\nu dt h \nu_0$$

$$\Rightarrow \bar{k} \rho = \frac{1}{4\pi} N_{n'} B_{n',n} h \nu_0$$

- nettoabsorptio saadaan poistamalla indusoituneen emission osuus

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \rho = (N_{n'} B_{n',n} - N_n B_{n,n'}) I_\nu h\nu_0$$

\bar{k}' negatiiviset absorptiot huomioonottava
massa-absorptiokerroin

$N_{n'}$ energiatilan n' miehitysluku

N_n energiatilan n miehitysluku

$$4\pi I_{\nu_0} \bar{k}' \rho = N_{n'} B_{n',n} \left(1 - \frac{N_n}{N_{n'}} \frac{B_{n,n'}}{B_{n',n}}\right) I_\nu h\nu_0$$

$g_n B_{n,n'} = g_{n'} B_{n',n}$ ja Boltzmann: $\frac{N_n}{N_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} e^{-h\nu_0/kT}$

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \rho = N_{n'} B_{n',n} (1 - e^{-h\nu_0/kT}) I_\nu h\nu_0$$

$$\begin{aligned} 4\pi I_\nu \bar{k}' \rho &= N_{n'} B_{n',n} I_\nu h\nu_0 \\ \Rightarrow N_{n'} B_{n',n} &= \frac{4\pi \bar{k}' \rho}{h\nu_0} \end{aligned}$$

$$4\pi I_\nu \bar{k}' \rho = \frac{4\pi \bar{k}' \rho}{h\nu_0} (1 - e^{-h\nu_0/kT}) I_\nu h\nu_0$$

$$\bar{k}' = \bar{k} (1 - e^{-h\nu_0/kT})$$

- nettoabsorptio saadaan siis vähentämällä absorboituneesta säteilyenergiasta induoituneen emission osuus (negatiiviset absorptiot) → massa-absorptiokerroin \bar{k} on korjattava yo. sulkulausekkeella

* normaalissa absorptiossa $h\nu/kT > 0 \Rightarrow 0 < 1 - e^{-h\nu/kT} < 1$

* maserin tapauksessa $h\nu/kT_{\text{ex}} < 0$, koska $T_{\text{ex}} < 0$
 $\Rightarrow (1 - e^{-h\nu/kT_{\text{ex}}}) < 0 \Rightarrow \bar{k}' < 0$

3 Säteily tähtienvälisessä kaasussa.

3.1 Tähtienväisen materian emissio- ja absorptiomekanismit

- Neutraali kaasu

- 1. optiset, UV ja radio - absorptioviivat
- 2. 21 cm HI emissioviiva
- 3. Molekyylien emissioviivat: terminen ja maser-emissio

- Ionisoitunut kaasu

- 1. Viivaemissio: optinen H_α, H_β, \dots
 - radiorekombinaatioviivat
 - röntgen viivat
- 2. jatkuva emissio: optinen (bound-free)
 - radio (free-free)

- Relativistiset elektronit

- 1. Synkrotronisäteily
- 2. Käänteinen Comptonin ilmiö $e + \gamma(3K) \rightarrow e + \gamma(x-ray)$

- Relativistiset protonit $p + p: \pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$

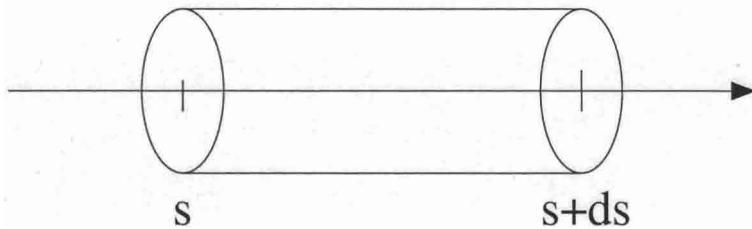
- Tähtienvälinen pöly

- 1. UV ja optinen jatkuva absorptio ja sironta
- 2. jatkuva ja "viiva" emissio IR-alueessa
- 3. optinen ja IR "viiva"-absorptio
- 4. Röntgensäteilyn sironta

- Säteilyn vuorovaikutus interstellaarisen magneettikentän kanssa
 1. Faradayn rotaatio
 2. Zeemannin jakautuminen
 3. Interstellaarinen polarisaatio
- Vapaiden elektronien vaikutus:
 1. Säteilyn dispersio (pulsarit)
 2. Interstellaarinen skintillaatio
 3. Faradayn rotaatio

3.2 Säteilynkuljetusyhtälö

- ε_ν = emissiokerroin (tilavuusemissio)
- $j_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\rho}$ massaemissiokerroin
 - $\varepsilon_\nu d\omega$ = säteilyenergia [$\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}$] avaruuskulmaan $d\omega$
 - I_ν = säteilyn intensiteetti,
 $I_\nu d\omega$ = energia [$\text{s}^{-1}\text{Hz}^{-1}$] kohtisuorassa säteilyn etenemissuuntaa vastaan olevan 1 cm^2 pinnan läpi avaruuskulmaan $d\omega$



- $dI_\nu d\omega = \varepsilon_\nu d\omega ds$ lisäys välillä $s, \dots s + ds$
- $dI_\nu d\omega = -\kappa_\nu I_\nu d\omega ds$ vähennys välillä $s, \dots s + ds$

- κ_ν = absorptiokerroin
- $k_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\rho}$ massa-absorptiokerroin

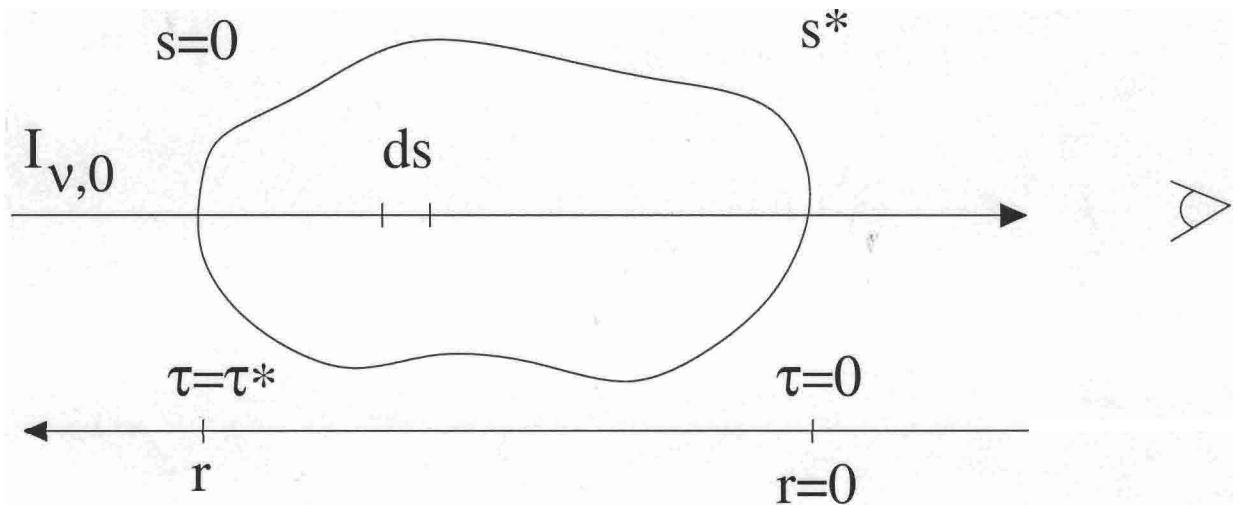
$$dI_\nu d\omega = \varepsilon_\nu d\omega ds - \kappa_\nu I_\nu d\omega ds$$

⇒ Säteilynkuljetusyhtälö:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + \varepsilon_\nu$$

Pelkkä absorptio : $\varepsilon_\nu \equiv 0 \Rightarrow I_\nu(s^*) = I_{\nu,0} e^{-\int_0^{s^*} \kappa_\nu(s) ds}$

Optinen syvyys (optinen paksuus): $\tau = \int_0^{s^*} \kappa_\nu(S) dS$
 $dr = -ds \quad \Rightarrow \quad d\tau_\nu = \kappa_\nu dr = -\kappa_\nu ds \quad \Rightarrow \quad \tau_\nu = \int_0^r \kappa_\nu dr = \int_{s^*}^s \kappa_\nu ds$



Säteilynkuljetusyhtälö:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\varepsilon_\nu}{\kappa_\nu}, \quad \frac{\varepsilon_\nu}{\kappa_\nu} = S_\nu \text{ (lähdefunktio, 'source function')}$$

Tähtienväisessä avaruudessa: $S_\nu = S_\nu(I_\nu)$

Muodollinen ratkaisu säteilynkuljetusyhtälölle:

$$I_\nu = I_\nu(\tau_\nu = 0) = \underbrace{\int_0^{\tau_\nu^*} S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu}_{\text{pilvestä tuleva komponentti}} + \underbrace{I_{\nu,0} e^{-\tau_\nu^*}}_{\text{tausta}}$$

$$I_{\nu,0} = I_\nu(s = 0)$$

Koska lähdefunktio riippuu yleensä intensiteetistä, $S_\nu = f(I_\nu)$, tämä on integraaliyhtälö I_ν :n suhteen.

Yksinkertaistettu tarkastelu (joskus riittävä):

$$S_\nu = \text{vakio} \Rightarrow I_\nu = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu^*}) + I_{\nu,0} e^{-\tau_\nu^*}$$

Rajatapaukset

$$\tau_\nu^* \ll 1 : I_\nu = \tau_\nu^*(S_\nu - I_{\nu,0}) + I_{\nu,0} \approx \tau_\nu^* S_\nu + I_{\nu,0}$$

$$\tau_\nu^* \gg 1 : I_\nu = S_\nu$$

Paikallinen termodynäaminen tasapaino(LTE):

lähdefunktio saadaan Kirchhoff-Planckin funktiosta *paikallista lämpötilan arvoa käyttää*:

$$S_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}$$

Radiotaajuusalueessa: pätee (kun $\lambda > 1\text{cm}, T > 10K$):

$$\frac{h\nu}{kT} = \frac{1.44}{\lambda[\text{cm}] \cdot T[\text{K}]} \ll 1$$

$$\Rightarrow B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT \text{ (Rayleigh-Jeans)}$$

Radioastronomiassa:

- Intensiteetti → Säteilylämpötila $T_r(\nu)$ (radiation temperature)

→ kirkkauslämpötila $T_b(\nu)$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_r(\nu)}-1} \Rightarrow T_r(\nu) \text{ (brightness temperature)}$$

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b(\nu) \Rightarrow T_b(\nu) = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu$$

- $\frac{h\nu}{kT} \ll 1 : T_b = T(1 - e^{-\tau_\nu^*}) + T_{b,0}e^{-\tau_\nu^*}, \quad T_{b,0} = \text{taustataivaan kirkkauslämpötila}$

$$\frac{h\nu}{kT} \ll 1 : J(T_b) = J(T)(1 - e^{-\tau_\nu^*}) + J(T_{b,0})e^{-\tau_\nu^*}; \quad J(T) = \frac{h\nu/k}{e^{h\nu/kT}-1}$$

- $\tau^* \gg 1 : T_b = T$

$$\tau^* \ll 1 : T_b = \tau_\nu^* T + T_{b,0}$$

Optinen paksuus τ määräytyy absorptiokertoimen perusteella, joka riippuu atomien tai molekyylien lukumäärästä [cm^{-2}] näkösäteellä; niiden oltava lisäksi sellaisessa ionisaatio- ja viritystilassa että ne voivat absorboida k.o. taajuudella.

Jotta havaitusta intensiteetistä (tai T_b :stä) voitaisiin johtaa k.o. atomien tai molekyylien runsaus, pitää tuntea viritys- ja ionisaatio-olosuhteet. ts. eri energiatilojen suhteelliset miehitysluvut.

Jos TE voimassa:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Boltzmann} \\ \text{Saha} \\ T \\ n_e \end{array} \right\} \Rightarrow \text{mehitysluvut}$$

Mutta tähtienvälisissä olosuhteissa yleensä TE ei päde, koska tällöin pitäisi törmäysprosessien määrätä miehitystilojen miehitysluvut, ts.

sama T → Kineettiset energiat

.. → miehitysluvut

.. → säteilykenttä

Tähtienvälisessä avaruudessa:

tiheys pieni ⇒ törmäykset harvinaisia

säteilykentän kirkkauslämpötila \neq kaasun kineettinen lämpötila

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Viritys \& ionisaatioteoria} \\ \text{Lähdefunktion } S_\nu \text{ laskeminen} \end{array} \right\} \text{laajennettava tähtienväli. non-LTE olosuht.}$$

Sitä varten: Tarkasteltava yksityiskohtaisesti kaikkia oleellisia viritys-, laukaisu-, ionisaatio- ja rekombinaatioprosesseja

Suuria poikkeamia LTE:stä esiintyy spektriviivasäteilyssä, jota on sen tähden tarkasteltava riippumattomasti LTE oletuksesta

3.3 Spektriviivaemissio ja -absorptio tähtienvälistä olosuhteissa

3.3.1 EMISSIO- JA ABSORPTIOKERTOIMET

- $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu^l + \varepsilon_\nu^c$ (l=line, c=continuum)

$$\kappa_\nu = \kappa_\nu^l + \kappa_\nu^c$$

- Spontaani emissio (energia $s^{-1} cm^{-3} sterad^{-1}$)

$$\int_{line} \varepsilon_\nu^l d\nu = \frac{1}{4\pi} h \nu_{nm} A_{nm} N_n$$

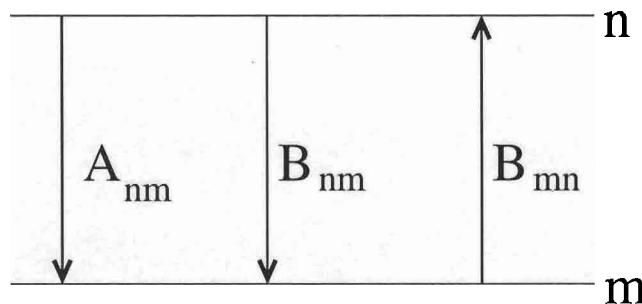
- Stimuloitu emissio: $\propto I_\nu$ ja yhdistetään siksi absorptiotermiin:

$$\int_{line} \kappa'_\nu l I_\nu d\nu = \underbrace{\frac{1}{4\pi} h \nu_{nm} N_m B_{mn} u(\nu_{nm})}_{absorptio} - \underbrace{\frac{1}{4\pi} h \nu_{nm} N_n B_{nm} u(\nu_{nm})}_{stimuloitu emissio}$$

= absorboitu energia $s^{-1} cm^{-3} sterad^{-1}$ koko viivan yli integroituna

$$u(\nu_{nm}) = \text{säteilytiheys taajuudella } \nu_{nm}, u(\nu_{nm}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} I(\nu_{nm}) d\Omega$$

$$\text{Jos } I(\nu_{nm}) = I_\nu \text{ suunnasta riippumaton } \Rightarrow u(\nu_{nm}) = \frac{4\pi}{c} I_\nu$$



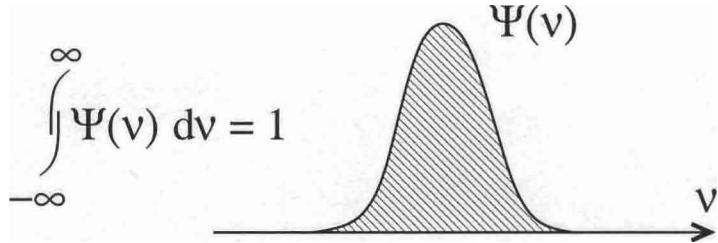
Oletetaan: I_ν on viivan taajuusalueen yli vakio \Rightarrow

$$\int_{viiva} \kappa'_\nu l I_\nu d\nu = I_\nu \int_{viiva} \kappa'_\nu d\nu = \frac{I_\nu}{c} h \nu_{nm} (N_m B_{mn} - N_n B_{nm})$$

Emissio- ja absorptiokertoimet:

$$\bullet \quad \varepsilon_{\nu}^l = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} A_{nm} N_n \cdot \psi(\nu) \quad (1)$$

$\psi(\nu)$ = normeerattu viivaprofili $\int_{viiva} \psi(\nu) d\nu = 1$



$$\bullet \quad \kappa_{\nu}^l = \frac{h\nu_{nm}}{c} (B_{mn} N_m - B_{nm} N_n) \cdot \psi(\nu)$$

$$= \frac{h\nu_{nm}}{c} B_{mn} N_m \left(1 - \frac{g_m}{g_n} \frac{N_n}{N_m}\right) \cdot \psi(\nu)$$

$$\kappa_{\nu}^l = \frac{h\nu_{nm}}{c} B_{nm} N_n \left(\frac{g_n}{g_m} \frac{N_m}{N_n} - 1\right) \cdot \psi(\nu) \quad (2)$$

jossa käytetty tietoa $g_m B_{mn} = g_n B_{nm}$, g_m, g_n = statisitiset painot

Seuraavassa käytetään Boltzmannin kaavaa $\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-h\nu/kT}$

ja relaatiota $A_{nm} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{nm}$

Merkitään: $\Delta N = \frac{g_n}{g_m} N_m - N_n = \frac{g_n}{g_m} N_m (1 - e^{-h\nu/kT})$

Silloin $\kappa_{\nu}^l = \frac{h\nu_{nm}}{c} \cdot B_{nm} \cdot \Delta N \cdot \psi(\nu)$

$\Delta N > 0 \Rightarrow T > 0$ yleensä on näin

$\Delta N < 0 \Rightarrow T < 0$ populaatioinversio

Lähdefunktio:

$$(1), (2) \Rightarrow S_{\nu}^l = \frac{\varepsilon_{\nu}^l}{\kappa_{\nu}^l} = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \frac{1}{\left(\frac{g_n}{g_m} \frac{N_m}{N_n} - 1\right)} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\left(\frac{g_n}{g_m} \frac{N_m}{N_n} - 1\right)}$$

Mikäli Boltzmannin kaava voimassa \Rightarrow

$$S_{\nu}^l = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = B_{\nu}(T)$$

Kun $\Delta N < 0$ (populaatioinversio) $\Rightarrow S_\nu^l < 0$

\Rightarrow Stimuloitu emissio voittaa absorption

\Rightarrow Säteily vahvistuu kulkissaan väliaineen läpi (= MASER!)

3.3.2 STATISTINEN TASAPAINO

- Edellä nähty että $\frac{N_m}{N_n}$ tarvitaan S_ν^l , ε_ν^l ja κ_ν^l :n laskemiseksi.
- $\frac{N_m}{N_n}$ saadaan suoraan Boltzmannin kaavasta **jos** LTE voimassa.

Seuraavassa tarkastellaan Non-LTE (NLTE) tilannetta.

- oletetaan stationääriinen tila (ts. miehitysluvut ajallisesti vakioita)
- tarkastellaan yhtä tilaa, jota merkitään n :llä:
tilalle n tulevien siirtymien lkm/s = tilalta lähtevien siirtymien lkm/s.

Merkitään

$$R_{nm} = \text{säteiliysiirtymien lkm/s} \quad n \rightarrow m$$

$$R_{mn} = \text{säteiliysiirtymien lkm/s} \quad m \rightarrow n$$

$$C_{nm} = \text{törmäyssiirtymien lkm/s} \quad n \rightarrow m$$

$$C_{mn} = \text{törmäyssiirtymien lkm/s} \quad m \rightarrow n$$

Jokaiselle n :n arvolle saadaan yhtälö:

$$\frac{dN_n}{dt} = - \underbrace{N_n \sum_m (R_{nm} + C_{nm})}_{\text{tilasta } n \text{ lähtevät}} + \underbrace{\sum_m N_m (R_{mn} + C_{mn})}_{\text{tilaan } n \text{ saapuvat}} = 0$$

Tämän yhtälöryhmän

$$\frac{dN_1}{dt} = \dots = 0$$

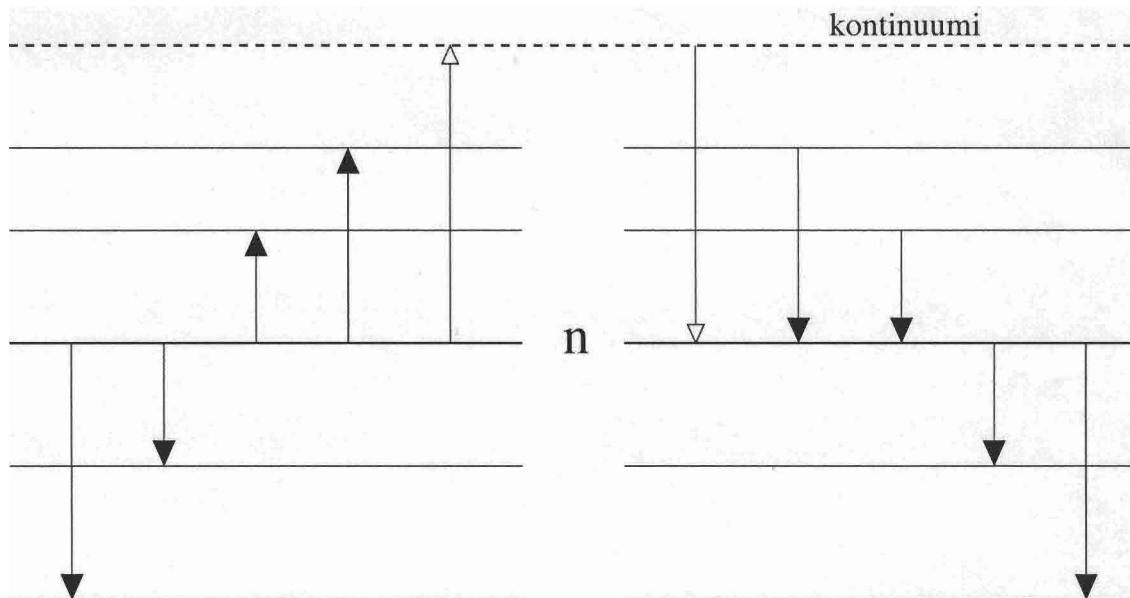
$$\frac{dN_2}{dt} = \dots = 0$$

$$\frac{dN_n}{dt} = \dots = 0$$

ratkaisuna saadaan miehitysluvut N_1, N_2, \dots, N_n (jos säteilykenttä tunnetaan).

Edellisistä yhtälöryhmässä on ainoastaan $n-1$ toisistaan riippumatonta yhtälöä, ja yksi yhtälöistä on korvattava ehdolla $\sum N_i =$ vakio (tutkittavan atomin tai molekyylin kokonaistiheys).

Yhtälöryhmä voidaan laajentaa koskemaan myös sitä tapausta, että symboli m tarkoittaa kontinuumia, jolloin $n \rightarrow m$ tarkoittaa ionisaatiota ja $m \rightarrow n$ rekombinaatiota.



Jokaiselle arvolle n on:

$$N_n \left\{ \sum_{m < n} A_{nm} + \sum_m B_{nm} \cdot \frac{4\pi}{c} I_\nu + N' \sum_m Q_{nm} \right\} = \\ \sum_{m > n} N_m A_{mn} + \sum_m N_m B_{mn} \frac{4\pi}{c} I_\nu + N' \sum_m N_m Q_{mn}$$

$$\frac{dI_\nu}{ds} = \frac{h\nu_{nm}}{c} B_{mn} N_m \left(1 - \frac{g_m}{g_n} \frac{N_n}{N_m} \right) \psi(\nu) I_\nu + \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} A_{nm} N_n \psi(\nu)$$

Nähdään että statististen yhtälöiden termeissä on kertoimena säteilytiheys $\frac{4\pi}{c} I_\nu$. Se on ratkaistava samanaikaisesti säteilynkuljetusyhtälöistä, jotka puolestaan ovat riippuvaisia miehitysluvuista N_n ja N_m .

Säteiliyiirtymien kertoimet: A_{mn}, B_{mn}, B_{nm}

Törmäyssiirtymien kertoimet: C_{mn}, C_{nm}

$$C_{nm} = N' Q_{nm}$$

$$C_{mn} = N' Q_{mn}$$

$$N' = \text{törmäävien hiukkasten lkm/cm}^3$$

Relaatio Q_{nm} :n ja Q_{mn} :n välillä:

Termodynaaminen tasapaino:

$$N_n N' Q_{nm} = N_m N' Q_{mn} \quad \text{sekä} \quad \frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

$$\Rightarrow g_m Q_{mn} = g_n Q_{nm} e^{-\Delta E/kT} \quad \Delta E = E_n - E_m$$

$$\frac{Q_{mn}}{Q_{nm}} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\Delta E/kT} \rightarrow T = T_{kin}$$

Tämä on voimassa myös non-LTE:ssä

3.3.3 VIRITTYMINEN TÄHTIENVÄLISISSÄ OLOSUHTEISSA

Oletetaan, että ionisaatio- ja rekombinaatioprosessit voidaan jättää huomiotta (ts. ainoastaan bound \leftrightarrow bound siirtymät)

\Rightarrow voidaan tarkastella statistisia yhtälöitä pelkästään sidotuille energiatiloille

Tarkastellaan eräitä idealisoituja erikoistapauksia:

1. Tapaus: 2 energiatilan systeemi (atomi tai molekyyli) optisessa alueessa

oletetaan, että siirtymä $2 \rightarrow 1$ vastaa optisen alueen spektriviiva \Rightarrow säteilykenttä voidaan esittää muodossa: $I_\nu = W \cdot B_\nu(T_*)$, jossa

- $T_* \approx 10\ 000$ K värilämpötila
- $W \approx 10^{-15}$ ohennuskerroin (dilution factor)

oletetaan, että törmäyskumppanina ovat elektronit $N' = N_e$.

Statistikiset yhtälöt saadaan muotoon:

$$N_1(B_{12} \frac{4\pi}{c} I_\nu + N_e Q_{12}) = N_2(B_{21} \frac{4\pi}{c} I_\nu + A_{21} + N_e Q_{21})$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{B_{12} \frac{4\pi}{c} I_\nu + N_e Q_{12}}{B_{21} \frac{4\pi}{c} I_\nu + A_{21} + N_e Q_{21}}$$

$$B_{12} = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \frac{g_2}{g_1} A_{21}$$

$$B_{21} = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3} \cdot A_{21}$$

$$Q_{12} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{\Delta E}{kT}} Q_{21}; T = T_{\text{kin}}$$

$$I_\nu = W \cdot B(T_*) = W \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_*} - 1}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N_e Q_{21} \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu}{kT}} + A_{21} \frac{c^2}{2h\nu^3} \frac{g_2}{g_1} W \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{(e^{h\nu/kT_*} - 1)}}{N_e Q_{21} + A_{21} + \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{21} \cdot W \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{(e^{h\nu/kT_*} - 1)}}$$

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{N_e(Q_{21}/A_{21})e^{-h\nu/kT} + W(e^{h\nu/kT*}-1)^{-1}}{1+N_e(Q_{21}/A_{21})+W(e^{h\nu/kT*}-1)^{-1}}$$

$W \approx 10^{-15}$ I.S. avaruudessa

$W \approx 10^{-14}$ kaasusumuissa

$\Rightarrow W$:tä sisältävät termit voidaan jättää huomiotta

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 + \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}}}$$

LTE:ssä on voimassa Boltzmannin kaava:

$$\frac{N_2^*}{N_1^*} = \frac{g_2}{g_1} e^{h\nu/kT}$$

Poikkeamat LTE:stä ilmoitetaan yleensä kertoimilla:

$$b_n = \frac{N_n}{N_n^*}$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{b_2 N_2^*}{b_1 N_1^*} = \underbrace{\frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu/kT}}_{= \frac{N_2^*}{N_1^*}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}}}}_{= (\frac{b_2}{b_1})^{-1}}$$

Jos $\frac{A_{21}}{N_e Q_{21}} \ll 1$ ts. törmäysprosessit dominoivat

$$\Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = 1 \text{ eli } \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_2^*}{N_1^*} : \text{LTE}$$

Arvio b_2/b_1 :lle:

$$Q_{21} \approx 10^{-7} \dots 10^{-6} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} (T \approx 10^2 \dots 10^4) \text{ (Elektronitörmäys!)}$$

$$A_{21} \approx 10^8 \text{ s}^{-1} \text{ (sallituille siirtymille)}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}} \approx \frac{10^{14}}{N_e} \dots \frac{10^{15}}{N_e} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_e \leq 10^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ kaukana kuumista tähdistä}$$

$$N_e \approx 10^4 \text{ cm}^3 \text{ kaasusumuissa}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}} \gg 1 \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} \ll 1 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} \ll \frac{N_2^*}{N_1^*} \quad (\text{non-LTE!})$$

Käytännöllisesti katsoen kaikki atomit perustilassa (=1).

Harvinainen törmäysviritystä $1 \rightarrow 2$ seuraa aina sätelly siirtymä $2 \rightarrow 1$ joten atomeista vain hyvin pieni osa on tilassa 2.

Kielletyt siirtymät: Ylempi tila on ns. metastabiili tila

Esim. nebulaariset viivat [OIII]:n spektrissä:

$$N_1 \quad \lambda 5007\text{\AA} \quad A_{21} = 2.1 \cdot 10^{-2}\text{s}^{-1}$$

$$N_2 \quad \lambda 4959\text{\AA} \quad A_{21} = 7.1 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1} \quad (\text{magneettinen dipolisäteily})$$

Kaasusumuissa:

$$T \approx 10^4 K \quad Q_{21} \approx 10^{-7} \quad (\text{elektronitörmäykset!})$$

$$N_e \approx 10^3 \dots 10^4 \text{ cm}^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{A_{21}}{N_e Q_{21}} \approx \frac{10^5}{N_e} \approx 10 \dots 100$$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx (0.01 \dots 0.1) \cdot \frac{N_2^*}{N_1^*}$$

Nähdään, että tähtienväisen avaruuden pienissä tiheyksissä ovat matalalla sijaitsevat metastabiilit tilat hyvin voimakkaasti miehitettyjä normaaleihin tiloihin verrattuna, em. esimerkissä noin suhteessa $10^{10}:1$.

Viivan (tilavuus)emissiokerroin $\varepsilon_\nu^l \approx N_2 A_{21}$ on kielletyille viivoille samaa luokkaa kuin sallituille viivoille.

\Rightarrow Kielletyt viivat \sim yhtä vahvoja kuin sallitut viivat tai jopa vahvempia.

Vihreät nebulaariset viivat

$$N_1 \quad 5007\text{\AA} \quad 2p^2 \ ^1D_2 \rightarrow 2p^2 \ ^3P_2 \quad \text{OIII} = \text{O}^{++}$$

$$N_2 \quad 4959\text{\AA} \quad 2p^2 \ ^1D_2 \rightarrow 2p^2 \ ^3P_1$$

hypoteettinen alkuaine: "Nebulium"

1927 Ira S. Bowen: identifikaatio O⁺⁺

ks. O. Struve & V. Zebergs, Astronomy of the 20th Century p. 221-224

2. tapaus: 2 energiatilan systeemi (atomi t. molekyyli) radiotaajuualueessa

Radioalueessa säteilykentän ohennuskerroin W ≈ 1

$$I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_b \quad (h\nu/kT_b \ll 1)$$

T_b = säteilykentän kirkkauslämpötila (taajuudella ν)

1. tapauksessa johdettiin tulos:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{N_e(Q_{21}/A_{21})e^{-h\nu/kT} + W(e^{h\nu/kT*}-1)^{-1}}{1+N_e(Q_{21}/A_{21})+W(e^{h\nu/kT*}-1)^{-1}}$$

Nyt:

$$\left. \begin{array}{l} N_e \rightarrow N' \\ W = 1 \\ (e^{h\nu/kT*} - 1)^{-1} = \frac{kT_b}{h\nu} \\ T = T_{kin} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{e^{-h\nu/kT} + \frac{A_{21}}{N'Q_{21}} \frac{kT_b}{h\nu}}{1 + \frac{A_{21}}{N'Q_{21}} + \frac{A_{21}}{N'Q_{21}} \frac{kT_b}{h\nu}} \quad (1)$$

Muodollisesti Boltzmannin kaavasta määritellään eksitaatiolämpötila T_{ex}:

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu/kT_{ex}} \Rightarrow T_{ex} = \text{virityslämpötila}$$

Jos $\frac{A_{21}}{N'Q_{21}} \ll 1$ eli törmäykset dominoivat, niin

$$(1) \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu/kT_b} = \text{Boltzmannin kaava}$$

Merkitään: $x = \frac{A_{21}}{N'Q_{21}} \frac{kT}{h\nu}$ jossa T = T_{kin}

$$\Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{g_2}{g_1} \underbrace{e^{-h\nu/kT_{ex}}}_{1-h\nu/kT_{ex}} = \frac{g_2}{g_1} \frac{1 - \frac{h\nu}{kT} + x \frac{T_b}{T}}{1 + x \cdot \frac{h\nu}{kT} + x \frac{T_b}{T}}$$

$$\Rightarrow \frac{h\nu}{kT_{ex}} = \frac{1 + x \frac{h\nu}{kT} + x \frac{T_b}{T} - 1 - \frac{h\nu}{kT} + x \frac{T_b}{T}}{1 + x \frac{h\nu}{kT} + x \frac{T_b}{T}}$$

$$\Rightarrow T_{ex} = \frac{1 + x \frac{h\nu}{kT} \ll 1 + x \frac{T_b}{T}}{\frac{1}{T}(1+x)} \approx \frac{T + x \cdot T_b}{1+x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_{ex} = \frac{T + x T_b}{1+x} \\ x = \frac{A_{21} kT / h\nu}{N' Q_{21}} = \frac{1/\tau_2(\text{säteily})}{1/\tau_2(\text{törmäys})} = \frac{\tau_2(\text{törmäys})}{\tau_2(\text{säteily})} \end{cases}$$

τ_2 = tilan 2 elinikä:

$$\frac{1}{\tau_2(\text{säteily})} = A_{21} + B_{21} \cdot \frac{4\pi}{c} I_\nu = \frac{A_{21}}{1 - e^{-h\nu/kT}} = A_{21} \cdot \frac{kT}{h\nu}$$

$$\frac{1}{\tau_2(\text{törmäys})} = N' Q_{21}$$

$$T_{ex} = \frac{\tau_2(\text{sät.}) \cdot T + \tau_2(\text{törm.}) \cdot T_b}{\tau_2(\text{törm.}) + \tau_2(\text{sät.})}$$

- a) Jos $\tau_2(\text{säteily}) \gg \tau_2(\text{törmäys}) \Rightarrow$ törmäykset dominoivat ja $T_{ex} = T = T_{kin}$
- b) Jos $\tau_2(\text{törmäys}) \gg \tau_2(\text{säteily}) \Rightarrow$ säteilyprosessit dominoivat ja $T_{ex} = T_b$

Esim: CO-molekyyli, siirtymä $J = 1 \rightarrow 0$

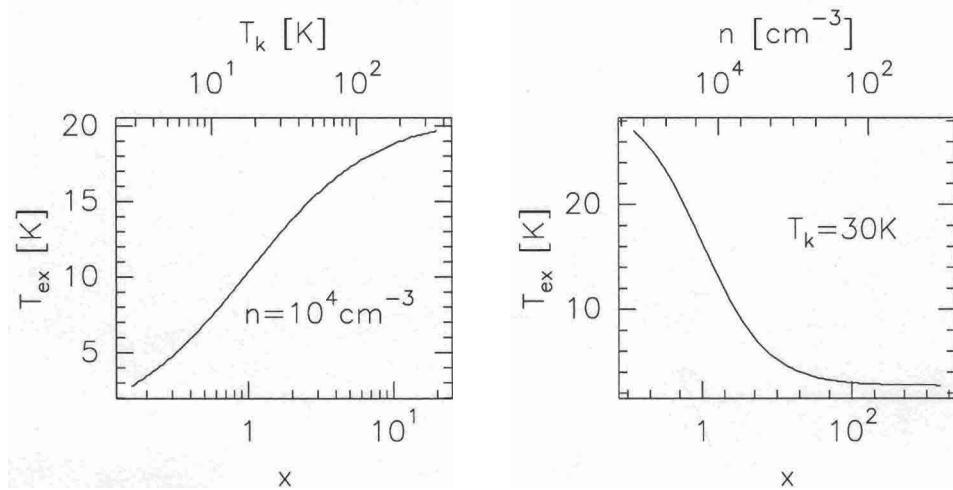
$$A_{10} = 7.45 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

$$Q_{10} = 2.42 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^3$$

$$\nu = 115 \text{ GHz}$$

1. tapaus: vakio tiheys, $n = 10^4 \text{ cm}^{-3}$, $T_k = 3.300 K$

2. tapaus: vakio kineettinen lämpötila, $T_k = 30 K$, $n = 10..10^6 \text{ cm}^{-3}$,



Sovellutuksia radiotaajuusalueen siirtymistä (2.tapaus)

1. Vedyn 21 cm emissioviiva

- Kylmä HI alue ($T \approx 100 \text{ K}$)

$N_e \ll N_H \Rightarrow$ elektronitörmäykset harvinaisia

H - H törmäykset dominoivat: $N' = N_H \approx 1 \text{ cm}^3$

$T = T_k \approx 100 K : Q_{21} \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ (Taulukko s. 17)

$$\Delta E = h\nu = 5.9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}, \quad A_{21} = 2.87 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{kT}{h\nu} = \frac{T}{11600 \Delta E [\text{eV}]}$$

$$x = \frac{a_{21} \cdot kT / h\nu}{N_H Q_{21}} \approx \frac{3 \cdot 10^{-15} / 7 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-10}} \frac{T}{N_H} = 4 \cdot 10^{-4} \frac{T}{N_H} \ll 1$$

Jos $N_H \gg 4 \cdot 10^{-4} T = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-3}$

Tulos: Kun $N_H \geq 0.1 \text{ cm}^3$, $x \ll 1$ ja törmäykset dominoivat $\Rightarrow T_{ex} = T_{kin}$

- Pilvenvälinen lämmin HI kaasu:

$$T \approx 8000 \text{ K}, N_H \approx 0.1 \text{ cm}^{-3} \rightarrow x = 4 \cdot 10^{-4} \frac{8000}{0.1} \approx 30.1$$

$$\text{Tällöin: } T_{ex} \approx \frac{8000 + 30.1}{31} = 260 \text{ K}$$

ts. ylemmän hyperhienorakennetilan miehitys on alhaisempi kuin Boltzmannin kaavasta saatava arvo lämpötilalle $T=8000 \text{ K}$.

2. CO:n J=1-0 emissioviivat ($\lambda = 2.6 \text{ mm}$) molekyylipilvissä

Törmäysviritys H₂ - CO (koska vety H₂ muodossa!)

$$T \approx 10 - 30 \text{ K}, \quad h\nu = \Delta E = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

$$Q_{21} \approx 2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}, \quad A_{21} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

$$x = \frac{6 \cdot 10^{-8} / 11600 \cdot 4.8 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{T}{N_{H_2}} \approx 5 \cdot 10^3 \frac{T}{N_{H_2}}$$

x < 1 : kun $T \lesssim 10 \text{ K}$, $N_{H_2} \gtrsim 5 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-3}$ tällöin törmäykset dominoivat

x > 1 : kun $T \gtrsim 10 \text{ K}$, $N_{H_2} \lesssim 5 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-3}$, siis pienillä tiheyksillä ja korkeilla lämpötiloilla säteilyisirrytymät dominoivat

Molekyylipilvissä vallitsevissa olosuhteissa pitää CO:lle ottaa huomioon sekä säteily- että törmäysprosessit.

3. CN:n rotaatiotila J=1

= Absorptiovivan $\lambda = 3874 \text{ Å}$ lähtötaso

J=1-0 on '2.64 mm' perustason J=0 yläpuolella

J = 1-0 siirtymä: $A_{21} \approx 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (suuri koska molekyylin dipolimomentti suuri, $\mu = 1.96 \text{ Debye}$)

$$\Delta E = h\nu = 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

$$\frac{h\nu}{kT_b} = \frac{11600 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{T_b} \approx \frac{5}{T_b} \approx 2, \quad T_b = 2.7 \text{ K}$$

$$x = \frac{A_{21} kT/h\nu}{N' Q_{21}} = \frac{10^{-5} \cdot 0.5}{2 \cdot 10^{-12}} \frac{T}{N_{\text{H}_2}} \approx 2 \cdot 10^6 \frac{T}{N_{\text{H}_2}}$$

Difusi pilvi: $T \approx 100 \text{ K}, N_{\text{H}_2} \approx 1 - 10 \text{ cm}^{-3} \Rightarrow x \gg 1$

\Rightarrow säteilysiirtymät dominoivat

$$\Rightarrow T_{\text{ex}}(1 - 0) = T_b = 2.7 \text{ K}$$

ts. CN molekyylin J+1 tilan miehitys on herkkä 3K taustasäteilyn mittari.

$$T \approx 10 \text{ K}, n_{\text{H}_2} \approx 10^6 \text{ cm}^{-3}$$

$$\Rightarrow x = 20$$

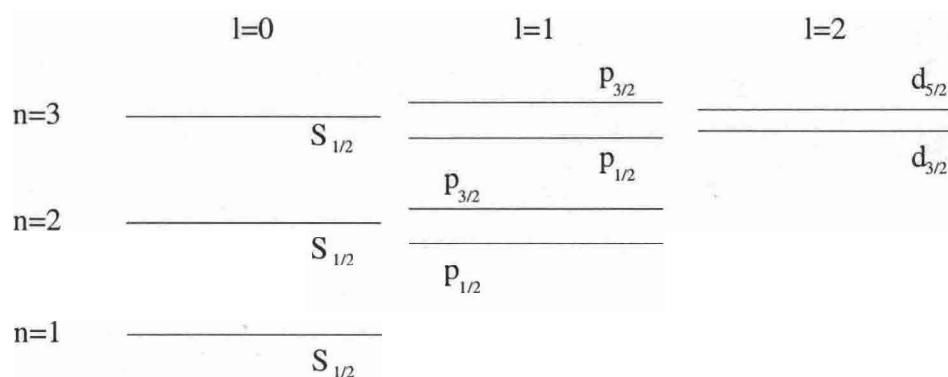
\Rightarrow törmäykset otettava huomioon.

4 Neutraali vety tähtienväisessä avaruudessa

Vety on kosmisesti ylivoimaisesti yleisin alkuaine. Kaikesta aineesta on massalla mitattuna vetyä $\sim 70\%$, heliumia $\sim 28\%$ ja muita alkuaineita ($Z > 2$) $\sim 2\%$. Vetyä tutkimalla saadaan siis myös käsitys interstellaarisen kaasun pääosan jakaumasta. Onneksi on tiedossa yksi spektriviiva, $\lambda \approx 21$ cm, jossa neutraali vety voidaan havaita. Viiva on radiotaajuusalueessa, jossa tähtienvälinen pöly ei merkittävästi heikennä säteilyä. Tämän viivan avulla voidaan siten tehdä havaintoja koko Linnunradasta.

4.1 21 cm viivan synty ja ominaisuudet

21 cm viiva syntyy siirtymästä vedyn hyperhienorakenteeseen kuuluvien energiasojojen välillä. Neutraalin interstellaarisen kaasun lämpötila on niin alhainen ($T < 100$ K), että likimain kaikki vetyatomit ovat perutilassa, $n = 1$. Vedyn spektrin hienorakenne muodostuu, koska elektronilla on spin, joka voi olla joko yhdensuuntainen tai vastakkaisuuntainen elektronin rataimpulssimomentin kanssa. Vedyn spektrin hyperhienorakenne (ylihienorakenne, hyperfine structure), josta 21 cm siirtymässä on kysymys, johtuu perustilan ($n = 1, l = 0$) jakautumisesta kahteen tilaan, joista ylemmässä elektronin spin ja ytimen spin ovat samansuuntaiset ja alemmassa vastakkaisuuntaiset.



Oort esitti n. 1944 ajatuksen, että radiotaajuusalueessa oleva vedyn spektriviiva olisi erittäin hyödyllinen linnunradan rakenteen tutkimuksessa. Van de Hulst (1944) laski, että em. hyperhienorakenneviiva on ~ 21 cm kohdalla. Ensimmäiset havainnot tehtiin

1950-luvun alussa (Ewen ja Purcell 1951, Muller ja Oort 1951, Christianssen ja Hindman 1951).

Viivan tarkka taajuus on $\nu_0 = 1420.4057 \pm 0.0001$ MHz eli $\lambda_0 = 21.1049$ cm. Koska kyseessä on kielletty siirtymä ($\Delta l=0$), on siirtymätodennäköisyys hyvin pieni:

$$A_{10} = 2.8 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}.$$

Ylempän tilan elinaika on $\tau = 1/A_0 = 3.5 \cdot 10^{14}$ s = $11 \cdot 10^6$ vuotta. Tämän vuoksi myös viivan luonnollinen viivanleveys on pieni

$$\Delta\nu_N = \frac{1}{2\pi\tau} = 4.5 \cdot 10^{-16} \text{ Hz.}$$

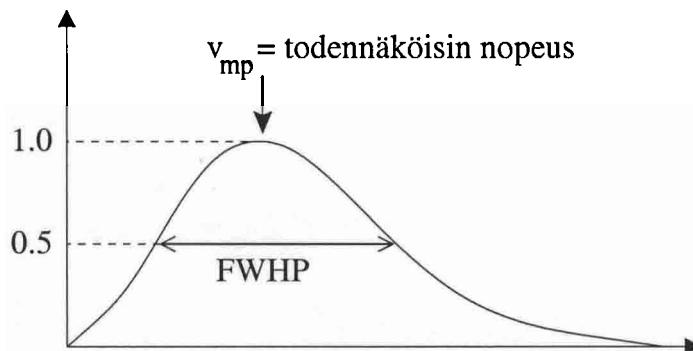
Tila 1:	$\frac{1}{2} \uparrow$	ydin	$\frac{1}{2} \uparrow$	(e-)	$f_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$
					$g_1 = 2 f_1 + 1 = 3$
Tila 0:	$\frac{1}{2} \uparrow$	ydin	$\frac{1}{2} \downarrow$	(e-)	$f_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$
					$g_0 = 2 f_0 + 1 = 1$

Luonnollinen viivanleveys on pieni verrattuna atomien lämpöliikkeestä johtuvaan Doppler-levenemiseen, vaikka lämpötila onkin ainoastaan $T \approx 100$ K:

$$v_{mp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K} \times 100 \text{ K}}{1.6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 1 \text{ km/s}$$

Doppler-leveys on FWHP = $2\Delta\nu_{1/2} = 2\sqrt{\ln 2} \times v_{mp}$,

FWHP = $2\Delta\nu_{1/2} = 1.670 \frac{v_{mp}}{c} \nu_0 = 6 \cdot 10^3$ Hz. Epäyhtälö $\Delta\nu_{1/2} \gg \Delta\nu_N$ pätee siis aina ja tämän vuoksi viiva on ihanteellinen kaasun liikkeiden tutkimiseksi suurella tarkkuudella.



4.2 Vetyatomien virittyminen

Jos vetyatomien annetaan olla rauhassa, se asettuu alimpaan mahdolliseen energiatilaansa. Tähtivälisessä avaruudessa vetyatomi törmää toiseen vetyatomiin $\sim 10^{10} \text{ s} = 400 \text{ vuoden välein}$. Tämä on huomattavasti lyhyempi aika kuin ylemmän tilan elinikä ($\tau \sim 10 \cdot 10^6 \text{ vuotta}$). Energiatasojen miehitysluvut määräytyvät törmäysten perusteella ja noudattavat siis Bolzmannin kaavaa

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-\frac{h\nu_{10}}{kT_S}} = 3 e^{-\frac{h\nu_{10}}{kT_S}}$$

Kaava määrittelee spin-lämpötilan T_S (yleisesti virityslämpötila). riippumatta siitä, onko T_S :llä yhteyttä fysikaaliseen lämpötilaan

$$h\nu_{10}/k = 0.007 \text{ K} \ll T_{\text{kin}} (\approx 100 \text{ K}).$$

Koska virittyminen määräytyy törmäysten perusteella, on odotettavissa, että $T_S = T_{\text{kin}}$. Silloin $n_1/n_0 \approx 3$ ja miehitysluvut riippuvat hyvin vähän spinlämpötilasta T_S .

4.3 Emissio ja absorptio

Oletetaan, että H-atomien kokonaismäärä on $n \text{ cm}^{-3}$. Edellisen kohdan mukaisesti virittyneiden ja perustilalla olevien atomien suhde on ~ 3 ja virittyneiden atomien määrä voidaan kirjoittaa $n_1 = \frac{3}{4}n$. Emissio yhdestä kuutiosenttimetristä kaasua on

$$\varepsilon = j \cdot \rho = \frac{n_1 A_{10} h \nu_{10}}{4\pi} [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ sr}^{-1}].$$

Emissio taajuusväliin $\nu_1 \dots \nu + d\nu$ on $\varepsilon_\nu d\nu = \varepsilon f(\nu) d\nu$, jossa $f(\nu)$ on viivaprofilili eli $f(\nu) d\nu$ on todennäköisyys että siirtymä tapahtuu välillä $\nu \dots \nu + d\nu$.

Ennenkuin säteily saapuu havaittajan antenniin, se kulkee välissä olevien muiden vetypilvien läpi, joissa tapahtuu absorptiota

$$I_\nu = \int_0^\infty \varepsilon_\nu(r) \cdot e^{-\tau_\nu(r)} dr,$$

I_ν on lopulta vastaanotettu intensiteetti $[\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ sr}^{-1}]$, $\tau_\nu(r) = \int_0^r \rho k'_\nu dr'$ on optinen paksuus ja

$$\rho k'_\nu = \rho k_\nu (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$$

stimuloiduilla emissioilla korjattu absorptiokerroin. Merkitään

$$\rho k_\nu = \rho \bar{k} f(\nu),$$

jossa $f(\nu)$ on viivaprofili ja \bar{k} viivan yli mitattu keskimääräinen absorptiokerroin.

Viivaprofili on normeerattu

$$\int_{\text{viiva}} f(\nu) d\nu = 1,$$

ja

$$\int \rho k_\nu d\nu = \rho \bar{k} \int f(\nu) d\nu = \rho \bar{k}$$

$$\rho \bar{k} = \frac{h\nu}{c} n_0 B_{01} \text{ ja } A_{10} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{g_0}{g_1} B_{01}$$

$$\rho \bar{k} = \frac{1}{8\pi} \frac{c^2}{h\nu^3} \underbrace{\frac{g_1}{g_0}}_{=3} A_{10} h\nu n_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{c^2}{\nu^2} A_{10} n_0$$

$$\rho \bar{k}' = \rho \bar{k} (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_S}}) \approx \rho \bar{k} \frac{h\nu}{kT_S} = \frac{3}{8\pi} \frac{c^2}{\nu^2} A_{10} n_0 \frac{h\nu}{kT_S} \quad (\frac{h\nu}{kT} \ll 1)$$

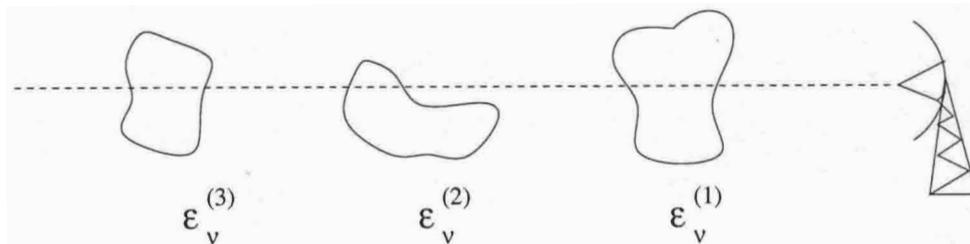
$$\rho k'_\nu = \rho \bar{k}' f(\nu) = \frac{3}{8\pi} \frac{c^2}{\nu^2} A_{10} n_0 f(\nu) \frac{h\nu}{kT_S}$$

Toisaalta tiedetään, että

$$n = n_0 + n_1 = 4 n_0, \quad n_\nu = n f(\nu) = 4 n_0 f(\nu)$$

joten saadaan

$$\begin{aligned} n_\nu &= \frac{32}{3} \frac{k}{hc^2} \nu \frac{1}{A_{10} T_S \rho k'_\nu} \\ &= 3.88 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2} T_S \rho k'_\nu \end{aligned}$$



Planckin lain mukaan $I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT_B} - 1} = B_\nu(T_B)$ ja radiotaajuksilla voidaan approksimoida $h\nu/kT_B \ll 1 \Rightarrow I_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} T_B$, kirkkauslämpötila $T_B = \frac{c^2}{2k\nu^2} I_\nu$

Kirchoffin laista $\varepsilon_\nu = k_\nu \rho B_\nu(T_S)$, saadaan rajalla $h\nu/kT_S \ll 1$: $\varepsilon_\nu = k_\nu \rho \frac{2k\nu^2}{c^2} T_S$

$$I_\nu = \frac{2h\nu^2}{c^2} T_B = \frac{2k\nu^2}{c^2} \int_0^\tau T_S \rho k'_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau'$$

$$T_B = \int_0^\tau T_S \rho k'_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau' = \int_0^\tau T_S e^{-\tau_\nu} d\tau'$$

Oletetaan, että spinlämpötila on vakio, $T_S(r) = T_S$. Saadaan

$$T_B = T_S \int_0^{\tau_\nu} e^{-\tau_\nu} d\tau' = T_S(1 - e^{-\tau_\nu})$$

$$T_B = \begin{cases} T_S \approx T_K & \text{kun } \tau_\nu \gg 1 : \text{optisesti paksu} \\ \tau_\nu T_S \approx \tau_\nu T_K & \text{kun } \tau_\nu \ll 1 : \text{optisesti ohut} \end{cases}$$

Tässä siis T_B on havaittu intensiteetti edellä määritellyissä lämpötilayksiköissä.

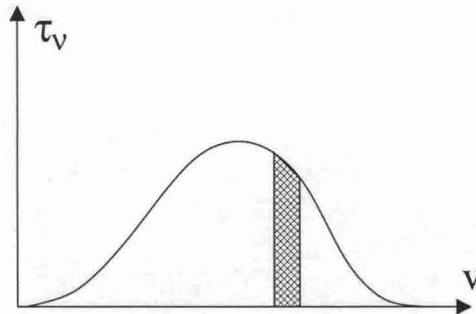
Suoraan havainnoista saatava antennilämpötila $T_A = \eta T_B$, missä η on keilahyötyuhde, tavallisesti $0.5 \dots 0.7$.

Kaavasta

$$\rho k'_\nu = \frac{3}{8\pi} n_0 A_{01} \frac{c^2}{\nu^2} \frac{h\nu}{k} \frac{1}{T_S} f(\nu)$$

saadaan $n f(\nu) = \underbrace{n_\nu}_{(n_1)_\nu + (n_0)_\nu} = 4(n_0)_\nu = 3.88 \cdot 10^{14} T_S \rho k'_\nu$. Koko näkösäteellä on atomien pylvästiheys $[\text{cm}^{-2}]$

$$N_\nu = 3.88 \cdot 10^{14} T_S \int \rho k'_\nu dr = 3.88 \cdot 10^{14} T_S \tau_\nu$$



Toisaalta voidaan tarkastella atomien lukumäärää nopeuden funktiona

$$dv = \frac{d\nu}{v_0} c$$

$$N_v dv = N_\nu d\nu \Rightarrow N_v = N_\nu \frac{d\nu}{dv} = N_\nu \frac{v_0}{c} = 0.47 \cdot 10^4 N_\nu \Rightarrow$$

$$N_v = 1.823 \cdot 10^{18} T_S \tau_\nu$$

Tämä on siis atomien lukumäärä 1 km/s kohden (yksikkö $\text{cm}^{-2} \text{ km}^{-1} \text{ s}$) ja kokonaismäärä voidaan lausua

$$N_{\text{TOT}} = 1.823 \cdot 10^{18} \int T_{\text{S}} \tau_{\nu} dv = 1.823 \cdot 10^{18} \int T_{\text{B}}(v) dv$$

Kun kaasu on optisesti ohut ($\tau \ll 1$), on $T_{\text{B}} = \tau_{\nu} T_{\text{S}} = \frac{N_{\nu}}{3.88 \cdot 10^{14}}$ eli $N_{\nu} = 3.88 \cdot 10^{14} T_{\text{B}}(\nu)$ on riippumaton T_{S} :stä. $N_{\nu} = 1.823 \cdot 10^{18} T_{\text{B}}(v)$

4.4 21 cm havainnot ja tuloksia

Ensimmäiset systemaattiset kartoitukset tehtiin pohjoisen pallonpuoliskon osalta Hollannissa (Kootwijk 7.5 m ja Dwingeloo 25 m paraboloidiantennit) ja eteläisen pallonpuoliskon osalta Australiassa (Sydney 11 m peili). Hollantilaisten taajuusresoluutio oli 40 kHz eli 8 km/s. Kulmaerotuskyky oli myös vaativat, $\Delta\Theta \approx 60^\circ \lambda/D = 0.6^\circ$ ($D=25 \text{ m}$) tai 2° ($D=7.5 \text{ m}$). Nykyisin $D \sim 100 \text{ m} \Rightarrow \Delta\Theta \sim 8'$ Samoin nykyisin päästään parempaan taajuusresoluutioon $\sim 1 \text{ kHz l. } \sim 0.21 \text{ km/s}$. Tarkastellaan havaittuja viivaprofileja Linnunradan tason suunnassa ($b = 0^\circ$) galaktisen pituuden l funktiona. Huomataan, että

1. suunnissa $l = 0^\circ$ ja $l = 180^\circ$ profilit ovat symmetrisiä säteisnopeuden $v = 0 \text{ km/s}$ suhteeseen
2. profilien keskimääräiset nopeudet vaihtelevat kaksoissiniallon lailla, kuten Oortin kaavasta $v_r = A \cdot r \cdot \sin 2l$ voi olettaa
3. jotta havaituista profileista voitaisiin johtaa tiheysjakauma n_{H} [cm^{-3}] on tunnettava yhteys säteisnopeuden ja etäisyyden välillä

Korkeilla galaktisilla leveyksillä ($b > 30^\circ$) 21 cm viivan profilit ovat yleensä melko epäsymmetrisiä ja nopeudet (LSR suhteeseen) lähellä nollaa. Tämä johtuu siitä, että havaittu kaasu on paikallista.