

ASTEROIDIN NUMEERINEN MALLI

Aurinkokunnan fysiikka, harjoitustyö, kevät 2016.

1. Muodon kolmiointi

Esitä asteroidin pinta pinta-alaltaan ja sivuiltaan samaa suuruusluokkaa olevien kolmioiden verkkona. Tämän voi tehdä esimerkiksi pallokoordinaatiston napakulman ja atsimuuttikulman avulla siten, että kukin pallon oktantti jaetaan tasaväliseen hilaan napakulmassa ja kullakin kolmiorivillä on kolmioita navalta laskettuna aina kaksi enemmän kuin edellisellä rivillä. Oktantissa ensimmäisellä rivillä on yksi kolmio. Kolmioiden numeroinnin voi aloittaa esim. napaa lähinnä olevasta kolmiosta.

Ohjelmoi kolmiointi ellipsoidin muotoiselle asteroidille siten, että saat jatkossa käytettyä kolmioesitystä numeerisissa simulaatioissa. Ellipsoidi on matemaattisesti tähtiyhtenäinen kappale, jonka yhtälö on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Tästä saadaan pallokoordinaattien avulla

$$\begin{aligned} x &= r(\theta, \phi) \sin \theta \cos \phi \\ y &= r(\theta, \phi) \sin \theta \sin \phi \\ z &= r(\theta, \phi) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

mistä

$$r(\theta, \phi) = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + a^2 c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2 b^2 \cos^2 \theta}} \quad (3)$$

(Ks. esim. https://en.wikipedia.org/wiki/Delaunay_triangulation ja siellä olevat viitteet.)

2. Sisäisen rakenteen “kolmiointi”

Asteroidin sisäinen rakenne voidaan esittää pintakolmioinnin avulla jakamalla origon ja pintakolmion muodostama tetraedri säteen suunnassa tasaväliseksi hilaksi skaalamalla muotoa sisään päin. Millainen tulee skaalauksen olla, jotta kussakin “viipaleessa” on sama tilavuus?

3. Integroitu kirkkaus

Tarkastellaan ellipsoidin muotoisen asteroidin integroitua kirkkautta, kun pintaelementin heijastus noudattaa Lommel-Seeliger -heijastusmallia.

Ohjelmoi integroidun kirkkauden lasku ja vertaa tulosta kirjallisuudessa esitettyyn analyttiseen ratkaisuun (Muinonen & Lumme 2015).

4. Ylimääräinen tehtävä

Vaihtoehtoisesti yksi seuraavista.

- Yleistä ohjelma mielivaltaiselle Delaunay-kolmioidulle pistejoukolle.
- Laske kaksoisasteroidijärjestelmän integroitu kirkkaus, kun molemmat asteroidit ovat ellipsoidimaisia.
- Laske lämmön johtuminen asteroidin sisään Lommel-Seeliger -heijastusmallin tapauksessa olettamalla, että lämmön säteilynkuljetus on pientä.

Ellipsoidin pinnalle voidaan arpoa pistejoukko pinta-alan mielessä tasaisesta jakaumasta. Tämä jakauma saadaan ellipsoidin pinta-alan integraalilausekkeesta

$$A = \int_A dA = \int_A d\Omega \frac{J(\theta, \phi)}{\sin \theta},$$

$$J(\theta, \phi) = r^2(\theta, \phi) \sin \theta \sqrt{1 + \frac{r_\theta^2}{r^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{r_\phi^2}{r^2}}, \quad (4)$$

missä r_θ ja r_ϕ ovat r :n osittaisderivaattoja vastaavasti θ :n ja ϕ :n suhteen. Lauseketta $J(\theta, \phi)/\sin \theta$ voi käyttää normittamattomana todennäköisyystiheytenä ja näin ollen tilastollisesti tasaisen joukon pisteitä voi ellipsoidin pinnalle luoda koko avaruuskulmaan tasaisesti luodusta pistejoukosta sopivalla hylkäys- ja hyväksymiskriteerillä.

Edetään seuraavasti. Todennäköisyystiheyttä

$$p_0(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \quad (5)$$

voidaan käyttää yksikköpallon pinnalle tilastollisessa mielessä tasaisesti jakautuneen pistejoukon generointiin. Tässä tapauksessa $\mu = \cos \theta$ on tasaisesti jakautunut välillä $[-1, 1]$ ja ϕ on tasaisesti jakautunut välillä $[0, 2\pi]$.

Olkoon nyt odennäköisyystiheys

$$p(\Omega) \propto \frac{J(\theta, \phi)}{\sin \theta} \quad (6)$$

se tiheys, josta haluamme generoida pistejoukon. Voidaan todeta, että on olemassa vakio C siten, että kaikilla (θ, ϕ) pätee

$$C \geq \frac{p(\Omega)}{p_0(\Omega)}. \quad (7)$$

Tällöin pistejoukon generointi voidaan tehdä seuraavasti. Generoidaan $\tilde{\Omega} = (\tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ tiheydestä $p_0(\Omega)$ ja generoidaan satunnaisluku y tasaisesta jakautumasta välillä $[0, 1]$.

Jos nyt

$$Cy \leq \frac{p(\tilde{\Omega})}{p_0(\tilde{\Omega})}, \quad (8)$$

lisätään piste $\tilde{\Omega}$ pistejoukkoon. Muussa tapauksessa se hylätään. Jatketaan generointia, kunnes haluttu pistejoukko on koossa.

Ellipsoidisovelluksen kannalta tulee ensin määrätä vakio C , minkä jälkeen generointi onnistuu suoraviivaisesti.

Viite:

Muinonen, K., and Lumme, K. (2015). Disk-integrated brightness of a Lommel-Seeliger scattering ellipsoidal asteroid. *Astronomy & Astrophysics* **584**, A23.