

Asteroidin kolmiointi

Anni Järvenpää

20. toukokuuta 2016

Tiivistelmä

diuidu

Sisältö

1	Delaunay-kolmiointi	1
1.1	Algoritmit	1
1.1.1	Kolmiulotteiset algoritmit	1
1.1.2	Quickhull	1
2	Pisteiden generointi ellipsoidin pinnalle	2
2.1	Pisteiden luominen kerroksittain	2
2.2	Pisteiden arpominen	3
3	Lommel-Seeliger -heijastuslaki	5
4	Asteroidin muodon kolmiointi	6
5	Asteroidin sisäinen rakenne	6
6	Asteroidin integroitu kirkkaus	7
A	Liittyvä liite.	9

1 Delaunay-kolmiointi

Kolmioinnissa pistejoukon pisteet yhdistetään toisiinsa janoilla siten, että pisteiden välille muodostuu kolmioita. Delaunayn kolmioinnissa minkään kolmion ympäripiirretyn ympyrän sisäpuolella ei ole muita pisteitä. Mikäli pisteet eivät osu samoille ympyröille, on Delaunayn kolmiointi yksikäsitteinen. Kahdessa ulottuvuudessa tämä kolmiointimenetelmä maksimoi pienimmän kolmioista löytyvän kulman, jolloin kapeat kolmiot ovat harvinaisia. [2]

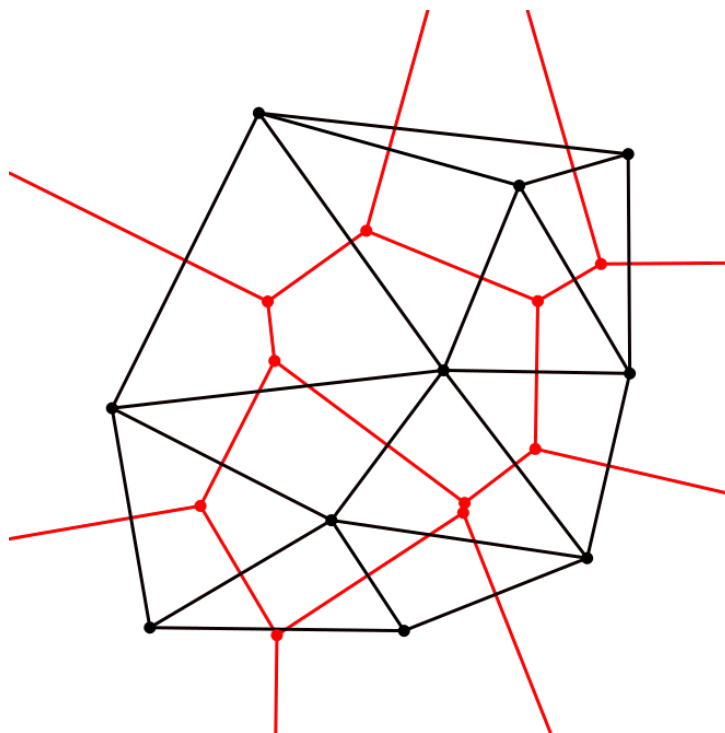
Delaunayn kolmiointi liittyy läheisesti moniin käytännön ongelmiin. Sitä voidaan käyttää esimerkiksi 3D-mallinnuksessa, jolloin kappaleen pinta voidaan mallintaa kolmioina. Kolmiointia voidaan käyttää myös esimerkiksi verkon pienimmän virittävän puun etsimiseen, sillä pienimmät virittävät puut ovat aina Delaunayn kolmioinnin osajoukkoja. Lisäksi yhdistämällä Delaunayn kolmioinnissa käytettyjen ympyröiden keskipisteet, saadaan niin kutsuttu Voronin tesselaatio (kuva 1), jossa lähin kolmioinnissa käytetty piste on sama. [2, 4]

Menetelmä on yleistettävissä myös korkeampiin ulottuvuuksiin, jolloin esimerkiksi kolmiulotteisessa tapauksessa syntyy ympyröiden sisällä olevien kolmioiden sijaan pallojen sisällä olevia tetraedrejä. [2]

1.1 Algoritmit

1.1.1 Kolmiulotteiset algoritmit

1.1.2 Quickhull



Kuva 1: Mustien pisteiden Delaunayn kolmiointi (mustat viivat) ja sitä vastaava Voronoi tesselaatio punaisella. Punaiset pisteet ovat Delaunayn kolmiointinnissa käytettyjen ympyröiden keskipisteitä. (Kuva: Wikimedia Commons -käyttäjä *Hferee*, CC BY-SA 3.0)

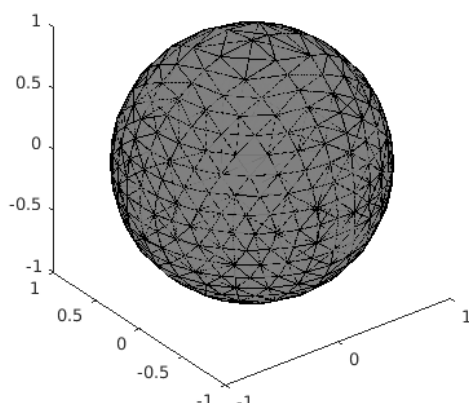
2 Pisteiden generointi ellipsoidin pinnalle

Jotkin ongelmat vaativat tutkittavan kappaleen pinnan mallintamista pistejoukkona. Tämä on helppo ensiaskel esimerkiksi kappaleen muodon kolmiointinnissa. Tässä työssä keskitytään generointimenetelmiin, joita voidaan hyödyntää ellipsoidien mallinnuksessa.

Pisteiden generointiin käytettävät menetelmät voidaan jakaa karkeasti kahteen luokkaan: systemaattisiin ja satunnaisiin menetelmiin. Kummassakin pyritään yleensä luomaan mahdollisimman tasainen jakauma kappaleen pinnalle. Seuraavissa aliluvuissa esitellään yksi systemaattinen ja yksi satunnainen menetelmä.

2.1 Pisteiden luominen kerroksittain

Eräs yksinkertainen tapa luoda ellipsin pinnalle pistejoukko, jossa lähimpien pisteiden etäisyydet pysyvät likimain vakioina, on generoida pisteet ellipsin leveyspiirien suuntaisina kehinä. Ellipsi jaetaan k kerrokseen, jolloin navalla olevaan ensimmäiseen ”kerrokseen” tulee yksi piste, seuraavaan kerrokseen 4 ja tästä kohti päiväntasaajaa kuhunkin kerrokseen aina 4 pistettä enemmän kuin edelliseen. Päiväntasaajan jälkeen pisteiden määrä alkaa jälleen vähentyä neljällä pisteellä kerrosta kohti, kunnes vastakkaisella navalla on



Kuva 2: Matlabin `delanayn`-komentoa käyttäen luotu kuva kerroksittain luodusta pistejoukosta ykikköpallon pinnalla.

jälleen vain yksi piste.

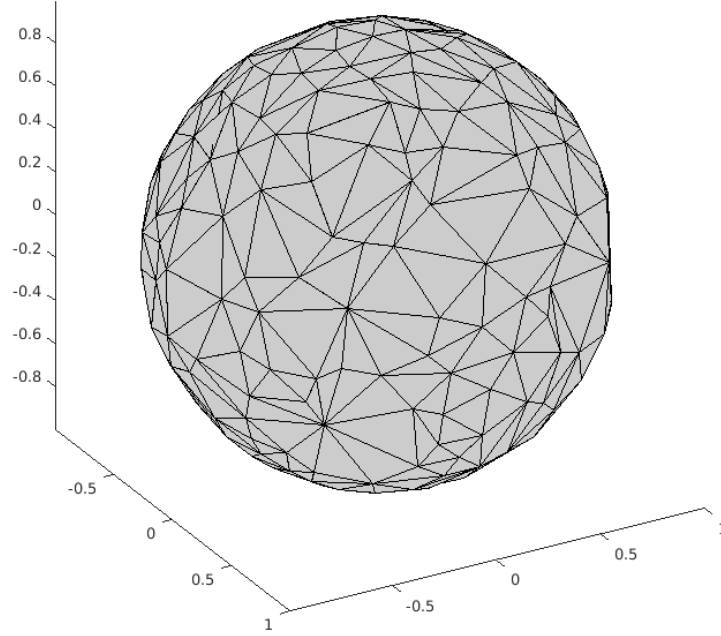
Tämä on yksinkertaisinta tehdä (θ, ϕ, r) -koordinaatistossa, jossa θ mittaa kulmaa navalta kohti päiväntasaajaa ja ϕ kulmaa x-akselista positiiviseen kiertosuuntaan z-akselin ympäri. Tällä tavoin generoitaessa kunkin rivin kulmaetäisyydeksi θ -suunnassa muodostuu π/k ja kahden saman latitudin pisteen välinen etäisyys ϕ -suunnassa on $\frac{\pi}{2(k-1)}$.

Näistä pisteistä on yksinkertaista muodostaa ellipsin pinnan kattava kolmiointi, jossa napa toimii kärkenä neljälle kolmiolle ja seuraavan rivin pisteet kussakin oktantissa yhdistävät janat kolmioiden kantoina. Seuraavalla kolmiorivillä edellisen kolmiorivin kantoja vastaa aina kärki ja kunkin oktantin reunoihin muodostuu kaksi uutta kolmiota. Näin jatketaan jälleen päiväntasaajalle asti, minkä jälkeen kolmiot alkavat jälleen vähentyä napaa lähestyttäessä. Kuva 200 kerrosta sisältävästä näin luodusta pistejoukosta on nähtävillä kuvassa 2.

2.2 Pisteiden arpominen

Pisteiden generointi satunnaisesti on hyvin yksinkertainen tapa generoida vähällä vaivalla halutunkokoinen pistejoukko. Pallopinnalle generointi on erittäin yksinkertaista. Kun tiedetään haluttu pallon säde, voidaan generoida satunnaisluvut $\theta \in [0, \pi]$ ja $\phi \in [0, 2\pi]$, jolloin saadaan suoraan piste (θ, ϕ, r) missä r on vakio. Esimerkki näin saadusta pistejoukosta on nähtävillä kuvassa 3.

Ellipsoidin pinnalle generoiminen on kuitenkin monimutkaisempaa, sillä edellä kuvatulla



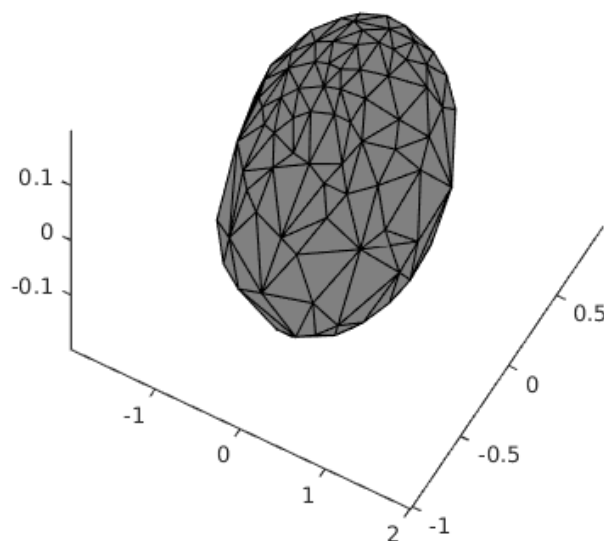
Kuva 3: Yksikköpallon pinnalle satunnaisgeneroitu pistejoukkoon tehty Delaunayn kolmiointi. Pallo koostuu 250 pisteestä ja 505 niiden välille piirretystä kolmiosta.

tavalla pistejakaumasta tulee ellipsoidin eksentrisyydestä riippuen mahdollisesti hyvinkin epätasainen. Pohjimmiltaan voidaan kuitenkin käyttää samantyyppistä menetelmää kuin edellä, eli aloittaa generoimalla vastaavat kulmat θ ja ϕ ja määrittämällä näiden perusteella kyseisen pinnan kohdan etäisyys origosta kaavan 1 perusteella, missä a , b ja c ovat ellipsin muodon määrittävät parametrit ellipsin yhtälöstä (yhtälö 2).

$$r(\theta, \phi) = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) + a^2c^2 \sin^2(\phi) \sin^2(\theta) + a^2b^2 \cos^2(\phi)}} \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

Eräs tapa huolehtia jakauman tasaisuudesta halutulla tarkkuudella on asettaa tietty kynnsarvo kunkin pisteen ympärillä olevalle säteelle, jonka sisälle ei generoida uusia pisteitä. Tämä voidaan toteuttaa esimerkiksi jakamalla ellipsin pinta-ala halutulla pistemäärällä ja määrittämällä tätä alaa vastaavan ympyrän säde, jolloin voidaan hylätä tätä sädettä



Kuva 4: Satunnaisgeneroidun pistejoukon Delaunayn kolmiointi ellipsin ($a=1,1$; $b=0,8$; $c=0,2$) pinnalla. Ellipsoidi koostuu 150 pisteestä ja 296 niiden välille piirretystä kolmiosta. Käytetty tasaisuuskerroin on 1,2.

lähempänä toista pistettä olevat pisteet. Uusia pisteitä arvotaan, kunnes hyväksytyjen pisteiden kokonaismäärä on haluttu pistemäärä.

Tätä menetelmää voidaan edelleen kehittää määrittämällä tasaisuuskerroin, jolla kerrotaan saatu ala kutakin pistettä kohden. Pienillä kertoimilla pisteet voivat olla lähempänä toisiaan, jolloin pisteitä hylätään vähemmän eli generointi on nopeampaa, mutta jakautuman tasaisuus kärsii. Liian suuren kertoimen valitseminen saattaa johtaa tilanteeseen, jossa uusien kaikki ehdot täyttävien pisteiden generointi on mahdotonta. Esimerkki ellipsoidin pinnalle generoiduista pisteistä on nähtävillä kuvassa 4.

3 Lommel-Seeliger -heijastuslaki

Lommel-Seeliger -heijastuslaki käsittelee yksinkertaista heijastusta, joka tapahtuu puoliliäärettömässä väliaineessa, johon valo penetroituu heikentyen absorptioon ja siirron vaikutuksesta. Sirottuminen kustakin väliainekerroksesta on isotrooppista ja pintaa kohti siroonnut valo heikkenee edelleen matkalla pintaan. [1]

Tällöin heijastuskertoimeksi saadaan

$$\frac{1}{4}\tilde{\omega}P_{11}(\alpha)\frac{1}{\cos(\epsilon) + \cos(\iota)}, \quad (3)$$

missä ϵ on havaitsijan suunnan ja heijastavan pinnan normaalin välinen kulma ja ι on valonlähteen suunnan ja heijastavan pinnan normaalin välinen kulma. [3, 1].

4 Asteroidin muodon kolmiointi

5 Asteroidin sisäinen rakenne

Kun asteroidin pinta on kolmioitu, voidaan asteroidin sisärakenne kattaa tetraedreillä yksinkertaisesti käyttämällä kutakin kolmiota yhden tetraedrin pohjana ja ellipsoidin keskipistettä tetraedrin neljäntenä kärkenä. Paikkaresoluution parantamiseksi voidaan nämä tetraedrit edelleen jakaa ellipsoidin säteen suunnassa katkaistuihin kartioihin.

Yksinkertaisinta on tehdä jako siten, että kunkin katkaistun kartion korkeus on sama. Tällöin kuitenkin monitahokkaiden tilavuus vaihtelee säteen suunnassa: lähellä keskipistettä tilavuudet ovat pieniä ja lähellä pintaa hyvin suuria. Tästä syystä monissa sovelluskohteissa on hyödyllisempää suunnitella jako monitahokkaisiin siten, että niiden tilavuudet pysyvät likimain samoina.

Tällöin kunkin katkaistun kartion korkeuden laskeminen onnistuu, kun tunnetaan lausekkeet kartion tilavuudelle

$$V = \frac{1}{3}Ah \quad (4)$$

missä A on kartion pohjan ala ja h kartion korkeus, sekä katkaistun kartion tilavuudelle

$$V = \frac{1}{3}h(A + \sqrt{AA'} + A') \quad (5)$$

missä A ja A' ovat pohjien alat ja h on pohjien välinen kohtisuora etäisyys. [5]

Lisäksi tiedetään, että eri katkaistujen kartioiden pohjat ovat yhdenmuotoisia ja niiden alat ovat verrannollisia ellipsoidin keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Kun nyt merkitään ellipsoidin sädettä tarkasteltavan tetraedrin kohdalla R (oletetaan, että kolmiot ovat säteeseen verrattuna pieniä, jolloin matka kustakin pohjan pisteestä keskipisteeseen on likimain sama) ja katkaistun kartion korkeutta h , saadaan katkaistun kartion

pohjien alojen suhteeksi

$$A_1 = \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 A_0.$$

Jos kartio halutaan jakaa n osaan, voidaan yhden osan tilavuus laskea yksinkertaisesti

$$\begin{aligned} V_{katkaistu} &= \frac{1}{n} V_{kokonainen} \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{3} Ah \end{aligned}$$

Asetetaan yhtälössä 5 esitetyn katkaistun kartion tilavuus yhtäsuureksi tämän lausekkeen kanssa, jolloin tiedetään

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} h(A + \sqrt{AA'} + A') &= \frac{1}{n} \frac{1}{3} Ah & \left| \quad A' = \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 A \right. \\ h \left(A + \sqrt{A^2 \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 + \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 A} \right) &= \frac{1}{n} Ah \\ A \left(1 + \frac{R-h}{R} + \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 \right) &= \frac{1}{n} A \\ 1 + \frac{R-h}{R} + \left(\frac{R-h}{R} \right)^2 &= \frac{1}{n} \\ 1 + 1 - \frac{h}{R} + \left(1 - \frac{h}{R} \right)^2 &= \frac{1}{n} \\ 1 + 1 - \frac{h}{R} + 1 - 2\frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 &= \frac{1}{n} \\ 3 - 3\frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R} \right)^2 &= \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{6}$$

Yhtälö 6 on yksinkertainen toisen asteen yhtälö, jonka ratkaisuna saadaan h :lle seuraava lauseke

6 Asteroidin integroitu kirkkaus

Viitteet

- [1] M. B. Fairbairn. Planetary Photometry: The Lommel-Seeliger Law. *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, 99:92, June 2005.

-
- [2] Pavel Maur. Delaunay triangulation in 3d. Technical report, Technical Report No. DCSE/TR-2002-02, University of West Bohemia in Pilsen, 2002.
 - [3] Karri Muinonen. Fundamentals for theoretical photometry of asteroids, 2014.
 - [4] Samuel Peterson. Computing constrained delaunay triangulations.
 - [5] Wikipedia. Kartio, 2016. [Online; luettu 20.5.2016].

A Liittyvä liite.

Liian laaja leipätekstiin.