Proof that,

1.
$$\int Norm_x[a, A]\; Norm_x[b, B]\; dx$$

$$= Norm_a[b, A+B] \int Norm_x\left[\Sigma_*(A^{-1}a + B^{-1}b), \Sigma_*\right] dx.$$

where $\Sigma_* = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$

Proof

$$Norm_x[a, A] = \frac{1}{\sqrt{|2\pi A|}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^T A^{-1}(x-a)}.$$

$$Norm_x[b, B] = \frac{1}{\sqrt{2\pi|B|}} e^{-\frac{1}{2}(x-b)^T B^{-1}(x-b)}$$

$$\therefore \int Norm_x[a, A]\; Norm_x[b, B]\; dx.$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi|A|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi|B|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[(x-a)^T A^{-1}(x-a) + (x-b)^T B^{-1}(x-b)\right]} dx.$$

$$\cancel{= e \int e^{-\frac{1}{2}}}$$

$$I = (x-a)^T A^{-1}(x-a) + (x-b)^T B^{-1}(x-b)$$

$$= (x^T - a^T) A^{-1}(x-a) + (x^T - b^T) B^{-1}(x-b)$$

$$= x^T A^{-1} x - a^T A^{-1} x - x^T A^{-1} a + a^T A^{-1} a$$

$$+ x^T B^{-1} x - b^T B^{-1} x - x^T B^{-1} b + b^T B^{-1} b.$$

$$= -x^T (A^{-1}a + B^{-1}b) + x^T (A^{-1} + B^{-1}) x - (a^T A^{-1} + b^T B^{-1}) x$$

$$+ a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b.$$

$$= x^T (A^{-1} + B^{-1}) x - 2x^T (A^{-1}a + B^{-1}b) + a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b.$$

$$\because \Sigma_* = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}$$

$$\therefore I = x^T \Sigma_*^{-1} x - 2x^T (A^{-1}a + B^{-1}b) + a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b.$$

Let, $\mu = \Sigma_*(A^{-1}a + B^{-1}b)$ and $(A^{-1}a + B^{-1}b) = \nu$.

$$\therefore \mu = \Sigma_* \nu$$

$$I = x^T \Sigma_*^{-1} x - 2x^T \Sigma_*^{-1} \mu + \mu^T \Sigma_*^{-1} \mu - \mu^T \Sigma_*^{-1} \mu$$

$$+ a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b.$$

$$= (x-\mu)^T \Sigma_*^{-1} (x-\mu) + a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b - I_1$$

where,

$$I_1 = \mu^T \Sigma_*^{-1} \mu$$

$$= \left[\Sigma_* (A^{-1} a + B^{-1} b)\right]^T \Sigma_*^{-1} \Sigma_* (A^{-1} a + B^{-1} b)$$

$$= (A^{-1} a + B^{-1} b) \Sigma_* (A^{-1} a + B^{-1} b) \quad [\Sigma_* \text{ is symmetric}]$$

$$= a^T A^{-1} \Sigma_* A^{-1} a + 2 a^T A^{-1} \Sigma_* B^{-1} b + b^T B^{-1} \Sigma_* B^{-1} b$$

$$\Sigma_* = (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = (B^{-1} + A^{-1})^{-1}$$

$$= \left[A - A(A+B)^{-1} A\right] = B - B(A+B)^{-1} B.$$

$$\therefore I_1 = a^T A^{-1} \left(A - A(A+B)^{-1} A\right) A^{-1} a + 2 a^T A^{-1} \left(A - A(A+B)^{-1} A\right) B^{-1} b$$

$$+ b^T B^{-1} \left(B - B(A+B)^{-1} B\right) B^{-1} b.$$

$$= a^T A^{-1} a - a^T (A+B)^{-1} a + 2 a^T B^{-1} b$$

$$- 2 a^T (A+B)^{-1} A B^{-1} b + b^T B^{-1} b - b^T (A+B)^{-1} b.$$

$$= a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b - a^T (A+B)^{-1} a - b^T (A+B)^{-1} b$$

$$+ 2 a^T (A+B)^{-1} b - 2 a^T (A+B)^{-1} b + 2 a^T B^{-1} b$$

$$- 2 a^T (A+B)^{-1} A B^{-1} b.$$

$$= a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b - (a-b)^T (A+B)^{-1} (a-b)$$

$$+ 2 a^T \left(B^{-1} - (A+B)^{-1} A B^{-1} - (A+B)^{-1}\right) b.$$

Now, $B^{-1} - (A+B)^{-1} AB^{-1}$.

$$= B^{-1} - B^{-1}(B^{-1} + A^{-1})^{-1} B^{-1}$$ [From matrix inversion relations].

$$= (A+B)^{-1}$$

$$\therefore I_1 = a^T A^{-1} a + b^T B^{-1} b - (a-b)^T (A+B)^{-1} (a-b) \cancel{2a^T \cdot 0}$$

$$\therefore I = a^T \cancel{A^{-1}} a + b^T \cancel{B^{-1}} b - b^T \cancel{B^{-1}} b - \cancel{a^T A^{-1} a} + (a-b)^T (A+B)^{-1} (a-b) + (x-\mu)^T \Sigma_*^{-1} (x-\mu)^T$$

$$= (x-\mu)^T \Sigma_*^{-1} (x-\mu)^T + (a-b)^T (A+B)^{-1} (a-b)$$

$$\therefore \int \mathrm{Norm}_x[a, A]\ \mathrm{Norm}_x[b, B]\, dx.$$

$$= C \int e^{-\frac{1}{2}\left[(x-a)^T A^{-1} (x-a) + (x-b)^T B^{-1} (x-b)\right]} dx$$

$$= C \int e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu)^T \Sigma_*^{-1} (x-\mu)^T + (a-b)^T (A+B)^{-1} (a-b)\right]} dx$$

$$= C \int \mathrm{Norm}_x[\mu, \Sigma_*]\ \mathrm{Norm}_a[b, (A+B)]\, dx$$

$$= C\, \mathrm{Norm}_a[b, A+B] \int \mathrm{Norm}_x[\Sigma_* A^{-1} a + B^{-1} b; \Sigma_*]\, dx$$

[Prooved]