Métodos de Análisis de RdP

2014/ 2017

Introducción

- Una de las principales ventajas de los modelos formales es que nos permiten definir el comportamiento de un sistema sin ambigüedades.
- Es de nuestro interés integrar modelos formales, que posean mecanismos para verificar sus propiedades, e integrarlos en un software y/o hardware para luego ejecutarlo, este campo de investigación donde el objetivo es lograr que la diferencia entre el modelo formal y su “ejecutable” sea mínima nos presenta la ventaja que al menos “la fuente de errores originada por la programación del modelo, sea mínima”.
- Tanto la regla de disparo de la RdP y su gráfico de accesibilidad (finito o infinito), constituye una representación formal del comportamiento de la red.
- Así pues es fundamental, en primer lugar definir formalmente las propiedades generales respecto a la esta gráfica (por ejemplo, vivacidad o la existencia de bloqueo). Y si es posible verificar la cantidad de token en una plaza (plazas acotadas).
- Los métodos basados en la construcción y exploración del gráfico, o de alguna parte de ella, son llamados métodos de comportamiento.

Introducción

- A pesar de su relativa sencillez y su amplio campo de aplicación, los métodos actualmente presentan algunos inconvenientes:
  - Sólo se aplican a las redes con un número finito de estados
  - Su complejidad espacial y temporal depende del tamaño del gráfico, que es mucho más grande que el tamaño de la red, y se requiere del conocimiento de la marca inicial
- En principio podemos clasificar a los métodos de análisis en estructurales y dinámicos.
- Examinaremos algunos métodos estructurales, puesto que toman ventajas de la estructura de red y disminuyen la complejidad del análisis, y también toman ventajas por ser aplicables a redes independientemente de su marca inicial, las principales propiedades estructurales son:
  - Controlable
  - Estructuralmente limitada
  - Estructuralmente viva
  - Conservativa
  - Repetitiva
  - Consistente
  - Estructuralmente equitativa

Introducción

- También se expondrán algunos métodos dinámicos, los cuales dependen del marcado inicial, siendo los más usados:
  - Alcanzabilidad
  - Limitación o acotada
  - Vivacidad
  - Reversibilidad
  - Cobertura
  - Persistencia
  - Distancia de sincronización
  - Equidad
- Los métodos estructurales están basados en tres propiedades de las RdP, los que son:
- La ecuación de cambio de estado, se corresponde con el hecho de que la actualización de una marca por un disparos en secuencia es exactamente el producto de la matriz de incidencia por el vector de transición
- Ya que la red es un grafo bipartito, su análisis aporta información interesante sobre el comportamiento de la red.
- Además, en el marco de modelos determinados (por ejemplo, sistemas de fabricación) la estructura de la gráfica resultante es específica y puede asociar la caracterización estructural con propiedades de comportamiento.
-
- Con el fin de mantener la amplitud de nuestro análisis, con respecto al el tipo de red que se analiza, haremos hincapié en las RdP de libre elección; usaremos técnicas de álgebra lineal, técnicas de reducción, redes jerárquicas y el calculamos familias de invariantes lineales sobre los lugares y/o transiciones.

Comportamiento y análisis de las RDP

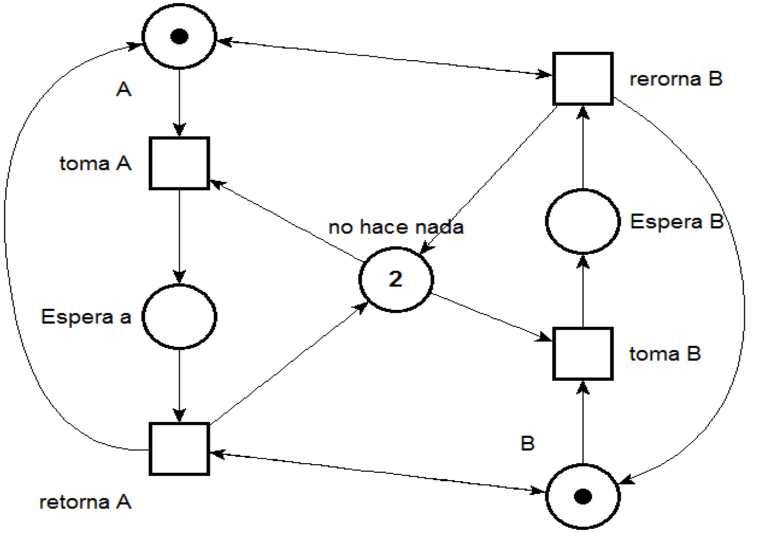
- Semántica de una red
  - La forma más sencilla de definir el comportamiento de una red es considerar el conjunto de marcas alcanzables desde el marcado inicial.
  - Para una marca m, cada plaza p contiene una marca $m(p)$, las propiedades del estado de la red pueden ser expresan en forma de ecuaciones lineales o inecuaciones.
  - En este apartado abordamos la forma y la validez de este tipo de ecuaciones y desigualdades.
  - **Definición 1: Secuencia de disparos y Grafo de alcanzabilidad**
  - Conjunto de alcanzabilidad. Sea (R, m_0) una RdP marcada $\boldsymbol{N}$, el conjunto de marcas alcanzables se denota por A (R, m_0), y es alcanzable por una secuencia de disparos
  - $\mathrm{A}\,(R, m_0) = \{\mathrm{m} \mid \exists\ \sigma\ \in T^*\ t.p.\, m_0 \xrightarrow{\sigma} m\}$

Semántica de una red

- **Definición 2: Equidad de disparos**
- Se han propuesto muchas ideas diferentes de la equidad; pero hay que destacar dos conceptos básicos de equidad, los que son:
- (1) Equidad acotada (o B-Fireness) y
- (2) Equidad incondicional (o Global fireness).
- Dos transiciones t_1 y t_2 se dice que están en una relación o B-Firenness, si está acotado el número máximo de veces que una se puede disparar, mientras que la otro no se dispara.
- Una secuencia de disparos σ se dice que es incondicional (a nivel global), si es finita o cada transición en la red aparece infinitamente a en σ.
- Una RdP marcada $R = (N, m_0)$, se dice que es incondicionalmente disparable (a nivel global), si cada secuencia de disparo $\sigma \, de \, m \in R(m_0)$ es incondicionalmente disparable, ahora podemos decir

Propiedades usuales de las RdP

- Definición de propiedad
- El interés de un modelo reside en la posibilidad de definir formalmente las propiedades del modelado del sistema, para controlar estas propiedades por medio de algoritmos o heurísticos. En el caso de las RdP, las propiedades las relacionamos con la actividad de un sistema paralelo y/o concurrente. Estas propiedades pueden ser específicas para el paralelismo o simplemente relacionados con su dinámica.
- La Figura 1 ilustra estas propiedades en la red. Esta red modela dos procesos anónimos inicialmente en el estado de inactividad.
- Cualquier proceso puede elegir entre dos comportamientos:
  - bien obtener el recurso A (recurso modelado por toma A), y luego el recurso B (recurso modelado por toma B) y al acabar liberarlos, (retorna A o retorna B , es una abstracción de estos dos eventos), u obtener los recursos de la en orden inverso.

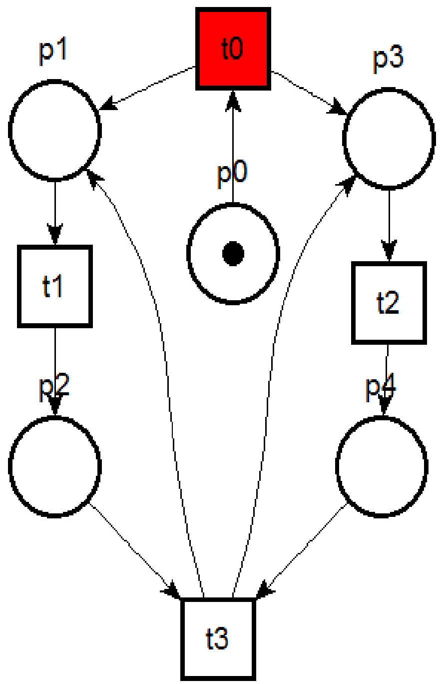


Propiedades usuales de las RdP

- El primer problema con este sistema es determinar si su comportamiento es finito. En otras palabras, estamos buscando si la secuencia de disparos es o no finita.
- **Definición 4: Secuencia de disparos infinita**
- Existe una secuencia de disparos infinita si: para un $\sigma \in T^{\infty}$, cualquier prefijo σ´ de σ es una secuencia finita de disparos
- En la red de la figura la secuencia $(\text{toms A, retona A})^{\infty}$ es una secuencia infinita de disparos.
- Cuando una red no tiene una secuencia infinita de disparos se dice que cumple con las propiedades de terminación.
- Es importante determinar si el sistema nunca se detiene. Por ejemplo, un sistema operativo no se detiene, sea cual sea el comportamiento de sus usuarios, es decir, desde cualquier marca al menos una transición debe poder dispararse.
- Estado inevitable, cuando en una RdP existe un marcado que no se puede evitar, esto implica que la red debe necesariamente re-inicializarse.

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 5: RdP Seudo Viva**
- Seudo Vivacidad, una RdP es Seudo viva si: $\forall\, m \in A(R, m_0)\; \exists\, t \in T\; s.t\; m \overset{t}{\rightarrow}$
- Es una RdP seudo-viva existen algunas transiciones vivas y no se bloquea totalmente.
- En el ejemplo de la Figura 2, la RdP tien su transicion t_0 sensible, esta se dispara solo una vez y luego no es sensibilizada nuevamente, pero las transiciones $t_1, t_2\ y\ t_3$ vuelven a sensibilizarse, por lo cual la red es seudo-viva



Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 6: RdP Quasi Viva**
- Cada transición sensibilizada y disparada, al menos una vez "expresa un diseño sintácticamente correcta en el sentido de que cualquier actividad o evento debe ocurrir al menos una vez en el comportamiento de la red.
- Quasi Vivacidad, una RDP es Quasi viva si: $\forall\, t \in T\ \exists\, m \in A(R, m_0)\ \ s.t\ m \xrightarrow{t}$
- Estas dos propiedades aseguran una cierta corrección del sistema, pero no pueden garantizar que se pueda llegar a cada marca del sistema y mantener todas sus funcionalidades. En otras palabras, no sabemos si todas las transiciones pueden ser disparadas en un futuro para alcanzar un **estado determinado**.

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 7: Vivacidad de una RdP**
- Vivacidad, una RDP tiene vivacidad si para cualquier marca $m \in A(R, m_0)$ $la\ proxima\ red\ A(R, m)\ es\ Quasi\ viva$, generalizando:
- $\forall m \in A(R, m_0) \forall t \in T \exists m' \in A(R, m)\ s.t\ m' \xrightarrow{t}$
- Se dice que una RdP está ***viva*** sii en todo momento sus transiciones pueden ser disparadas o si existe una secuencia de disparos validos que lleven a que la transición pueda dispararse.
- Esto implica que es la posible volver siempre a un estado determinado, por ejemplo para la re-inicialización del sistema. El marcado inicial coincide con la re-inicialización, esto significa que el sistema nunca pierde sus capacidades.
- Esta propiedad, es un muy fuerte pero poco práctica, puesto que es demasiado costosa su verificar; por ejemplo en el un sistema operativo de una computadora (Murata 1989). Por esta razón, la noción de vivacidad es relajada mediante el concepto de grados de vivacidad.

Propiedades usuales de las RdP

- En este enfoque, los grados de vivacidad de una transición individual se definen, para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, como:
- **Definición 8: Vivacidad de grado 0**
- Si t no puede ser disparada. Entonces se dice que t tiene vivacidad $L_0(m_{0_)}$ o está muerta.
- **Definición 9: Vivacidad de grado 1**
- Si t puede ser disparada por lo menos una vez en alguna secuencia de disparo. Entonces se dice que t tiene vivacidad $L_1(m_{0_)}$, entonces t es viva de grado uno L_1.
- **Definición 10: Vivacidad de grado 2**
- Si t puede ser disparada un número finito positivo entero de veces k en alguna secuencia de disparo $L_2(m_{0_)}$, entonces t es viva en grado dos L_2 .
- **Definición 11: Vivacidad de grado 3**
- Si ∃ al menos una secuencia de longitud infinita de disparo que pertenecen a $L(m_0)$, en la que t aparece infinitas veces, entonces t es viva de grado tres L_3 .
- **Definición 12: Vivacidad en grado 4**
- Si t es L_1 $\forall\, m \in (R, m_0)$, entonces t es viva de grado cuatro L_4. Al igual que la vivacidad la vivacidad en grado cuatro es una restricción muy fuerte.
- Al igual que los grados de viveza de una transición, podemos introducir el grados de vivacidad de una RdP, el que se define como:
- Para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, se dice que la vivacidad de la red tiene grado k, si todas las tranciciones de la red tiene vivacidad de grado k, donde puede tomar los valores $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ahora podemos decir que una red es viva si tiene vivacidad de grado 4.
- Ahora se puede apreciar que la declaración de vivacidad de una RdP es una propiedad muy fuerte. Grados de vivacidad de una transición, es un establecimiento relajado.

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 13: Cobertura**
- Para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, se dice que una marca m es cubierta si $\ni\ m' \geq m(p_i)\ \forall\, i\ \in [1, \ldots, n]$.
- El concepto de cobertura está relacionado con el concepto de disparabilidad potencial o vivacidad del tipo L_1 (Murata 1989).
- Por ejemplo, supongamos que m es el mínimo marcado necesario para que la transición t pueda dispararse. Entonces t estará muerta, sii no es cubierta.
- La definición de cobertura muestra que se puede dar una respuesta concluyente sobre cobertura siempre que la RdP sea limitada es decir, se trata de un árbol de accesibilidad. Siguiendo la misma lógica de la accesibilidad, la prueba cobertura del árbol cobertura no es concluyente.
- **Definición 14: RdP Bloqueada**
- RdP bloqueada (deadlock), un bloqueo en una RdP implica que una transición nunca podrá ser disparada independientemente de la secuencia de disparos que se aplique.
- Según la Definición 7, decimo que una PdP viva garantiza la ausencia de bloqueos.
- Este concepto está sustentado en la ausencia de marcados sumideros. Un marcado sumidero es aquel marcado a partir del cual ninguna transición puede ser disparada.

Propiedades usuales de las RdP

- Definición 15: Estado de re-inicialización
- Estado de re-inicialización, existe un estado de re-inicialización si:
- $\forall m \in A(R, m_0) \exists \sigma \in T^* \quad s.t\ m \xrightarrow{\sigma} m_0$
- El modelado de un sistema abierto es diferente al modelado de un sistema cerrado. Por ejemplo, puede ser necesario modelar la llegada de un número ilimitado de clientes, esto nos lleva a la siguiente definición.
- **Definición 16: Reversible**
- Para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, se dice es reversible si el marcado inicial es accesible desde todas las marcas alcanzables. Esto es: $\forall\ m \in (R, m_0), m_0$ es alcanzable desde m. Lo que es equivalente a decir que: $\forall\ m \in (R, m_0), se\ cumple\ m_0 \in (R, m)$.
- **Definición 17: Limites de una RdP**
- Límites de una RdP, una RdP(R, m_0) es limitada si:
- $\forall n \in N, \exists\ m \in A(R, m_0),\ \exists\ p \in P \quad t.q.m(p) \leq n$
- R es estructuralmente limitada si está acotada para cada marcado inicia, también se la llama RdP n-limitada (si todas sus plazas son n-limitadas).
- Por lo que decimos que hay un límite en cuanto al marcado de cualquier lugar "asegura que el sistema alcanzará un comportamiento estacionario con el tiempo”. Tengamos en cuenta que múltiples comportamientos estacionarios son posibles.

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 18: RdP Segura**
- RdP seguras, se dice que una RdP es ***segura*** sii todas sus plazas son 1-limitadas (1-safe). Por lo que una transición no puede ser disparada si alguna de sus plazas de llegada está ocupada. Esta red cumple verifica que para toda marca alcanzable $m(p) \ \leq 1, \forall \ p \in P$
- **Definición 19: RdP Cíclica**
- RdP cíclicas, se dice que una RdP es cíclica si existe siempre una sucesión de disparos que lleve desde cualquier marcado m al marcado inicial m_0.
- **Definición 20: RdP Repetitiva**
- P repetitivas, se dice que una RdP es repetitiva si existe siempre una secuencia de disparos que lleve desde una marcado m hasta el mismo marcado m
- **Definición 21: RdP Conservativa**
- RdP conservativas, una RdP es conservativa si se cumple que para todo marcado m , perteneciente al conjunto de marcados de RdP, la cantidad de marcas de m es igual a la cantidad de marcas de m_0. Se conserva la cantidad de tokens.

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 22: Persistencia**
- Para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, se dice es persistente si, para cualquiera de dos transiciones habilitadas, el despido de una transición no deshabilita la otra. Por lo que podeos decir que: una RdP es persistente si, $\forall\, m \in A(R, m_0)$, una transición habilitada puede desactivarse sólo por su propio conjunto $\bullet\, t$.
- Esto significa que, una transición persistente, una vez sensibilizada se mantendrá activada hasta que se dispara.
- Esto implica, un RdP que tiene conflictos no puede ser persistente, puesto que un mismo lugar es una entrada a más de una transición, lo que es una situación de conflicto. Por lo que, las redes persistentes son siempre libres de conflicto.
- La noción de persistencia es importante en el contexto de los circuitos asíncronos, donde las velocidades son independiente, y en el diseños de programas paralelos (Murata 1989).

Propiedades usuales de las RdP

- **Definición 23: Consistencia**
- Para una RdP $N = (R, m_0)$ marcada, se dice es consistente sii el árbol cobertura tiene un circuito dirigido (no necesariamente primaria) que contiene todas las transiciones al menos una vez (Al-Jaar 1994). La RdP es parcialmente consistente si un circuito dirigido contiene sólo algunas de las transiciones.
- La definición muestra que prueba la consistencia de la accesibilidad (coverability) árbol es concluyente.

Relación entre las propiedades

- Proposición 1
  - Si (R,m_0) es pseudo-viva o no acotado, entonces (R,m_0)tiene una secuencia infinita.
- Proposición 2
  - Si (R,m_0) es en viva, entonces (R,m_0) es quasi viva y en directo seudo-viva.
- Proposición 3
  - Si (R,m_0) es quasi viva y m_0 es el estado de origen, entonces (R,m_0) es viva.

Propiedades de Monotonicidad

- Durante el modelado, una vez que la estructura de la red se ha definido, el diseñador suele modifica el marcado inicial con el fin de examinar las diferentes hipótesis. A menudo, esta modificación consiste en la adición de token en algunos lugares. Por lo tanto, nos interesa analizar la monotonicidad de la red para determinar si una propiedad sigue siendo cumplida para el nuevo marcado.
- **Definición 24: Monótona**
- Sea π una propiedad de una RdP, se dice que π es monótona sii:

$$\forall R\, \forall\, m_0 \leq\ m'_0,$$

$$(R, m_0)\ satisface\ \pi \Longrightarrow\ (R, m'_0)\ satisface\ \pi$$

- **Proposición 4: De monotonía**
  - Sea la RdP donde se cumple:
  - $\forall m_1\ \leq\ m'_1\ \ m_1 \xrightarrow{\sigma} m_2 \Longrightarrow\ \ m'_1 \xrightarrow{\sigma} m'_2\ con\ m_2\ \leq\ m'_2$
  - Además si hay una plaza donde: $p, m_1(p) < m'_1(p)\ luego\ m_2(p) < m'_2(p)$

Red monótona

- Emergen propiedades importantes, de una red monótona, son caracterizadas por la existencia de secuencias de disparo de partida desde el estado inicial, estas son:

  - Para una RdP (R, m_0) que tiene una infinita secuencia de disparos, se verifica que es monótona.
  - Para una RdP (R, m_0) que es seudo-viva, se verifica que es monótona.
  - Para una RdP (R, m_0) que es quasi-viva, se verifica que es monótona.
  - Para una RdP (R, m_0) que es viva, se verifica que no es monótona.
  - Para una RdP (R, m_0) que tiene un estado de re-inicio, se verifica que no es monótona.
  - En una RdP (R, m_0) que es acotada, se verifica que es monótona.

Caracterización de las propiedades con la ayuda de un gráfico de accesibilidad limitada

- **Proposición 6: Limitada**
  - Una RdP (R,m_0) es limitada sii A(R,m_0) es finita.
- Proposición 7: seudo viva y circuito
  - Una RDP (R,m_0) es seudo-viva y circuito sii cada vértice del grafico G(R,m_0) pertenece un circuito
- **Proposición 8: Seudo viva y sucesor**
  - Una RDP (R,m_0) es seudo-viva y sucesor sii cada vértice del grafico G(R,m_0) es un sucesor.
- **Proposición 9: Cuasi viva es un arco**
  - Una RDP (R,m_0) es cuasi-viva sii cualquier transición etiquetada en un vértice en un arco de G(R,m_0) .
- **Proposición 10: Acotada y viva**
  - Una RDP (R,m_0) que es acotada; entonces (R,m_0) es viva sii cualquier terminal s.c.c C de G(R,m_0) , todas las transiciones son etiquetadas en un arco de C
- **Proposición 11: Estado de reinicio**
  - Una RDP (R,m_0) que es acotada; entonces (R,m_0) tiene un estado de re-inicio sii hay un único terminal s.c.c C de G(R,m_0).

Caracterización de las propiedades con la ayuda de un gráfico de accesibilidad limitada

- Cono secuencia, podemos decir que una marca-muerto es una marca de no-viva, pero una marca no-vivo no es una marca muerta, puesto que:
- Todas las marcas muertas son cominos sin salida o nodos terminales, pero todos los caminos sin salida o nodos terminales no son marcas muertas.
- El término código muerto, significa que una parte nunca se ejecutó (no hay ningún token) para una marcado inicial. Si la RdP está modelando un algoritmo o código, donde parte del código siempre permanece inactivo. De ahí el nombre-código Muerto.
- Después de introducir el concepto de vivacidad de la conexión, nos preguntarnos si es posible sacar conclusiones acerca de la vivacidad con el árbol de accesibilidad (cobertura). Debido a la pérdida de la información, que produce el uso de símbolo ω, en el árbol de cobertura, no se puede dar una respuesta concluyente sobre vivacidad (Murata 1989). Sin embargo, es posible realizarlo con una red limitada puesto que se trata de un árbol de accesibilidad.

Propiedades caracterización que ayuda en secuencias finitas

- Hay al menos dos razones por lo que deseamos obtener caracterizaciones que no se basan en la gráfica de accesibilidad, las que son:
- Las propiedades obtenidas de una gráfica sólo son efectivas cuando esta es finita
- Aun siendo la gráfica finita hay casos donde el tamaño puede prohibir la verificación.
-
- Por lo cual haremos huso de algunos lemas que acotan la tarea, los que son:
- El Lema de König (MONTALBAN 2011)
- Definición

Propiedades caracterización que ayuda en secuencias finitas

- **Definición 25: Sucesor inmediato**
- Sea R una relación en un conjunto A, desimos que y es un sucesor inmediato de x si xRy. Dado un $n > 0$ y $x, y \in A$, si escribimos $xR^n y$ si existen $x_i,\ 0 \leq i \leq n\ tales\ que\ x_i R x_{i+1}\ para\ todo\ x_i$, $0 \leq i < n, x = x_0$ y $x_n = y$. Diremos también que y es sucesor de x si $xR^n y$ para cierto $n > 0$.
- **Definición 26: Localmente finita**
- Sea R una relación sobre el conjunto A, se dice localmente finita si para cualquier $x \in A$, el conjunto de sus sucesores inmediatos es finito. Se dice globalmente finita si el conjunto de los sucesores de cualquier $x \in A$ es finito
- **Definición 27: Longitud de derivaciones**
- Sea R una relación sobre el conjunto A, Dado un elemento cualquier $x \in A$
- definimos el conjunto de las longitudes de las derivaciones comenzando en x como
- $L(x) = \{i \in \mathbb{N} : (\exists\, y)\big(xR^i y\big)\}$. Decimos que R es acotada si para todo $x \in A$, $L(x)$ es un conjunto acotado.
- Se desprende, que si existe una R-derivación infinita comenzando en un elemento x, entonces el conjunto de las longitudes de las derivaciones comenzando en x es no acotado.

Propiedades caracterización que ayuda en secuencias finitas

- **Definición 28: Relación acíclica**
- Sea R una relación sobre el conjunto A, se dice que es acíclica si no existe $a \in A$ y $n > 0$ tal que $aR^n a$.
- **Definición 29: Árbol finitamente ramificado**
- Corolario (Lema de K¨onig). Sea t un $\Sigma - árbol$ finitamente ramificado. Entonces t es infinito sii tiene un camino infinito.
- **Proposición 12: Secuencia de disparo infinita**
- Una RdP (R, m_0) tiene una secuencia de disparos infinita sii se cumple $m_0 \overset{\sigma 1}{\rightarrow} m_1 \overset{\sigma 2}{\rightarrow} m_2\, y\, se\, verifica\, que\, m_1 \leq m_2$
- **Proposición 13: RdP acotada**
- Una RdP (R, m_0) es acotada sii se cumple que para una secuencia de disparos $m_0 \overset{\sigma 1}{\rightarrow} m_1 \overset{\sigma 2}{\rightarrow} m_2\ y\, se\, verifica\, que\, m_1 < m_2$

Propiedades caracterización que ayuda en secuencias finitas

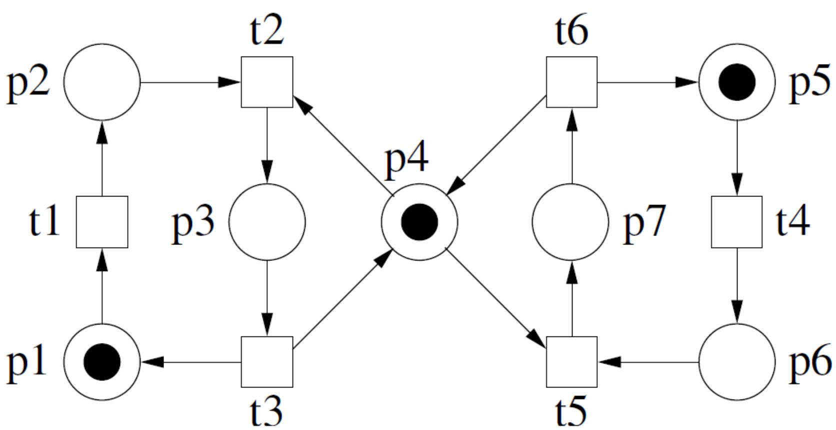
- Definición 30: Secuencia repetitiva
- Secuencia repetitiva, sea una RdP,
- Si $m \leq m'$ la red es repetitiva
- Si $m = m'$ la red es repetitiva estacionaria
- Si $m < m'$ la red es repetitiva y cada vez mayor

Análisis Estructural: Motivación

- Hemos visto cómo las propiedades de las redes de Petri pueden ser probadas construyendo el grafo de accesibilidad y analizándolo.
- Sin embargo, el gráfico de accesibilidad puede llegar a ser enorme: exponencial en el número de lugares (si es finito en absoluto).
- El análisis estructural hace posible probar algunas propiedades sin construir el gráfico de accesibilidad. Las principales técnicas son:

Invariantes de plaza y Traps

Análisis Estructural: Motivación



$$
\begin{array}{c}
\\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & t_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Incidencia: Definición
Sea $N \ = < P, T, F, W, M_0 >$ una red P / T. La matriz de incidencia correspondiente $C_N : |P \ \times \ T| \rightarrow \ Z$ es la matriz cuyas filas corresponden a lugares y cuyas columnas corresponden a transiciones.
La columna $t \ \in \ T$ indica cómo la activación de t afecta al marcado de la red:
$C \ (t, p) \ = \ W \ (t, p) \ - \ W \ (p, t)$.
La matriz de incidencia del ejemplo de la diapositiva anterior:

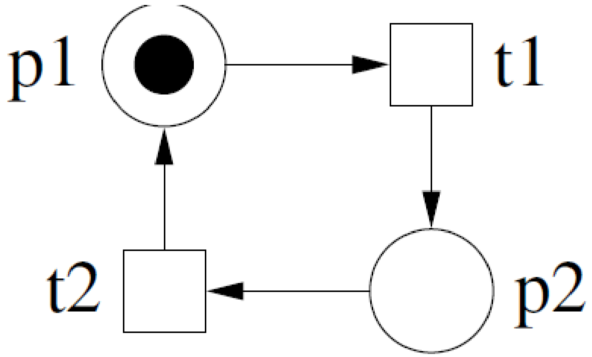
Las marcas como vectores

- Escribamos ahora el marcado como vectores de columnas. Por ejemplo, la marca inicial es $M_0 = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)^T$.
- Del mismo modo, podemos escribir recuentos de disparo como vectores columna con una entrada para cada
- transición. Por ejemplo, si t1, t2 y t4 son disparadas una vez cada uno, podemos expresar esto con $u = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)^T$.
- Entonces, el resultado de disparar estas transiciones se puede calcular como M_0+C.u

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

- Considere la siguiente red y la marca $M = (1\ 1)^T$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- No tiene solución, y por lo tanto M no es accesible.

Invariantes

- Las soluciones de la ecuación $Cu = 0$ se llaman invariantes de transición (o: T-invariantes).
- Las soluciones naturales indican bucles (posibles).
- Por ejemplo, en el Ejemplo 2, $u = (1\ 1)^T$ es un invariante en T.
- Las soluciones de la ecuación $C^T x = 0$ se llaman invariantes de lugar (o: P-invariantes).
- Un P-invariante propio es una solución de $C^T x = 0$ si $x \neq 0$.
- Por ejemplo, en el ejemplo 1, $x_1 = (1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$, $x_2 = (0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1)^T$, y $x_3 = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1)^T$ son todas las P-invariantes.
- Un invariante P indica que el número de tokens en todas las marcas alcanzables satisface algún invariante lineal.

Invariantes lineales para RdP

- Se aprovechan el efecto de una secuencia de disparos σ sobre en una RdP, N marcada, como consecuencia de esto hay algunos parámetros de la red que se mantienen.
- Puesto que el estado de la red depende de un ecuación lineal, el efecto de los disparos σ sobre N es lineal. Es decir, que responde a las reglas del álgebra vectorial lineal. De hecho, muchos aspectos de las RdP pueden ser representados y se calculan con los invariantes.
- **Definiciones y aplicaciones**
- La ecuación de cambio de estado puede ser interpretada de la siguiente manera:

"El efecto de una secuencia de disparo es determinado por la matriz de incidencia, el vector de ocurrencias de transiciones, la secuencia de disparos y el estado inicial."

- **Definición 31: Secuencia de cambio de estado**
  - Sea la secuencia de disparos representada con el vector $\sigma \in T^*$, este vector de ocurrencias es definido por:
  - Siendo I la matriz de incidencia obtenida de: $I = Pre - Post = I^+ - I^-$

Propiedades de los P-invariantes

- Sea M marcado alcanzable con una secuencia de transición cuyo recuento de disparo se expresa por u, es decir
$$M = M_0 + C.u$$
- Sea x un invariante P. Entonces, se cumple lo siguiente:

$$M^T x = (M_0 + Cu)^T x = M_0^T x + (Cu)^T x = M_0^T x + u^T C^T x = M_0^T x$$

- Por ejemplo, invariante x_2 significa que todas las marcas alcanzables M satisfacen (volviendo a la notación de función para las marcas):

$$M(p_3) + M(p_4) + M(p_7) = M_0(p_3) + M_0(p_4) + M_0(p_7) = 1 \qquad (1)$$

- Como consecuencia, un P-invariante en el que todas las entradas son 0 o 1 indica un conjunto de lugares en los que el número de fichas permanece sin cambios en todas las marcas alcanzables.

Propiedades de los P-invariantes

- Más observaciones sobre P-invariants
- Los invariantes P también pueden ser útiles como una etapa de preprocesamiento para el análisis de accesibilidad.
- Supongamos que cuando se calcula el grafo de accesibilidad, el marcado de un lugar se representa normalmente con n bits de almacenamiento. P.ej. Los lugares p3, p4 y p7 juntos requerirían 3n bits.
- Sin embargo, como hemos descubierto invariante x2, sabemos que exactamente uno de los tres lugares está marcado en cada marcación alcanzable.
- Por lo tanto, sólo tenemos que almacenar en cada marca que de los tres está marcado, que requiere sólo 2 bits.

Algoritmos para P-invariantes

- Una base del conjunto de todos los invariantes se puede calcular usando álgebra lineal.
- Hay un algoritmo llamado "Algoritmo de Farkas" (por J. Farkas, 1902) para calcular un conjunto de los llamados mínimos P-invariantes.
- Éstas son invariantes de lugar positivo a partir de las cuales cualquier otro invariante positivo puede ser computado por una combinación lineal.
- Desafortunadamente, hay redes P / T con un número exponencial de P-invariantes mínimos (en el número de lugares de la red). Por lo tanto, el algoritmo Farkas necesita (al menos) tiempo exponencial en el peor de los casos.
- La herramienta INA del grupo de Peter Starke (Universidad Humboldt de Berlín) contiene un gran número de algoritmos para el análisis estructural de redes P / T, incluida la generación invariante.

Farkas Algorithm

- Entrada: la matriz de incidencia C con n filas (lugares) y m columnas (transiciones).
- $(C \mid En)$ denota el aumento de C por una matriz de identidad $n \times n$ (últimas n columnas).

$D_0 := (C \mid E_n)$;
for $i := 1$ **to** m **do**
  for d_1, d_2 rows in D_{i-1} such that $d_1(i)$ and $d_2(i)$ have opposite signs **do**
    $d := |d_2(i)| \cdot d_1 + |d_1(i)| \cdot d_2;$ (* $d(i) = 0$ *)
    $d' := d/\gcd(d(1), d(2), \ldots, d(m+n));$
    augment D_{i-1} with d' as last row;
  endfor;
  delete all rows of the (augmented) matrix D_{i-1} whose i-th component is different from 0, the result is D_i;
endfor;
delete the first m columns of D_m

Ejemplo

- Matriz de incidencia

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_0 = (C \mid E_5) = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo

- Adición de las filas 1 y 2, 1 y 4, 2 y 5, 4 y 5:

$$D_1 = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Adición de filas 3 y 4:

$$D_2 = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Los P-invariantes mínimos son

  (1, 1, 0, 0, 0)

  y

  (0, 0, 0, 1, 1).

$$D_3 = D_4 = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Un ejemplo con muchos P-invariants

- Matriz de incidencia para una red con $2n$ lugares:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (Y1, 1 - y1, y2, 1 - y2, ..., yn, 1 - yn) es un invariante para cada y1, y2,. . . , Yn 2 {0, 1}, y por lo tanto hay 2n mínimo P-invariantes.
- Este ejemplo muestra que el número de mínimos P-invariantes puede ser exponencial en el tamaño de la red.
- El algoritmo de Farkas puede necesitar tiempo exponencial.

Propiedades de los P-invariantes

- Tenga en cuenta que la multiplicación de un invariante por una constante o componente de adición de dos invariantes de nuevo dará un P-invariante.
- Es decir, el conjunto de todos los invariantes es un espacio vectorial.
- Podemos utilizar P-invariantes para probar las propiedades de exclusión mutua:
- De acuerdo con la ecuación 1, en cada marcación alcanzable del ejemplo 1 se marca exactamente uno de los lugares p3, p4 y p7. En particular, p3 y p7 no se pueden marcar simultáneamente!
- Otro ejemplo: exclusión mutua con pasar de fichas (demo)

Invariantes linéale para RdP

- Flujo de una RdP, las características a considerar son:
- P-Flow (flujo de plazas), sea el vector x∈Z^P distinto de cero que cumple con x^t.I=0 →
- P-Semi-Flow (semi-flujo de plazas), es el vector x∈N^P distinto de cero que cumple con x^t.I=0 →
- T-Flow (flujo de transiciones), es el vector u∈Z^T distinto de cero que cumple con I . u=0 →
- T-Semi-Flow (semi-flujo de transiciones), es el vector u∈N^T distinto de cero que cumple con I . u=0 →

Invaraintes linéale para RdP

- P-Flow (flujo de plazas)
- Sea un x vector P-flow y σ una secuencia de disparos que lleva del estado m_i al estado $m_{(i+1)}$, tendremos la siguiente igualdad:

- $x^t \cdot m_i = x^t \cdot m_{(i+1)}$

- Remplazando según la ecuación de estado, tenderemos:
- $m_{(i+1)} = m_i + I \cdot \vec{\sigma}$

- $x^t \cdot m_{(i+1)} = x^t \cdot (m_i + I \cdot \vec{\sigma})$

- $x^t \cdot m_{(i+1)} = x^t \cdot m_i + x^t \cdot I . \vec{\sigma}$

- Luego, como $x^t . I = \vec{0}$ entonces:

- $[\![x^t \cdot m]\!]_{(i+1)} = [\![x^t \cdot m]\!]_i$

T-semiflow (semi flujo de transición)

- Sea u un vector *T-semiflow* y σ una secuencia de disparos, donde $\vec{\sigma} = u$, entonces:
-
- $m_i \xrightarrow{\sigma} m_{i+1} \Longrightarrow m_i = m_{i+1}$
-
- Es decir que σ es una secuencia repetitiva y estacionaria.
- La afirmación anterior se demuestra partiendo de la ecuación de estado:
-
- $m_{i+1} = m_i + I \cdot \vec{\sigma}$
-
- Remplazando $\vec{\sigma} = u$
- $m_{i+1} = m_i + I \cdot u$
-
- Puesto que de partida hemos dicho que $I \times u = \vec{0}$, entonces
-
- $m_{i+1} = m_i$

T-semiflow (semi flujo de transición)

- **T-flow** (flujo de transición)
- Ahora si decimos que u es un vector *T-flow* y σ_1, σ_2 dos secuencias de disparos tal que $\sigma_1 - \sigma_2 = u$, entonces:
- $m \overset{\sigma_1}{\rightarrow} m' \wedge m \overset{\sigma_2}{\rightarrow} m'' \Longrightarrow m' = m''$
- Remplazando por la ecuación de estado, se obtiene la proposición anterior de la siguiente forma:
- $m' = m + I \cdot \overrightarrow{\sigma_1}$
- $m'' = m + I \cdot \overrightarrow{\sigma_2}$
- Haciendo:
- $m' - m'' = (m + I \cdot \overrightarrow{\sigma_1}) - (m + I \cdot \overrightarrow{\sigma_2})$
- $m' - m'' = m + I \cdot \overrightarrow{\sigma_1} - m - I \cdot \overrightarrow{\sigma_2}$
- $m' - m'' = I \cdot \overrightarrow{\sigma_1} - I \cdot \overrightarrow{\sigma_2}$
- $m' - m'' = I \cdot (\overrightarrow{\sigma_1} - \overrightarrow{\sigma_2})$
- Dado que $\overrightarrow{\sigma_1} - \overrightarrow{\sigma_2} = u$
- $m' - m'' = I \cdot u$
- Luego, como $I.u = \vec{0}$ entonces
- $m' - m'' = \vec{0}$
- $m' = m''$

Proposición 14: P-Flow y T-Flow

si $x\ es\ un\ P - Flow\ y\ m \overset{\sigma}{\rightarrow} m'$ **una secuencia de disparos, se cumple que:**

$$x^t.m' = x^t.m + x^t.I.\vec{\sigma} \implies x^t\,m = x^t\,m'$$

si $u\ es\ un\ T - Semi\ Flow\ y\ \sigma\ es\ una\ secuencia\ de\ disparos\ tal\ que\ \overrightarrow{\sigma} = u$ **, se cumple:** $m \overset{\sigma}{\rightarrow} m' \implies m = m'$**, por lo que σ es una secuencia repetitiva y estacionaria**

si

$u\ es\ un\ T - Flow\ y\ \sigma_1\ y\ \sigma_2\ son\ dos\ secuencias\ de\ disparos\ tal\ que\ \overrightarrow{\sigma_1} - \overrightarrow{\sigma_2} = u$ **, se cumple:** $m \overset{\sigma_1}{\rightarrow} m'\ y\ m \overset{\sigma_{12}}{\longrightarrow} m'' \implies m'' = m'$

Proposición 14: P-Flow y T-Flow

- Definición 33: Representación de invariantes

Los invariantes pueden ser representados de dos formas distintas, las que son:

Representación vectorial

- **P-invariante puede ser representado por un vector** $(nx1)$ **dado por**

$$x = (m(p_0), m(p_1), \ldots, m(p_n))^T$$

- **T-invariante puede ser representado por un vector** $(mx1)$ **dado por**

$$u = (t_1, t_2, \ldots, t_m)^T$$

Representación por conjunto

- **P-invariante puede ser representado por un conjunto**

$$\|x\| = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\} donde\ k \leq n$$

- **T-invariante puede ser representado por un conjunto**

$$\|u\| = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\} donde\ k \leq m$$

Este conjunto incluye sólo aquellas como elementos las transiciones del conjunto, que tienen ocurrencias.

Proposición 14: P-Flow y T-Flow

- **Definición 34: Invariante lineal**

Invariante lineal, si (R, m_0) es una RdP marcada, un invariante lineal es definido por:

$\forall\, m \in A(R, m_0),\ x^t.m = x^t.m_0$**,**

Ssiendo x un P-Flow, en el caso que x sea un P-Semi-Flow es un invariante lineal positivo.

Definición 36: Invariante mínimo

Un invariante mínimo o básico, es uno que no es una combinación lineal de otras invariantes. Más formalmente se puede definir un P-invariante mínimo una RdP, como: $\|x\| = \{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$. Entonces $\|x\|$ es mínimo P-invariante si $\ni \|x'\|\ tal\ que\ \|x'\| \subset \|x\|$, donde $\|x'\|$ es otra P-invariante red. Del mismo modo se define un mínimo de T- invariante. Dado que una combinación lineal de mínimos T-invariantes corresponde una secuencia de disparo que retorna a un mismo estado, un mínimo T -invariantes también es llamado vectores de reproducción.

P-Flow

- Los invariantes positivos pueden ser interpretados como que todos los lugares pertenecientes a un vector x, del ti*po* P-Flow, están limitado a la marca inicial, ya que:
- $m(p) \leq x(p)^{-1} x^{t}.m_0$.
- Del mismo modo, a partir de un invariante $m\ (p)\ +\ m\ (q)\ +\ \cdots = 1$, se deducir que los lugares p y q no pueden estar marcados al mismo tiempo.
- En términos más generales, los invariantes son la base de numerosos condiciones y propiedades necesarias y/o suficientes del comportamiento de un sistema paralelo. Con el objeto de desarrollar este punto, a continuación presentamos dos propiedades estructurales de una RdP relacionadas con los invariantes.

Invariates

- **Definición 35: RdP conservativa y consistente**
- sea R una RdP:
- R es conservativa si un P-Semi-Flow x tal que $\|x\| = P$
- R es consistente si un T-Semi-Flow u tal que $\|u\| = T$
- **Definición 36: Invariante mínimo**
- Un invariante mínimo o básico, es uno que no es una combinación lineal de otras invariantes. Más formalmente se puede definir un P-invariante mínimo una RdP, como: $\|x\| = \{p_0, p_1, \dots, p_k\}$. Entonces $\|x\|$ es mínimo P-invariante si ∋ $\|x'\|$ $tal\ que$ $\|x'\| \subset \|x\|$, donde $\|x'\|$ es otra P-invariante red. Del mismo modo se define un mínimo de T- invariante. Dado que una combinación lineal de mínimos T-invariantes corresponde una secuencia de disparo que retorna a un mismo estado, un mínimo T -invariantes también es llamado vectores de reproducción.

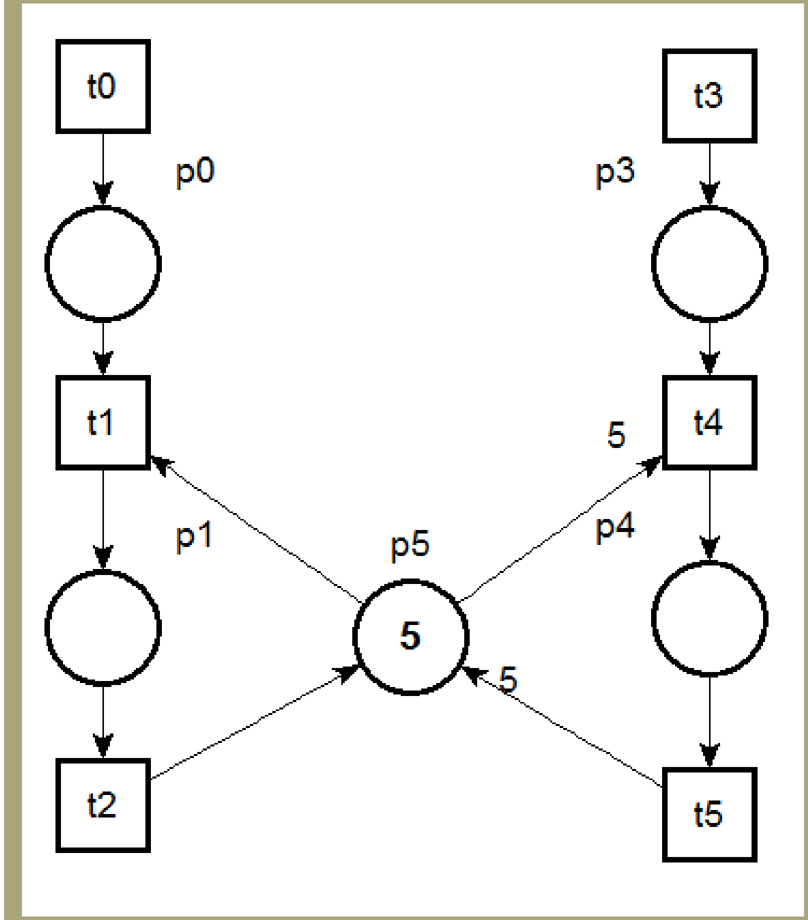
Invariantes

- **Definición 37: Invariante trivial**
- Un vector invariante con todos sus elementos iguales a cero se llama invariante trivial.
- Definición 38: Invariante no trivial
- Una invariante se dice que es no trivial si al menos un elemento del vector no es cero.
- **Definición 39: Invariante no trivial puro**
- Una invariante en el que todos los elementos del vector son diferentes de cero se dice que es un invariante no trivial puro.

Aplicación de invariantes para el análisis de una RdP

- En este apartado aplicaremos las técnicas anteriores descriptas al problema de los lectores / escritores con el fin de aplicar los invariantes de plaza y seguidamente ejemplificaremos un invariante de transacción con una RdP que modela un proceso, el cual no finaliza.
- ***Ejemplo de p-invariantes***
    - *Invariante de Lectores / Escritores*
- Consideramos una abstracción del problema de los lectores / escritores, para lo cual nos centramos en la las limitaciones de la sincronización entre las operaciones de "leer" y "escribir", descrito a continuación:
-
- $\forall\, m \in A(R, m_0)\ \ se\ cumple$:
- $C_1: m(L) \leq k, no\ mas\ de\ k\ lectores\ simultanemente$
- $C_2: m(E) \leq 1, a\ lo\ sumo\ un\ escritor$
- $C_3: m(L)\,.\,m(E) = 0\ no\ se\ permiten\ escritores\ y\ lectores\ simultaneamente$
-

Ejemplo de p-invariantes
Invariante de Lectores / Escritores



La es cubierta por un positivo T-Invariante por lo que puede ser acotada y viva

T-SEMI-FLOWS GENERATING SET

t0 t1 t2

t3 t4 t5

P-SEMI-FLOWS

p1 p4*5 p5

La red es cubierta por un positivo P-Invariante por lo que si es acotada

5 places, 6 transitions

- tr t0 -> p0
- tr t1 p0 p5 -> p1
- tr t2 p1 -> p5
- tr t3 -> p3
- tr t4 p3 p5*5 -> p4
- tr t5 p4 -> p5*5
- pl p5 (5)

Invariante de Lectores / Escritores

- **Problema de lectores/escritores con** $\boldsymbol{k = 5, cumple\ con\ K \geq 1}$
-
- Del modelo de la Figura 3 y del cálculo de sus invariantes se desprende la ecuación del P-Invariante, la que es:
- $p_1, 5\ x\ p_4, p_5$
-
- De aquí obtenemos que:
- $\forall\, m\ \in (R, m_0)\ , m(p_1) + 5.\, m(Ep_4) + m(p_5)\ =\ 5$
- Podemos generalizar el p-invariante para cualquier valor de k:
- $m(p_1) + k.\, m(p_4) + m(p_5)\ =\ \mathrm{k}$
- Usando los invariantes calculados podemos expresar las condiciones planteadas según estos:
- C_1: $despejando\ m(p_1)\ resulta$: $m(p_1) = -\,\mathrm{k}\,\mathrm{m}(p_4) - \mathrm{m}(p_5) + \mathrm{k}\ \leq \mathrm{k}$
- C_2: $despejando\ m(p_4)\ resulta$: $\mathrm{k}\,\mathrm{m}(p_4) = -m(p_1) - \mathrm{m}(p_5) + \mathrm{k}$
- $para\ el\ caso\ donde\ k \neq 0 \Longrightarrow m(p_4) \leq 1$
- C_3: $puede\ ser\ reecrita\ m(p_4) \neq 0 \Longrightarrow\ m(p_4) = 0, luego$:
- $k\ m(p_4) = k - m(p_1) - m(p_5) < k$
- $k \neq 0 \Longrightarrow m(p_4) < 1 \Longrightarrow m(p_4) = 0$
-

Invariante de Lectores / Escritores

- Observe que el cálculo de los flujos nos muestra como operar con una red parametrizada (este no es el caso con la mayoría de los otros métodos de análisis).
- Aquí hemos establecido la propiedad para una familia indexada por $k > 0$, en esta redes con este marcado inicial. Por ejemplo, un enfoque exhaustivo basado en la construcción de la gráfica de accesibilidad nos muestra que los lugares p_0 y p_3 son ilimitados.
- El cálculo de invariantes es un enfoque eficaz para la verificación de la seguridad de la red. Esta clase de propiedades puede ser descrita de manera informal por la declaración "Nada malo va a pasar". En el ejemplo, el caso de grave es la violación de las condiciones de sincronización, que no son violadas en el modelo del ejemplo.
- En la práctica, la validación del modelo también requiere que se satisfagan las propiedades de vivacidad. Este clase de propiedades pueden ser descritas de manera informal por la declaración de "algo bueno debe suceder”. En el ejemplo, podríamos comprobar si un lector no va a esperar infinitamente. Podemos ver que la red no cumple con esta propiedad: a partir de la marca $\overrightarrow{p_0} + k\,\overrightarrow{p_5}$ si llega la secuencia $\sigma = (t_3 + t_4 + t_5)^{\infty}$, el lector espera indefinidamente. Como vemos el T-invariante puede proporcionar pistas de estos comportamientos.

INVARIANTES DE PRODUCTOR CONSUMIDOR

- Consideramos una abstracción del problema de Productor Consumidor, para lo cual nos centramos en la las limitaciones de la sincronización y la exclusión mutua entre las operaciones de insertar y extraer, modelado por la RdP de la Figura 4.

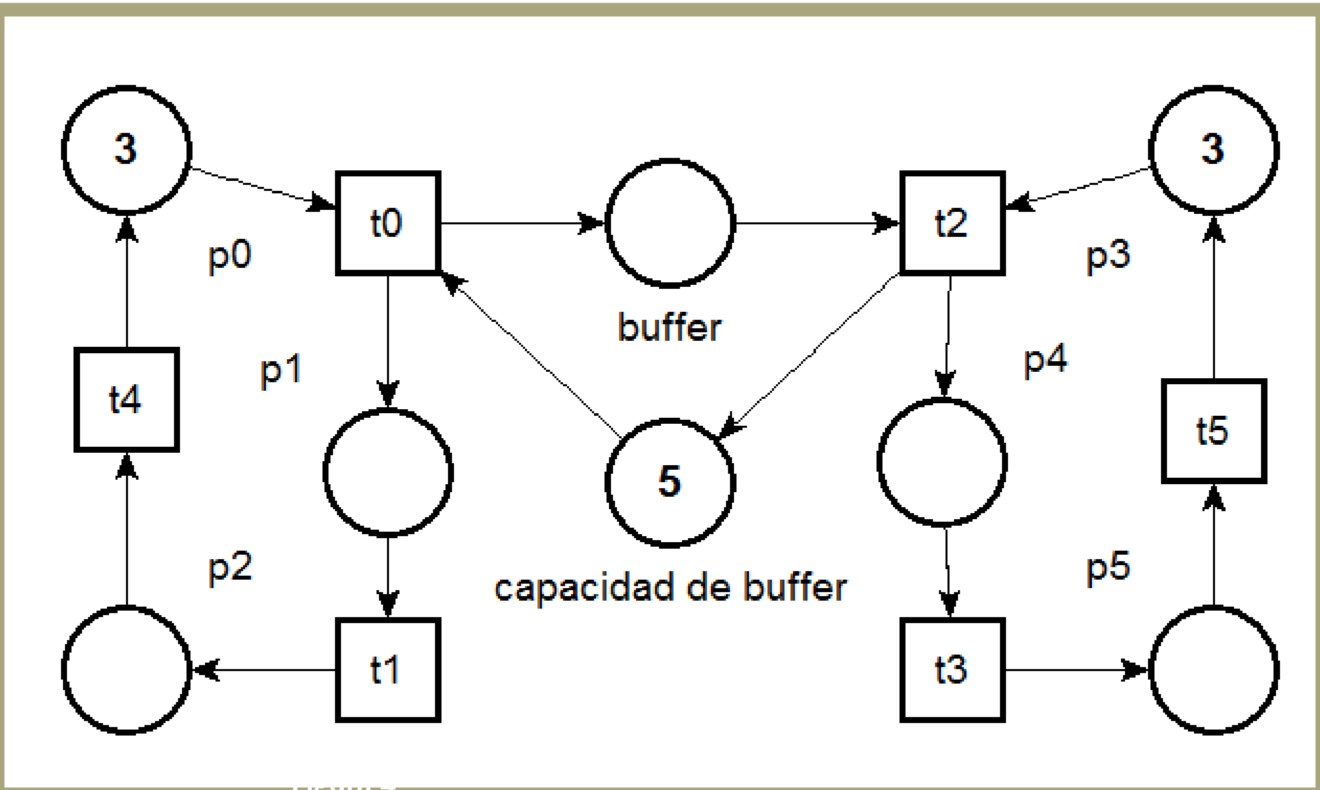


Figura 4

RdP Productor-Consumidor con buffer acotado

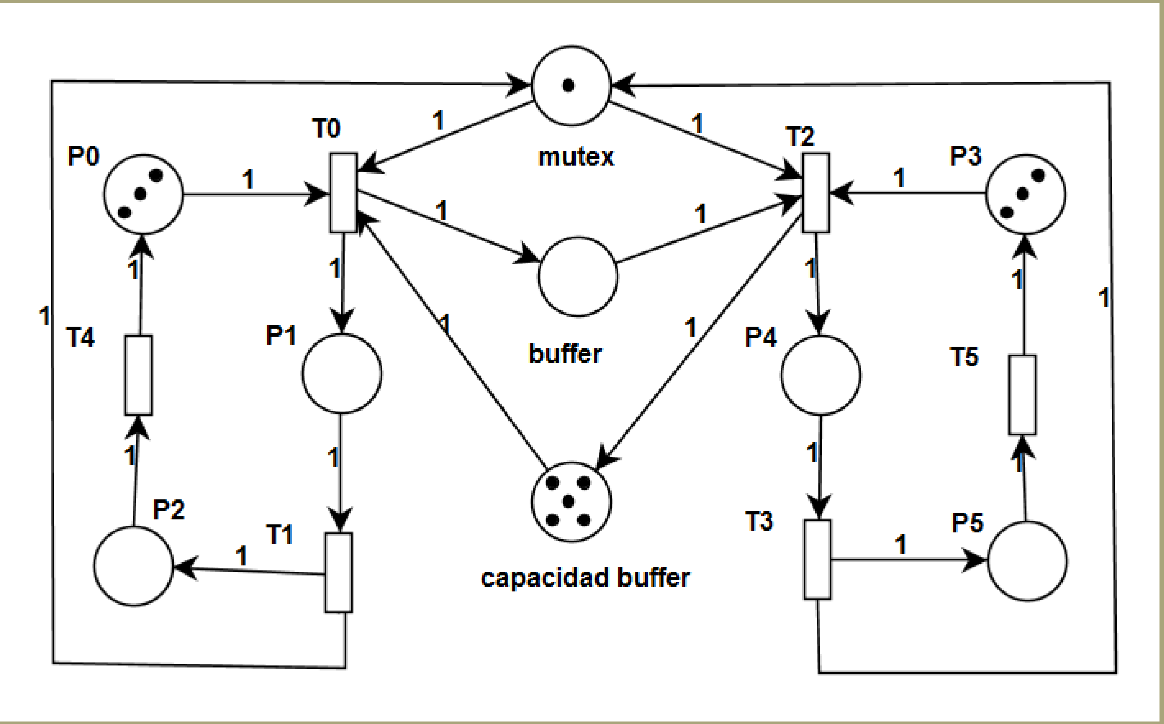
Invariantes de Productor Consumidor

- En este ejemplo, donde el buffer tiene capacidad limitada, los vectores *P-invariantes* son:
- Sus ecuaciones son:
- $M(capacidad\ buffer) + M(buffer) = 5$
- $M(P_0) + M(P_1) + M(P_2) = 3$
- $M(P_3) + M(P_4) + M(P_5) = 3$
-
- De la ecuación del invariante de plaza Buffer y la Plaza Capacidad del Buffer, vemos que la cantidad de marcas total en estas es igual al marcado inicial de, que es la capacidad del buffer, por lo que la cantidad de marcas en estas dos plazas son limitadas y constantes.
- Del invariante de las plazas P1, P2 y P3, se observa que se trata de los distintos estados de un mismo proceso, donde la cantidad de token permanece igual a uno. Este proceso, se corresponde con el *"Productor"*.
-
- Finalmente el invariante que resulta de las plazas P3, P4 y P5 nos permite identificar los estados del proceso consumidor.

P0	P1	P2	P3	P4	P5	Capacidad Buffer	Buffer
0	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0

Ejemplo de Productor Consumidor con buffer acotado y exclusión mutua

- Cuando se acceder al buffer en forma segura, tanto el productor como el consumidor deben hacerlo en exclusión mutua, el modelo de la RdP resulta es el de la Figura 5 :



RdP del Productor-Consumidor con Buffer limitado y Exclusión Mutua

Ejemplo de Productor Consumidor con buffer acotado y exclusión mutua

- Obteniendo los vectores P-invariantes del simulador se tiene:
- La diferencia, en lo que a invariantes de plazas, es un cuarto invariante que hacer referencia a la exclusión mutua, su ecuación es:
- $M(P_1) + M(P_4) + M(mutex) = 1$
- Las plazas P_1 y P_4 se corresponden con los estados de procesos productor y consumidor respectivamente. El hecho de que aparezcan en un invariante junto con la plaza $mutex$ indica que la cantidad de tokens entre estas tres plazas no cambia. Dado que el valor constante es "1", este P-invariante muestra la exclusión mutua entre ambos procesos.

P0	P1	P2	P3	P4	P5	capacidad buffer	buffer	mutex
1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1

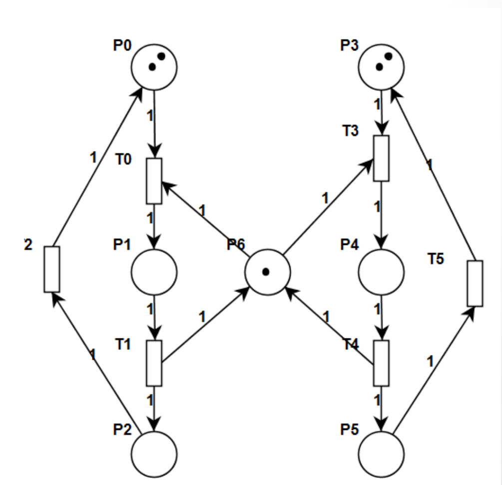
Ejemplo de T-Invariantes

- Los vectores T-semiflow son invariantes de transiciones o T-invariantes. En particular, indican posibles bucles (loops) en la red, es decir, una secuencia de disparos que tenga asociado un invariante de transición, vuelve al mismo marcado desde el que partió. Por ejemplo, sea la siguiente RdP, el vector:

Esta RdP tiene dos invariantes de transiciones.
Esto se muestra evaluando la ecuación de estado de la red.
m=m0+I× u

$$m = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

T0	T1	T2	T3	T4
1	1	1	0	0
0	0	0	1	1



Trampas y Sifones

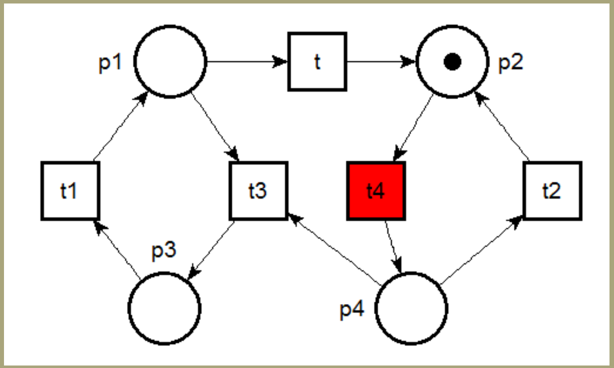
- **Introducción**

- Los conceptos de sifón (también llamados bloqueos estructurales) y trampa es tan muy relacionados con el análisis de interbloqueo y vivacidad, por ejemplo si un sifón está vacío para un marcado, se quedará así para todas las marcas alcanzables posteriormente; mientras que una trampa tiene la propiedad de que si en algún marcado tiene un token, entonces para todas las marcas alcanzables posteriores tendrá como mínimo una token. Estos son subconjuntos de lugares fácilmente reconocibles con comportamiento particular. En (WATANABE 1999), Watanabe explotan 13 teorema para derivar una heurística eficiente que descarta los candidatos que no son ni trampas, ni co-trampas.

Sifones (Siphons)

- **Definición 40: Sifón**
- Sea una Red de Petri RdP marcada, es un sifón (Iordache and Antsaklis 2006) si existe un subconjunto no vacío de plazas $S \in P$, cuando el sub conjunto de transiciones de entrada a S esta contenido o es igual al sub conjunto de transiciones de salida de S, esto es:
- ${}^{\bullet}S \subseteq S^{\bullet}$
- Dónde:
- $\bullet S$ es el conjunto de las transiciones que entra a las plazas de S
- $S\bullet$ es el conjunto de transiciones que son salidas de las plazas de S

En la Figura 7 muestra una RdP con un subconjunto de plazas $S_1 = \{p_1, p_3\}$, que conforman un sifón, notar que cuando esta vacío no se puede colocar un toquen en este subconjunto, mientras que el subconjunto $S_2 = \{p_2, p_4\}$ no es un sifón, lo que permite que un token entra aun si este subconjunto esta vacío. La **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** muestra una RdP, ligeramente más compleja, con dos sifones, esto nos permite anticipar su comportamiento.

$sifon$ $S_1 = \{p_1, p_3\}$ $\bullet S_1 = \{t_1, t_3\}$ $S_1 \bullet = \{t, t_3, t_1\}$ $\bullet S_1 \subseteq S_1$ $no - sifon$ $S_2 = \{p_2, p_4\}$ $\bullet S_2 = \{t, t_2, t_4\}$ $S_2 \bullet = \{t_3, t_2, t_4\}$ $\bullet S_2 \; not \subseteq S_2 \bullet$	$\bullet p_1 = \{t_1\}$ $\bullet p_2 = \{t, t_2\}$ $\bullet p_3 = \{t_3\}$ $\bullet p_4 = \{t_4\}$ $p_1 \bullet = \{t, t_3\}$ $p_2 \bullet = \{t_4\}$ $p_3 \bullet = \{t_1\}$ $p_4 \bullet = \{t_2, t_3\}$	 **Figura 7** **RdP donde el conjunto $= \{p_1, p_3\}$ es un sifón**

Sifón ejemplo

- En la Figura 7 muestra una RdP con un subconjunto de plazas $S_1 = \{p_1, p_3\}$, que conforman un sifón, notar que cuando esta vacío no se puede colocar un toquen en este subconjunto, mientras que el subconjunto $S_2 = \{p_2, p_4\}$ no es un sifón, lo que permite que un token entra aun si este subconjunto esta vacío.

- La. muestra una RdP, ligeramente más compleja, con dos sifones, esto nos permite anticipar su comportamiento.

$S_1 = \{p_1, p_3, p_5, p_7\}$

$\bullet S_1 = \{t_7, t_1, t_2, t_4, t_6,\}$

$S_1 \bullet = \{t_1, t_2, t_4, t_6, t_7\}$

$\bullet S_1 \subseteq S_1$

$S_2 = \{p_1, p_2, p_4, p_6\}$

$\bullet S_2 = \{t_1, t_2, t_3, t_5, t_7\}$

$S_2 \bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_5, t_7\}$

$\bullet S_2 \subseteq S_2$

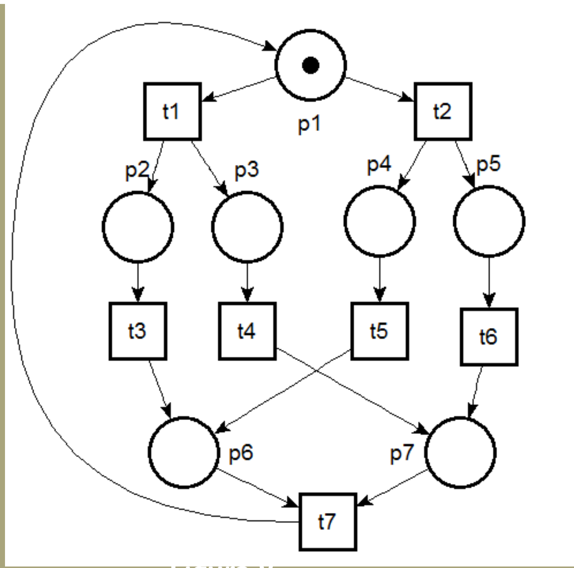


Figura 8

$\bullet p_1 = \{t_7\}, \bullet p_2 = \{t_1\}, \bullet p_3 = \{t_1\}, \bullet p_4 = \{t_2\}, \bullet p_5 = \{t_2\},$

$\bullet p_6 = \{t_3, t_5\}, \bullet p_7 = \{t_4, t_6\}.$

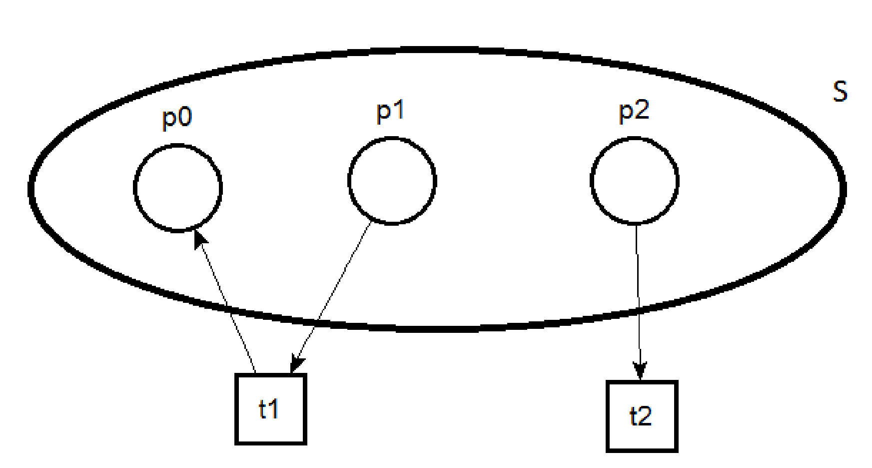
$p_1 \bullet = \{ t_1, t_2\},\ p_2 \bullet = \{ t_3\}, p_3 \bullet = \{ t_4\}, p_4 \bullet = \{ t_5\}, p_5 \bullet = \{ t_6\},$

$p_6 \bullet = \{ t_7\}, p_7 \bullet = \{ t_7\}.$

Sifón ejemplo

Podemos decir que son particularidades de los sifones que cada transición que coloca un tokens en un sifón debe remover al menos uno de este y si el sifón está vacío en un determinado marcado m_i se cumple que para toda plaza que pertenecen al sifón su marca será siempre cero. La Figura 9: Interacción de un sifón con transiciones externas muestra una gráfica de cómo interactúan las transiciones con el sifón.

Figura 9: Interacción de un sifón con transiciones externas



Trampa (trap)

- **Definición 41: Trampa**
- Sea una Red de Petri RdP marcada, una trampa (Iordache and Antsaklis 2006) es un subconjunto no vacío de plazas $G \in P$, tal que el sub conjunto de transiciones de salida de G esta contenido o es igual al sub conjunto de transiciones de entradas a G, esto es:
- $G^{\bullet} \subseteq {}^{\bullet}G$
- Dónde:
- $G\bullet$ es el subconjunto de transiciones que son salidas de las plazas de G
- $\bullet G$ es el subconjunto de las transiciones que entra a las plazas de G

$trampa$

$G_1 = \{p_1, p_3\}$

$\bullet G_1 = \{t_1, t_3\}$

$G_1 \bullet = \{t_3, t_1\}$

$G_1 \bullet \subseteq \bullet G_1$

$trampa$

$G_2 = \{p_2, p_4\}$

$\bullet G_2 = \{t_2, t_1\}$

$G_2 \bullet = \{t_2, t_1\}$

$G_2 \bullet \subseteq \bullet G_2$

$\bullet p_1 = \{t_3\}$

$\bullet p_2 = \{t_1\}$

$\bullet p_3 = \{t_1\}$

$\bullet p_4 = \{t_2\}$

$\bullet p_5 = \{t_1, t_2\}$

$p_1 \bullet = \{t_1\}$

$p_2 \bullet = \{t_2\}$

$p_3 \bullet = \{t_3\}$

$p_4 \bullet = \{t_1\}$

$p_5 \bullet = \{t_3\}$

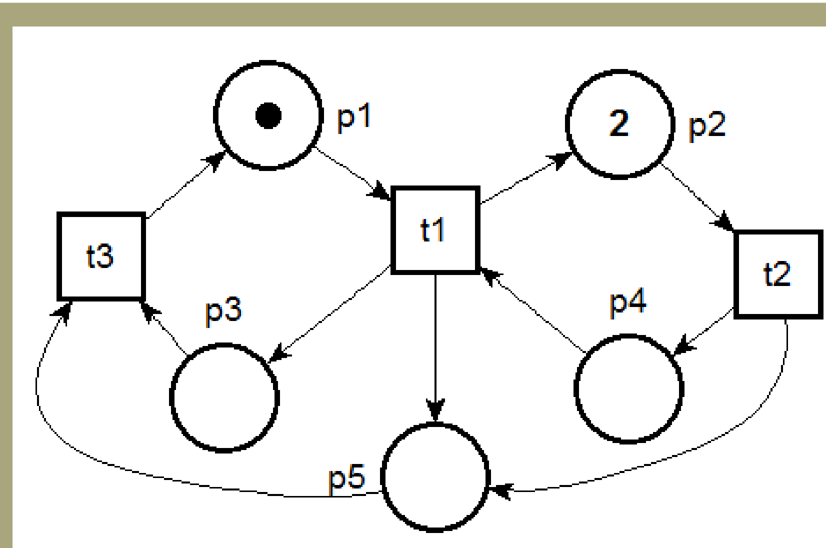


Figura 10

RdP donde los conjuntos $\{p_1, p_3\}$ y $= \{p_2, p_4\}$ son trampas

Trampa (trap)

- Como vemos, la RdP de la Figura 10 tiene dos trampas, que son los conjuntos $\{p_1, p_3\}$ y $\{p_2, p_4\}$. Podemos ver que si estas subredes (trampas) alcanzan una marcar, entonces en su evolución la RdP mantendrá como mínimo esa marca en la trampa.

$$G_1 = \{p_1, p_2, p_4, p_6\}$$

$$\bullet G_1 = \{t_7, t_1, t_2, t_3, t_5\}$$

$$G_1 \bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_5, t_7\}$$

$$G_1 \bullet \subseteq \bullet G_1$$

$$G_2 = \{p_1, p_3, p_5, p_7\}$$

$$\bullet G_2 = \{t_7, t_1, t_2, t_4, t_6\}$$

$$G_2 \bullet = \{t_1, t_2, t_4, t_6, t_7\}$$

$$G_2 \bullet \subseteq \bullet G_2$$

$$G_3 = \{p_1, p_2, p_5, p_6, p_7\}$$

$$\bullet G_3 = \{t_7, t_1, t_2, t_3, t_5, t_4, t_6\}$$

$$G_3 \bullet = \{t_1, t_2, t_3, t_6, t_7\}$$

$$G_3 \bullet \subseteq \bullet G_3$$

$$G_4 = \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7\}$$

$$\bullet G_3 = \{t_7, t_1, t_2, t_3, t_5, t_4, t_6\}$$

$$G_3 \bullet = \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_7\}$$

$$G_3 \bullet \subseteq \bullet G_3$$

$$G_3 \bullet \subseteq \bullet G_3$$

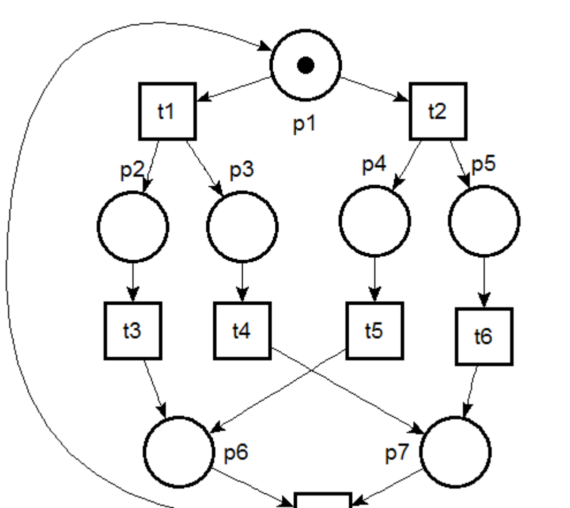
$$G_4 = \{p_1, p_3, p_4, p_6, p_7\}$$

$$\bullet G_3 = \{t_7, t_1, t_2, t_3, t_5, t_4, t_6\}$$

$$G_3 \bullet = \{t_1, t_2, t_4, t_5, t_7\}$$

$$G_3 \bullet \subseteq \bullet G_3$$

Figura 11



Trampa (trap)

La Figura 11 muestra una RdP ligeramente más compleja y las trampas que la componen. Las redes de la Figura 8 y la Figura 11 son las mismas y hay que hacer notar que el subconjunto de la trampa está contenido en el subconjunto del sifón, $\{p_1, p_2, p_4, p_6\} \subseteq \{p_1, p_2, p_4, p_4, p_6\}$, por lo que dentro de un sifón tenemos una trampa.

Del estudio de los sifones y trampas, podemos decir que las RdP tiene las siguientes propiedades(C. Girault 2001).

$\bullet p_1 = \{t_7\}, \bullet p_2 = \{t_1\}, \bullet p_3 = \{t_1\}, \bullet p_4 = \{t_2\}, \bullet p_5 = \{t_2\},$

$\bullet p_6 = \{t_3, t_5\}, \bullet p_7 = \{t_4, t_6\}.$

$p_1 \bullet = \{ t_1, t_2\},\ p_2 \bullet = \{ t_3\}, p_3 \bullet = \{ t_4\}, p_4 \bullet = \{ t_5\}, p_5 \bullet = \{ t_6\},$

$p_6 \bullet = \{ t_7\}, p_7 \bullet = \{ t_7\}.$

Ejemplo de Trampas (Traps)

- La **tramapa de la figura** es un ejemplo (Muscholl 2006) de una trampa en una RdP.

P-Invariantes

T-Invariantes, no posee

Sifones mínimos

$\{region\ critica\ 1, nc\ 1\}$ $\{region\ critica\ 2, nc\ 2\}$ $\{q_1, pend\ 2, regio$

$\{region\ critica\ 1, q_0, pend\ 1\}$

Trapas mínimas

$\{nc\ 1\}$ $\{nc\ 2\}$ $\{q_1, pend\ 2, region\ critica\ 2\}$ $\{region\ critica\ 1, q_0, p$

El objetivo de este sistema es garantizar la exclusión mutua, para dos procesos que ingrese a su sección crítica, por lo que solo uno de ellos puede estar en la sección crítica. Entonces, lo se desea probar que para todo marcado m_i se cumple que:

$$M(Region\ Critica\ 1) + M(Region\ Critica\ 2) \leq 1$$