....

IV notions de base des probabilités

....

1. Expérience aléatoire et univers

a) Définitions et exemples

Une expérience aléatoire est une expérience dont toutes les issues possibles, tous les résultats possibles sont connus à l'avance, sans que l'on puisse prédire quel en sera finalement le résultat.

Quand on lance un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, on connaît à l'avance les 6 issues possibles de l'expérience, mais il nous est impossible de savoir, à l'avance, quel sera le résultat du lancer. Idem quand on joue à pile ou face avec une pièce.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est ce que l'on appelle l'univers de l'expérience ou encore l'ensemble fondamental. Il sera en général symbolisé par la lettre grecque majuscule Ω.

b) Ensemble des parties d'un ensemble

L'ensemble des parties d'un ensemble est l'ensemble des sous-ensembles de cet ensemble.

Considérons par exemple l'ensemble suivant : $E = \{a, b, c\}$

Quel est l'ensemble des parties de cet ensemble E ?

c) Événements et espace probabilisable / Étude d'un exemple

Prenons l'ensemble des résultats possibles de notre expérience aléatoire du lancer de dé. L'univers de cette expérience est :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Quel est l'ensemble des parties de Ω que l'on noterait $P(\Omega)$?

d) Généralisation

Étant donné une expérience aléatoire, nous lui associons un univers, qui est l'ensemble des résultats possibles de cette expérience, noté Ω . Considérons que, comme dans notre exemple de lancer de dé, Ω est un ensemble dénombrable. Alors $P(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω , est une tribu d'événements que l'on peut associer à Ω pour constituer le couple$(\Omega, P(\Omega))$. Ce couple ainsi formé est ce que l'on appelle un **espace probabilisable**.

e) Opérations sur les événements (à partir d'un exemple)

Avec l'idée qu'un événement n'est autre chose qu'un sous-ensemble de Ω , il paraît naturel de considérer des unions et des intersections d'événements.

Reprenons les deux exemples d'événements dans l'expérience du lancer de dé.

L'événement A , "Obtenir un nombre impair", est réalisé chaque fois que l'une des issues du sous-ensemble $A = \{1, 3, 5\}$ est obtenue.

Idem pour l'événement B, "Obtenir un multiple de 3", avec $B = \{3, 6\}$.

$A \cap B$, qui se lit "A intersection B" ou encore "A inter B", est le sous-ensemble de Ω qui contient les éléments qui sont à la fois dans A et dans B . Nous avons :

$$A \cap B = \{3\}$$

$A \cup B$ quant à lui, qui se lit "A union B", est le sous-ensemble de Ω qui contient les éléments qui sont soit dans A , soit dans B . Nous avons, dans le cas de nos exemples d'événements A et B :

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$$

Pour un événement A donné, sous-ensemble de Ω , l'événement contraire de A , noté $\bar{A}$, est un sous-ensemble qui contient tous les éléments de Ω qui ne sont pas dans A . C'est ce que l'on appelle l'ensemble complémentaire de A dans Ω.

Dans notre exemple de lancer de dé, l'événement A "obtenir un nombre impair" qui s'écrit sous forme d'ensemble $A = \{1, 3, 5\}$ a pour événement contraire "obtenir un nombre pair" . Ce sous-ensemble s'écrit : $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$

3. Probabilité

Reprenons l'espace probabilisable, le couple (Ω, T), où Ω est l'ensemble des résultats possibles, et T une tribu d'événements associés à cette expérience. Lorsque Ω est fini ou dénombrable, l'ensemble des parties de Ω, noté $P(\Omega)$ peut toujours être considéré comme une tribu d'événements.

a) Définition

On appelle probabilité toute application $\mathbb{P}$ de T dans l'intervalle $[0; 1]$, où T est une tribu d'événements, vérifiant $P(\Omega) = 1$, et telle que, pour tout couple (A, B) d'événements disjoints :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Elle permet d'associer, à chaque événement de notre expérience aléatoire, un réel compris entre 0 et 1, ce réel quantifiant "la chance pour cet événement de se produire".

Ainsi, en munissant notre espace probabilisable, le couple (Ω, T), de l'application $\mathbb{P}$, nous obtenons le triplet $(\Omega, T, \mathbb{P})$, appelé espace probabilisé.

b) Le cas particulier de l'équiprobabilité

Exemple

Reprenons l'exemple du lancer de dé. La probabilité de l'événement obtenir 4 vaut $\frac{1}{6}$. Pourquoi ?

Définition du cardinal d'un ensemble fini

Un ensemble est dit fini quand il contient un nombre fini d'éléments, comme l'ensemble Ω de l'exemple du lancer de dé.

On appelle cardinal d'un ensemble fini le nombre d'éléments qu'il contient. Ce nombre est un nombre entier que l'on notera en général n.

Ainsi, pour notre exemple, le cardinal de Ω est 6 . C'est le nombre d'éléments qu'il contient.

Equiprobabilité

Dans le contexte d'une expérience aléatoire, dont l'univers Ω contient un nombre fini d'éléments, les issues de cette expérience sont équiprobables si l'on considère qu'elles ont toutes la même probabilité, la même chance de se réaliser.

C'est le cas pour le lancer d'un dé à 6 faces. Si ce dé n'est pas truqué, chaque face aura a priori la même chance d'apparaître.

Ainsi, dans le contexte d'une expérience aléatoire dont les issues sont équiprobables et dont l'univers Ω a pour cardinal n , la probabilité d'un événement A est définie comme suit :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Cardinal(A)}{Cardinal(\Omega)}$$

On pourra utiliser pour notation Cardinal $(A) = |A|$

Exemple

c) Quelques propriétés de la probabilité

Comme indiqué dans la définition même de la probabilité, pour deux événements A et B incompatibles, c'est-à-dire qui ne peuvent se réaliser tous les deux à la fois, nous avons :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Par ailleurs, pour l'événement $\bar{A}$, événement contraire de A , nous aurons :

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

Enfin, notons que l'événement certain a pour probabilité 1, tandis que son événement contraire, l'événement impossible, est de probabilité nulle.

3. Probabilité conditionnelle

a) Définition

Considérons à nouveau l'espace probabilisable, le couple (Ω, T) . Nous allons encore une fois munir cet espace d'une application. Après l'application probabilité , nous allons cette fois lui associer l'application probabilité sachant A , définie pour tout événement B associé à l'expérience aléatoire par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Lire probabilité de B sachant A égale, etc.

L'application ainsi définie sur l'ensemble des événements de l'expérience aléatoire et à valeur dans $[0;1]$ est la probabilité conditionnellement à l'événement A .

Exemple

b) Formule des probabilités totales

Système complet d'événements
Prenons une suite d'événements non vides d'une expérience aléatoire, que l'on pourrait noter A_i , i allant de 1 à un entier naturel n. Ces événements forment un système complet d'événements s'ils vérifient les deux conditions suivantes :

1. $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$
2. $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

L'exemple le plus courant de système complet d'événements est celui d'un événement non vide quelconque et de son événement contraire.

En effet, l'union d'un événement et de son événement contraire est par définition Ω. Et toujours par définition de ce que l'on appelle des événements contraires, leur intersection est vide.

La formule des probabilités totales, SCE de deux événements

Prenons l'exemple de deux événements A et B formant un système complet d'événements. Alors, pour un événement C quelconque de la même expérience aléatoire, nous aurons :

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)$$

C'est la formule des probabilités totales.

La formule des probabilités totales, cas général

Généralisons. Soit une suite d'événements A_i formant un SCE selon la définition que l'on vient de voir. Alors la probabilité de tout autre événement de cet espace probabilisé s'écrirait sous la forme de la somme suivante :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{P}(A_i \cap B)$$

4. Indépendance

Définition

Étant donné deux événements A et B d'un même espace probabilisé, on les considère comme indépendants, si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Exemple

On lance une pièce mille fois. On définit les événements A comme "obtenir 999 fois pile lors des 999 premiers lancers" , et B comme "obtenir pile au 1000e lancer". Alors il est évident que la réalisation de l'événement A n'a aucune influence sur celle de l'événement B.