....

III Développements limités

....

Objectifs d'exercice (Voir feuille d'exercices TD2)

+ Écrire le DL d'une fonction usuelle au voisinage de 0 à l'aide de la formule de Taylor-Young

+ Écrire le DL d'une fonction au voisinage de 0 à l'aide d'opérations élémentaires sur les DL de fonctions usuelles

....

a désigne ici un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$

1. Négligeabilité

a) Définition

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, lorsqu'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a, de limite nulle en a, telle que $f(x) = \epsilon(x)g(x)$.

On note (notation de Landau) : $f(x) = o(g(x))$

Exemples

b) Caractérisation

En pratique, si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Transitivité

2. Formule de Taylor Young

a) Énoncé

Soit une fonction f définie et et de classe C^n sur I et a un élément de I, alors f admet un développement limité d'ordre n en a donné par :

$$\boxed{f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f^3(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a) + o((x-a)^n)}$$

b) Développements limités usuels au voisinage de 0

Pour tout réel α, on a :

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}u^n + o(u^n)$$

On en déduit les DL des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$\sqrt{1+x} = ...$

$\dfrac{1}{1+x} = ...$

Par application de la formule de Taylor-Young à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 on obtient :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{(k+1)}\frac{x^k}{k} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

De même pour $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 :

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

3. Utilisation des développements limités

Étude locale d'une fonction (comparaison, position de courbe et tangente)

Calcul de limite

Recherche d'asymptote

etc.

....

IV Fonctions de deux variables

....

Objectifs d'exercice (Voir feuille d'exercices TD2)

+ Calculer les dérivées partielles d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

+ Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 et la matrice Hessienne d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$

....

1.Fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$

a) Définition

On appelle fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ tout procédé permettant d'associer à chaque couple (x, y) de réels, un unique réel appelé image du couple (x, y) et noté $f(x, y)$.

b) Exemples

Les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+3}$ et $(x, y) \mapsto e^{x+y}$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

En économie les fonctions de production de Cobb-Douglas sont les fonctions qui à deux variables réelles (la quantité de travail L et le capital investi K associent la production totale P définie par : $P(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$, où α et β sont strictement positifs.

c) Graphes

On appelle graphe de f l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $z = f(x, y)$. Le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface ou nappe de l'espace $\mathbb{R}^3$

2.Calcul différentiel d'ordre 1

a) Dérivées partielles d'ordre 1

Si pour toute valeur de y fixée, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe la dérivée de la fonction $x \mapsto f(x, y)$ s'appelle la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la première variable (ici x). On la note $\partial_1 f$.

On définit de la même façon sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $\partial_1 f$, qui est la dérivée partielle d'ordre 1 de f par rapport à la deuxième variable (ici y).

b) Exemples de calcul

c) Gradient

On appelle gradient de f en (x, y), le vecteur (ou couple de réels pour ceux qui n'ont pas vu les espaces vectoriels) noté $\nabla(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1(f)(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) \end{pmatrix}$

3. Calcul différentiel d'ordre 2

a) Dérivées partielles d'ordre 2

Soit f une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$.
Si $\partial_1 f$ admet elle-même une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$, on dit alors que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la première variable sur $\mathbb{R}^2$ et on la note $\partial^2_{1,1}(f)$

Idem pour $\partial^2_{1,2}(f)$, $\partial^2_{2,1}(f)$ et $\partial^2_{2,2}(f)$.

b) Exemples de calcul

c) Matrice Hessienne

Théorème de Schwartz