Fondamentaux mathématiques
Résumé de cours à compléter en classe

(DIFIQ)

....

I Suites numériques

....

Objectifs d'exercice (Voir feuille d'exercices TD1)

+ Reconnaitre une suite arithmétique (resp. géométrique)
+ Déterminer le terme général d'une suite arithmétique (resp. géométrique)
+ Calculer des sommes de suites arithmétiques (resp. géométriques)

+ Calculer une dérivée, notamment celle d'une fonction composée
+ Trouver une primitive pour une fonction de référence ou une fonction composée
+ Calculer une intégrale simple

....

1. Définition et modes de génération

a) Définition

On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$, ou d'une partie de $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$.

b) Modes de génération

Une suite peut être définie par son terme général explicite ou par récurrence.
Exemple de suite définie par récurrence : La suite (u_n) définie pour tout n non nul par : $u_n = \frac{1}{n}$
Exemple de suite définie par récurrence : La suite (u_n) définie pour tout n supérieur ou égal à 3 par : $u_3 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5} + 7$

2. Suites arithmétiques

a) Définition

Une suite est arithmétique si pour tout n de son ensemble de définition la relation suivante, dans laquelle r représente un certain réel, est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r}$$

b) Terme général explicite

Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_p avec p un entier s'écrit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, u_n = u_p + (n-p) \times r}$$

c) Somme

Soient p et N deux entiers naturels avec $N \geq p$, la somme des termes d'une suite arithmétique (u_n), du terme d'indice p au terme d'indice N, s'écrit :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{N} u_k = \frac{u_p + u_N}{2} \times (N - p + 1)}$$

3. Suites géométriques

a) Définition

Une suite (v_n) est géométrique si pour tout entier n de son ensemble de définition la relation suivante, dans laquelle q représente un réel, est vraie :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n \times q}$$

On dira alors que la suite est géométrique de raison q.

b) Terme général explicite

Le terme général d'une suite géométrique v de premier terme v_p avec p un entier s'écrit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geq p, v_n = v_p + \times q^{n-p}}$$

c) Somme

Soit p et N deux entiers naturels avec $N \geq p$, la somme des termes d'une suite géométrique (v_n), du terme d'indice p au terme d'indice N, s'écrit :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{N} u_k = v_p \times \frac{1 - q^{N-p+1}}{1 - q}}$$

....

II Dérivation, primitives et intégrale

....

Objectifs d'exercice (Voir feuille d'exercices TD1)

+ Calculer une dérivée, notamment celle d'une fonction composée
+ Trouver une primitive pour une fonction de référence ou une fonction composée
+ Calculer une intégrale simple

....

1. Dérivation

a) Interprétation géométrique

Schéma

b) Définition du nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un élément de I. On dit que f est dérivable en a si la limite suivante est finie :

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Cette limite finie est alors appelée le nombre dérivé de f en a et noté $f'(a)$.

Si cette limite n'est pas finie, on dira que f n'est pas dérivable en a.

A noter au passage que la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de la fonction f en a.

Interprétation géométrique

c) Notion de fonction dérivée

Ensemble de dérivabilité :
On appelle ensemble de dérivabilité d'une fonction, l'ensemble des réels a de son ensemble de définition en lesquels la limite du taux d'accroissement est finie.

Fonction dérivée ou dérivée
On appelle la dérivée d'une fonction f, une fonction f' qui à chaque réel de l'ensemble de dérivabilité de f associe comme image le nombre dérivé en ce réel.

Exemple : la fonction carré

2. Calcul de dérivées

a) Dérivées des fonctions usuelles

Tableau des dérivées usuelles

Fonction f définie par :	**Fonction f'**	**Ensemble de dérivabilité**
$f(x) = k$, k constante réelle	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$

b) Opération sur les dérivées : somme, produit, quotient

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k est un réel.

Somme	$(u+v)' = u' + v'$
Produit par un réel	$(ku)' = ku'$
Produit	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Inverse	Si $v \neq 0$ sur I, $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
Qoutient	Si $v \neq 0$ sur I, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

c) Dérivée d'une fonction composée

u dérivable sur un intervalle I et v dérivable en $u(x)$ pour tout x élément de I.

$u(x) = ax + b$	$[v(ax+b)]' = a \times v'(ax+b)$
Puissance entière	$[(u(x))^n]' = nu'(x) \times [u(x)]^{n-1}, n \in \mathbb{Z}^*, n \neq 1$ et $u(x) \neq 0$ sur I si $n < 0$
avec exp	$\left(\mathrm{e}^{u(x)}\right)' = u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$
avec ln	$[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec u à valeurs strictement positives
Cas général	$[v(u(x))]' = v'(u(x)) \times u'(x)$

3. Primitives

a) Notion de primitive

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction dérivable F dérivable sur I telle que pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

b) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{1-n} = \dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
x^{α}, $\alpha > 0$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

4. Calcul intégral

a) Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I, alors on a l'égalité fondamentale suivante :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

b) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

c)Linéarité de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et α et β deux réels quelconques.

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

d)Interprétation graphique

Théorème Soit a et b deux réels, Si f est continue et positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'aire du domaine délimité par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

....