DIFIQ / Mathématiques / Niveau 1 / TD 2 / Corrigé

....

Exercice 1 : Application de la formule de Taylor Young

En appliquant la formule de Taylor Young, calculer le DL en 0 à l'ordre 3 des fonctions :

a) $x \mapsto \ln(1+x)$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$, en tant que composée de la fonction ln et d'une fonction affine, est de classe c^∞ sur son ensemble de définition : $D = \{x \in \mathbb{R}, 1+x > 0\} =]-1;+\infty[$. Pour tout x réel dans l'ensemble D nous avons :

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ On dérive f comme une fonction de la forme $ln(u)$ qui admet comme dérivée $\frac{u'}{u}$

$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ On dérive f' comme une fonction de la forme $\frac{1}{u}$ qui admet comme dérivée $-\frac{u'}{u^2}$

$f^{(3)}(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} =$ Idem pour le calcul de $f^{(3)}(x)$

Ce qui nous donne :

$f'(0) = 1$

$f''(0) = -1$

et $f^{(3)}(0) = 2$

Notons par ailleurs que $f(0) = 0$

Enfin par simple application de la formule de Taylor Young nous avons, :

$$\ln(1+x) = 0 + 1 \times (x-0) + (-1) \times \frac{(x-0)^2}{2!} + (2) \times \frac{(x-0)^3}{3!} + o((x-0)^3) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

b) $x \mapsto e^x$;

Avec exactement le même raisonnement nous obtenons :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

c) $x \mapsto \frac{1}{1+x}$;

Idem et on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

d) $x \mapsto \sqrt{1-x}$;

Idem et on obtient :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

....

Exercice 2 : Application de la formule de Taylor/Younng et de quelques règles de troncature

a) $x \mapsto x\ln(1+x)$ DL en 0 à l'ordre 3

Dans l'exercice précédent, nous avons obtenu le DL suivant :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Ainsi, par produit on obtient :

$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + xo(x^3)$

Nous avons fait la produi par x sans aucune analyse. Mais à ce stade deux points importants sont à noter :
i) Comme on nous demande un DL à l'ordre 3, on s'arrête au degré 3 pour ce qui est de notre polynome dans la partie régulière du DL.

ii) Il est important de bien noter le fait que, si au voisinage de 0, nous avons un terme $o(x^3)$ qui par définition est negligeable devant x^3, alors $xo(x^3)$ sera tout autant negligeable devant x^3.

Grâce à ces deux points nous pouvons conclure :

$x\ln(1+x) = x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

b) $x \mapsto \ln(1+x) - x$ DL en 0 à l'ordre 3

A nouveau, dans l'exercice précédent, nous avons obtenu le DL suivant :

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

Ainsi, par soustraction on obtient :

$ln(1+x) - x = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

c) $x \mapsto e^{-2x}\sqrt{1+x}$ DL en 0 à l'ordre 2

La fonction f est de classe C^2 sur $[-1;+\infty[$ et par conséquent au voisinage de 0. Par ailleurs :

$f'(x) = [-2\sqrt{1+x} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}]e^{-2x}$: / et alors $f'(0) = -\frac{3}{2}$

$f''(x) = [-\frac{2}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} + 4\sqrt{1+x}]e^{-2x}$ et donc $f''(0) = \frac{7}{4}$

Ce qui grâce à la formule de Taylor Young nous donne au voisinage de 0 :

$f(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$

d) $x \mapsto x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ DL en en $+\infty$ à l'ordre 2

Attention : corriger l'énoncé. Il s'agit bien d'un DL en $+\infty$, ce qui avec un changement de variable, nous amène en 0.

On a : $\sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$ quand u est au voisinage de 0 avec $o(u^2)$ negligeable devant u^2 en 0.

Avec le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ on a bien $\lim_{x\to+\infty} u = 0$ et on peut écrire :

$\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})$

En multipliant par x on obtient :

$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o(\frac{1}{x})$

Où $o(\frac{1}{x})$ est un terme de négligeable devant $\frac{1}{x}$ quand x tend vers l'infini.

....