**DIFIQ / Mathématiques / Niveau 1 / TD 1/ Corrigé**

........................................................................................................................

**Exercice 1 : arithmétique ou géométrique ?**

Pour chacune de ces suites indiquer si elle est arithmétique, géométrique ou ni arithmétique ni géométrique. $n$ est un entier naturel quelconque.

$u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ ;

Il suffit de prendre pour contre-exemple les premiers termes de la suite :

$\mathrm{u}_0 = 1$

$\mathrm{u}_1 = \frac{2}{3}$

$\mathrm{u}_2 = \frac{3}{5}$

Ainsi $u_1 - u_0 = -\frac{1}{3} \neq u_2 - u_1 = -\frac{1}{15} \Rightarrow (u_n)$ n'est pas arithmétique.

Par ailleurs : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{9}{10} \Rightarrow (u_n)$ n'est pas géométrique.

En conclusion cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

$v_n = \frac{1}{2^n}$ ;

On peut d'emblée reconnaitre le terme général d'une suite géométrique, de la forme $v_0 q^n$.

Mais on peut également constater que, pour tout entier naturel $n$ on a : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$

En conclusion $(v_n)$ est géométrique.

$w_n = \alpha + \beta n$ avec $\alpha$ et $\beta$ réels quelconques ;

Pour tout $n$ entier naturel, on a la quantité $w_{n+1} - w_n = \alpha + \beta(n+1) - (\alpha + \beta n) = \beta$

Il en résulte que la suite $(w_n)$ est arithmétique de raison $\beta$.

$\mathrm{X}_n = (1 + \frac{t}{100})^n$ ;

De même suite géométrique de raison $(1 + \frac{t}{100})$.

........................................................................................................................

**Exercice 2 : Sommes arithmétiques et géométriques**

Calculer ces sommes :

$S_1 = 20 + 30 + 40 + ... + 470 + 480$

$S_1 = 10 \times (2 + 3 + 4 + ... + 48)$

Or $2+3+4+...+48 = \frac{48+2}{2} \times (48-2+1) = 25 \times 47 = 1175$ en tant que somme des termes d'une suite arithmétique.

En conclusion $S_1 = 11750$

$S_2 = 8+16+32+64+...+2048+4096$

De la même façon on peut commencer par une factorisation :

$S_2 = 8(1+2+4+8+...+256+512)$

Or la somme $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 256 + 512$ est une somme géométrique de premier terme 1 et de raison 2, à noter au passage que 512 c'est $2^9$. Ce qui nous donne finalement :

$S_2 = 8 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 8 \times (2^{10}-1)$

$S_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/128$

Ici nous aovons à nouveau une somme géométrique. Avec $128 = 2^7$ cela nous donne :

$S_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1-(\frac{1}{2})^7}{1-\frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^7$

$S_4 = 1/2 + 1 + 3/2 + ... + 19/2 + 10 = \frac{1}{2} \times (1+2+3+...19+20) = \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{1+20}{2} = 105$

$S_5 = 2+4+6+8+...+198+200 = 2 \times (1+2+...100) = 2 \times \frac{100+1}{2} \times 100 = 101 \times 100 = 10100$

$S_6 = 1 + (\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^3 + ... + (\frac{1}{3})^n = 1 \times \frac{1-\frac{1}{3}^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \times (1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$

.......................................................................................................................

**Exercice 3 : Dérivation**

Calculer les dérivées des fonctions suivabtes sans préciser l'ensemble de dérivabilité

$f(x) = (3x^2 + 2\sqrt{x} + 1)\ln(1+4x)$

Ici l'ensemble de dérivabilité de $f$ est :

$D'_f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0 \ et \ 1+4x > 0\} = ]0; +\infty[$

Ensuite on applique les formules de dérivation. Ici nous avons un produit de deux facteurs, le deuxième étant du $ln(u)$ :

$(3x^2 + 2\sqrt{x} + 1)' = 6x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $ln'(1+4x) = \frac{4}{1+4x}$

Ce qui nous donne finalement :

$(6x + \frac{1}{\sqrt{x}}) \times \ln(1+4x) + (3x^2 + 2\sqrt{x} + 1) \times \frac{4}{1+4x}$

$g(x) = 3e^{2x}$

En tant que composée de la fonction exponentielle et d'une fonction linéaire, $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On dérive $g$ comme du $e^u$ :

$g'(x) = 3 \times 2 \times e^{2x} = 6e^{2x}$

$h(x) = 2^x$

De la même manière $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ réel nous avons :

$h(x) = 2^x = e^{\ln(2)x}$

Ce qui facilite les choses et permet de dériver $h$ comme du $e^u$ :

$h'(x) = \ln(2)e^{\ln(2)x}$

$i(x) = x\ln(x) - x$

$i$ est une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$

$j(x) = (1 - x^2)^{10}$

$j$ est de la forme $u^n$. Ce qui nous donnera pour tout $x$ réel ici :

$j'(x) = 10 \times (1 - x^2)^9 \times (-2x) = -20x \times (1 - x^2)^9$

$k$ en tant que fonction rationnelle (quotient de polynomes) de dénominateur strictement positif est dérivable sur $\mathbb{R}$. On reconnait du $\frac{u}{v}$ :

$k'(x) = \frac{(-3)\times(2x^4+1)-(8x^3)\times(1-3x)}{(2x^4+1)^2} = \frac{18x^4-8x^3-3}{(2x^4+1)^2}$

$l(x) = x\sqrt{x}$
$l$ est un produit dérivable sur $\mathbb{R}+$ (bien que $x \mapsto \sqrt{x}$ ne soit pas dérivable en 0, $x \mapsto x\sqrt{x}$ est bien dérivable en 0, il suffit de poser la limite du taux d'accroissement).

Et pour tou $x$ positif on a :

$l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x + 1 \times \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

............................................................................................................................

**Exercice 4 : Calcul intégral**

Pour chacune de ces intégrales justifier l'existence avec la continuité de la fonction sur le segment sur lequel on intègre.

$I = \int_0^2 3e^x dx = 3\int_0^2 e^x dx = 3[e^x]_0^2 = 3(e^2 - 1)$

$J = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$

Sans calculs, on remarque qu'on intègre une fonction continue et paire sur un intervalle de type $[-a; a]$ avec $a$ un réel strictement positif.

$K = \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} dx$ On reconnait du $u'u$ qui admet $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ comme primitive :

$K = \frac{1}{2}[(\ln(x))^2]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(2))^2$

$L = \int_2^3 \frac{1}{x\ln(x)} dx$ Cette fois on reconnaît du $\frac{u'}{u}$ qu'on peut primitiver en $\ln(u)$ :

$L = [\ln(\ln(x))]_2^3 = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))$

$M = \int_1^2 \frac{4x+6}{x^2+3x+12} dx = 2\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+12} dx = 2[\ln(x^2+3x+12)]_1^2 = \ln(22) - \ln(16) = \ln(\frac{11}{8})$

$N = \int_0^3 (x^2+1)e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 (3x^2+3)e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}[e^{x^3+3x}]_0^3 = \frac{1}{3}(e^{36} - 1)$

.........................................................................................................................