....

Exercice 1 : Produit de matrices

Peut-on calculer AB ? BA ? Si oui faire la calcul.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse :
Le produit AB est possible car le nombre de colonnes de la matrice de gauche (A compte 3 colonnes) est égal au nombre de lignes de la matrice de droite (B comporte 3 lignes).

Tandis que le produit BA n'est pas possible car le nombre de colonnes de la matrice de gauche dans ce produit (la matrice B) est différente du nombre de lignes de la matrice de droite (A).

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 19 & 10 \\ -10 & -13 & 37 & -10 \end{pmatrix}$$

....

Exercice 2 : Matrice inverse

a) La matrice A est-elle inversible ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si oui calculer sa matrice inverse A^{-1}

A priori pas de combinaison linéaire évidente entre les colonnes, ni une ligne ou colonne avec des coefficients tous nuls. Par ailleurs la matrice n'est pas triangulaire.

Ici une méthode possible serait de calculer le déterminant de la matrice. **Il y a équivalence entre le fait que le déterminant soit non nul et l'inversibilité d'une matrice carrée, quelle que soit sa dimension** n.

Autre méthode possible : celle de Gauss-Jordan. On détermine une matrice triangulaire équivalente (réduite de Gauss) à l'aide de combinaisons linéaires des lignes de notre matrice tout en appliquant les mêmes opérations en parallèle à la matrice identité :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On ecrase $L3$ par $L3 + L1$. Ce qui nous donnera les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A ce stade nous avons déjà une matrice triangulaire supérieure à gauche. Les coefficients diagonaux de cette matrice triangulaire étant tous non nuls, on en déduit qu'elle est inversible. Ce qui signifie que comme on le pensait la matrice A est inversible.

Pour calculer les coefficients de la matrice inverse A^{-1}, nous allonrs continuer la méthode de Gauss de manière à obtenir la matrice identité à gauche.

Continuons en remplaçant $L1$ par $L1 - \frac{1}{2}L3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis pour finir en divisant $L3$ par 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En conclusion la matrice A est inversible et nous avons :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) En déduire la résolution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + z & = & 1 \\ y & = & 5 \\ -x + z & = & -3 \end{array} \right.$$

Réponse

On remarque dans un premier temps que ce système peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On vient de montrer l'inversibilité de A. Notre système d'équations est donc un système de Cramer et admet une solution unique (ici un triplet de réels). Pour obtenir cette solution on multiplie les deux membres de notre équation à gauche par la matrice A^{-1} :

$$A^{-1} \times A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

....

Exercice 3 : Valeurs propres

Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On commence par écrire la matrice $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$

Ensuite, soit on détermine les valeurs de λ pour lesquelles notre matrice $A - \lambda I$ serait inversible. A nouveau soit à l'aide du déterminant de cette matrice, soit à l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, tout comme dans l'exercice précédent.

Si on choisit la deuxième méthode, on commence par intervertir $L1$ et $L3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite on remplace $L2$ par $L2 - L1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis $L3$ par $L3 + \lambda L1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda \\ 0 & 1 + \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Enfin on remplace $L3$ par $L3 + L2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda - 1 & 1 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 + \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi les valeurs propres de notre matrice sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Idem pour B. On commence par écrire :

$$B - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi le déterminant de cette matrice nous amène à la recherche des solutions de cette équation :

$$\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

....

Exercice 4 : Dérivées partielles et Hessienne

Calculez la matrice Hessienne de la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y - y^2x$

Nous avons 4 coefficients à calculer ici : les dérivées d'ordre 2 de f par rapport aux variables x et y. f étant un polynome que ce soit par rapport à x ou à y, il n'y pas de questions liées à la dérivabilité à étudier. Commençons par calculer les dérivées premières :

$\partial_1(f)(x,y) = 2xy - y^2$ et $\partial_2(f)(x,y) = x^2 - 2xy$

Ce qui nous donne les 4 dérivées d'ordre 2 suivantes, qui vont constituer les coefficients de la matrice Hessienne de f :

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2y$

$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 2x - 2y$

$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -2x$

La matrice Hessienne de f s'écrit alors :

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

....

Exercice 5 : Extremums locaux

La fonction définie par $f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 4xy$ admet-elle des extremums locaux ?

Comme il n'y aucun problème de dérivabilité, si cette fonction présente un extrémum, ce ne peut être qu'en un point critique, c'est à dire en une solution du système :

$$\begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles de cette fonction polynomiale (pas de problème de dérivabilité) :

$\partial_1(f)(x,y) = 2xy^2 + x^2 + y^2 + 4xy$ et $\partial_2(f)(x,y) = 2yx^2 + 2y + 4x$

Dans la foulée, calculons tout de suite les dérivées d'ordre 2 dont nous aurons besoin plus tard :

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2y^2 + 2$

$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 4xy + 4$

$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2x^2 + 2$

En reprenant le système avec les dérivées partielles d'ordre 1 qu'on vient de calculer. On se retrouve avec le système suivant :

$$\begin{cases} 2xy^2 + 2x + 4y = 0 \\ 2(xy+1)(y-x) = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous donne comme points critiques (où les dérivée d'ordre 1 s'annulent), potentiellement extremums, les points suivants :

$A(0,0), B(-1,1), C(1,-1)$.

A ce stade, une fois les points critiques déterminés, pour savoir pour chacun d'entre-eux s'il s'agit d'un extrémum ou pas, nous allons nous intéresser aux valeurs propres de la matrice Hessienne en ce point.

Test du point $A(0,0)$:

On commence par calculer les coefficients de la matrice Hessienne en A :

$\partial^2_{1,1}(f)(0,0) = 2$

$\partial^2_{2,1}(f)(0,0) = \partial^2_{1,2}(f)(0,0) = 4$

$\partial^2_{2,2}(f)(0,0) = 2$

Ce qui nous donne la matrice Hessienne suivante en A :

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer les valeurs propres de $\nabla^2 f(A)$ on s'intéresse à l'inversibilité de la matrice suivante :

$$\nabla^2 f(0,0) - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi les valeurs propres de cette matrice sont les racines du polynome suivant :

$(2-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 6$

En conclusion, comme les valeurs propres de $\nabla^2(f)(A)$ sont de signe opposés, f n'a pas d'extrémum en A. A est un point col.

Test du point $B(-1,1)$:

Calculons les coefficients de la matrice Hessienne en B :

$\partial^2_{1,1}(f)(-1,1) = 4$

$\partial^2_{2,1}(f)(-1,1) = \partial^2_{1,2}(f)(-1,1) = 0$

$\partial^2_{2,2}(f)(-1,1) = 4$

Ce qui nous donne la matrice Hessienne suivante en B :

$$\nabla^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est diagonale, ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux :

$\lambda_1 = \lambda_2 = 4$

En conclusion, comme les valeurs propres de $\nabla^2 f(-1,1) sontstrictementpositives$,f$admetunminimumlocalen$B.

Test du point $B(-1,1)$:

On retrouve la ùême matrice Hessienne qu'au point B. Les conclusions sont identiques.

En conclusion finale : f admet deux minimums locaux l'un en A et l'autre en B.