

Реферат

При восстановлении изображений часто ставится цель вернуть высококачественную версию изображения из его более низкокачественной копии. В данной статье мы рассмотрим один вид задачи восстановления, а именно восстановление фотографий, искаженных шумами в цифровых изображениях (также известных как шум "соли и перца"). При воздействии шума различных частот и интенсивностей (30, 50, 70, 90). В данной работе мы использовали алгоритм сопряженных градиентов для восстановления изображений и удаления из них шумов. Мы разработали алгоритм сопряженных градиентов с тремя ограничениями, используя сопряженное условие Дая и Ляо, где новый алгоритм достиг условий спуска и глобальной сходимости при некоторых предположениях. Согласно результатам численного анализа, недавно созданный подход безусловно превосходит как метод Флетчера и Ривза (FR), так и метод Флетчера и Ривза с тремя термами (TTFR). Используется мера структурной схожести (SSIM), которая применяется для измерения качества изображения, и чем выше ее значение, тем лучше результат. Исходное изображение сравнивалось со всеми зашумленными изображениями, а также каждым изображением в соответствии с процентом шума, а также изображениями, обработанными четырьмя методами.

1. Введение

Методы сопряженных градиентов представляют собой мощное семейство алгоритмов безусловной оптимизации, обладающих отличными локальными и глобальными свойствами сходимости, используя при этом небольшое количество памяти. Они также являются быстрыми и эффективными. Исследователи продолжают проявлять сильный интерес к свойствам сходимости и простоте представления алгоритмов в компьютерных программах за последние 50 лет и до настоящего дня. Недавно многие ученые изучают градиентные методы, особенно два типа градиентных методов, которые недавно привлекли наибольшее внимание. В первом методе используются условия секущей, которые включают вторичную информацию из целевой функции.

2. Обзор литературы

Согласно некоторым исследователям, безусловная оптимизация может быть рассмотрена как задача поиска минимизационного решения для функционала $F(\chi)$.

$$\min_{\chi \in R^n} F(\chi) \quad (1)$$

где $F(\chi)$ - это функция, которая может быть дифференцируемой хотя бы один раз см. [1]—[3]. Задачу (1) можно решить с помощью алгоритмов сопряженных градиентов (CG), основанных на итерационной связи, выраженной в:

$$\chi_{k+1} = \chi_k + \alpha_k d_k \quad k = 0, 1, 2 \dots \quad (2)$$

где α_k , размер шага в точном или неточном линейном поиске, вычисляется, когда уравнение является нелинейным, используя следующее соотношение:

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) = \min_{a \geq 0} F(\chi_k + a d_k) \quad (3)$$

d_k является направлением поиска и определено как:

$$d_1 = -\nabla F_1 \quad k = 1$$

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta_k d_k \quad k \geq 1 \quad (4)$$

∇F_{k+1} - это градиент функции. Основным параметром, используемым в градиентных методах, является параметр β_k . Далее приведены значения данного параметра, используемые в соответствующих алгоритмах, данные методы всегда удовлетворяют условию умеренного спуска, где мы вычисляем β_k с направлением поиска d_{k+1} . Вот несколько алгоритмов сопряженных градиентов, включающих следующие параметры: $d_1 = -\nabla F_1$, $y_k = \nabla F_{k+1} - \nabla F_k$.

$$\beta_k^{FR} = \frac{\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k} [4]; \quad \beta_k^{PRP} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{g_k^T g_k} [5]; \quad \beta_k^{HS} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T d_k} [6];$$

$$\beta_k^{DL} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1} - \nabla F_{k+1}^T s_k}{\nabla F_k^T d_k} [7],$$

см. [8]—[15]. Существуют варианты метода, использующие триномиальные сопряженные градиенты, предложенные Чжангом [16]. Также значения для параметров алгоритма сопряженных градиентов (FR) были предложены Полаком-Рибьером (PR) и Хестенсом-Штифелем (HS), данные алгоритмы также используют триномиальные сопряженные градиенты. Все три перечисленных метода выполняют условие спуска. Далее приведены значения трёх термов, используемых в каждом из методов и выражающих их общую схему работы:

1. FR

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{FR} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

2. PR

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{PRP} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

3. HS

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{HS} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{d_k^T y_k}$$

Заметим, что данные методы удовлетворяют выражению $d_k^T \nabla F_k = -\|\nabla F_k\|^2 < 0, \forall k$, что означает, что $c = 1$ является достаточным условием для спуска. При изучении сходимости и приложений метода сопряженных градиентов исследователю часто требуется точное и неточное направление исследования, такие как усиленные условия Вольфе. Усиленные условия Вольфе предполагают нахождение α_k такого, что

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) \leq F(\chi) + n1\alpha_k \nabla F_k^T d_k \quad (5)$$

$$|d_k^T \nabla F_k(\chi_k + \alpha_k d_k)| \leq -n2 d_k^T \nabla F_k \quad (6)$$

где $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq 1$ - это постоянная, установленная в соответствии с работой Вейджуна и Ли [17].

3. Цели и задачи данного исследования

В данной работе мы разработали новый алгоритм сопряженных градиентов для решения задач, связанных с зашумленными изображениями. Задачи, которое были выполнены:

- Получить минимальную возможную ошибку по сравнению с похожими методами.
- Получить значение индекса структурной схожести (SSIM), близкое к 1, демонстрирующее эффективность нового разработанного алгоритма.
- Осуществить фильтрацию зашумленных изображений с более высокой точностью по сравнению с остальными методами, используемыми в данной статье.

4. Разработка FR алгоритма с тремя термами

В этой части статьи мы улучшаем метод Флетчера и Ривза с тремя термами (TTFR). Используя сопряженное условия Дая и Ляо, мы находим новое значение для θ :

$$d_{k+1} = -\lambda \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k \nabla F_{k+1}$$

в зависимости от сопряженного условия Дая и Ляо $y_k^T d_{k+1} = -t s_k^T \nabla F_{k+1}$ значение $\lambda \leq 0$, and $t = 1$ мы находим значение θ_k^{NEW} [7],

$$y_k^T d_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k - \theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k + s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k^{NEW} = -\lambda + \beta_k^{FR} \frac{y_k^T d_k}{y_k^T \nabla F_{k+1}} + \frac{s_k^T \nabla F_{k+1}}{y_k^T \nabla F_{k+1}} \quad (7)$$

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1} \quad (8)$$

План:

В следующем разделе мы подробно опишем этапы нового алгоритма:

Этап 1: пусть x_0 - начальная точка, где $\varepsilon \geq 0$, $k = 0$, а затем находим $d_0 = -\nabla F_0$.

Этап 2: используя условия Вольфе (5), (6), находим значение шага α_k .

Этап 3: если $\|\nabla F_{k+1}\| < \varepsilon$, то завершаем, в противном случае вычисляем x_{k+1} из (2).

Этап 4: вычисляем направление поиска из (7), (8) и β_k^{FR} .

Этап 5: устанавливаем $k = k + 1$ и переходим к Этапу 2.

4.1. Свойство спуска нового метода

В данном разделе мы докажем достаточное свойство спуска нового алгоритма, используя параметр FR и подставив новое значение для θ_k^{NEW} в (7). Достаточное условие спуска для методов сопряженных градиентов записывается следующим образом:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} \leq -c \|\nabla F_{k+1}\|^2 \text{ for } k \geq 0 \text{ and } c > 0 \quad (9)$$

при этом соблюдение отношений для k и c важно для доказательства эффективности предложенного алгоритма.

4.1.1. Теорема

Для доказательства достаточного условия спуска предложенного алгоритма мы берем направление поиска, найденное в (8) с параметром β_k^{FR} , а также значение θ_k , определенное в (7), и получаем (2) для всех значений $k \geq 1$ с использованием (5) и (6).

Доказательство: мы используем математическую индукцию для доказательства свойства спуска

- пусть $k = 0$, тогда $d_0 = -\nabla F_0 \rightarrow \nabla F_0^T d_0 = -\|\nabla F_0\|^2 < 0$
- предположим, что отношение $\nabla F_k d_k < 0$ справедливо для всех k
- умножим обе стороны уравнения (8) на ∇F_{k+1} , тогда уравнение (9) верно для $k = k + 1$.
Имеем:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T g_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$

Если $\theta_k^{NEW} \geq 0$, тогда

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < 0$$

таким образом, новое и улучшенное условие спуска успешно доказано

4.2. Глобальная сходимость предлагаемого метода

Теперь мы докажем сходимость нового и известного модифицированного алгоритма в (7) и (8) с параметром β_k^{FR} FR. Для исследования сходимости вновь предложенного метода нам необходимо начать с следующих предположений.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ (1)

Будут сделаны следующие предположения относительно задач общей области (соответствующей области).

- $Q = \{\chi \in R^n : F(\chi) \leq F(\chi_0)\}$ Это множество ограниченное и замкнутое.
- Функция соответствующей области или области значений дифференцируема и непрерывна в определенных N областях множества q , и ее производные являются непрерывными по Липшицу. Кроме того, непрерывное поведение функции соответствующей области или области значений можно увидеть в ее производных. Это указывает на наличие фиксированного значения, известного как $D > 0$, и его определение следующее:

$$\|\nabla F(\chi) - \nabla F(\Upsilon)\| \leq D \|\chi - \Upsilon\| \quad \forall \chi, \Upsilon \in N$$

- Функция области F является равномерно выпуклой функцией, где g - константа, целое число, которое обеспечивает изменчивость, например,

$$(\nabla F(\chi) - \nabla F(\Upsilon))^T (\chi - \Upsilon) \geq \mu \|\chi - \Upsilon\|^2, \text{ for any } \chi, \Upsilon \in Q$$

Используя предположение (1), с другой стороны, мы находим положительную константу B в следующем виде:

$$\|\chi\| \leq B, \forall \chi \in Q$$

$$\underline{\gamma} \leq \|\nabla F(\chi)\| \leq \bar{\gamma}, \forall \chi \in Q \quad (10)$$

ЛЕММА (1)

Мы используем предположения (1) и (10), которые выполняются при взятии (7) и (8) и использовании усиленных условий Вольфе для определения размера шага α_k , предполагая, что наши предположения верны, если $\sum_{k>1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|^2} = \infty$, имеем

$$\text{имеем } \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf \|\nabla F_k\|) = 0$$

4.2.1. Теорема

Свойство спуска подтверждает предположение из (1) и (10). Метод сопряженных градиентов, вместе с параметром β_K^{FR} и θ_k , предоставляется уравнением (7), как если бы α_k удовлетворяло усиленным условиям Вольфе (WSC) (5) и (6) соответственно. Она равномерно выпукла в области Q , следовательно, функция, уравнение $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|g_k\| = 0$, удовлетворяет.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &= \|\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \|\nabla F_{k+1}\| + \beta_k^{FR} \|d_k\| + \theta_k^{NEW} \|\nabla F_{k+1}\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \|\nabla F_{k+1}\| (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|^2}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \left((1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right) \|\nabla F_{k+1}\| \\ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|} &\geq \left(\frac{1}{\left((1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right)^2} \right) \frac{1}{\gamma^2} \Sigma \mathbf{1} = \infty \end{aligned}$$

используя лемму, представленную ранее, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla F_k\|$

5. Результаты экспериментов и обсуждения

Изображение обычно искажается из-за шума, возникающего либо в процессе съемки, либо при передаче изображения. Эффективные решения для снижения шума необходимы для достижения более надежных результатов в широком спектре приложений, связанных с изображениями. В данной части статьи мы рассмотрим метод восстановления исходного изображения изнутри изображения, которое было повреждено ложным импульсным шумом. Речь идет об изображении, которое пострадало от ложного импульсного шума. Импульсный шум, который возникает, когда воздействию подвергается только малая часть пикселя, является одним из наиболее распространенных типов шума и одним из самых явных. Из-за шума любая информация о фактических значениях затронутых пикселей полностью уничтожается. Эти трудности считаются одними из самых сложных с точки зрения областей улучшения из-за своих гладких характеристик. Это связано с тем, что сложно найти решение для данных проблем. Особенно трудно найти решения для несглаженных задач оптимизации из-за того, что многие существующие методы градиента не могут быть применены напрямую. Поэтому необходимо создавать оригинальные алгоритмы или подходы для решения этих трудностей. В этой связи Юань и др. [18]—[21] описывают ряд нелинейных алгоритмов сопряженных градиентов, которые могут

использоваться для несглаженных задач оптимизации. Большое количество хороших результатов было получено с использованием данных методов, дополнительные результаты могут быть найдены в задачах [22]—[26], и ... Пусть:

$$Y = \{(k, m) \in \Lambda \mid \bar{\xi}_{k,m} \neq \xi_{k,m}, \xi_{k,m} = \delta_{\min} \text{ or } \delta_{\max}\}$$

будет индексным множеством шумовых кандидатов, а x - настоящим изображением с (X, Y) пикселями, $x_{k,m}$ - оттенком серого цвета x в указанной позиции пикселя (k, m) с $(k, m) \in \Lambda = \{1, 2, \dots, X\} \times \{1, 2, 3, \dots, Y\}$, и $\phi_{k,m} = \{(k, m - 1), (k, m + 1), (k - 1, m), (k + 1, m)\}$ будут в окрестности (k, m) , где ξ - это наблюдаемое зашумленное изображение x , искаженное шумом "соли и перца", $\bar{\xi}$ определено как изображение, созданное применением адаптивного медианного фильтра (MED) к зашумленному изображению y , где δ_{\min} указывает минимальное значение шумового пикселя, а δ_{\max} - максимальное значение шумового пикселя. В этом разделе детально рассматриваются следующие вопросы восстановления изображения, определенные как $\min_{\nu} \tau(\nu)$:

Где:

$$\tau(v) = \sum_{(k,m) \in Y} \left\{ \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \setminus N} \chi(v_{i,j} - \xi_{x,y}) + \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \cap Y} \chi(v_{k,m} - v_{x,y}) \right\}$$

не трудно понять, что регулярность τ зависит только от χ и что функция Хьюбера определена как потенциальная функция для сохранения границы χ с тем же значением:

$$\chi = \begin{cases} e^2/u, & \text{если } |e| \leq u \\ |e| - 2u, & \text{если } |e| \geq u \end{cases}$$

где $u > 0$. Много полезных результатов относительно τ можно найти (см. [24]—[26]). Результаты, приведенные ниже, были получены на персональном компьютере с использованием MATLAB R2021b, процессором Intel Core i5 с тактовой частотой 2,4 ГГц, 8,00 гигабайтами оперативной памяти и операционной системой Windows 10. Параметры выбраны как $a = 0,5$, $b = 0,1$, $c = 0,9$ и $d = 0,3$. Условие остановки: $\frac{|\tau(v_{k+1}) - \tau(v_k)|}{|\tau(v_k)|} < 10^{-4}$. Предложенный фильтр (НМ) создан для обработки шума "соли и перца" в цифровых изображениях. При воздействии на изображение шумом с различными коэффициентами (30, 50, 70, 90). Зашумленные изображения были подвергнуты фильтрам (FR, TIFR, а затем медианный фильтр из системы MATLAB) и обработаны для удаления этого шума. Для демонстрации результатов было выбрано изображение (Lena.png), известное в литературе и исследованиях по обработке цифровых изображений. К нему был добавлен шум с различными коэффициентами (30, 50, 70, 90). Изображение было обработано с использованием четырех коэффициентов шума и упомянутых фильтров, а также предложенного фильтра. Результаты представлены в таблице 1. Для измерения качества изображения использовался индекс SSIM, большее значение индекса означает лучший результат. Сравнение было произведено при различных значениях процента шума, оригинальное изображение сравнивалось со всеми зашумленными изображениями, а также с изображениями, обработанными четырьмя фильтрами. Из таблицы видно, что при коэффициенте шума 30 изображение, полученное в результате обработки предложенным фильтром, совпало с оригинальным изображением с отношением (0.9600). В то время как обработка фильтрами FR, TIFR и медианным фильтром дала значения соответственно (0.8853), (0.9168) и (0.6993). То же самое относится к другим коэффициентам шума. При воздействии на изображение с коэффициентом шума 50 результат обработки и сравнения с оригинальным изображением составил (0.9392), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 70 результат сравнения с оригинальным изображением составил (0.8946), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 90 результат составил (0.7877).

Lena						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0526	0.9600	0.8853	0.9168	0.6993
50	1.0000	0.0262	0.9392	0.5419	0.8326	0.2321
70	1.0000	0.0138	0.8946	0.0885	0.7397	0.0527
90	1.0000	0.0061	0.7877	0.4311	0.6159	0.0115
Barbara						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0959	0.9251	0.8305	0.9118	0.6213
50	1.0000	0.0465	0.8793	0.7180	0.7950	0.2351
70	1.0000	0.0224	0.7997	0.5255	0.6880	0.0587
90	1.0000	0.0081	0.6565	0.4141	0.5678	0.0129

Таблица 5.1

На рисунке 1 изображены результаты работы программы, первый столбец содержит оригинальное изображение. Второй столбец содержит изображение после воздействия шума. Третий столбец содержит изображения после их обработки предложенным фильтром, четвертый столбец содержит изображения, обработанные фильтром (FR), пятый столбец содержит изображения, обработанные фильтром (TTFR), шестой столбец показывает обработку медианным фильтром (MED) MATLAB. Третий столбец показывает качество изображения после его обработки предложенным фильтром и его соответствие оригинальному изображению. Для подтверждения результатов и точности предложенного фильтра было введено другое изображение, результаты для которого представлены на рисунке 2.

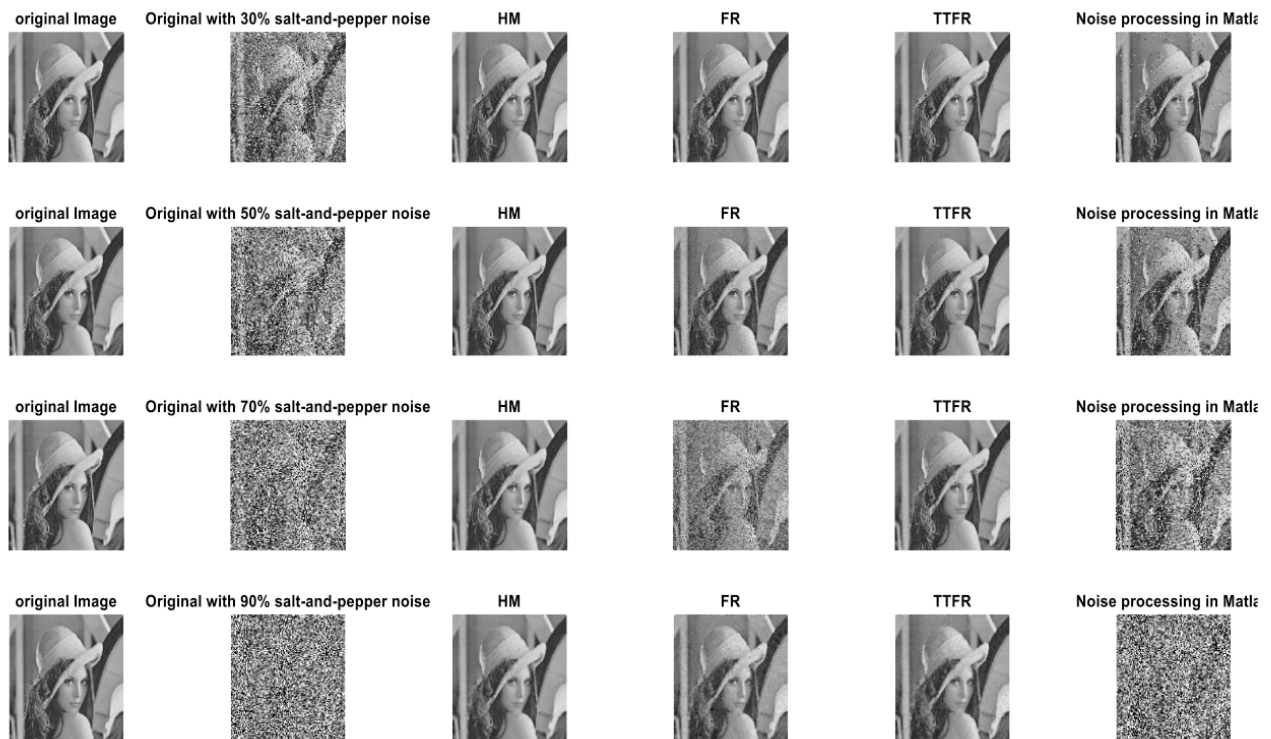


Рисунок 5.1. Сравнение результатов удаления шума (Lena.png) с использованием предложенного фильтра и других фильтров

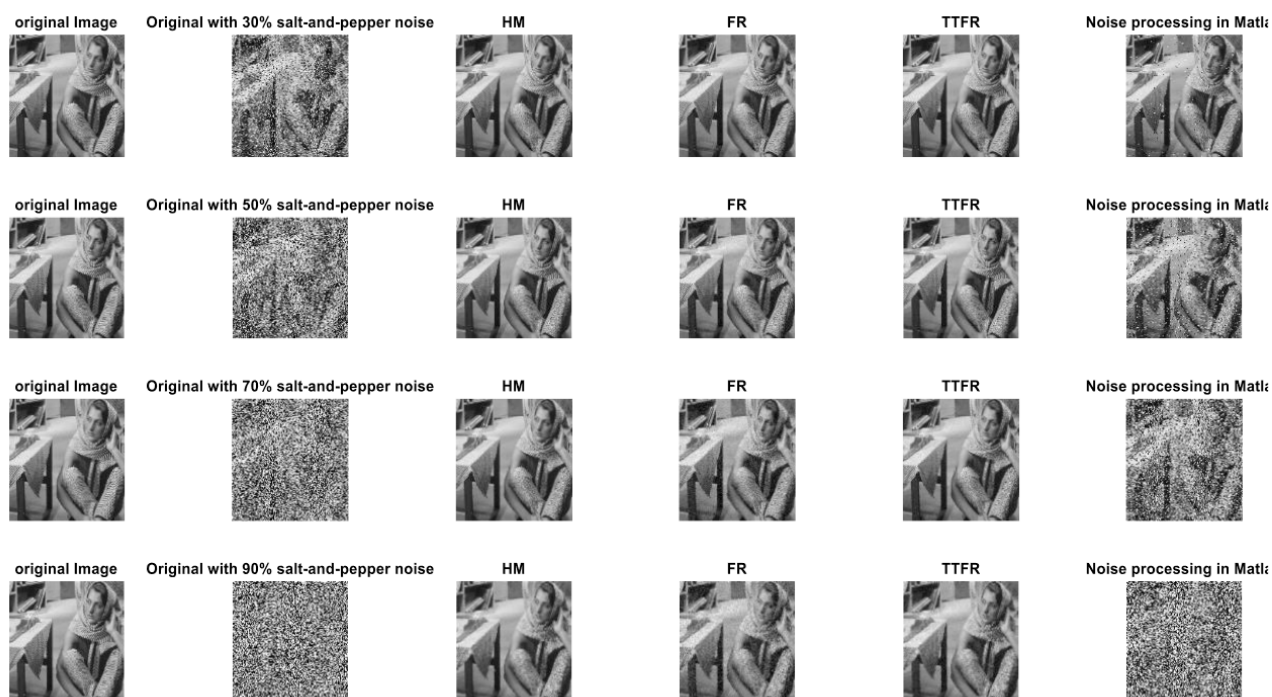


Рисунок 5.2. Сравнение результатов удаления шума (Barbara.png) с использованием предложенного фильтра и других фильтров

6. Вывод

В данной статье мы обсудили различные методы фильтрации для уменьшения шума ”соли и перца” на изображениях в оттенках серого. Кроме того, мы представили и сравнили результаты различных методов фильтрации шума, таких как медианные фильтры и фильтры, основанных на методах (FR) и (TTFR). Фильтр, основанный на предложенном методе (HM), обеспечивает лучшую производительность по сравнению с другими рассмотренными фильтрами (без шумов) и качество изображения в целом. Основные преимущества этого фильтра заключаются в успешной способности удаления поврежденных серых пикселей. Однако, данный метод увеличивает вычислительную сложность. Будущие исследования будут сосредоточены на других фильтрах, основанных на математических методах, для борьбы с другими типами шумов, а также на расширении алгоритма для цветных изображений. В данной работе была получена крайне низкая ошибка по сравнению с другими алгоритмами в этой статье. Значение SSIM было близко к единице, как подробно указано в числовых результатах. Метод показал лучшие результаты фильтрации зашумленных изображений по сравнению с алгоритмами FR и TTFR.

7. Благодарность

Выражаю благодарность и признание колледжу компьютерных наук и математики, а также колледжу фундаментальных наук университета Мосула.

Список литературы

- [1] Н. М. Khudhur и К. I. Ibraheem, “Metaheuristic optimization algorithm based on the two-step Adams-Bashforth method in training multi-layer perceptrons”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 2, № 4 (116), с. 6—13, апр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254023. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.254023>.
- [2] К. I. Ibraheem и Н. М. Khudhur, “Optimization algorithm based on the Euler method for solving fuzzy nonlinear equations”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 1, № 4 (115), с. 13—19, февр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.252014. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.252014>.
- [3] A. S. Ahmed, Н. М. Khudhur и М. S. Najmuldeen, “A new parameter in three-term conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 23, № 1, с. 338, июль 2021, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344>.
- [4] R. Fletcher, “Function minimization by conjugate gradients”, *The Computer Journal*, т. 7, № 2, с. 149—154, февр. 1964, ISSN: 1460-2067. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.149. url: <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>.
- [5] Y. H. Dai и Y. Yuan, “A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property”, *SIAM Journal on Optimization*, т. 10, № 1, с. 177—182, янв. 1999, ISSN: 1095-7189. DOI: 10.1137/S1052623497318992. url: <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623497318992>.
- [6] E. Polak и G. Ribiere, “Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées”, *Revue française d’informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, т. 3, № 16, с. 35—43, 1969, ISSN: 0373-8000. DOI: 10.1051/m2an/196903r100351. url: <http://dx.doi.org/10.1051/m2an/196903r100351>.
- [7] Y. -. Dai, “New Conjugacy Conditions and Related Nonlinear Conjugate Gradient Methods”, *Applied Mathematics and Optimization*, т. 43, № 1, с. 87—101, янв. 2001, ISSN: 1432-0606. DOI: 10.1007/s002450010019. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s002450010019>.
- [8] M. R. Hestenes и E. Stiefel, “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, т. 49, № 1, 1952.
- [9] B. Abbas Hassan, “A new formula for conjugate parameter computation based on the quadratic model”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 13, № 3, с. 954, март 2019, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961>.
- [10] B. A. Hassan и M. W. Taha, “A new variants of quasi-newton equation based on the quadratic function for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 19, № 2, с. 701, авг. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708>.
- [11] B. A. Hassan, H. O. Dahawi и A. S. Younus, “A new kind of parameter conjugate gradient for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 17, № 1, с. 404, янв. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411>.
- [12] Н. М. Khudhur и К. К. Abbo, “A New Type of Conjugate Gradient Technique for Solving Fuzzy Nonlinear Algebraic Equations”, *Journal of Physics: Conference Series*, т. 1879, № 2, с. 022111, май 2021, ISSN: 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1879/2/022111. url: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1879/2/022111>.

- [13] Z. M. Abdullah, H. M. Khudhur и A. Khairulla Ahmed, “Modification of the new conjugate gradient algorithm to solve nonlinear fuzzy equations”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 27, № 3, с. 1525, сент. 2022, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532>.
- [14] M. Tang, K. j. Wang и Y. Zhang, “A Research on Chaotic Recurrent Fuzzy Neural Network and Its Convergence”, в *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, IEEE, авг. 2007. DOI: 10.1109/icma.2007.4303626. url: <http://dx.doi.org/10.1109/ICMA.2007.4303626>.
- [15] L. C. W. DIXON, “Conjugate Gradient Algorithms: Quadratic Termination without Linear Searches”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, т. 15, № 1, с. 9—18, 1975, ISSN: 1464-3634. DOI: 10.1093/imamat/15.1.9. url: <http://dx.doi.org/10.1093/imamat/15.1.9>.
- [16] K. j. W. M. Tang и Y. Zhang, “A research on chaotic recurrent fuzzy neural network and its convergence”, *International Conference on Mechatronics and Automation*, с. 682—687, 2007.
- [17] L. Zhang и W. Zhou, “Two descent hybrid conjugate gradient methods for optimization”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 216, № 1, с. 251—264, июнь 2008, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2007.04.028. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2007.04.028>.
- [18] G. Yuan, X. Duan, W. Liu, X. Wang, Z. Cui и Z. Sheng, “Two New PRP Conjugate Gradient Algorithms for Minimization Optimization Models”, *PLOS ONE*, т. 10, № 10, Y. Shi, ред., e0140071, окт. 2015, ISSN: 1932-6203. DOI: 10.1371/journal.pone.0140071. url: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0140071>.
- [19] G. Yuan, Z. Meng и Y. Li, “A Modified Hestenes and Stiefel Conjugate Gradient Algorithm for Large-Scale Nonsmooth Minimizations and Nonlinear Equations”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, т. 168, № 1, с. 129—152, июль 2015, ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-015-0781-1. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10957-015-0781-1>.
- [20] G. Yuan, Z. Wei и G. Li, “A modified Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 255, с. 86—96, янв. 2014, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2013.04.032. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.032>.
- [21] X. Jiang, W. Liao, J. Yin и J. Jian, “A new family of hybrid three-term conjugate gradient methods with applications in image restoration”, *Numerical Algorithms*, т. 91, № 1, с. 161—191, март 2022, ISSN: 1572-9265. DOI: 10.1007/s11075-022-01258-2. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s11075-022-01258-2>.
- [22] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization problems and image restoration”, *Journal of Inequalities and Applications*, т. 2019, № 1, сент. 2019, ISSN: 1029-242X. DOI: 10.1186/s13660-019-2192-6. url: <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-019-2192-6>.
- [23] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems”, *Applied Numerical Mathematics*, т. 147, с. 129—141, янв. 2020, ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.08.022. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2019.08.022>.
- [24] J.-F. Cai, R. H. Chan и C. Di Fiore, “Minimization of a Detail-Preserving Regularization Functional for Impulse Noise Removal”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, т. 29, № 1, с. 79—91, сент. 2007, ISSN: 1573-7683. DOI: 10.1007/s10851-007-0027-4. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-007-0027-4>.

- [25] J.-F. Cai, R. Chan и B. Morini, “Minimization of an Edge-Preserving Regularization Functional by Conjugate Gradient Type Methods”, в *Mathematics and Visualization*. Springer Berlin Heidelberg, 2007, с. 109—122, ISBN: 9783540332671. DOI: 10.1007/978-3-540-33267-1_7. url: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-33267-1_7.
- [26] G. Yu, J. Huang и Y. Zhou, “A descent spectral conjugate gradient method for impulse noise removal”, *Applied Mathematics Letters*, т. 23, № 5, с. 555—560, май 2010, ISSN: 0893-9659. DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.010. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2010.01.010>.