

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и технологий  
Высшая школа программной инженерии

# Отчёт по курсовой работе

по дисциплине "Теория принятия решений"

**Работу выполнил:**

Поздняков А.А.

Группа:

5130904/00104

**Преподаватель:**

Черноруцкий И.Г.

Санкт-Петербург  
2023

# Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Задача восстановления изображений</b>	<b>4</b>
<b>3. Особенности алгоритма</b>	<b>4</b>
<b>4. Семейство методов с тремя термами</b>	<b>4</b>
<b>5. Предлагаемые модификации</b>	<b>5</b>
<b>6. Результаты экспериментов</b>	<b>5</b>
<b>7. Реализация алгоритма</b>	<b>5</b>
<b>8. Заключение</b>	<b>5</b>
<b>Список литературы</b>	<b>7</b>
<b>9. Приложение</b>	<b>10</b>
9.1. Перевод статьи . . . . .	11
9.2. Оригинальная статья . . . . .	22

## 1. Введение

За основу была взята статья “Y.Ismail Ibrahim и H.Mohammed Khudhur, “Modified three-term conjugate gradient algorithm and its applications in image restoration”, Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science, т. 28, No 3, с. 1510, дек. 2022, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v28.i3.pp1510-1517. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v28.i3.pp1510-1517>”.

При восстановлении изображений часто ставится цель вернуть высококачественную версию изображения из его более низкокачественной копии. В рассмотренной статье решается один вид задачи восстановления, а именно восстановление фотографий, искаженных шумами в цифровых изображениях (также известных как шум ”соли и перца”). Авторы данной статьи использовали алгоритм сопряженных градиентов для восстановления изображений и удаления из них шумов, а также ими был разработан алгоритм сопряженных градиентов с тремя ограничениями. Согласно результатам численного анализа, созданный подход безусловно превосходит как метод Флетчера и Ривза (FR), так и метод Флетчера и Ривза с тремя термами (TTFR).

## 2. Задача восстановления изображений

Как было сказано ранее, данный алгоритм был создан для использования в задаче фильтрации изображений с так называемым шумом “соли и перца”. Данный вид шума представляет собой чередование чёрных и белых частиц и встречается, как правило, на изображениях, поврежденных импульсным шумом. Этот вид шума возникает, когда воздействию подвергается только малая часть пикселя, при этом информация о фактических значениях поврежденных пикселей полностью теряется.

На слайде также вы можете видеть изображение `Lena.png`, часто используемое в задаче восстановления изображений в качестве тестового. Популярной метрикой при оценке качества изображения при этом является индекс структурной схожести, также используемый в данной работе.

## 3. Особенности алгоритма

Алгоритм обладает рядом преимуществ перед схожими методами:

1. Обладает меньшим значением ошибки по сравнению с похожими методами
2. Показывает лучшие результаты в задаче восстановления изображений при сравнении с использованием индекса структурного сходства
3. Осуществляет фильтрацию изображений с более высокой точностью по сравнению с другими методами, приведенными в статье

## 4. Семейство методов с тремя термами

Три термина в данном случае - это три вектора, участвующие в каждой итерации алгоритма и обозначаемые следующим образом:

1. Вектор градиента ( $g_k$ ): Этот вектор представляет собой градиент целевой функции на текущей итерации.
2. Вектор направления поиска ( $d_k$ ): Этот вектор представляет собой направление поиска, в котором алгоритм будет двигаться от текущей точки для поиска минимума.
3. Вектор предыдущего направления поиска ( $t_k$ ): Этот вектор представляет собой предыдущее направление поиска, использованное в процессе оптимизации.

Алгоритм сопряженных градиентов с тремя терминами включает в себя расчёт этих трех векторов на каждой итерации на основе определенных условий и требований сопряженности.

Все рассматриваемые методы используют одну формулу для нахождения следующей точки, здесь  $\chi_k$  - непосредственно точка,  $\alpha_k$  - шаг,  $d_k$  - вектор направления поиска, а  $k$  - номер итерации.

На слайде приведены рабочие формулы схожих методов, рассматриваемых в статье, FR - метод Флетчера-Ривза, PR - метод Полака-Рибьера, HS - метод Хестенса-Штифеля. Как видно, различные методы данного семейства отличаются друг от друга значениями параметров  $\beta$  и  $\theta$ .

## 5. Предлагаемые модификации

Авторы статьи используют сопряженное условие Дая и Ляо для нахождения параметра  $\theta$ , а также усиленные условия Вольфе для нахождения оптимального шага  $\alpha_k$ . Полученные формулы для  $d_k$  и  $\theta_k$  приведены на слайде. При этом в данном алгоритме используется значение параметра  $\beta^{FR}$ , взятое из метода Флетчера-Ривза.

## 6. Результаты экспериментов

Предложенный фильтр (НМ) создан для обработки шума "соли и перца" в цифровых изображениях, при воздействии на изображение шумом с различными коэффициентами (30, 50, 70, 90). Зашумленные изображения были обработаны предложенным фильтром HR, а также фильтрами FR, TTFR и медианным фильтром из системы MATLAB. На слайде вы можете видеть результаты применения данного метода на тестовых изображениях.

Для демонстрации результатов были выбраны изображения (Lena.png) и (Barbara.png), известные в литературе и исследованиях по обработке цифровых изображений. Изображение было обработано с использованием четырех коэффициентов шума и упомянутых фильтров, а также предложенного фильтра.

Результаты представлены в таблице 1. Для измерения качества изображения использовался индекс SSIM, большее значение индекса означает лучший результат. Из таблицы видно, что при коэффициенте шума 30 изображение, полученное в результате обработки предложенным фильтром, совпало с оригинальным изображением с отношением (0.9600). В то время как обработка фильтрами FR, TIFR и медианным фильтром дала значения соответственно (0.8853), (0.9168) и (0.6993). То же самое относится к другим коэффициентам шума. При воздействии на изображение с коэффициентом шума 50 результат обработки и сравнения с оригинальным изображением составил (0.9392), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 70 результат сравнения с оригинальным изображением составил (0.8946), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 90 результат составил (0.7877).

## 7. Реализация алгоритма

Графическое изображение представленного алгоритма приведено на слайде, реализация алгоритма осуществлялась на языке Python. Рассмотрим схему работы алгоритма:

1. Берем начальную точку  $x_0$ , значение  $\varepsilon > 0$  и  $k = 0$
2. Находим значение  $d_0 = -\nabla F_0$
3. Находим значение шага  $\alpha_k$
4. Если норма градиента меньше заданного  $\varepsilon$ , то необходимая точность достигнута, работа алгоритма завершается, в противном случае находим новый вектор поиска  $d_k$
5. Устанавливаем  $k = k + 1$

## 8. Заключение

Были представлены различные методы фильтрации для уменьшения шума «соли и перца» на изображениях в оттенках серого.

Произведено сравнение результатов различных методов.

Предложенный фильтр обеспечивает лучшую производительность по сравнению с другими рассмотренными методами и качество изображения в целом.

## Список литературы

- [1] Н. М. Khudhur и К. I. Ibraheem, “Metaheuristic optimization algorithm based on the two-step Adams-Bashforth method in training multi-layer perceptrons”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 2, № 4 (116), с. 6—13, апр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254023. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.254023>.
- [2] К. I. Ibraheem и Н. М. Khudhur, “Optimization algorithm based on the Euler method for solving fuzzy nonlinear equations”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 1, № 4 (115), с. 13—19, февр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.252014. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.252014>.
- [3] A. S. Ahmed, Н. М. Khudhur и М. S. Najmuldeen, “A new parameter in three-term conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 23, № 1, с. 338, июль 2021, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344>.
- [4] R. Fletcher, “Function minimization by conjugate gradients”, *The Computer Journal*, т. 7, № 2, с. 149—154, февр. 1964, ISSN: 1460-2067. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.149. url: <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>.
- [5] Y. H. Dai и Y. Yuan, “A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property”, *SIAM Journal on Optimization*, т. 10, № 1, с. 177—182, янв. 1999, ISSN: 1095-7189. DOI: 10.1137/S1052623497318992. url: <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623497318992>.
- [6] E. Polak и G. Ribiere, “Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées”, *Revue française d’informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, т. 3, № 16, с. 35—43, 1969, ISSN: 0373-8000. DOI: 10.1051/m2an/196903r100351. url: <http://dx.doi.org/10.1051/m2an/196903r100351>.
- [7] Y. -. Dai, “New Conjugacy Conditions and Related Nonlinear Conjugate Gradient Methods”, *Applied Mathematics and Optimization*, т. 43, № 1, с. 87—101, янв. 2001, ISSN: 1432-0606. DOI: 10.1007/s002450010019. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s002450010019>.
- [8] M. R. Hestenes и E. Stiefel, “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, т. 49, № 1, 1952.
- [9] B. Abbas Hassan, “A new formula for conjugate parameter computation based on the quadratic model”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 13, № 3, с. 954, март 2019, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961>.
- [10] B. A. Hassan и M. W. Taha, “A new variants of quasi-newton equation based on the quadratic function for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 19, № 2, с. 701, авг. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708>.
- [11] B. A. Hassan, H. O. Dahawi и A. S. Younus, “A new kind of parameter conjugate gradient for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 17, № 1, с. 404, янв. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411>.
- [12] Н. М. Khudhur и К. К. Abbo, “A New Type of Conjugate Gradient Technique for Solving Fuzzy Nonlinear Algebraic Equations”, *Journal of Physics: Conference Series*, т. 1879, № 2, с. 022111, май 2021, ISSN: 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1879/2/022111. url: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1879/2/022111>.

- [13] Z. M. Abdullah, H. M. Khudhur и A. Khairulla Ahmed, “Modification of the new conjugate gradient algorithm to solve nonlinear fuzzy equations”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 27, № 3, с. 1525, сент. 2022, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532>.
- [14] M. Tang, K. j. Wang и Y. Zhang, “A Research on Chaotic Recurrent Fuzzy Neural Network and Its Convergence”, в *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, IEEE, авг. 2007. DOI: 10.1109/icma.2007.4303626. url: <http://dx.doi.org/10.1109/ICMA.2007.4303626>.
- [15] L. C. W. DIXON, “Conjugate Gradient Algorithms: Quadratic Termination without Linear Searches”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, т. 15, № 1, с. 9—18, 1975, ISSN: 1464-3634. DOI: 10.1093/imamat/15.1.9. url: <http://dx.doi.org/10.1093/imamat/15.1.9>.
- [16] K. j. W. M. Tang и Y. Zhang, “A research on chaotic recurrent fuzzy neural network and its convergence”, *International Conference on Mechatronics and Automation*, с. 682—687, 2007.
- [17] L. Zhang и W. Zhou, “Two descent hybrid conjugate gradient methods for optimization”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 216, № 1, с. 251—264, июнь 2008, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2007.04.028. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2007.04.028>.
- [18] G. Yuan, X. Duan, W. Liu, X. Wang, Z. Cui и Z. Sheng, “Two New PRP Conjugate Gradient Algorithms for Minimization Optimization Models”, *PLOS ONE*, т. 10, № 10, Y. Shi, ред., e0140071, окт. 2015, ISSN: 1932-6203. DOI: 10.1371/journal.pone.0140071. url: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0140071>.
- [19] G. Yuan, Z. Meng и Y. Li, “A Modified Hestenes and Stiefel Conjugate Gradient Algorithm for Large-Scale Nonsmooth Minimizations and Nonlinear Equations”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, т. 168, № 1, с. 129—152, июль 2015, ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-015-0781-1. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10957-015-0781-1>.
- [20] G. Yuan, Z. Wei и G. Li, “A modified Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 255, с. 86—96, янв. 2014, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2013.04.032. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.032>.
- [21] X. Jiang, W. Liao, J. Yin и J. Jian, “A new family of hybrid three-term conjugate gradient methods with applications in image restoration”, *Numerical Algorithms*, т. 91, № 1, с. 161—191, март 2022, ISSN: 1572-9265. DOI: 10.1007/s11075-022-01258-2. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s11075-022-01258-2>.
- [22] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization problems and image restoration”, *Journal of Inequalities and Applications*, т. 2019, № 1, сент. 2019, ISSN: 1029-242X. DOI: 10.1186/s13660-019-2192-6. url: <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-019-2192-6>.
- [23] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems”, *Applied Numerical Mathematics*, т. 147, с. 129—141, янв. 2020, ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.08.022. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2019.08.022>.
- [24] J.-F. Cai, R. H. Chan и C. Di Fiore, “Minimization of a Detail-Preserving Regularization Functional for Impulse Noise Removal”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, т. 29, № 1, с. 79—91, сент. 2007, ISSN: 1573-7683. DOI: 10.1007/s10851-007-0027-4. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-007-0027-4>.



- [25] J.-F. Cai, R. Chan и B. Morini, “Minimization of an Edge-Preserving Regularization Functional by Conjugate Gradient Type Methods”, в *Mathematics and Visualization*. Springer Berlin Heidelberg, 2007, с. 109—122, ISBN: 9783540332671. DOI: 10.1007/978-3-540-33267-1\_7. url: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-33267-1\\_7](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-33267-1_7).
- [26] G. Yu, J. Huang и Y. Zhou, “A descent spectral conjugate gradient method for impulse noise removal”, *Applied Mathematics Letters*, т. 23, № 5, с. 555—560, май 2010, ISSN: 0893-9659. DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.010. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2010.01.010>.
- [27] Y. Ismail Ibrahim и H. Mohammed Khudhur, “Modified three-term conjugate gradient algorithm and its applications in image restoration”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 28, № 3, с. 1510, дек. 2022, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v28.i3.pp1510-1517. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v28.i3.pp1510-1517>.

## **9. Приложение**

## 9.1. Перевод статьи

### Реферат

При восстановлении изображений часто ставится цель вернуть высококачественную версию изображения из его более низкокачественной копии. В данной статье мы рассмотрим один вид задачи восстановления, а именно восстановление фотографий, искаженных шумами в цифровых изображениях (также известных как шум "соли и перца"). При воздействии шума различных частот и интенсивностей (30, 50, 70, 90). В данной работе мы использовали алгоритм сопряженных градиентов для восстановления изображений и удаления из них шумов. Мы разработали алгоритм сопряженных градиентов с тремя ограничениями, используя сопряженное условие Дая и Ляо, где новый алгоритм достиг условий спуска и глобальной сходимости при некоторых предположениях. Согласно результатам численного анализа, недавно созданный подход безусловно превосходит как метод Флетчера и Ривза (FR), так и метод Флетчера и Ривза с тремя термами (TTFR). Используется мера структурной схожести (SSIM), которая применяется для измерения качества изображения, и чем выше ее значение, тем лучше результат. Исходное изображение сравнивалось со всеми зашумленными изображениями, а также каждым изображением в соответствии с процентом шума, а также изображениями, обработанными четырьмя методами.

## 1. Введение

Методы сопряженных градиентов представляют собой мощное семейство алгоритмов безусловной оптимизации, обладающих отличными локальными и глобальными свойствами сходимости, используя при этом небольшое количество памяти. Они также являются быстрыми и эффективными. Исследователи продолжают проявлять сильный интерес к свойствам сходимости и простоте представления алгоритмов в компьютерных программах за последние 50 лет и до настоящего дня. Недавно многие ученые изучают градиентные методы, особенно два типа градиентных методов, которые недавно привлекли наибольшее внимание. В первом методе используются условия секущей, которые включают вторичную информацию из целевой функции.

## 2. Обзор литературы

Согласно некоторым исследователям, безусловная оптимизация может быть рассмотрена как задача поиска минимизационного решения для функционала  $F(\chi)$ .

$$\min_{\chi \in R^n} F(\chi) \quad (1)$$

где  $F(\chi)$  - это функция, которая может быть дифференцируемой хотя бы один раз см. [1]—[3]. Задачу (1) можно решить с помощью алгоритмов сопряженных градиентов (CG), основанных на итерационной связи, выраженной в:

$$\chi_{k+1} = \chi_k + \alpha_k d_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

где  $\alpha_k$ , размер шага в точном или неточном линейном поиске, вычисляется, когда уравнение является нелинейным, используя следующее соотношение:

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) = \min_{a \geq 0} F(\chi_k + a d_k) \quad (3)$$

$d_k$  является направлением поиска и определено как:

$$d_1 = -\nabla F_1 \quad k = 1$$

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta_k d_k \quad k \geq 1 \quad (4)$$

$\nabla F_{k+1}$  - это градиент функции. Основным параметром, используемым в градиентных методах, является параметр  $\beta_k$ . Далее приведены значения данного параметра, используемые в соответствующих алгоритмах, данные методы всегда удовлетворяют условию умеренного спуска, где мы вычисляем  $\beta_k$  с направлением поиска  $d_{k+1}$ . Вот несколько алгоритмов сопряженных градиентов, включающих следующие параметры:  $d_1 = -\nabla F_1$ ,  $y_k = \nabla F_{k+1} - \nabla F_k$ .

$$\beta_k^{FR} = \frac{\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k} [4]; \quad \beta_k^{PRP} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{g_k^T g_k} [5]; \quad \beta_k^{HS} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T d_k} [6];$$

$$\beta_k^{DL} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1} - \nabla F_{k+1}^T s_k}{\nabla F_k^T d_k} [7],$$

см. [8]—[15]. Существуют варианты метода, использующие триномиальные сопряженные градиенты, предложенные Чжангом [16]. Также значения для параметров алгоритма сопряженных градиентов (FR) были предложены Полаком-Рибьером (PR) и Хестенсом-Штифелем (HS), данные алгоритмы также используют триномиальные сопряженные градиенты. Все три перечисленных метода выполняют условие спуска. Далее приведены значения трёх термов, используемых в каждом из методов и выражающих их общую схему работы:

#### 1. FR

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{FR} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

#### 2. PR

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{PRP} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

#### 3. HS

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{HS} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{где } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{d_k^T y_k}$$

Заметим, что данные методы удовлетворяют выражению  $d_k^T \nabla F_k = -\|\nabla F_k\|^2 < 0, \forall k$ , что означает, что  $c = 1$  является достаточным условием для спуска. При изучении сходимости и приложений метода сопряженных градиентов исследователю часто требуется точное и неточное направление исследования, такие как усиленные условия Вольфе. Усиленные условия Вольфе предполагают нахождение  $\alpha_k$  такого, что

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) \leq F(\chi) + n1\alpha_k \nabla F_k^T d_k \quad (5)$$

$$|d_k^T \nabla F_k(\chi_k + \alpha_k d_k)| \leq -n2 d_k^T \nabla F_k \quad (6)$$

где  $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq 1$  - это постоянная, установленная в соответствии с работой Вейджуна и Ли [17].

### 3. Цели и задачи данного исследования

В данной работе мы разработали новый алгоритм сопряженных градиентов для решения задач, связанных с зашумленными изображениями. Задачи, которое были выполнены:

- Получить минимальную возможную ошибку по сравнению с похожими методами.
- Получить значение индекса структурной схожести (SSIM), близкое к 1, демонстрирующее эффективность нового разработанного алгоритма.
- Осуществить фильтрацию зашумленных изображений с более высокой точностью по сравнению с остальными методами, используемыми в данной статье.

### 4. Разработка FR алгоритма с тремя термами

В этой части статьи мы улучшаем метод Флетчера и Ривза с тремя термами (TTFR). Используя сопряженное условия Дая и Ляо, мы находим новое значение для  $\theta$ :

$$d_{k+1} = -\lambda \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k \nabla F_{k+1}$$

в зависимости от сопряженного условия Дая и Ляо  $y_k^T d_{k+1} = -t s_k^T \nabla F_{k+1}$  значение  $\lambda \leq 0$ , and  $t = 1$  мы находим значение  $\theta_k^{NEW}$  [7],

$$y_k^T d_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k - \theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k + s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k^{NEW} = -\lambda + \beta_k^{FR} \frac{y_k^T d_k}{y_k^T \nabla F_{k+1}} + \frac{s_k^T \nabla F_{k+1}}{y_k^T \nabla F_{k+1}} \quad (7)$$

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1} \quad (8)$$

План:

В следующем разделе мы подробно опишем этапы нового алгоритма:

Этап 1: пусть  $x_0$  - начальная точка, где  $\varepsilon \geq 0$ ,  $k = 0$ , а затем находим  $d_0 = -\nabla F_0$ .

Этап 2: используя условия Вольфе (5), (6), находим значение шага  $\alpha_k$ .

Этап 3: если  $\|\nabla F_{k+1}\| < \varepsilon$ , то завершаем, в противном случае вычисляем  $x_{k+1}$  из (2).

Этап 4: вычисляем направление поиска из (7), (8) и  $\beta_k^{FR}$ .

Этап 5: устанавливаем  $k = k + 1$  и переходим к Этапу 2.

#### 4.1. Свойство спуска нового метода

В данном разделе мы докажем достаточное свойство спуска нового алгоритма, используя параметр FR и подставив новое значение для  $\theta_k^{NEW}$  в (7). Достаточное условие спуска для методов сопряженных градиентов записывается следующим образом:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} \leq -c \|\nabla F_{k+1}\|^2 \text{ for } k \geq 0 \text{ and } c > 0 \quad (9)$$

при этом соблюдение отношений для  $k$  и  $c$  важно для доказательства эффективности предложенного алгоритма.

#### 4.1.1. Теорема

Для доказательства достаточного условия спуска предложенного алгоритма мы берем направление поиска, найденное в (8) с параметром  $\beta_k^{FR}$ , а также значение  $\theta_k$ , определенное в (7), и получаем (2) для всех значений  $k \geq 1$  с использованием (5) и (6).

Доказательство: мы используем математическую индукцию для доказательства свойства спуска

- пусть  $k = 0$ , тогда  $d_0 = -\nabla F_0 \rightarrow \nabla F_0^T d_0 = -\|\nabla F_0\|^2 < 0$
- предположим, что отношение  $\nabla F_k d_k < 0$  справедливо для всех  $k$
- умножим обе стороны уравнения (8) на  $\nabla F_{k+1}$ , тогда уравнение (9) верно для  $k = k + 1$ .  
Имеем:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T g_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$

Если  $\theta_k^{NEW} \geq 0$ , тогда

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < 0$$

таким образом, новое и улучшенное условие спуска успешно доказано

#### 4.2. Глобальная сходимость предлагаемого метода

Теперь мы докажем сходимость нового и известного модифицированного алгоритма в (7) и (8) с параметром  $\beta_k^{FR}$  FR. Для исследования сходимости вновь предложенного метода нам необходимо начать с следующих предположений.

##### ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ (1)

Будут сделаны следующие предположения относительно задач общей области (соответствующей области).

- $Q = \{\chi \in R^n : F(\chi) \leq F(\chi_0)\}$  Это множество ограниченное и замкнутое.
- Функция соответствующей области или области значений дифференцируема и непрерывна в определенных  $N$  областях множества  $q$ , и ее производные являются непрерывными по Липшицу. Кроме того, непрерывное поведение функции соответствующей области или области значений можно увидеть в ее производных. Это указывает на наличие фиксированного значения, известного как  $D > 0$ , и его определение следующее:

$$\|\nabla F(\chi) - \nabla F(\Upsilon)\| \leq D \|\chi - \Upsilon\| \quad \forall \chi, \Upsilon \in N$$

- Функция области  $F$  является равномерно выпуклой функцией, где  $g$  - константа, целое число, которое обеспечивает изменчивость, например,

$$(\nabla F(\chi) - \nabla F(\Upsilon))^T (\chi - \Upsilon) \geq \mu \|\chi - \Upsilon\|^2, \text{ for any } \chi, \Upsilon \in Q$$

Используя предположение (1), с другой стороны, мы находим положительную константу  $B$  в следующем виде:

$$\|\chi\| \leq B, \forall \chi \in Q$$

$$\underline{\gamma} \leq \|\nabla F(\chi)\| \leq \bar{\gamma}, \forall \chi \in Q \quad (10)$$

### ЛЕММА (1)

Мы используем предположения (1) и (10), которые выполняются при взятии (7) и (8) и использовании усиленных условий Вольфе для определения размера шага  $\alpha_k$ , предполагая, что наши предположения верны, если  $\sum_{k>1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|^2} = \infty$ , имеем

$$\text{имеем } \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf \|\nabla F_k\|) = 0$$

#### 4.2.1. Теорема

Свойство спуска подтверждает предположение из (1) и (10). Метод сопряженных градиентов, вместе с параметром  $\beta_K^{FR}$  и  $\theta_k$ , предоставляется уравнением (7), как если бы  $\alpha_k$  удовлетворяло усиленным условиям Вольфе (WSC) (5) и (6) соответственно. Она равномерно выпукла в области  $Q$ , следовательно, функция, уравнение  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|g_k\| = 0$ , удовлетворяет.

**Доказательство:**

$$\begin{aligned} \|d_{k+1}\| &= \|\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \|\nabla F_{k+1}\| + \beta_k^{FR} \|d_k\| + \theta_k^{NEW} \|\nabla F_{k+1}\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \|\nabla F_{k+1}\| (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|^2}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \\ \|d_{k+1}\| &\leq \left( (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right) \|\nabla F_{k+1}\| \\ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|} &\geq \left( \frac{1}{\left( (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right)^2} \right) \frac{1}{\gamma^2} \Sigma \mathbf{1} = \infty \end{aligned}$$

используя лемму, представленную ранее,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla F_k\|$

## 5. Результаты экспериментов и обсуждения

Изображение обычно искажается из-за шума, возникающего либо в процессе съемки, либо при передаче изображения. Эффективные решения для снижения шума необходимы для достижения более надежных результатов в широком спектре приложений, связанных с изображениями. В данной части статьи мы рассмотрим метод восстановления исходного изображения изнутри изображения, которое было повреждено ложным импульсным шумом. Речь идет об изображении, которое пострадало от ложного импульсного шума. Импульсный шум, который возникает, когда воздействию подвергается только малая часть пикселя, является одним из наиболее распространенных типов шума и одним из самых явных. Из-за шума любая информация о фактических значениях затронутых пикселей полностью уничтожается. Эти трудности считаются одними из самых сложных с точки зрения областей улучшения из-за своих гладких характеристик. Это связано с тем, что сложно найти решение для данных проблем. Особенно трудно найти решения для несглаженных задач оптимизации из-за того, что многие существующие методы градиента не могут быть применены напрямую. Поэтому необходимо создавать оригинальные алгоритмы или подходы для решения этих трудностей. В этой связи Юань и др. [18]—[21] описывают ряд нелинейных алгоритмов сопряженных градиентов, которые могут

использоваться для несглаженных задач оптимизации. Большое количество хороших результатов было получено с использованием данных методов, дополнительные результаты могут быть найдены в задачах [22]—[26], и ... Пусть:

$$Y = \{(k, m) \in \Lambda \mid \bar{\xi}_{k,m} \neq \xi_{k,m}, \xi_{k,m} = \delta_{\min} \text{ or } \delta_{\max}\}$$

будет индексным множеством шумовых кандидатов, а  $x$  - настоящим изображением с  $(X, Y)$  пикселями,  $x_{k,m}$  - оттенком серого цвета  $x$  в указанной позиции пикселя  $(k, m)$  с  $(k, m) \in \Lambda = \{1, 2, \dots, X\} \times \{1, 2, 3, \dots, Y\}$ , и  $\phi_{k,m} = \{(k, m - 1), (k, m + 1), (k - 1, m), (k + 1, m)\}$  будут в окрестности  $(k, m)$ , где  $\xi$  - это наблюдаемое зашумленное изображение  $x$ , искаженное шумом "соли и перца",  $\bar{\xi}$  определено как изображение, созданное применением адаптивного медианного фильтра (MED) к зашумленному изображению  $y$ , где  $\delta_{\min}$  указывает минимальное значение шумового пикселя, а  $\delta_{\max}$  - максимальное значение шумового пикселя. В этом разделе детально рассматриваются следующие вопросы восстановления изображения, определенные как  $\min \nu \tau(\nu)$ :

Где:

$$\tau(v) = \sum_{(k,m) \in Y} \left\{ \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \setminus N} \chi(v_{i,j} - \xi_{x,y}) + \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \cap Y} \chi(v_{k,m} - v_{x,y}) \right\}$$

не трудно понять, что регулярность  $\tau$  зависит только от  $\chi$  и что функция Хьюбера определена как потенциальная функция для сохранения границы  $\chi$  с тем же значением:

$$\chi = \begin{cases} e^2/u, & \text{если } |e| \leq u \\ |e| - 2u, & \text{если } |e| \geq u \end{cases}$$

где  $u > 0$ . Много полезных результатов относительно  $\tau$  можно найти (см. [24]—[26]). Результаты, приведенные ниже, были получены на персональном компьютере с использованием MATLAB R2021b, процессором Intel Core i5 с тактовой частотой 2,4 ГГц, 8,00 гигабайтами оперативной памяти и операционной системой Windows 10. Параметры выбраны как  $a = 0,5$ ,  $b = 0,1$ ,  $c = 0,9$  и  $d = 0,3$ . Условие остановки:  $\frac{|\tau(v_{k+1}) - \tau(v_k)|}{|\tau(v_k)|} < 10^{-4}$ . Предложенный фильтр (НМ) создан для обработки шума "соли и перца" в цифровых изображениях. При воздействии на изображение шумом с различными коэффициентами (30, 50, 70, 90). Зашумленные изображения были подвергнуты фильтрам (FR, TIFR, а затем медианный фильтр из системы MATLAB) и обработаны для удаления этого шума. Для демонстрации результатов было выбрано изображение (Lena.png), известное в литературе и исследованиях по обработке цифровых изображений. К нему был добавлен шум с различными коэффициентами (30, 50, 70, 90). Изображение было обработано с использованием четырех коэффициентов шума и упомянутых фильтров, а также предложенного фильтра. Результаты представлены в таблице 1. Для измерения качества изображения использовался индекс SSIM, большее значение индекса означает лучший результат. Сравнение было произведено при различных значениях процента шума, оригинальное изображение сравнивалось со всеми зашумленными изображениями, а также с изображениями, обработанными четырьмя фильтрами. Из таблицы видно, что при коэффициенте шума 30 изображение, полученное в результате обработки предложенным фильтром, совпало с оригинальным изображением с отношением (0.9600). В то время как обработка фильтрами FR, TIFR и медианным фильтром дала значения соответственно (0.8853), (0.9168) и (0.6993). То же самое относится к другим коэффициентам шума. При воздействии на изображение с коэффициентом шума 50 результат обработки и сравнения с оригинальным изображением составил (0.9392), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 70 результат сравнения с оригинальным изображением составил (0.8946), при воздействии на изображение с коэффициентом шума 90 результат составил (0.7877).



Lena						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0526	0.9600	0.8853	0.9168	0.6993
50	1.0000	0.0262	0.9392	0.5419	0.8326	0.2321
70	1.0000	0.0138	0.8946	0.0885	0.7397	0.0527
90	1.0000	0.0061	0.7877	0.4311	0.6159	0.0115
Barbara						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0959	0.9251	0.8305	0.9118	0.6213
50	1.0000	0.0465	0.8793	0.7180	0.7950	0.2351
70	1.0000	0.0224	0.7997	0.5255	0.6880	0.0587
90	1.0000	0.0081	0.6565	0.4141	0.5678	0.0129

Таблица 5.1

На рисунке 1 изображены результаты работы программы, первый столбец содержит оригинальное изображение. Второй столбец содержит изображение после воздействия шума. Третий столбец содержит изображения после их обработки предложенным фильтром, четвертый столбец содержит изображения, обработанные фильтром (FR), пятый столбец содержит изображения, обработанные фильтром (TTFR), шестой столбец показывает обработку медианным фильтром (MED) MATLAB. Третий столбец показывает качество изображения после его обработки предложенным фильтром и его соответствие оригинальному изображению. Для подтверждения результатов и точности предложенного фильтра было введено другое изображение, результаты для которого представлены на рисунке 2.

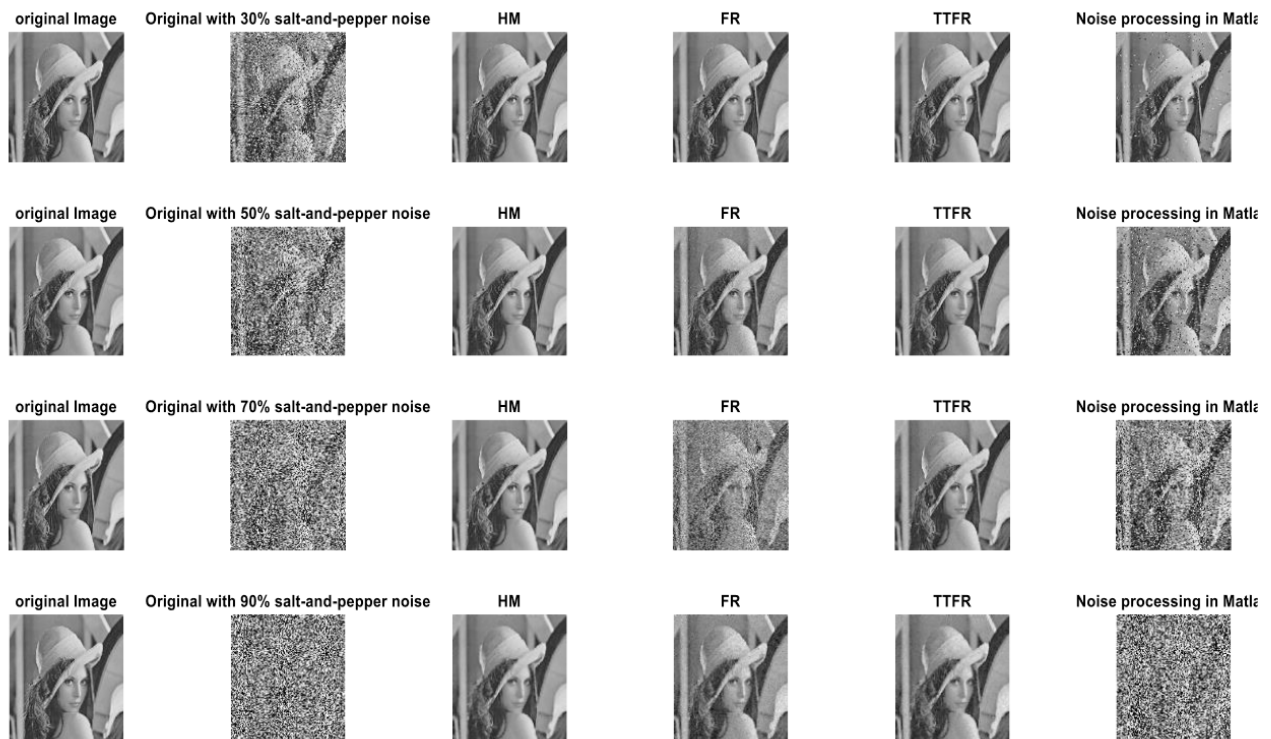


Рисунок 5.1. Сравнение результатов удаления шума (Lena.png) с использованием предложенного фильтра и других фильтров

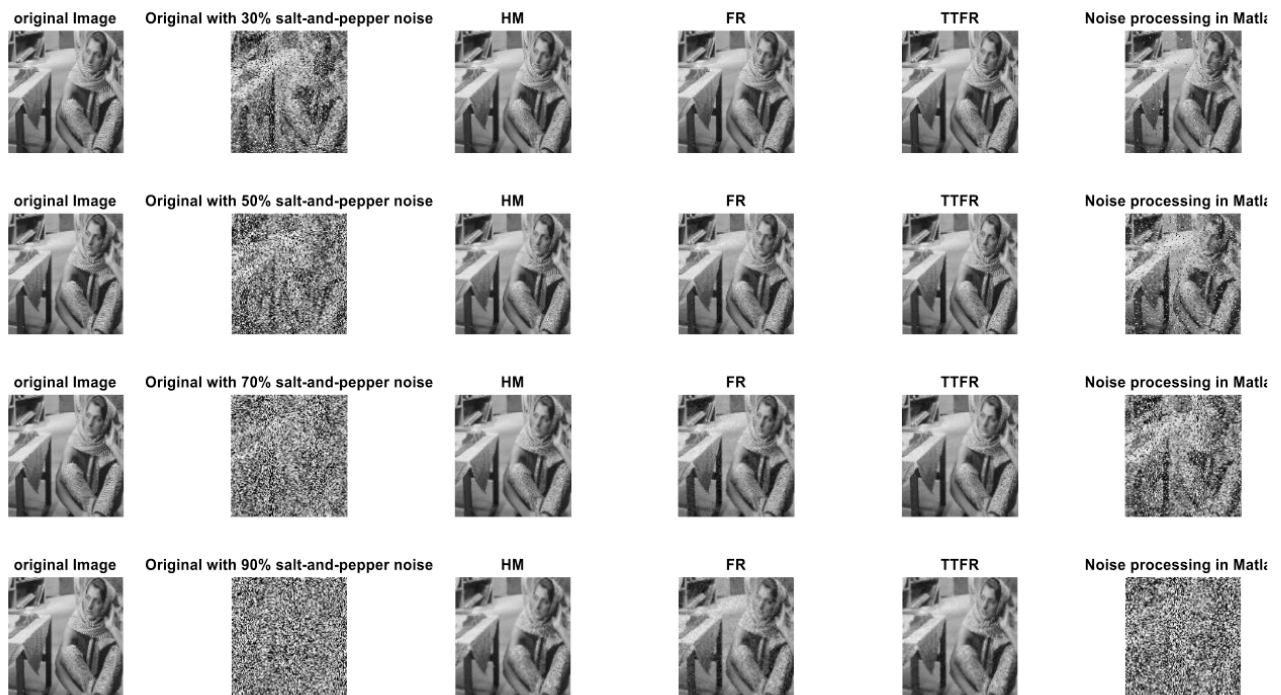


Рисунок 5.2. Сравнение результатов удаления шума (Barbara.png) с использованием предложенного фильтра и других фильтров

## 6. Вывод

В данной статье мы обсудили различные методы фильтрации для уменьшения шума ”соли и перца” на изображениях в оттенках серого. Кроме того, мы представили и сравнили результаты различных методов фильтрации шума, таких как медианные фильтры и фильтры, основанных на методах (FR) и (TTFR). Фильтр, основанный на предложенном методе (HM), обеспечивает лучшую производительность по сравнению с другими рассмотренными фильтрами (без шумов) и качество изображения в целом. Основные преимущества этого фильтра заключаются в успешной способности удаления поврежденных серых пикселей. Однако, данный метод увеличивает вычислительную сложность. Будущие исследования будут сосредоточены на других фильтрах, основанных на математических методах, для борьбы с другими типами шумов, а также на расширении алгоритма для цветных изображений. В данной работе была получена крайне низкая ошибка по сравнению с другими алгоритмами в этой статье. Значение SSIM было близко к единице, как подробно указано в числовых результатах. Метод показал лучшие результаты фильтрации зашумленных изображений по сравнению с алгоритмами FR и TTFR.

## 7. Благодарность

Выражаю благодарность и признание колледжу компьютерных наук и математики, а также колледжу фундаментальных наук университета Мосула.

## Список литературы

- [1] Н. М. Khudhur и К. I. Ibraheem, “Metaheuristic optimization algorithm based on the two-step Adams-Bashforth method in training multi-layer perceptrons”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 2, № 4 (116), с. 6—13, апр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.254023. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.254023>.
- [2] К. I. Ibraheem и Н. М. Khudhur, “Optimization algorithm based on the Euler method for solving fuzzy nonlinear equations”, *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, т. 1, № 4 (115), с. 13—19, февр. 2022, ISSN: 1729-3774. DOI: 10.15587/1729-4061.2022.252014. url: <http://dx.doi.org/10.15587/1729-4061.2022.252014>.
- [3] A. S. Ahmed, Н. М. Khudhur и М. S. Najmuldeen, “A new parameter in three-term conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 23, № 1, с. 338, июль 2021, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344>.
- [4] R. Fletcher, “Function minimization by conjugate gradients”, *The Computer Journal*, т. 7, № 2, с. 149—154, февр. 1964, ISSN: 1460-2067. DOI: 10.1093/comjnl/7.2.149. url: <http://dx.doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>.
- [5] Y. H. Dai и Y. Yuan, “A Nonlinear Conjugate Gradient Method with a Strong Global Convergence Property”, *SIAM Journal on Optimization*, т. 10, № 1, с. 177—182, янв. 1999, ISSN: 1095-7189. DOI: 10.1137/S1052623497318992. url: <http://dx.doi.org/10.1137/S1052623497318992>.
- [6] E. Polak и G. Ribiere, “Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées”, *Revue française d’informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, т. 3, № 16, с. 35—43, 1969, ISSN: 0373-8000. DOI: 10.1051/m2an/196903r100351. url: <http://dx.doi.org/10.1051/m2an/196903r100351>.
- [7] Y. -. Dai, “New Conjugacy Conditions and Related Nonlinear Conjugate Gradient Methods”, *Applied Mathematics and Optimization*, т. 43, № 1, с. 87—101, янв. 2001, ISSN: 1432-0606. DOI: 10.1007/s002450010019. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s002450010019>.
- [8] M. R. Hestenes и E. Stiefel, “Methods of conjugate gradients for solving linear systems”, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, т. 49, № 1, 1952.
- [9] B. Abbas Hassan, “A new formula for conjugate parameter computation based on the quadratic model”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 13, № 3, с. 954, март 2019, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961>.
- [10] B. A. Hassan и M. W. Taha, “A new variants of quasi-newton equation based on the quadratic function for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 19, № 2, с. 701, авг. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708>.
- [11] B. A. Hassan, H. O. Dahawi и A. S. Younus, “A new kind of parameter conjugate gradient for unconstrained optimization”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 17, № 1, с. 404, янв. 2020, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411>.
- [12] Н. М. Khudhur и К. K. Abbo, “A New Type of Conjugate Gradient Technique for Solving Fuzzy Nonlinear Algebraic Equations”, *Journal of Physics: Conference Series*, т. 1879, № 2, с. 022111, май 2021, ISSN: 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1879/2/022111. url: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1879/2/022111>.

- [13] Z. M. Abdullah, H. M. Khudhur и A. Khairulla Ahmed, “Modification of the new conjugate gradient algorithm to solve nonlinear fuzzy equations”, *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science*, т. 27, № 3, с. 1525, сент. 2022, ISSN: 2502-4752. DOI: 10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532. url: <http://dx.doi.org/10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532>.
- [14] M. Tang, K. j. Wang и Y. Zhang, “A Research on Chaotic Recurrent Fuzzy Neural Network and Its Convergence”, в *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, IEEE, авг. 2007. DOI: 10.1109/icma.2007.4303626. url: <http://dx.doi.org/10.1109/ICMA.2007.4303626>.
- [15] L. C. W. DIXON, “Conjugate Gradient Algorithms: Quadratic Termination without Linear Searches”, *IMA Journal of Applied Mathematics*, т. 15, № 1, с. 9—18, 1975, ISSN: 1464-3634. DOI: 10.1093/imamat/15.1.9. url: <http://dx.doi.org/10.1093/imamat/15.1.9>.
- [16] K. j. W. M. Tang и Y. Zhang, “A research on chaotic recurrent fuzzy neural network and its convergence”, *International Conference on Mechatronics and Automation*, с. 682—687, 2007.
- [17] L. Zhang и W. Zhou, “Two descent hybrid conjugate gradient methods for optimization”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 216, № 1, с. 251—264, июнь 2008, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2007.04.028. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2007.04.028>.
- [18] G. Yuan, X. Duan, W. Liu, X. Wang, Z. Cui и Z. Sheng, “Two New PRP Conjugate Gradient Algorithms for Minimization Optimization Models”, *PLOS ONE*, т. 10, № 10, Y. Shi, ред., e0140071, окт. 2015, ISSN: 1932-6203. DOI: 10.1371/journal.pone.0140071. url: <http://dx.doi.org/10.1371/journal.pone.0140071>.
- [19] G. Yuan, Z. Meng и Y. Li, “A Modified Hestenes and Stiefel Conjugate Gradient Algorithm for Large-Scale Nonsmooth Minimizations and Nonlinear Equations”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, т. 168, № 1, с. 129—152, июль 2015, ISSN: 1573-2878. DOI: 10.1007/s10957-015-0781-1. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10957-015-0781-1>.
- [20] G. Yuan, Z. Wei и G. Li, “A modified Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, т. 255, с. 86—96, янв. 2014, ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2013.04.032. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2013.04.032>.
- [21] X. Jiang, W. Liao, J. Yin и J. Jian, “A new family of hybrid three-term conjugate gradient methods with applications in image restoration”, *Numerical Algorithms*, т. 91, № 1, с. 161—191, март 2022, ISSN: 1572-9265. DOI: 10.1007/s11075-022-01258-2. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s11075-022-01258-2>.
- [22] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization problems and image restoration”, *Journal of Inequalities and Applications*, т. 2019, № 1, сент. 2019, ISSN: 1029-242X. DOI: 10.1186/s13660-019-2192-6. url: <http://dx.doi.org/10.1186/s13660-019-2192-6>.
- [23] G. Yuan, T. Li и W. Hu, “A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems”, *Applied Numerical Mathematics*, т. 147, с. 129—141, янв. 2020, ISSN: 0168-9274. DOI: 10.1016/j.apnum.2019.08.022. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apnum.2019.08.022>.
- [24] J.-F. Cai, R. H. Chan и C. Di Fiore, “Minimization of a Detail-Preserving Regularization Functional for Impulse Noise Removal”, *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, т. 29, № 1, с. 79—91, сент. 2007, ISSN: 1573-7683. DOI: 10.1007/s10851-007-0027-4. url: <http://dx.doi.org/10.1007/s10851-007-0027-4>.

- [25] J.-F. Cai, R. Chan и B. Morini, “Minimization of an Edge-Preserving Regularization Functional by Conjugate Gradient Type Methods”, в *Mathematics and Visualization*. Springer Berlin Heidelberg, 2007, с. 109—122, ISBN: 9783540332671. DOI: 10.1007/978-3-540-33267-1\_7. url: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-33267-1\\_7](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-33267-1_7).
- [26] G. Yu, J. Huang и Y. Zhou, “A descent spectral conjugate gradient method for impulse noise removal”, *Applied Mathematics Letters*, т. 23, № 5, с. 555—560, май 2010, ISSN: 0893-9659. DOI: 10.1016/j.aml.2010.01.010. url: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2010.01.010>.

## Modified three-term conjugate gradient algorithm and its applications in image restoration

Yahya Ismail Ibrahim<sup>1</sup>, Hisham Mohammed Khudhur<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Computer Science, College of Education for Pure Sciences, University of Mosul, Mosul, Iraq

<sup>2</sup>Department of Mathematics, College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul, Mosul, Iraq

### Article Info

#### Article history:

Received Jun 25, 2022

Revised Aug 21, 2022

Accepted Sep 7, 2022

#### Keywords:

Conjugacy

Conjugate gradient

Convergence

Global

Methods

### ABSTRACT

In image restoration, the goal is often to bring back a high-quality version of an image from a lower-quality copy of it. In this article, we will investigate one kind of recovery issue, namely recovering photos that have been blurred by noise in digital photographs (sometimes known as "salt and pepper" noise). When subjected to noise at varying frequencies and intensities (30,50,70,90). In this paper, we used the conjugate gradient algorithm to Restorative images and remove noise from them, we developed the conjugate gradient algorithm with three limits using the conjugate condition of Dai and Liao, where the new algorithm achieved the conditions for descent and global convergence under some assumptions. According to the results of the numerical analysis, the recently created approach is unequivocally superior to both the Fletcher and Reeves (FR) method and the Fletcher and Reeves three-term (TFR) method. Use the structural similarity index measure (SSIM), which is used to measure image quality and the higher its value, the better the result. The original image was compared with all the noisy images and each according to the percentage of noise as well as the images processed with the four methods.

This is an open access article under the [CC BY-SA](#) license.



### Corresponding Author:

Hisham Mohammed Khudhur

Department of Mathematics, College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul  
Mosul, Iraq

Email: hisham892020@uomosul.edu.iq

## 1. INTRODUCTION

Conjugate gradient techniques are a powerful family of unconstrained optimization algorithms that have excellent local and global convergence qualities while using little memory. They are also fast and efficient. Researchers have continued to exhibit a strong interest in the performance of the convergence property and the simplicity with which algorithms may be represented in computer programs in a same manner over the previous 50 years and into the current day. Numerous academics have recently been studying conjugate gradient techniques, particularly two types of conjugate gradient methods that have received the most interest recently. Secant conditions are used in the first technique, which includes second-order information from the objective function.

## 2. LITERATURE REVIEW

According to some researchers, unconstrained optimization may be thought of as the challenge of finding a minimization solution to a real function  $F(x)$

$$\min_{\chi \in R^n} F(\chi) \quad (1)$$

where  $F(\chi)$  is a function that can be differentiable at least once for see more [1]–[3]. Problem (1) may be solved with the use of conjugate gradient (CG) algorithms, which are based on the iterative connection shown in:

$$\chi_{k+1} = \chi_k + \alpha_k d_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

where  $\alpha_k$ , the step length in a exact or inexact linear search is calculated when the equation is nonlinear using the following relationship:

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} F(\chi_k + \alpha_k d_k) \quad (3)$$

$d_k$  it is the direction of the search and as defined in:

$$\begin{aligned} d_1 &= -\nabla F_1 \quad k = 1 \\ d_{k+1} &= -\nabla F_{k+1} + \beta_k d_k \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

$\nabla F_{k+1}$  is a vector matrix that represents the gradient's output. The CG method has a parameter named  $\beta_k$ . Here are the Some conjugate gradient algorithms include the following parameters, these techniques always meet the adequate descent condition, where we calculate  $\beta_k$  with the direction of the search  $d_{k+1}$  in the following  $d_1 = -\nabla F_1$ ,  $y_k = \nabla F_{k+1} - \nabla F_k$

$$\beta_k^{FR} = \frac{\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k} [4]; \beta_k^{PRP} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{g_k^T g_k} [5]; \beta_k^{HS} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T d_k} [6]; \beta_k^{DL} = \frac{y_k^T \nabla F_{k+1} - \nabla F_{k+1}^T s_k}{\nabla F_k^T d_k} [7],$$

see [8]–[15]. There are trinomial conjugated gradient modalities proposed by Zhang [16], a trinomial conjugate gradient modality was proposed for FR, Polak-Ribière (PR) and Hestenes-Stiefel (HS) parameters. These three approaches consistently accomplish the descent property, and the following is the manner in which the search for some trinomial conjugate gradient methods should be directed:

1- FR three- term is:

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{FR} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{where } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

2- PR three – term is:

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{PRP} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{where } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{\nabla F_k^T \nabla F_k}$$

3- HS three - term is:

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta^{HS} d_k - \theta_k^{(1)} \nabla F_{k+1}$$

$$\text{where } \theta_k^{(1)} = \frac{d_k^T \nabla F_{k+1}}{d_k^T y_k} \text{ We note that these methods always satisfy } d_k^T \nabla F_k = -\|\nabla F_k\|^2 < 0, \forall k,$$

which means that  $c = 1$  is a sufficient condition for a descent. In the study of convergence and the application of the CG method, the researcher often needs a exact and inexact line of research such as Wolf's strong terms. Wolf's strong terms are to find an  $\alpha_k$  such that:

$$F(\chi_k + \alpha_k d_k) \leq F(\chi) + n1 \alpha_k \nabla F_k^T d_k \quad (5)$$

$$|d_k^T \nabla F_k(\chi_k + \alpha_k d_k)| \leq -n2 d_k^T \nabla F_k \quad (6)$$

where  $0 < n_1 < n_2 < 1$  is a constant according by Weijun and Li [17].

### 3. THE AIM AND OBJECTIVES OF THE STUDY

In this paper, we developed a new conjugate gradient algorithm to handle noisy image problems:

- Get the least possible error compared to other methods in the same field.
- Obtaining a structural similarity index measure (SSIM) value close to 1 to show the efficiency of the new developed algorithm.
- Filtering noisy images with high accuracy compared to the rest of the algorithms used in this paper.

### 4. DEVELOPMENT OF THE THREE-TERM FR ALGORITHM

In this part of the paper we improve the three-term fletcher and reeves (TTFR) method by finding a new value for theta using the conjugate condition of Dai and Liao where we got:

$$d_{k+1} = -\lambda \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k \nabla F_{k+1}$$

depending on the conjugacy condition of Dai and Liao  $y_k^T d_{k+1} = -t s_k^T \nabla F_{k+1}$  the value of  $\lambda < 0$ , and  $t = 1$  we find the value of  $\theta_k^{NEW}$  [7],

$$y_k^T d_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k - \theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k y_k^T \nabla F_{k+1} = -\lambda y_k^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} y_k^T d_k + s_k^T \nabla F_{k+1}$$

$$\theta_k^{NEW} = -\lambda + \beta_k^{FR} \frac{y_k^T d_k}{y_k^T \nabla F_{k+1}} + \frac{s_k^T \nabla F_{k+1}}{y_k^T \nabla F_{k+1}} \quad (7)$$

$$d_{k+1} = -\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1} \quad (8)$$

Outline:

In the following, we will write the steps of the new algorithm in detail:

Stage1: let  $x_0$  be a starting point where  $\varepsilon > 0$ ,  $k = 0$  and then we find  $d_0 = -\nabla F_0$ .

Stage2: using Wolfe conditions (5), (6) terms we find the value of the step size  $\alpha_k$ .

Stage3: if it was  $\|\nabla F_{k+1}\| < \varepsilon$  then stopped else Calculate  $x_{k+1}$  from (2).

Stage4: we calculate the direction of the search from the (7), (8), and  $\beta_k^{FR}$ .

Stage5: taking  $k = k + 1$  and go to Stage2.

#### 4.1. The new method's descent property

In this section, we will prove the sufficient descent property of the new algorithm by using the FR parameter and by substituting the new value for  $\theta_k^{NEW}$  in (7), the sufficiency gradient property of the conjugate gradient methods is written in:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} \leq -c \|\nabla F_{k+1}\|^2 \text{ for } k \geq 0 \text{ and } c > 0 \quad (9)$$

where the property of sufficient proportions is important to prove the efficiency of the proposed algorithm.

##### 4.1.1. Theorem

To Proof of the sufficient descent property of the proposed new algorithm We take the search direction found in (8) with FR  $\beta_k^{FR}$  parameter and the  $\theta_k$  value defined in (7) we will get (2) for all values of  $k \geq 1$ , and using (5), and (6).

Proof: we use mathematical induction to prove descent property:

- where  $k = 0$ , then  $d_0 = -\nabla F_0 \rightarrow \nabla F_0^T d_0 = -\|\nabla F_0\|^2 < 0$
- suppose that the relationship is correct  $\nabla F_k d_k < 0$  for all  $k$ .
- by multiplying both sides of the (8) by  $\nabla F_{k+1}$ , we are able to demonstrate that the (9) holds true when  $k = k+1$ . we get:

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1}$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} = -\nabla F_{k+1}^T g_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$



If  $\theta_k^{NEW} > 0$  then

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < -\nabla F_{k+1}^T \nabla F_{k+1} (1 + \theta_k^{NEW}) + \beta_k^{FR} \nabla F_{k+1}^T d_k$$

$$\nabla F_{k+1}^T d_{k+1} < 0$$

as a result, the new and enhanced method's descent attribute was successfully shown.

#### 4.2. Global convergence of the new proposed method

Now we will prove that the new and known modified algorithm in (7) and (8) with FR  $\beta_k^{FR}$  parameter. This will be done by using the equation to guide our work. In order to investigate whether or not the newly suggested method converges, we need to start with the following assumptions.

##### ASSUMPTIONS (1)

The following presumptions will be made with regards to the purpose of the common domain (corresponding domain):

- $Q = \{\chi \in R^n: F(\chi) \leq F(\chi_0)\}$  It is a set bound in the primary blister and closed.
- The corresponding domain or range function is differentiable and continuous in certain  $N$  regions of the set  $q$ , and its derivatives are Lipschitz Continuous. In addition, the continuous behavior of the corresponding domain or range function can be seen in its derivatives. This indicates that there is a fixed value known as  $D > 0$ , and its definition is as follows:

$$\|\nabla F(\chi) - \nabla F(Y)\| \leq D\|\chi - Y\| \quad \forall \chi, Y \in N$$

- The domain function  $F$  is a convex function that is uniformly convex, where  $g$  is a constant integer that accomplishes the variance, for instance.

$$(\nabla F(\chi) - \nabla F(Y))^T (\chi - Y) \geq \mu \|\chi - Y\|^2, \text{ for any } \chi, Y \in Q$$

Using the assumptions (1), on the other hand, we find a positive constant  $B$  in the following form:

$$\|\chi\| \leq B, \forall \chi \in Q$$

$$\underline{\gamma} \leq \|\nabla F(\chi)\| \leq \overline{\gamma}, \forall \chi \in Q \quad (10)$$

##### LEMMA (1)

We use assumptions (1) and (10) is fulfilled by taking (7) and (8) and using Wolfe strong conditions to find the value of the step length  $\alpha_k$ , assuming that our assumptions are correct if  $\sum_{k>1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|^2} = \infty$

$$\text{we get } \lim_{k \rightarrow \infty} (\inf \|\nabla F_k\|) = 0$$

##### 4.2.1. Theorem

The descent property of verifies the proposition of assumptions (1) and (10). The conjugate gradient technique, together with the  $\beta_k^{FR}$  parameter and  $\theta_k$ , is provided by the (7), as if  $\alpha_k$  is satisfied with Wolf strong conditions (WSC) (5) and (6), respectively. It's uniformly convex in the set  $Q$  plane, hence the function, the equation is  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|g_k\| = 0$  is satisfy.

**Proof:**

$$\|d_{k+1}\| = \|-\nabla F_{k+1} + \beta_k^{FR} d_k - \theta_k^{NEW} \nabla F_{k+1}\|$$

$$\|d_{k+1}\| \leq \|\nabla F_{k+1}\| + \beta_k^{FR} \|d_k\| + \theta_k^{NEW} \|\nabla F_{k+1}\|$$

$$\|d_{k+1}\| \leq \|\nabla F_{k+1}\| (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|^2}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\|$$

$$\|d_{k+1}\| \leq \left( (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right) \|\nabla F_{k+1}\|$$

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\|d_{k+1}\|} \geq \left( \frac{1}{\left( (1 + \theta_k^{NEW}) + \frac{\|\nabla F_{k+1}\|}{\|\nabla F_k\|^2} \|d_k\| \right)^2} \right) \frac{1}{\gamma^2} \sum 1 = \infty$$

using the lemma above  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla F_k\| = 0$ .

## 5. EXPERIMENTAL RESULTS AND DISCUSSION

The image is typically deformed as a result of noise that occurred either during the process of shooting or transmitting the image. Effective solutions for reducing noise are necessary in order to deliver results that are more dependable across a wide range of image-related applications. In this part of the article, we will cover the method of restoring the original picture from inside an image that has been corrupted by spurious impulse noise. The image in question will have been damaged as a result of spurious impulse noise. Impulse noise, which happens when just a tiny section of a pixel is impacted by the noise, is one of the most common types of noise. It is also one of the noisiest types of noise. As a result of the noise, any information regarding the actual values of the affected pixels is completely obliterated. These difficulties are considered to be among the most challenging in terms of areas for improvement because of their smooth characteristics. The reason for this is that it is tough to find a solution to these problems. It is particularly challenging to find solutions to non-seamless optimization problems due to the fact that many of the existing gradient methods cannot be employed directly. As a result, it is required to build original algorithms or approaches in order to tackle these difficulties. As a result, Yuan *et al.* [18]–[21]. Describe a number of non-linear CG algorithms that can be used for non-smooth optimization problems. These methods get a big number of great results, and more results can be found in the picture problems [22]–[26], and ... Let:

$$Y = \{(k, m) \in \Lambda \mid \bar{\xi}_{k,m} \neq \xi_{k,m}, \xi_{k,m} = \delta_{min} \text{ or } \delta_{max}\}$$

be the noise candidate's index set, and  $x$  be the genuine picture with  $X - by - Y$  pixels,  $x_{k,m}$  be the grayscale value of  $x$  at the specified pixel position  $(k, m)$  with  $(k, m) \in \Lambda = \{1, 2, \dots, X\} \times \{1, 2, 3, \dots, Y\}$ , and  $\phi_{k,m} = \{(k, m - 1), (k, m + 1), (k - 1, m), (k + 1, m)\}$  be in the vicinity of  $(k, m)$ , where  $\xi$  is the observed noisy picture of  $x$  distorted by salt-and-pepper noise,  $\bar{\xi}$  Is defined as the picture created by applying an adaptive median filter (MED) to the noisy image  $y$ , where  $\delta_{min}$  indicates the noise pixel's minimal value and  $\delta_{max}$  signifies the noise pixel's highest value. The following issues with picture restoration are examined in detail in this section. They are defined by  $\min_v \tau(v)$ :

where,

$$\tau(v) = \sum_{(k,m) \in Y} \left\{ \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \setminus N} \chi(v_{i,j} - \xi_{x,y}) + \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \phi_{k,m} \cap Y} \chi(v_{k,m} - v_{x,y}) \right\}$$

it is not hard to comprehend that the regularity of  $\tau$  is dependent only on  $\chi$  and that Huber's function is defined as a potential function to keep the edge  $\chi$  with the same value with:

$$\chi = \begin{cases} e^2/u, & \text{if } |e| \leq u \\ |e| - 2u, & \text{if } |e| > u \end{cases}$$

where  $u > 0$ . There are numerous good findings concerning  $\tau$  can be discovered (see [24]–[26]). In this program, all instructions are carried out on a personal computer outfitted with a MATLAB R2021b CPU, an Intel Core i5 processor running at 2.4 GHz, 8.00 gigabytes of random access memory, and the Windows 10 operating system. The parameters are chosen as  $a = 0.5$ ,  $b = 0.1$ ,  $c = 0.9$ , and  $d = 0.3$ . The stop condition is:  $\frac{|\tau(v_{k+1}) - \tau(v_k)|}{|\tau(v_k)|} < 10^{-4}$ . The proposed filter (HM) is built to process (salt and pepper) noise in digital images.

When exposed to noise at different rates (30,50,70,90). The noisy images were entered into filters (FR, TIFR and finally the median filter from the MATLAB system) and processed to get rid of this noise. And to measure improvements and compare the efficiency of the proposed candidate's work. The image (Lena.png) was chosen, known in the digital image processing literature and research. Noises were added to it at

different rates (30,50,70,90). The image has been processed with the four noise ratios and for the mentioned filters as well as the suggested filter. The results appeared as shown in Table 1. Use the SSIM, which is used to measure image quality, and the higher its value, the better the result. The original image was compared with all the noisy images and each according to the percentage of noise as well as the images processed with the four filters. It is clear from the table that when the noise ratio is 30, the resulting image after processing from noise with the proposed filter, and comparing it with the image, gave it a match with the original image, the ratio (0.9600). While treatment with FR, TIFR and median filters gave values of 0.8853, 0.9168, and 0.6993, respectively. The same goes for the other noise ratios. As the image exposed to noise 50 was the result of purification and then compared with the original image (0.9392), the image exposed to noise 70 was the result of comparison with the original image (0.8946), the image exposed to noise 90 was the result of (0.7877). The proposed filter with the other filters being compared.

Table 1. Filters processing results by noise ratio

Lena						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0526	0.9600	0.8853	0.9168	0.6993
50	1.0000	0.0262	0.9392	0.5419	0.8326	0.2321
70	1.0000	0.0138	0.8946	0.0885	0.7397	0.0527
90	1.0000	0.0061	0.7877	0.4311	0.6159	0.0115
Barbara						
Noise	original Image	noise Image	HM	FR	TTFR	median filtering
30	1.0000	0.0959	0.9251	0.8305	0.9118	0.6213
50	1.0000	0.0465	0.8793	0.7180	0.7950	0.2351
70	1.0000	0.0224	0.7997	0.5255	0.6880	0.0587
90	1.0000	0.0081	0.6565	0.4141	0.5678	0.0129

Figure 1 displays the image of the proposed program of work, as the first column shows the original image. The second column shows the image after exposure to noise. The third column shows the images after processing them with the proposed filter, the fourth column shows the filter processing (FR), the fifth column shows the filter processing the TTFR, the sixth column shows the processing by the median filter (MED) of MATLAB. The third column shows the quality of the displayed image after processing it with the proposed filter and its conformity with the original image by discussing the metrics mentioned in the above table. To confirm the results and the accuracy of the proposed filter, another image of the program was introduced, and the results appeared as shown in Figure 2.

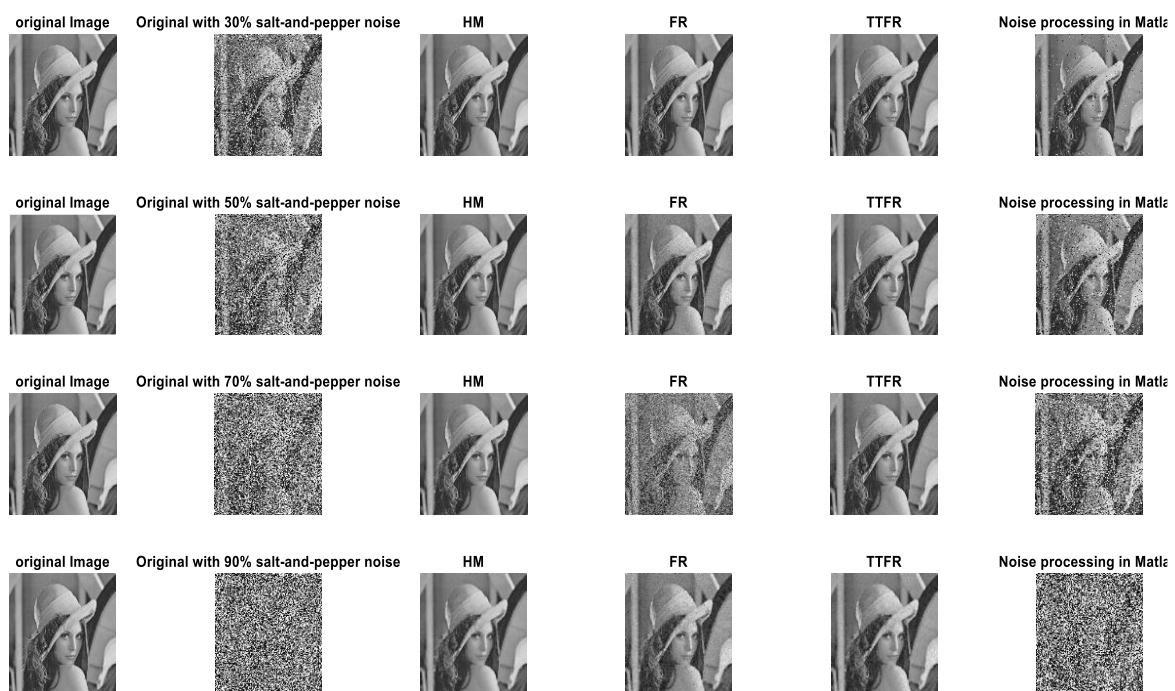


Figure 1. Comparison of image noise removal (Lena.png) using the proposed filter and other filters

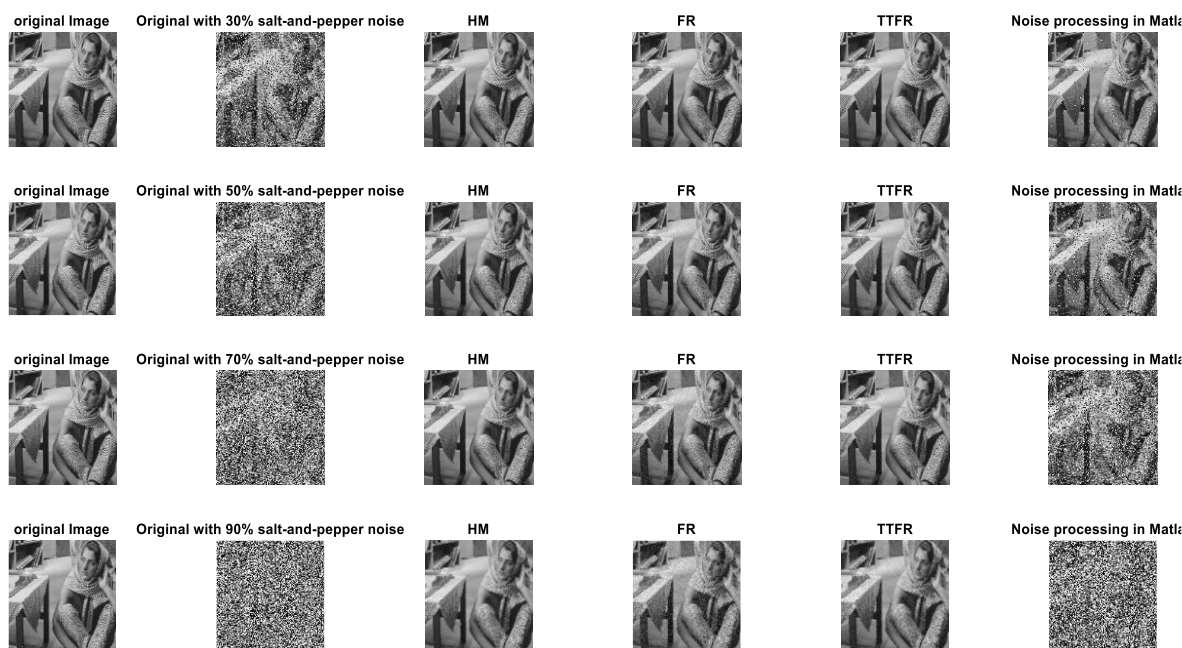


Figure 2. Comparison of image noise removal (Barbara.png) using the proposed filter and other filters

## 6. CONCLUSION

The proposed paper, we discussed different filtering methods for reducing salt and pepper noise in gray image. Additionally, we presented and compared outcomes for these filtering techniques. The results obtained using median filters, and filters based on methods FR, and TTFR. Filter based on the proposed (HM) guarantees better performance on other filters discussed for (noise free) and image quality as well. The main advantages of this filter are the successfully removing capability of the damaged gray pixels. However, this technique increases the computational complexity. The future scope will be focused on other filters based on mathematical methods to overwhelm other types of noises. As well as to extend the algorithm for color images. A very small error rate was obtained compared to other algorithms in this paper. The value of SSIM was close to one, as detailed in numerical results. The best resolution for filtering noisy images was obtained compared to the FR, and TTFR algorithms.

## ACKNOWLEDGMENTS

To the College of Computer Science and Mathematics and the College of Education for Pure Sciences at the University of Mosul, I would like to express my profound gratitude and admiration.




## REFERENCES

- [1] H. M. Khudhur and K. I. Ibraheem, "Metaheuristic optimization algorithm based on the two-step Adams-Bashforth method in training multi-layer perceptrons," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 2, no. 4 (116), pp. 6–13, Apr. 2022, doi: 10.15587/1729-4061.2022.254023.
- [2] K. I. Ibraheem and H. M. Khudhur, "Optimization algorithm based on the euler method for solving fuzzy nonlinear equations," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 1, no. 4–115, 2022, doi: 10.15587/1729-4061.2022.252014.
- [3] A. S. Ahmed, H. M. Khudhur, and M. S. Najmuldeen, "A new parameter in three-term conjugate gradient algorithms for unconstrained optimization," *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science (IJECS)*, vol. 23, no. 1, 2021, doi: 10.11591/ijeecs.v23.i1.pp338-344.
- [4] R. Fletcher and C. M. Reeves, "Function minimization by conjugate gradients," *Computer Journal*, vol. 7, no. 2, pp. 149–154, 1964, doi: 10.1093/comjnl/7.2.149.
- [5] Y. H. Dai and Y. Yuan, "A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property," *SIAM Journal on Optimization*, vol. 10, no. 1, pp. 177–182, 1999, doi: 10.1137/S1052623497318992.
- [6] E. Polak and G. Ribiere, "Note on the convergence of conjugate direction methods (in France)," *Rev. française d'informatique Rech. opérationnelle. Série rouge*, vol. 3, no. 16, pp. 35–43, 1969, doi: 10.1051/m2an/196903r100351.
- [7] Y. H. Dai and L. Z. Liao, "New conjugacy conditions and related nonlinear conjugate gradient methods," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 43, no. 1, pp. 87–101, 2001, doi: 10.1007/s002450010019.
- [8] M. R. Hestenes and E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*, vol. 49, no. 1. NBS Washington, DC, 1952.




- [9] B. A. Hassan, "A new formula for conjugate parameter computation based on the quadratic model," *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science (IJECS)*, vol. 13, no. 3, 2019, doi: 10.11591/ijeecs.v13.i3.pp954-961.
- [10] B. A. Hassan and M. W. Taha, "A new variants of quasi-newton equation based on the quadratic function for unconstrained optimization," *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science (IJECS)*, vol. 19, no. 2, 2020, doi: 10.11591/ijeecs.v19.i2.pp701-708.
- [11] B. A. Hassan, H. O. Dahawi, and A. S. Younus, "A new kind of parameter conjugate gradient for unconstrained optimization," *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science (IJECS)*, vol. 17, no. 1, 2019, doi: 10.11591/ijeecs.v17.i1.pp404-411.
- [12] H. M. Khudhur and K. K. Abbo, "A new type of conjugate gradient technique for solving fuzzy nonlinear algebraic equations," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1879, no. 2, doi: 10.1088/1742-6596/1879/2/022111.
- [13] Z. M. Abdullah, H. M. Khudhur, and A. K. Ahmed, "Modification of the new conjugate gradient algorithm to solve nonlinear fuzzy equations," *Indonesian Journal of Electrical Engineering and Computer Science (IJECS)*, vol. 27, no. 3, pp. 1525–1532, 2022, doi: 10.11591/ijeecs.v27.i3.pp1525-1532.
- [14] T. Mo, W. Kejun, and Z. Yan, "A research on chaotic recurrent fuzzy neural network and its convergence," in *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, ICMA 2007*, 2007, pp. 682–687, doi: 10.1109/ICMA.2007.4303626.
- [15] L. C. W. Dixon, "Conjugate gradient algorithms: quadratic termination without linear searches," *IMA Journal of Applied Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 9–18, 1975, doi: 10.1093/imamat/15.1.9.
- [16] M. Tang, K. jun Wang, and Y. Zhang, "A research on chaotic recurrent fuzzy neural network and its convergence," in *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*, 2007, pp. 682–687.
- [17] L. Zhang and W. Zhou, "Two descent hybrid conjugate gradient methods for optimization," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 216, no. 1, pp. 251–264, 2008, doi: 10.1016/j.cam.2007.04.028.
- [18] G. Yuan, X. Duan, W. Liu, X. Wang, Z. Cui, and Z. Sheng, "Two new PRP conjugate gradient algorithms for minimization optimization models," *PLoS One*, vol. 10, no. 10, 2015, doi: 10.1371/journal.pone.0140071.
- [19] G. Yuan, Z. Meng, and Y. Li, "A modified hestenes and stiefel conjugate gradient algorithm for large-scale nonsmooth minimizations and nonlinear equations," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 168, no. 1, 2016, doi: 10.1007/s10957-015-0781-1.
- [20] G. Yuan, Z. Wei, and G. Li, "A modified Polak–Ribière–Polyak conjugate gradient algorithm for nonsmooth convex programs," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 255, pp. 86–96, 2014, doi: 10.1016/j.cam.2013.04.032.
- [21] X. Jiang, W. Liao, J. Yin, and J. Jian, "A new family of hybrid three-term conjugate gradient methods with applications in image restoration," *Numerical Algorithms*, vol. 91, pp. 161–191, 2022, doi: 10.1007/s11075-022-01258-2.
- [22] G. Yuan, T. Li, and W. Hu, "A conjugate gradient algorithm and its application in large-scale optimization problems and image restoration," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2019, no. 1, 2019, doi: 10.1186/s13660-019-2192-6.
- [23] G. L. Yuan, T. T. Li, and W. J. Hu, "A conjugate gradient algorithm for large-scale nonlinear equations and image restoration problems," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 147, pp. 129–141, 2020, doi: 10.1016/j.apnum.2019.08.022.
- [24] J. F. Cai, R. H. Chan, and C. Di Fiore, "Minimization of a detail-preserving regularization functional for impulse noise removal," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 29, no. 1, 2007, doi: 10.1007/s10851-007-0027-4.
- [25] J. F. Cai, R. Chan, and B. Morini, "Minimization of an edge-preserving regularization functional by conjugate gradient type methods," *Image Processing Based on Partial Differential Equations*, 2007, pp. 109–122, doi: 10.1007/978-3-540-33267-1\_7.
- [26] G. H. Yu, J. H. Huang, and Y. Zhou, "A descent spectral conjugate gradient method for impulse noise removal," *Applied Mathematics Letters*, vol. 23, pp. 555–560, 2010, doi: 10.1016/j.aml.2010.01.010.

## BIOGRAPHIES OF AUTHORS



**Yahya Ismail Ibrahim**    he received his bachelor degree from University of Mosul, Department of Computer science. Obtained his M.Sc. in digital image processing using neural network from University of Mosul, College of Computer Science and Mathematics in 2014. He is currently a Faculty Members & Researcher in Department of Computer science, College of Education for Pure Sciences, Iraq. He is interested in image processing, computer vision, and Artificial Intelligence. He can be contacted at email: yahyaismail@uomosul.edu.iq.



**Dr. Hisham Mohammed Khudhur**    is Instructor in Department of Mathematics, College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul, Iraq. He holds a Bachelor's degree in Mathematics, a Master's degree in Mathematics from the University of Mosul, and a Ph.D. degree in computational mathematics. Specialization: Intelligent Numerical Algorithms. He can be contacted at email: hisham892020@uomosul.edu.iq.