

ТЕМА 5

СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В ГРУППАХ. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

1. Сравнение средних: применимость в исследованиях

2. Т-тест

2.1. Т-критерий для независимых выборок

2.2. Т-критерий для парных выборок

2.3. Одновыборочный t-критерий

3. Дисперсионный анализ

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

3.3. Непараметрический дисперсионный анализ

1. СРАВНЕНИЕ СРЕДНИХ

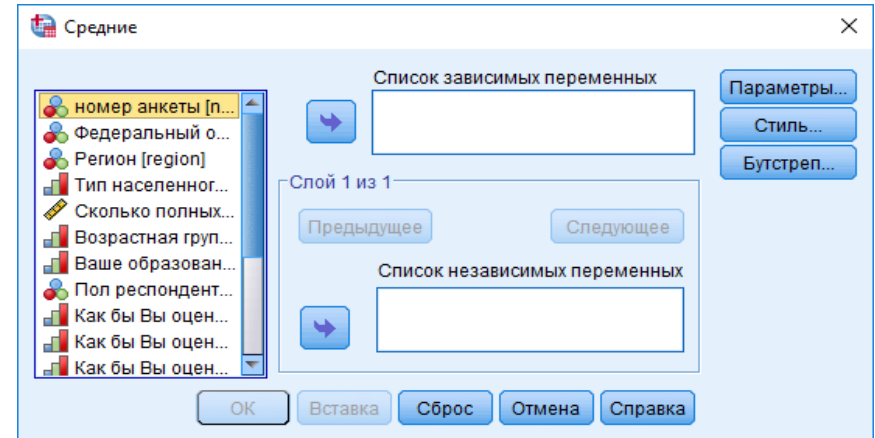
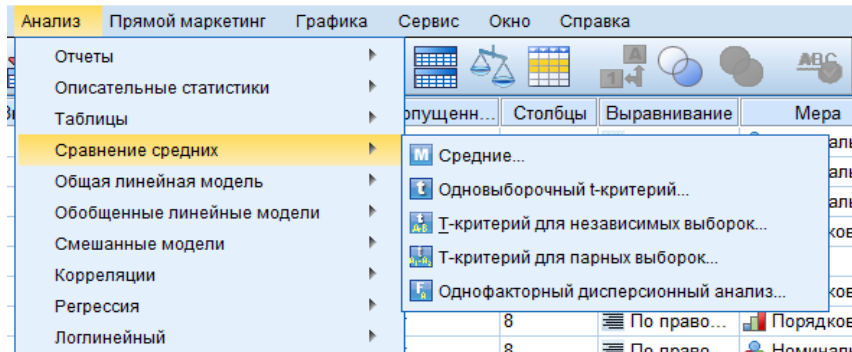


1. Сравнение средних: применимость в исследованиях

- **Сравнение средних значений различных выборок** – это наиболее часто применяемый метод статистического анализа. При этом должно быть выяснено, имеющееся различие средних значений обусловлено статистическими колебаниями или нет. В последнем случае – это статистически значимое различие.
- При сравнении средних значений выборок предполагается, что обе выборки подчиняются нормальному распределению. Если это не так, то вычисляются медианы и для сравнения выборок используется непараметрический тест.
- Достаточно распространенная задача в социологии - сравнение средних значений количественных показателей в социальных, в т.ч. в демографических группах.

Пример: Сравнение среднего дохода различных групп людей: проживающих в столице, обычном городе или сельской местности, для оценки дифференциации уровня жизни.

1. Сравнение средних: применимость в исследованиях



1. «Анализ» → «Сравнение средних» → «Средние»

2. В меню «Средние» необходимо задать два типа переменных:

- **«Список зависимых переменных»** - переменные, средние значения которых необходимо вычислять (напр., Доход на одного члена семьи)
- **«Список независимых переменных»** - переменные, которые определяют разделение опрошенных на группы (напр., тип населенного пункта)

1. Сравнение средних: применимость в исследованиях

Но эти методы обработки средних значений, измеренных по метрическим шкалам, **не доказывают**, что эти средние значения в группах статистически различаются между собой.

Есть ли у нас основания считать неколичественную переменную (тип населённого пункта) причиной изменения количественной (дохода)?

Отчет

Доход на одного члена семьи

Тип населенного пункта	Среднее значение	N	Стандартная отклонения
Москва и Санкт-Петербург	18341,81	191	10449,374
Город 950 тыс. чел. и более	16877,02	138	10352,417
Город 500 000 - 949,9 тыс. чел.	14023,80	141	6356,121
Город 100 000 - 500 000 чел.	15206,41	248	11922,027
Город 50 000 - 100 000 чел.	14788,27	112	8913,611
Город до 49,9 тыс. и ПГТ	13967,43	303	8354,965
Село	12496,02	367	7297,835
Всего	14703,54	1500	9342,886

Различия есть, но они невелики...

Можем ли мы на основании этих данных утверждать, что доход на одного члена семьи жителей населенных пунктов разного типа действительно различается, или эти различия случайны и носят статистически незначимый характер?

Для ответа на этот вопрос необходимо использование в блоке команд «Сравнение средних» команды **Т-тест** и **однофакторного дисперсионного анализа**.

2. T-TECT



2. Т-тест

Команда Т-тест (или тест Стьюдента) решает задачу доказательства наличия различий средних значений количественной переменной в случае, когда **имеются лишь две сравниваемые группы**.



2.1 Т-КРИТЕРИЙ для НЕЗАВИСИМЫХ ВЫБОРОК



2.1. Т-критерий для независимых выборок

Задача: определить, отличается ли средний возраст россиян в столицах и городах с населением 950 тыс. чел.

The screenshot shows the SPSS Statistics interface. In the 'Statistics' menu, the path 'Сравнение средних' > 'Т-критерий для независимых выборок...' is highlighted. An arrow points to the 'Т-критерий для независимых выборок' dialog box. In this dialog, 'номер анкеты [n...]' is listed in the 'Зависимая переменная' (Dependent Variable) field. In the 'Группировать по:' (Group by) field, 'Тип населенног...' is selected. The 'Проверяемые переменные:' (Test variables) field is empty. Buttons for 'Параметры...' (Options), 'Бутстреп...' (Bootstrap), 'OK', 'Вставка' (Paste), 'Сброс' (Reset), 'Отмена' (Cancel), and 'Справка' (Help) are visible.

Статистика группы

	Тип населенного пункта	N	Среднее значение	Стандартная ошибка	Среднекв. ошибка среднего
Сколько полных лет Вам исполнилось?	Москва и Санкт-Петербург	191	44,42	14,570	1,054
	Город 950 тыс. чел. и более	138	43,07	16,311	1,389

Критерий для независимых выборок

		Критерий равенства дисперсий Ливиния		t-критерий для равенства средних						
		F	Знач.	t	ст.св.	Знач. (2-х сторонняя)	Разность средних	Среднеквадратичная ошибка разности	95% доверительный интервал для разности	
									Нижняя	Верхняя
Сколько полных лет Вам исполнилось?	Предполагаются равные дисперсии	2,656	,104	,791	327	,430	1,354	1,712	-2,014	4,722
	Не предполагаются равные дисперсии			,776	274,668	,438	1,354	1,743	-2,078	4,786

Таблица, вычисляемая командой t-тест, выполняет проверку гипотезы о равенстве средних значений возраста в двух группах респондентов.

2.1. Т-критерий для независимых выборок

Критерий для независимых выборок									
	Критерий равенства дисперсий Левина		t-критерий для равенства средних						
	F	Знач.	t	ст.св.	Знач. (2-х сторонняя)	Разность средних	Среднеквадратичная ошибка разности	95% доверительный интервал для разности	
								Нижняя	Верхняя
Сколько полных лет Вам исполнилось?	2,656	,104	,791	327	,430	1,354	1,712	-2,014	4,722
			,776	274,668	,438	1,354	1,743	-2,078	4,786

Т-тест реализует разные статистические критерии – когда дисперсии количественной переменной в двух рассматриваемых группах различны либо одинаковы.

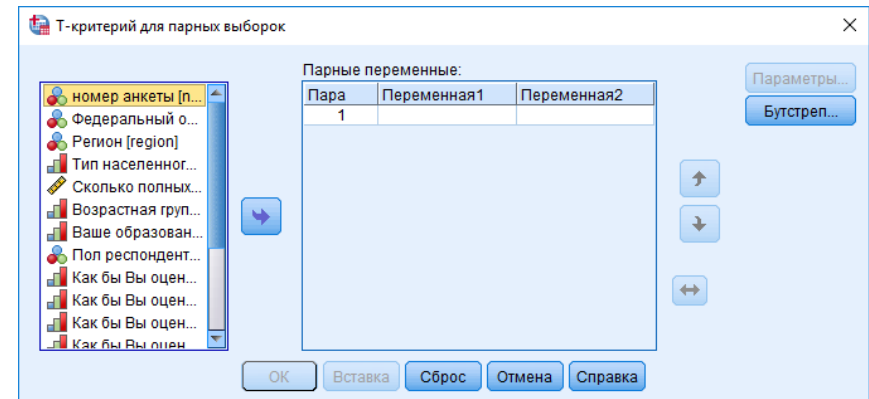
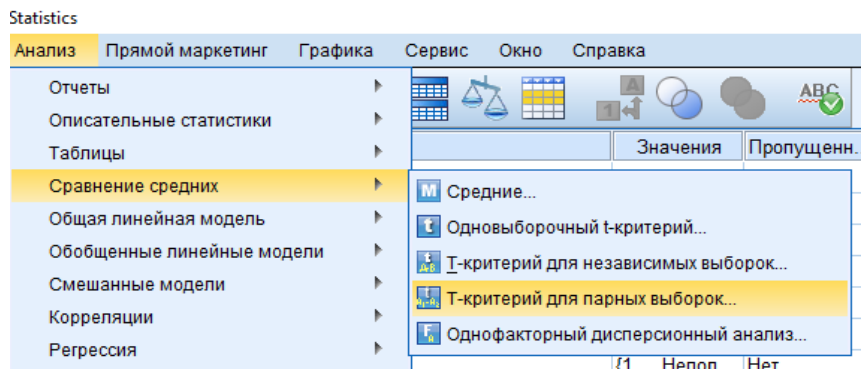
- Проверка гипотезы о равенстве дисперсий → **«тест Левина»** (Levene's Test for Equality of Variances).
- F-статистика этого теста равна 2,656, а значимость этой статистики (Sig.) — 0,104 (принимаем гипотезу)
- Sig.> 0,05 – принимаем гипотезу о равенстве средних и делаем вывод, что средний возраст жителей столиц и крупных городов не различен.

2.2 Т-КРИТЕРИЙ ДЛЯ ПАРНЫХ ВЫБОРОК



2.2. Т-критерий для парных выборок

- Сравнение средних значений двух отдельных переменных для выяснения вопроса о том, среднее значение какой из них больше, а какой — меньше.
- Проверка различия средних значений, но уже в отношении двух отдельных переменных, измеренных в рамках одной выборки.



Пример: сравнение средних значений переменных А и В, фиксирующих количество свеклы и моркови, которые собрали семьи на своих приусадебных участках.

2.2. Т-критерий для парных выборок

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Свекла	96,5359	1841	2335,66058	54,43558
	Морковь	73,1684	1841	1166,70392	27,19154

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Свекла & Морковь	1841	0,996	0,000

Paired Samples Test

		Paired Differences			t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean			
Pair 1	Свекла — Морковь	23,3675	1178,5864	27,46847	0,851	1840	0,395

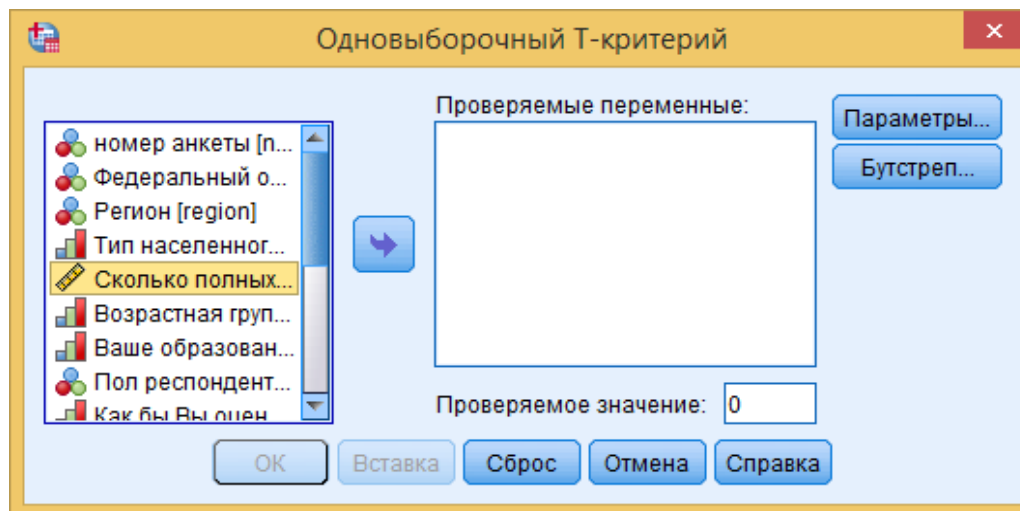
Гипотезу
о равенстве следует
принять

Несмотря на весьма существенную, как кажется, разницу между средним количеством собираемых свеклы и моркови, мы не имеем оснований утверждать о наличии различий в объемах выращивания этих овощей.

2.3 ОДНОВЫБОРОЧНЫЙ Т-КРИТЕРИЙ

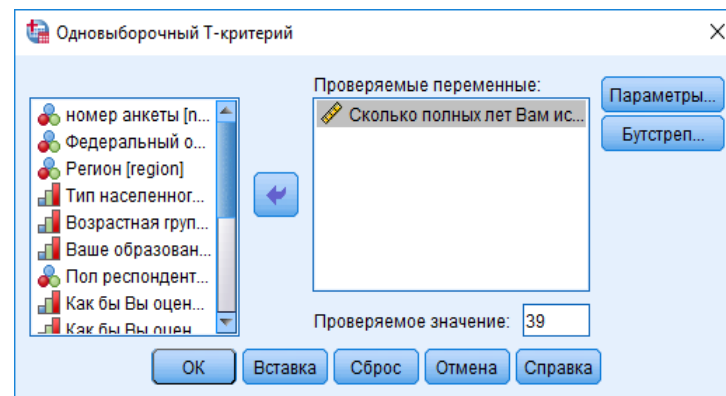
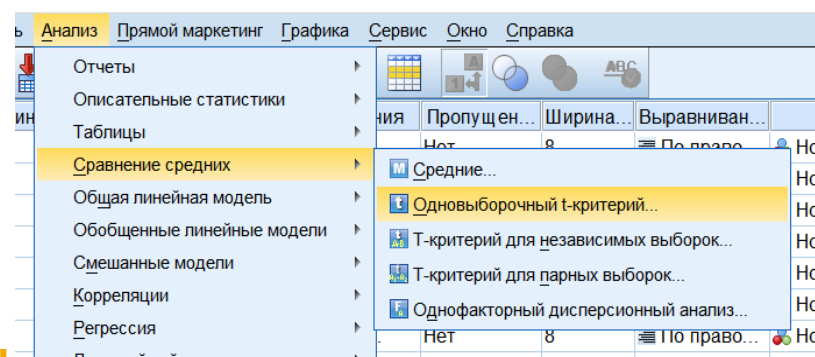


2.3. Одновыборочный t-критерий



1. «Анализ» → «Сравнение средних» → «Одновыборочный t-критерий».
2. Необходимо выбрать одну или несколько переменных для проверки при одном и том же гипотетическом значении.
3. Необходимо ввести значение, с которым будет сравниваться каждое выборочное среднее.
4. Можно щелкнуть мышью по кнопке «Параметры» и выбрать способ работы с пропущенными значениями, а также задать уровень для доверительного интервала.

2.3. Одновыборочный t-критерий



Одновыборочная статистика

	N	Среднее значение	Стандартная отклонения	Среднекв. ошибка среднего
Сколько полных лет Вам исполнилось?	1500	44,52	15,313	,395

Одновыборочный критерий

	Значение критерия = 39					
	t	ст.св.	Знач. (2-х сторонняя)	Разность средних	95% доверительный интервал для разности	
					Нижняя	Верхняя
Сколько полных лет Вам исполнилось?	13,965	1499	,000	5,521	4,75	6,30

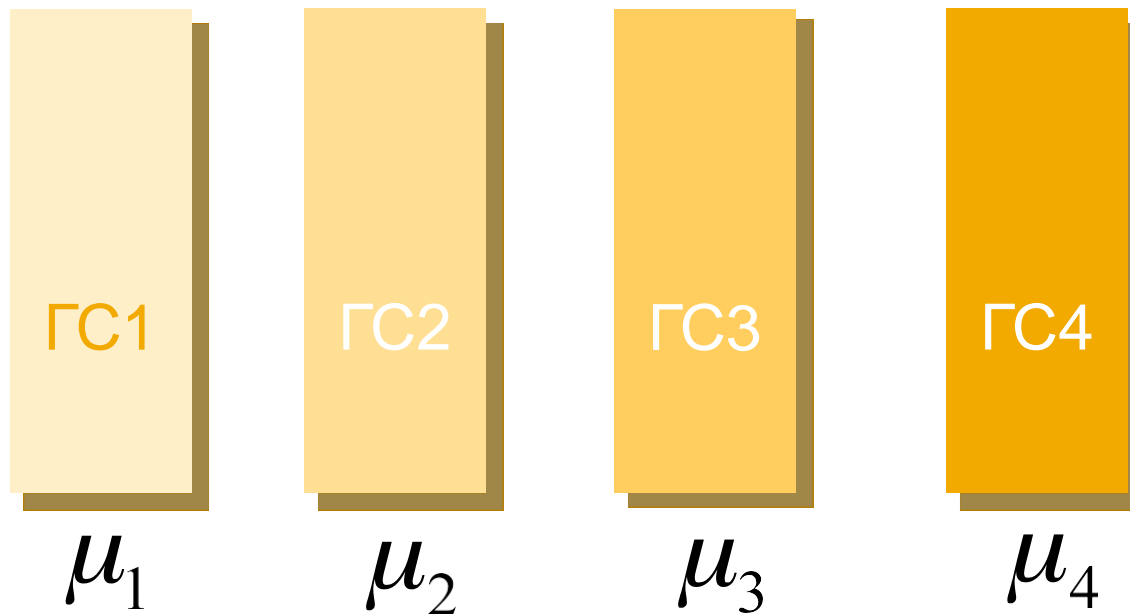
- Результаты проверки статистической гипотезы о равенстве среднего значения выбранной переменной заданному фиксированному («эталонному») значению.
- (Sig. = 0,0001) делаем вывод, что гипотезу о равенстве средних **не следует принимать** ($<0,05$).

3. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ



3. Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ (Analysis of Variance, ANOVA) – статистический метод выявления различий между выборочными средними для двух или больше совокупностей.



3. Дисперсионный анализ

Факторы и факторный эксперимент

- **Фактор** (factor) – категориальная независимая переменная. Для применения дисперсионного анализа независимые переменные должны быть категориальными (неметрическими).
- **Факторный эксперимент** (treatment) - в дисперсионном анализе используется конкретная комбинация категорий (уровней) фактора.

3. Дисперсионный анализ

Подготовка к дисперсионному анализу – проведение ковариационного анализа

- **Ковариационный анализ** (Analysis of covariance, ANCOVA) – специальный метод анализа дисперсий, в котором эффекты одной или больше сторонних переменных, выраженных в метрической шкале, удаляют из зависимой переменной перед выполнением дисперсионного анализа.
- **Ковариата** (Covariates) – метрическая независимая переменная, используемая в ковариационном анализе.

3. Дисперсионный анализ

Множественные сравнения

Множественные сравнения (метод контрастов) позволяют проверить статистически значимые различия между некоторыми из средних.

Критерии множественных сравнений позволяют на основе контрастов построить доверительные интервалы для попарных сравнений средних для всех комбинаций условий эксперимента.

3. Дисперсионный анализ

Дисперсионный анализ с повторными измерениями

- **Дисперсионный анализ с повторными измерениями** представляет собой метод дисперсионного анализа, с помощью которого одни и те же респонденты подвергаются разным условиям эксперимента с повторными измерениями одних и тех же переменных.
- Позволяет устранить различия в индивидуальных характеристиках респондентов.

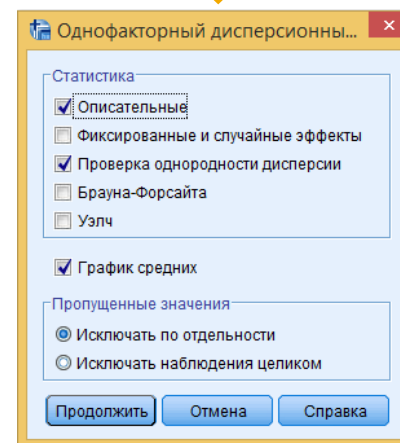
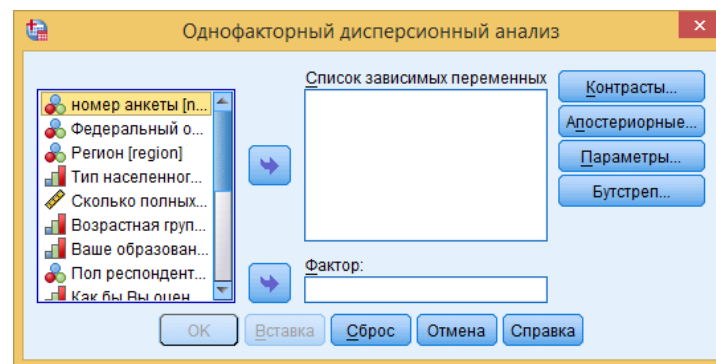
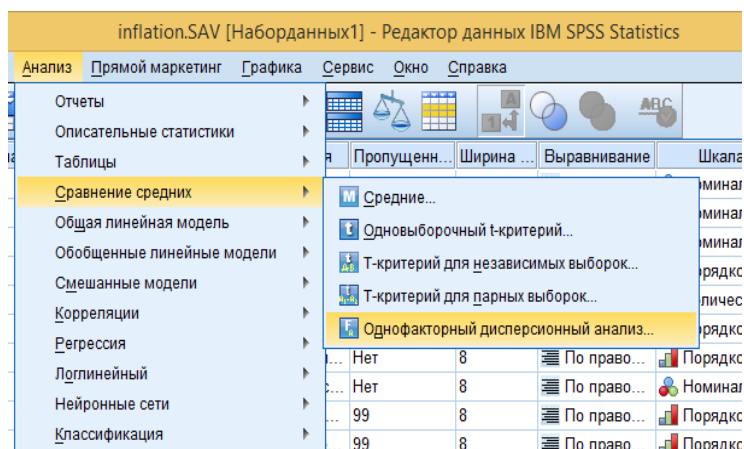
3.1 ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ



3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Однофакторный дисперсионный анализ – метод дисперсионного анализа, в котором рассматривается только один фактор.

«Анализ» → «Сравнение средних» → «Однофакторный дисперсионный анализ»

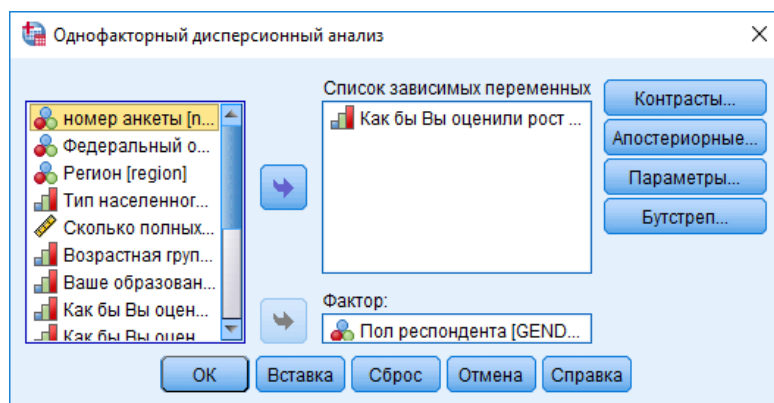


Во вкладке «Параметры» отметить:

- Статистика
 - Описательные
 - Проверка однородности дисперсии
- График средних
- Пропущенные значения
 - Исключать по отдельности

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Пример: Вычислить в массиве данных inflation.sav оценку роста цен (инфляцию) в течение последнего месяца-двух у респондентов по фактору пола.



Критерий однородности дисперсий

Как бы Вы оценили рост цен (инфляцию) в течение

Статистика	ст.св.1	ст.св.2	Знач.
Ливиния	2,243	1	1399
			,134

ANOVA

Как бы Вы оценили рост цен (инфляцию) в течение последнего месяца-двух?

	Сумма квадратов	ст.св.	Средний квадрат	F	Знач.
Между группами	2,938	1	2,938	6,310	,012
Внутри групп	651,286	1399	,466		
Всего	654,224	1400			

Критерий Ливиния

- (Sig. = 0,134) – дисперсии для групп мужчин и женщин статистически достоверно не различаются ($<0,05$). Дисперсионный анализ проводить **корректно**.

ANOVA

- (Sig. = 0,012) – **разность** между средней оценкой роста инфляции в течение последнего месяца-двух для мужчин и женщин **статистически достоверна** ($<0,05$).

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Однофакторная дисперсионная модель

$$x_{ij} = \mu + F_i + \varepsilon_{ij}$$

x_{ij} Значение зависимой переменной, полученной на i -м уровне фактора с порядковым номером j .

μ Общее среднее.

F_i Эффект, обусловленный влиянием i -го уровня фактора.

ε_{ij} Остаточный член, возмущение, вызванное влиянием неконтролируемых факторов, то есть вариацией переменной внутри уровня.

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Проверка значимости

Гипотезы: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$
 H_1 : не все средние равны

Степени свободы: Числителя: $df = k - 1$
Знаменателя: $df = N - k$

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Суммы квадратов отклонений

Межгрупповая сумма квадратов отклонений:

$$SS_b = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

Sum Square
Between Groups

Внутригрупповая сумма квадратов отклонений:

$$SS_w = \sum (x - \bar{x}_i)^2$$

Sum Square
Within Groups

Общая сумма квадратов отклонений:

$$SS = \sum (x - \bar{\bar{x}})^2$$

Sum Square

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Разложение полной вариации

Общая сумма квадратов отклонений есть сумма межгрупповых и внутригрупповых квадратов отклонений:

$$SS = SS_b + SS_w$$

Измерение эффекта

Эффект влияния переменной X на переменную Y вычисляют по формуле:

$$\eta^2 = \frac{SS_b}{SS}$$

Является мерой вариации Y , которая объясняется влиянием независимой переменной X .

- если $\eta^2 = 0$, значит X не влияет на Y ;
- если $\eta^2 = 1$, значит внутри групп изменчивость отсутствует, а между группами наблюдается.

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Факторная и остаточная дисперсия. F-критерий

Межгрупповая (факторная) дисперсия

$$MS_B = \frac{SS_B}{k - 1}$$

Mean **S**quare
Between Groups

Внутригрупповая (остаточная) дисперсия

$$MS_W = \frac{SS_W}{N - k}$$

Mean **S**quare
Within Groups

F-критерий

$$F = \frac{MS_B}{MS_W}$$

3.1. Однофакторный дисперсионный анализ

Таблица результатов

Результаты вычислений принято представлять в виде следующей таблицы:

	Сумма квадратов	df	Среднее квадратичное	F
Между группами	SSB	k-1	MSB	F-значение
Внутри групп	SSW	N-k	MSW	
Итого	SSB+SSW	N-1	MSB+MSW	

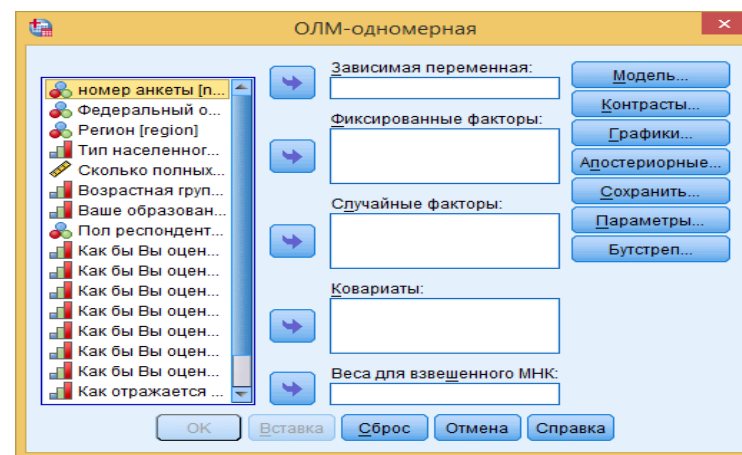
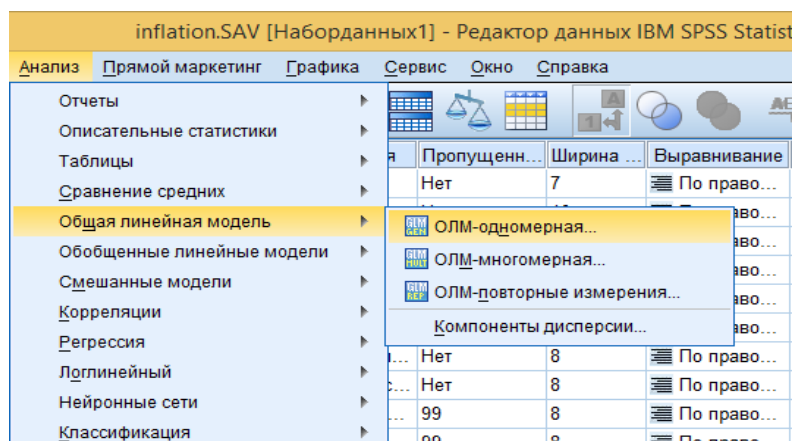
3.2 МНОГОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ



3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Многофакторный дисперсионный анализ применяется в случае двух и более метрических зависимых переменных. Одновременно проверяет групповые различия в отношении нескольких зависимых переменных.

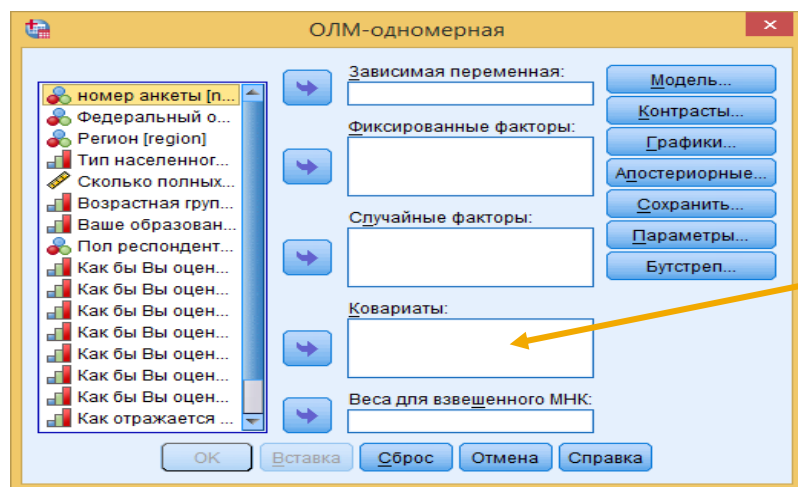
«Анализ» → «Общая линейная модель» → «ОЛМ - одномерная»



3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Влияние ковариат

- Ковариаты используют для **исключения влияния** количественной переменной на зависимую.
- Ковариата значительно коррелирует с зависимой переменной и позволяет уменьшить ее дисперсию, что позволяет сделать более очевидным влияние анализируемых факторов.
- Изменяет сумму квадратов (как правило, в меньшую сторону) и значение F-критерия (как в меньшую, так и в большую сторону).

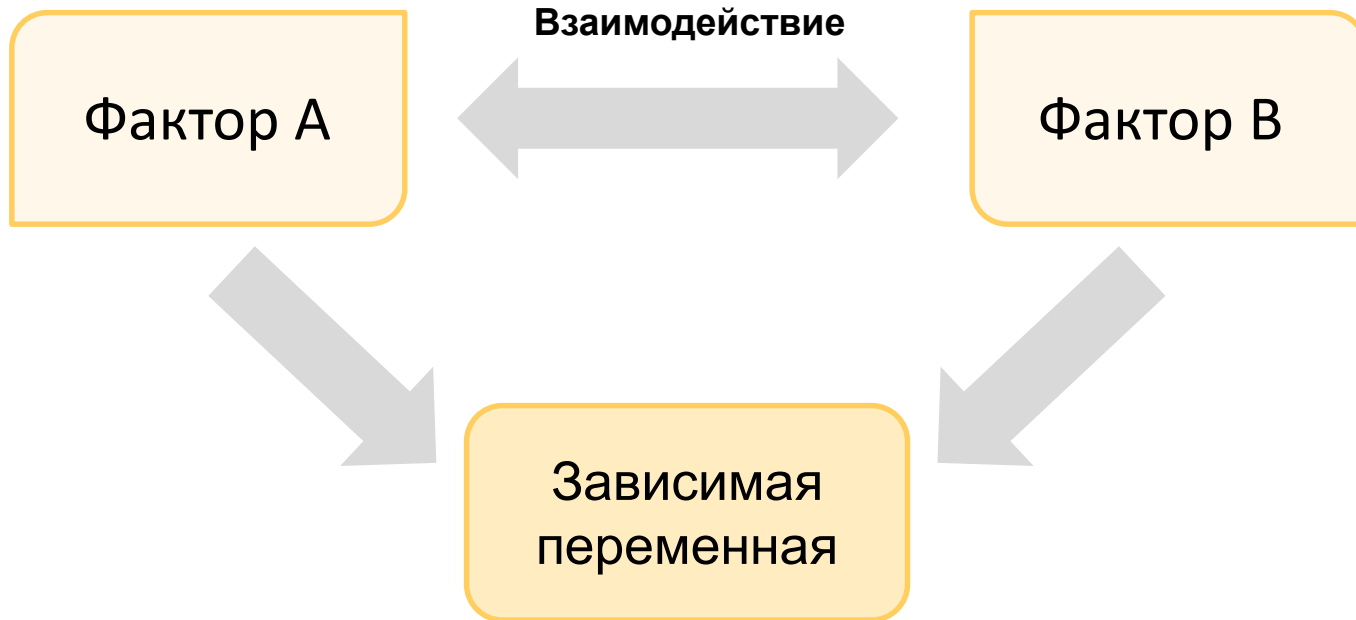


Переместить переменную
в окно «Ковариаты»

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

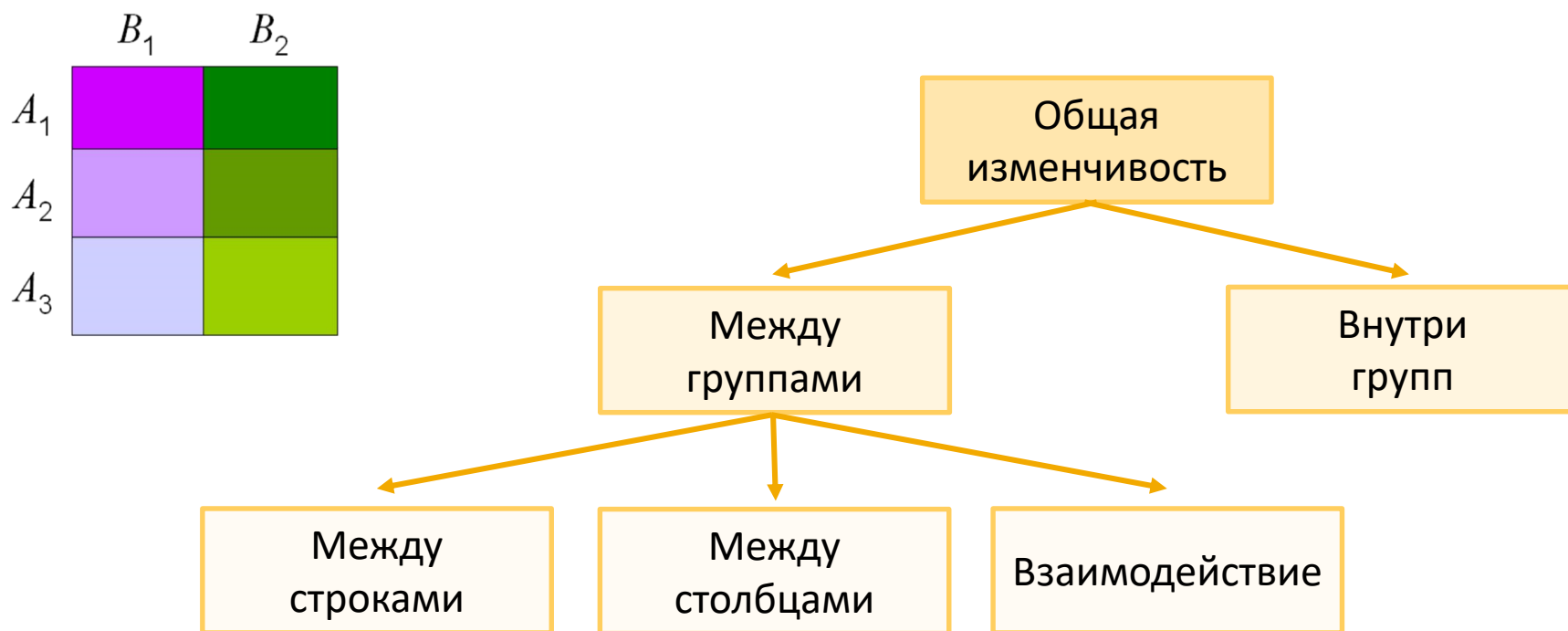
Проверка взаимодействия

Взаимодействия имеют место, когда эффекты одного фактора на зависимую переменную зависят от уровня других факторов.



3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Разложение полной вариации



$$SS = SS_A + SS_B + SS_{A \times B} + SS_{error}$$

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Множественная корреляция (Эта в квадрате)

Множественная корреляция η^2 – степень влияния двух (или более факторов), или полный эффект.

$$\eta^2 = \frac{(SS_A + SS_B + SS_{A \times B})}{SS}$$

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Значимость полного эффекта

Значимость полного эффекта – проверка наличия различий между некоторыми из групп факторного эксперимента.

$$MS_{A,B,A \times B} = \frac{SS_A + SS_B + SS_{A \times B}}{a \cdot b - 1}$$

$$MS_{error} = \frac{SS_{error}}{n - a \cdot b}$$

$$F = \frac{MS_{A,B,A \times B}}{MS_{error}}$$

$$\text{df N} = a \cdot b - 1$$

$$\text{df D} = n - a \cdot b$$

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Значимость эффекта взаимодействия

Значимость эффекта взаимодействия – проверка значимости взаимодействия между двумя или более независимыми переменными.

$$MS_{A \times B} = \frac{SS_{A \times B}}{(a-1) \cdot (b-1)}$$

$$MS_{error} = \frac{SS_{error}}{N - a \cdot b}$$

$$F = \frac{MS_{A \times B}}{MS_{error}}$$

$$\text{df N} = (a-1) + (b-1)$$

$$\text{df D} = n - a \cdot b$$

3.2. Многофакторный дисперсионный анализ

Значимость главного эффекта факторов

Значимость главного эффекта каждого фактора – проверка значимости главного эффекта для каждого отдельного фактора.

$$MS_A = \frac{SS_A}{(a-1)}$$

$$MS_{error} = \frac{SS_{error}}{N - a \cdot b}$$

$$F = \frac{MS_A}{MS_{error}}$$

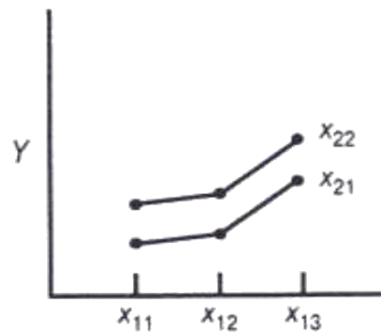
$$\text{df N} = a - 1$$

$$\text{df D} = n - a \cdot b$$

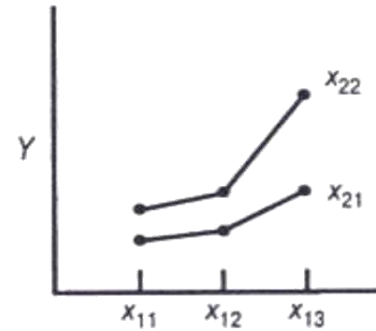
3.3. Интерпретация результатов

Взаимодействие

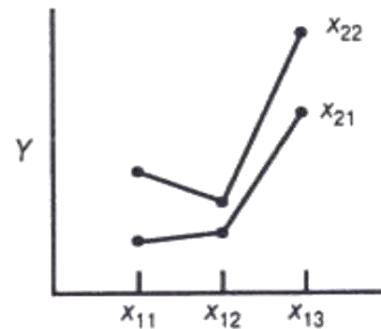
Случай 1
Взаимодействие отсутствует



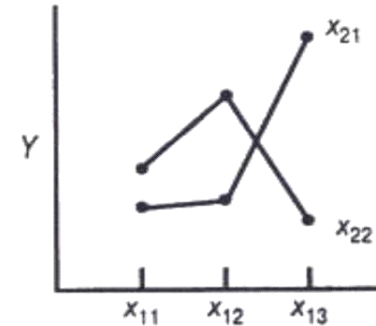
Случай 2
Упорядоченное взаимодействие



Случай 3
Неупорядоченное взаимодействие:
непересекающийся тип



Случай 4
Неупорядоченное взаимодействие:
пересекающийся тип



3.3 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

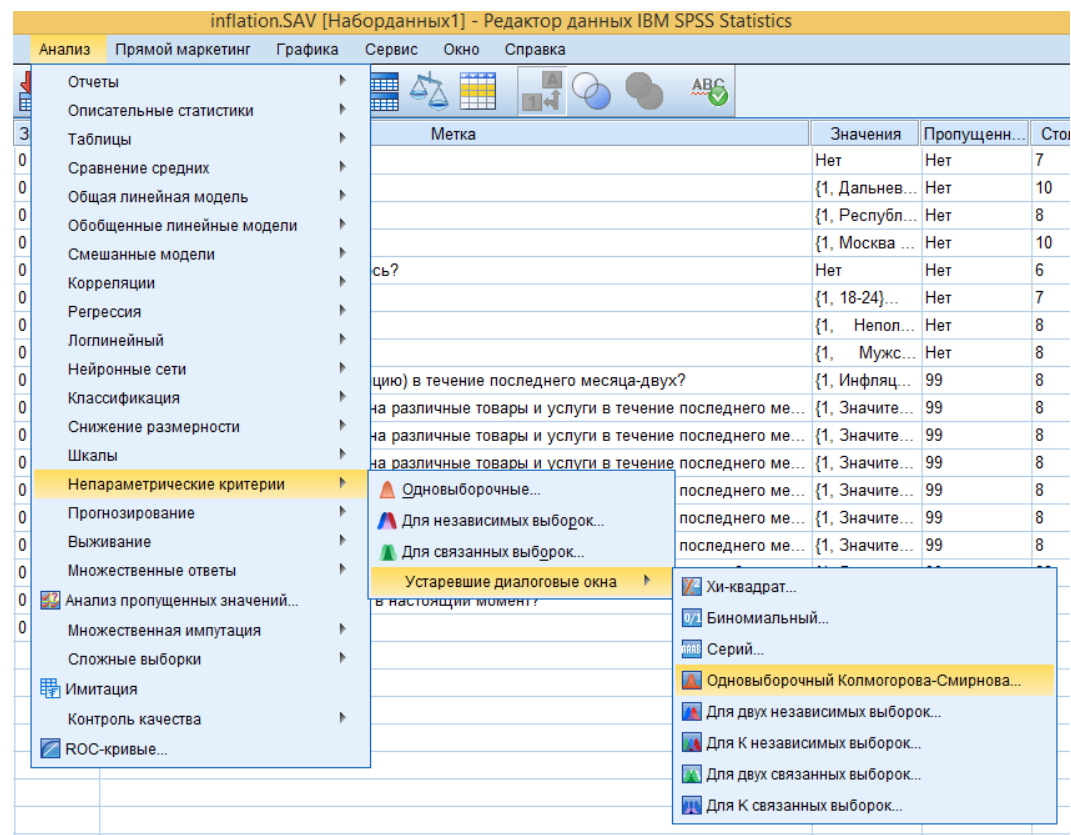


3.3. Интерпретация результатов

Непараметрический дисперсионный анализ

Проверяется различие центральной тенденции более чем для двух групп, если зависимая переменная измеряется **порядковой шкалой**. Не связан с характером распределения переменных (не важна нормальность распределения).

«Анализ» →
«Непараметрические
критерии»



3.3. Интерпретация результатов

Непараметрический дисперсионный анализ

- **Сравнение двух независимых выборок (критерий Манна–Уитни)** позволяет установить различия между двумя независимыми выборками по уровню выраженности порядковой переменной.
- **Сравнение двух связанных (зависимых) выборок** может проводиться по двум критериям.
 1. Критерий знаков основан на подсчете числа отрицательных и положительных разностей между повторными измерениями;
 2. Критерий Уилкоксона в дополнение к знакам разностей учитывает их величину.
- **Однофакторный дисперсионный анализ Крускала-Уоллиса** – непараметрический критерий, который использует значение рангов (порядковую статистику) измерений. Является расширением критерия Манна-Уитни.
- **Критерий Уилкоксона** – является непараметрической альтернативой t-критерию для зависимых выборок. Способен определить, является ли сдвиг показателей в одном направлении более интенсивным, чем в другом.

3.3. Интерпретация результатов

- **Критерий серий** определяет, является ли последовательность бинарных величин (событий) случайной или упорядоченной.
- **Биномиальный критерий** определяет, отличается ли распределение дихотомической величины от заданного соотношения.
- **Критерий Колмогорова—Смирнова для одной выборки** определяет отличие распределения переменной от нормального.
- **Критерий хи-квадрат для одной выборки** определяет степень отличия наблюдаемого распределения частот по градациям переменной от ожидаемого распределения.
- **Сравнение K связанных (зависимых) выборок (критерий Фридмана)** позволяет установить степень различия между тремя и более зависимыми выборками по уровню выраженности порядковой переменной.

Литература по Теме 5

- 1. Бююль А., Цеффель П. SPSS: искусство обработки информации. – М., 2005**
 - Глава 13. Сравнение средних
 - Глава 14. Непараметрические тесты

- 2. Наследов А. IBM SPSS Statistics 20 и AMOS: профессиональный статистический анализ данных. – СПб., 2013**
 - Главы 10-16



Для свободного использования в образовательных целях
Copyright 2017 © Академия НАФИ. Москва
Все права защищены
www.nafi.ru