Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ существует и} = L.$$

Теорема 369. *Каждая функция, непрерывная в* $[a,\ b]$, *интегрируема от* a *до* b.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию теоремы, и пусть задано $\delta > 0$. В силу теоремы 154, существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$|f(x) - f(\beta)| < \frac{\delta}{2(b-a)} \text{ при } a \leqslant \alpha \leqslant b,\ a \leqslant \beta \leqslant b,$$
$$|\alpha - \beta| \leqslant \varepsilon.$$

Если, следовательно, каждое $e_v < \varepsilon$, то каждое

$$s_v \leqslant \frac{\delta}{2(b-a)}$$

и

$$\sum es \leqslant \frac{\delta}{2(b-a)} \sum e = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Тем самым выполнение условия Римана проверено (что, согласно теореме 368, в полном объёме даже не было необходимо).

Определение 85. *Функция* $f(x)$, *определённая в* $[a,\ b]$, *называется там монотонной, если для* $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ *всегда*

$$f(\alpha) \leqslant f(\beta),$$

либо всегда

$$f(\alpha) \geqslant f(\beta).$$

В первом случае $f(x)$ *называют монотонно не убывающей, во втором — монотонно не возрастающей.*

(Определения 71 и 72 исключают знак равенства между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$).

Теорема 370. *Каждая монотонная в* $[a,\ b]$ *функция интегрируема от* a *до* b.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию теоремы. В первом случае определения 85 имеем

$$l_v = f(a_v), \quad \lambda = f(a_{v-1}), \quad s_v = f(a_v) - f(a_{v-1}),$$

и для $e_v < \varepsilon$ получаем

$$\sum es \leqslant \varepsilon \sum s = \varepsilon(f(b) - f(a)).$$

Во втором случае

$$l_v = f(a_{v-1}), \quad \lambda = f(a_v), \quad s_v = f(a_{v-1}) - f(a_v),$$

и для $e_v < \varepsilon$ получаем

$$\sum es \leqslant \varepsilon \sum s = \varepsilon(f(a) - f(b)).$$

Таким образом, каково бы ни было $\delta > 0$, если $e_v < \varepsilon$, где

$$\varepsilon = \frac{\delta}{|f(b) - f(a)| + 1},$$

то имеем

$$\sum es < \delta.$$

Теорема 371. *Каждая ограниченная в $[a, \ b]$ функция, для которой число мест разрыва внутри этого интервала не бесконечно, интегрируема от a до b.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию теоремы, и

$$|f(x)| < c \text{ в } [a, \ b].$$

Обозначим a, b и возможные внутренние места разрыва функции $f(x)$ через

$$\eta_k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \ k \text{ целое},$$

так, чтобы

$$\eta_{k-1} < \eta_k \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant m,$$
$$\eta_0 = a, \quad \eta_m = b$$

Пусть $\delta > 0$. Положим

$$\operatorname*{Min}_{1 \leqslant k \leqslant m} (\eta_k - \eta_{k-1}) = \zeta,$$

$$\gamma = \operatorname{Min}\left(\frac{\delta}{8mc}, \ \frac{\zeta}{3}\right).$$