

```

\documentclass[a5paper]{book}
\usepackage{amsmath,amsthm,amssymb}
\usepackage[integrals]{wasysym} % integrals
\usepackage{mathtext}
\usepackage[T1,T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[english,russian]{babel}
\usepackage[margin=1in]{geometry}
\usepackage{geometry}
\usepackage{indentfirst}
\usepackage{soul}
\usepackage{microtype}
\usepackage{fancyhdr}

\usepackage{ragged2e} % выравнивание по ширине
\justifying

\pagenumbering{gobble} % удаляет номер страницы внизу страницы

\newcommand{\eqdef}{\joinrel=} % длинное "равно"

\begin{document}

% отступы от формул
\setlength{\abovedisplayskip}{3pt}
\setlength{\abovedisplayshortskip}{3pt}
\setlength{\belowdisplayskip}{3pt}
\setlength{\belowdisplayshortskip}{3pt}

\head{\textsl{\scriptsize 346}}
\chead{\textsl{\scriptsize {\it Глава} 25}}
\pagestyle{fancy}

\fontdimen2\font=0.4em % расстояние между словами

\noindent Следовательно, \begin{align*} \int \limits_a^b f(x) \, dx; \text{существует} \, ; \text{и} = L. \end{align*}
\indent \textbf{Теорема 369.} \textit{Каждая функция, непрерывная в} [\textit{a}, \textit{b}], \textit{интегрируема от a до b.}
\\ \indent Д\kern+0.2em о\kern+0.2em к\kern+0.2em а\kern+0.2em з\kern+0.2em а\kern+0.2em т\kern+0.2em е\kern+0.2em л\kern+0.2em ь\kern+0.2em с\kern+0.2em т\kern+0.2em в\kern+0.2em о.
Пусть  $f(x)$  \textemdash \, функция, удовлетворяющая условию теоремы, и пусть задано  $\delta > 0$ . В силу теоремы 154, существует  $\varepsilon > 0$  такое, что
\begin{gather*}
\text{If}(x) \, \, \textemdash \, , f(\beta) | < \frac{\delta}{2(b \, \, \textemdash \, , a)} \, \, \text{при} \, ; a \leqslant \alpha \leqslant b, \, ; a \leqslant \beta \leqslant b, \\
\\ \alpha \, \, \textemdash \, , \beta \leqslant \varepsilon.
\end{gather*}
Если, следовательно, каждое  $s_v < \varepsilon$ , то каждое  $s_v \leqslant \frac{\delta}{2(b-a)}$ 
и

```

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} \leq \epsilon; \quad \text{где } \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} < \delta.$$
 Тем самым выполнение условия Римана проверено (что, согласно теореме 368, в полном объёме даже не было необходимо).

**Определение 85.** Функция  $f(x)$ , определённая в  $[a, b]$ , называется там монотонной, если для  $a \leq \alpha < \beta \leq b$  всегда

$$f(\alpha) \leq f(\beta),$$

либо всегда

$$f(\alpha) \geq f(\beta).$$

В первом случае  $f(x)$  называют монотонно не убывающей, во втором — монотонно не возрастающей.

(Определения 71 и 72 исключают знак равенства между  $f(\alpha)$  и  $f(\beta)$ ).

**Теорема 370.** Каждая монотонная в  $[a, b]$  функция интегрируема от  $a$  до  $b$ .

newpage

\head{\textsl{\scriptsize \it Понятие определённого интеграла}}  
 \rhead{\textsl{\scriptsize 347}}  
 \pagestyle{fancy}

Д $\kern+0.2em$ о $\kern+0.2em$ к $\kern+0.2em$ а $\kern+0.2em$ з $\kern+0.2em$ а $\kern+0.2em$ е $\kern+0.2em$ м $\kern+0.2em$   $\epsilon > 0$  найдём  $\delta > 0$  так, чтобы

Пусть  $f(x)$  — функция, удовлетворяющая условию теоремы. В первом случае определения 85 имеем

$$I_v \leq f(a_v), \quad \lambda \leq f(a_{v-1}), \quad s_v \leq f(a_v)$$

и для  $\epsilon_v < \epsilon$  получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} \leq \epsilon; \quad \text{где } \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} < \epsilon.$$

Во втором случае

$$I_v \leq f(a_{v-1}), \quad \lambda \leq f(a_v), \quad s_v \leq f(a_{v-1})$$

и для  $\epsilon_v < \epsilon$  получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} \leq \epsilon; \quad \text{где } \frac{\delta_{n-1}^2}{(b-a)^2} < \epsilon.$$

Таким образом, каково бы ни было  $\delta > 0$ , если  $\epsilon_v < \epsilon$ , где  $\epsilon_v \leq \frac{\delta}{|f(b) - f(a)| + 1}$ , то имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n-1}^2 < \delta.$$

**Теорема 371.** Каждая ограниченная в  $[a, b]$  функция, для которой число мест разрыва внутри этого интервала не бесконечно, интегрируема от  $a$  до  $b$ .

Д $\kern+0.2em$ о $\kern+0.2em$ к $\kern+0.2em$ а $\kern+0.2em$ з $\kern+0.2em$ а $\kern+0.2em$ е $\kern+0.2em$ м $\kern+0.2em$   $\delta > 0$  найдём  $\epsilon > 0$  так, чтобы

Пусть  $f(x)$  — функция, удовлетворяющая условию теоремы, и

$$|f(x)| < c; \quad x \in [a, b].$$

Обозначим  $a, b$  и возможные внутренние места разрыва функции  $f(x)$  через  $\eta_k$ ;  $0 \leq k \leq m$ ;  $k$  — целое, так, чтобы

```

\begin{gather*}
\eta_{k-1} < \eta_k \text{; при } 1 \leq k \leq m, \\
\eta_0 \text{, \eqdef a, } \eta_m \text{, \eqdef b}
\end{gather*}
\indent Пусть  $\delta > 0$ . Положим
\begin{gather*}
\underset{1 \leq k \leq m}{\textnormal{Min}}(\eta_k \text{---} \eta_{k-1}) \text{ \eqdef } \zeta, \\
\gamma \text{ \eqdef } \textnormal{Min}\left(\frac{\delta}{8mc}, \frac{\zeta}{3}\right).
\end{gather*}

\end{document}

```