Description matricielle des nombres algébriques

Alexandre

2023/2024

1 Avant-Propos

Ce document a pour objet de donner quelques preuves de propriétés importantes en théorie algébrique des nombres.

2 Introduction

Définition 2.1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et K un corps, on notera $\mathbf{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices à coeffiecients dans K.*

Définition 2.2. *Soit $x \in \mathbb{C}$. On dit que x est algébrique s'il est annulé par un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On note $\bar{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.*

Définition 2.3. *Si de plus x est annulé par un polynôme unitaire à coeffecients entiers, on dit que x est un entier algébrique. On note $\bar{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des entiers algébriques.*

Définition 2.4. *Pour A et B deux matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on définit le produit tensoriel :*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n^2}(\mathbb{C})$$

3 Quelques propriétés

Propriété 3.1. *Pour A, B, C et D quatres matrices de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$, on a les formules suivantes :*
- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{C}, A \otimes (B + \lambda C) = (A \otimes B) + \lambda(A \otimes C)$
- $(A + \lambda B) \otimes C = (A \otimes C) + \lambda(B \otimes C)$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

Cela traduit l'associativité et la bilinéarité du produit tensoriel, ainsi qu'une compatibilité vis à vis du produit usuel. Bien entendu, ces propriétés restent vraies pour des matrices de tailles quelconques, tant que les produits considérés ont un sens.

4 Structure de l'ensemble des nombres algébriques

Théorème 4.1. *$\bar{\mathbb{Q}}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$*

Preuve. *$\bar{\mathbb{Q}}$ est bien inclus dans $\mathbb{C}$ et n'est pas vide. Soit x et y deux nombres algébriques. Soit P et Q deux polynômes annulateurs annulant respectivement x et y. Soit A et B les matrices compagnons respectivement de P et de Q.*
Dans ce cas, x et y sont valeurs propre de A et B. Soit alors X et Y deux vecteurs propres associés. On a dans ce cas :

$$(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX) \otimes (BY) = xy(X \otimes Y)$$