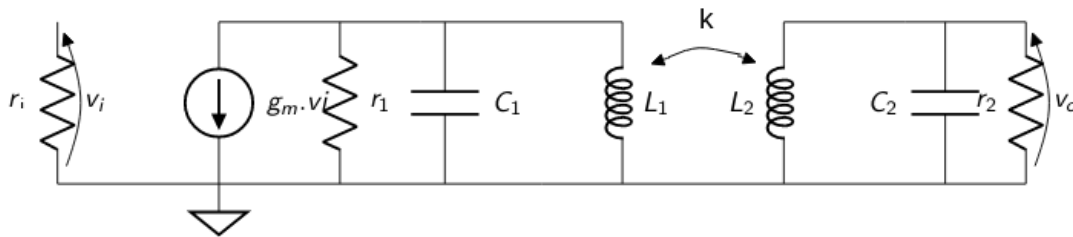


July 21, 2021

## 1 Técnicas de análisis de circuitos doble sintonizados.

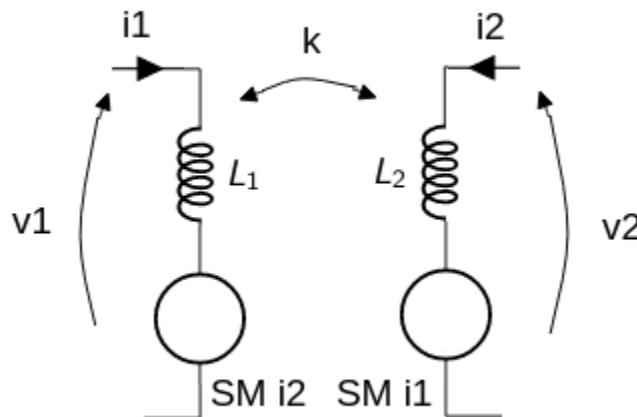
El modelo equivalente bajo estudio es el siguiente:



Los circuitos del primario y secundario son circuitos sintonizados, de allí el nombre de doble sintonizado. Existe una inductancia mutua entre los arrollamientos del transformador.

### 1.0.1 Resolviendo el el circuito acoplado.

La definición de la inductancia mutua de un transformador  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$  siendo  $k$  el factor de acoplamiento comprendido numéricamente entre 0 y 1.



Donde podemos escribir las ecuaciones

$$v_1 = i_1 \cdot sL_1 + i_2 \cdot sM$$

$$v_2 = i_1 \cdot sM + i_2 \cdot sL_2$$

Donde podemos expresar a la impedancia como:

$$[Z] = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix}$$

Dado que buscamos una relación en las tensiones, debemos encontrar la matriz admitancia. La matriz admitancia es la inverda de la matriz impedancia.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} sL_1 & sM \\ sM & sL_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\det(\mathbf{Z})} \begin{bmatrix} sL_2 & -sM \\ -sM & sL_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s^2 L_1 L_2 - s^2 M^2} \begin{bmatrix} sL_2 & -sM \\ -sM & sL_1 \end{bmatrix}$$

Siendo  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{s^2 L_1 L_2 - s^2 k^2 L_1 L_2} \begin{bmatrix} sL_2 & -sM \\ -sM & sL_1 \end{bmatrix}$$

Expresado como matrices.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 L_1 L_2 (1 - k^2)} \begin{bmatrix} sL_2 & -sM \\ -sM & sL_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo

$$i_1 = v_1 \frac{sL_2}{s^2 L_1 L_2 (1 - k^2)} - v_2 \frac{sM}{s^2 L_1 L_2 (1 - k^2)}$$

$$i_2 = v_1 \frac{-sM}{s^2 L_1 L_2 (1 - k^2)} + v_2 \frac{sL_1}{s^2 L_1 L_2 (1 - k^2)}$$

Quedando

$$i_1 = \frac{v_1}{sL_1(1 - k^2)} - \frac{v_2 M}{sL_1 L_2 (1 - k^2)}$$

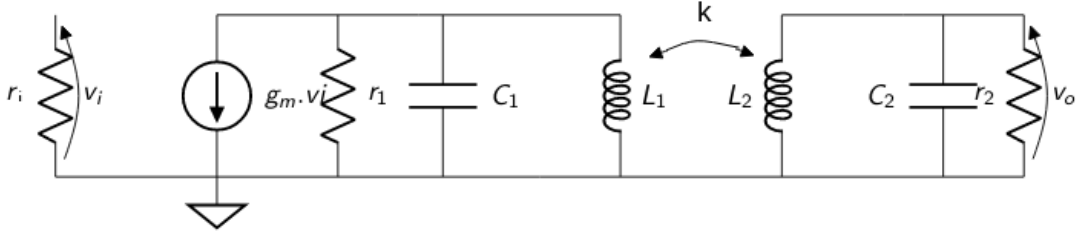
$$i_2 = -\frac{v_1 M}{sL_1 L_2 (1 - k^2)} + \frac{v_2}{sL_2 (1 - k^2)}$$

Simplificando  $(1 - k^2)$  respecto a las inductancias.

$$i_1 = \frac{v_1}{sL_1} - \frac{v_2 M}{sL_1 L_2}$$

$$i_2 = -\frac{v_1 M}{sL_1 L_2} + \frac{v_2}{sL_2}$$

### 1.0.2 Resolviendo el circuito



Sobre el primer sintonizado

$$g_m v_i + v_1 \left( \frac{1}{r_1} + sC_1 \right) + i_1 = 0$$

Segundo sintonizado

$$i_2 + v_o \left( \frac{1}{r_2} + sC_2 \right) = 0$$

Donde

$$i_1 = \frac{v_1}{sL_1} - \frac{v_o M}{sL_1 L_2}$$

$$i_2 = -\frac{v_1 M}{sL_1 L_2} + \frac{v_o}{sL_2}$$

Entonces

$$-g_m v_i = v_1 \left( \frac{1}{r_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_1} \right) - v_o \frac{M}{sL_1 L_2}$$

$$0 = -v_1 \frac{M}{sL_1 L_2} + v_o \left( \frac{1}{sL_2} + \frac{1}{r_2} + sC_2 \right)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones

$$v_o = \frac{\Delta v_o}{\Delta}$$

Donde

$$\Delta v_o = \left(\frac{M}{sL_1L_2}\right)(-g_mv_i)$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{r_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_1}\right)\left(\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{r_2} + sC_2\right) - \left(\frac{M}{sL_1L_2}\right)^2$$

Por lo tanto

$$v_o = \frac{-g_m \cdot v_i \cdot M}{s^2L_1L_2\left[\left(\frac{1}{r_1} + sC_1 + \frac{1}{sL_1}\right)\left(\frac{1}{sL_2} + \frac{1}{r_2} + sC_2\right) - \left(\frac{M}{sL_1L_2}\right)^2\right]}$$

Multiplicando ambos terminos por  $s^2$  y sancando  $C_1C_2$  como denominador comun.

$$v_o = \frac{-g_m \cdot v_i \cdot M \cdot s^2}{L_1L_2C_1C_2\left[\left(s^2 + \frac{s}{r_1C_1} + \frac{1}{L_1C_1}\right)\left(s^2 + \frac{s}{r_2C_2} + \frac{1}{L_2C_2}\right) - \frac{M^2}{L_1^2L_2^2C_1C_2}\right]}$$

Remplazando  $\omega_o^2 = \frac{1}{C_1L_1}$  y  $\omega_o^2 = \frac{1}{C_2L_2}$ . También  $Q_1 = \frac{1}{\omega_oC_1r_1}$  y  $Q_2 = \frac{1}{\omega_oC_2r_2}$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot s \cdot \omega_o^4}{\left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q_1} + \omega_o^2\right) \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q_2} + \omega_o^2\right) - k^2\omega_o^4}$$

Siendo  $Q = Q_1 = Q_2$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot s \cdot \omega_o^4}{\left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2\right) \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2\right) - k^2\omega_o^4}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot s \cdot \omega_o^4}{\left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 + \omega_o^2 \cdot k\right) \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 - \omega_o^2 \cdot k\right)}$$

### 1.0.3 Polos y ceros del doble sintonizado

La transferencia tambien puede escribirse como

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot s \cdot \omega_o^4}{\left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \cdot (1+k)\right) \cdot \left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \cdot (1-k)\right)}$$

Donde las raices de  $\left(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \cdot (1+k)\right)$

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_o^2}{4Q^2} - \omega_o^2(1+k)}$$

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j \cdot \omega_o \sqrt{-\frac{1}{4Q^2} + (1+k)}$$

Despreciando  $\frac{1}{4Q^2}$

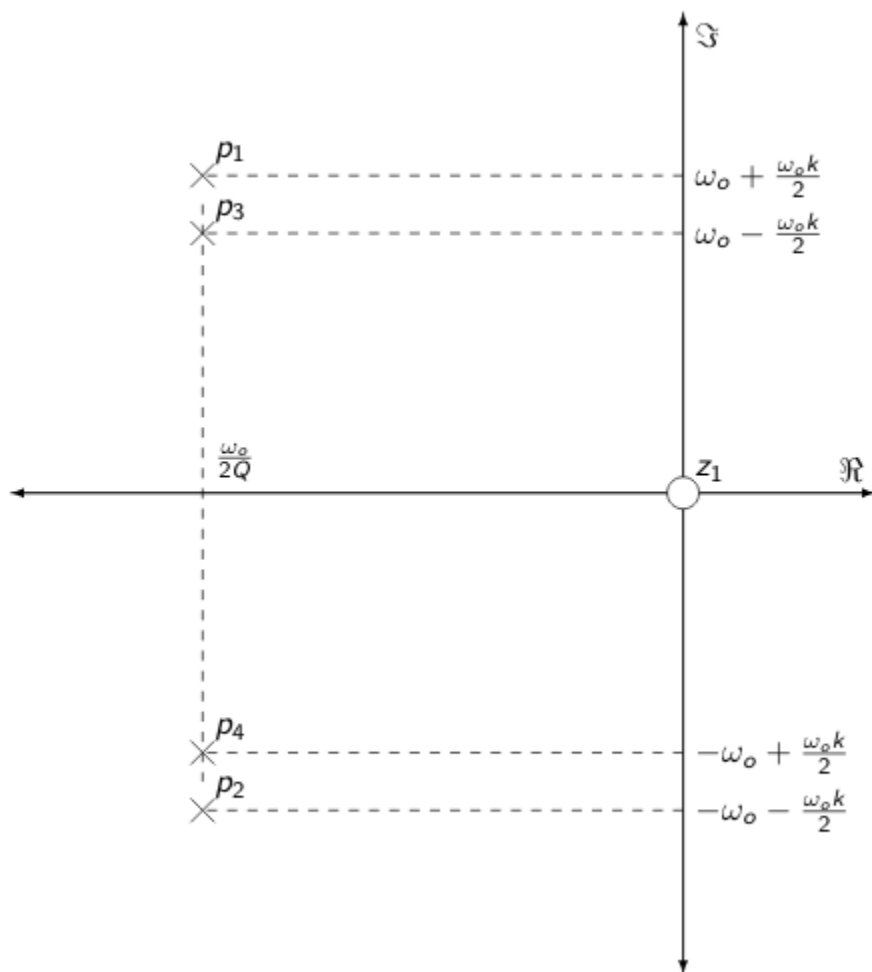
$$s_{1,2} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j \cdot \omega_o \sqrt{1+k}$$

Donde podemos aproximar  $\sqrt{1+k} \sim 1 + \frac{k}{2}$

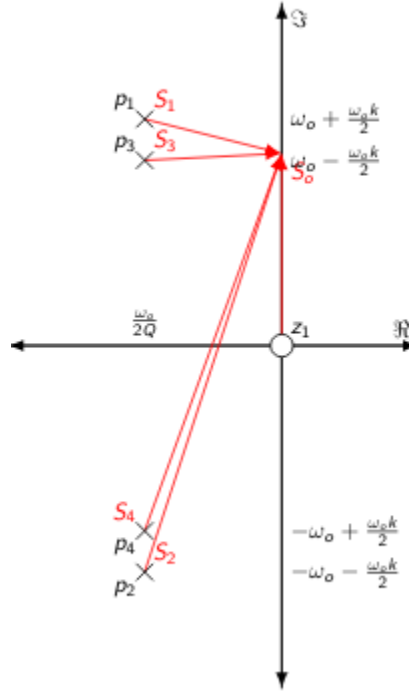
$$s_{1,2} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j \cdot \omega_o \cdot (1 + \frac{k}{2})$$

Y las raices de  $(s^2 + s \cdot \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2 \cdot (1-k))$  de igual manera

$$s_{3,4} = -\frac{\omega_o}{2Q} \pm j \cdot \omega_o \cdot (1 - \frac{k}{2})$$



## 1.1 Aproximación banda angosta del doble sintonizado



$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot s \cdot \omega_o^4}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)}$$

Analizando la respuesta en frecuencia, siendo  $s = j \cdot \omega$ .

$$(s - s_1) = j\omega - \left[\frac{\omega_o}{2Q} + j\omega_o \cdot \left(1 + \frac{k}{2}\right)\right]$$

$$(s - s_2) = j\omega - \left[\frac{\omega_o}{2Q} + j\omega_o \cdot \left(1 - \frac{k}{2}\right)\right]$$

$$(s - s_3) \simeq 2 \cdot j\omega_o$$

$$(s - s_4) \simeq 2 \cdot j\omega_o$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{-g_m \cdot M \cdot \omega_o^4 \cdot j\omega_o}{[2 \cdot j\omega_o][2 \cdot j\omega_o][j\omega - (\frac{\omega_o}{2Q} + j\omega_o \cdot (1 + \frac{k}{2}))][j\omega - [\frac{\omega_o}{2Q} + j\omega_o \cdot (1 - \frac{k}{2})]]}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m \cdot M \cdot \omega_o^2 \cdot j\omega_o}{4} \frac{1}{[\frac{\omega_o}{2Q} + j(\omega - \omega_o \cdot (1 + \frac{k}{2}))][\frac{\omega_o}{2Q} + j(\omega - \omega_o \cdot (1 - \frac{k}{2}))]}$$

Sacando factor comun  $\frac{\omega_o}{2Q}$

$$\begin{aligned}\frac{v_o}{v_i} &= \frac{g_m \cdot M \cdot \omega_o^2 \cdot j\omega_o}{4} \frac{1}{\frac{\omega_o}{2Q} \frac{\omega_o}{2Q} [1 + j\frac{2Q}{\omega_o}(\omega - \omega_o \cdot (1 + \frac{k}{2}))][1 + j\frac{2Q}{\omega_o}(\omega - \omega_o \cdot (1 - \frac{k}{2}))]} \\ \frac{v_o}{v_i} &= \frac{g_m \cdot M \cdot j\omega_o \cdot Q^2}{[1 + j2Q(\frac{\omega}{\omega_o} - 1 - \frac{k}{2}))][1 + j2Q(\frac{\omega}{\omega_o} - 1 + \frac{k}{2}))]} \\ \frac{v_o}{v_i} &= \frac{g_m \cdot M \cdot j\omega_o \cdot Q^2}{[1 + j2Q(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_o} - \frac{k}{2}))][1 + j2Q(\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_o} + \frac{k}{2}))]}\end{aligned}$$

Podemos identificar de la expresión  $\chi = 2 \cdot Q \cdot \frac{\omega - \omega_o}{\omega_o}$ , asi:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{g_m \cdot M \cdot j\omega_o \cdot Q^2}{[1 + j(\chi - Q \cdot k)][1 + j(\chi + Q \cdot k)]}$$

Al término  $Q \cdot k$  se lo llama  $h$  para normalizar la expresión, entonces resulta:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{j \cdot g_m \cdot M \cdot \omega_o \cdot Q^2}{[1 + j(\chi - h)][1 + j(\chi + h)]}$$

Recordando  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

$$\begin{aligned}\frac{v_o}{v_i} &= \frac{j \cdot g_m \cdot k \cdot \sqrt{L_1 L_2} \cdot \omega_o \cdot Q^2}{[1 + j(\chi - h)][1 + j(\chi + h)]} \\ \frac{v_o}{v_i} &= j \cdot g_m \cdot \sqrt{L_1 L_2} \cdot \omega_o \cdot Q \frac{h}{[1 + j(\chi - h)][1 + j(\chi + h)]}\end{aligned}$$

Si  $L_1 = L_2 = L$

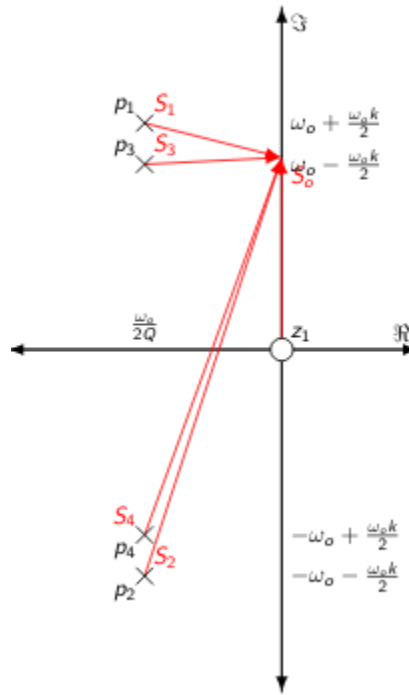
$$\frac{v_o}{v_i} = j \cdot g_m \cdot L \cdot \omega_o \cdot Q \frac{h}{[1 + j(\chi - h)][1 + j(\chi + h)]}$$

La expresión corresponde a  $\frac{v_o}{v_i}$  en la aproximación de banda angosta.

### 1.1.1 Variación de la transferencia en función del coeficiente de acoplamiento $k$

Se recuerda que el diagrama de polos y ceros en un doble sintonizado con las hipótesis de:  $L_1 = L_2$ , ambos circuitos sintonizados a  $\omega_o$ ,  $Q_1 = Q_2 = Q$  es:



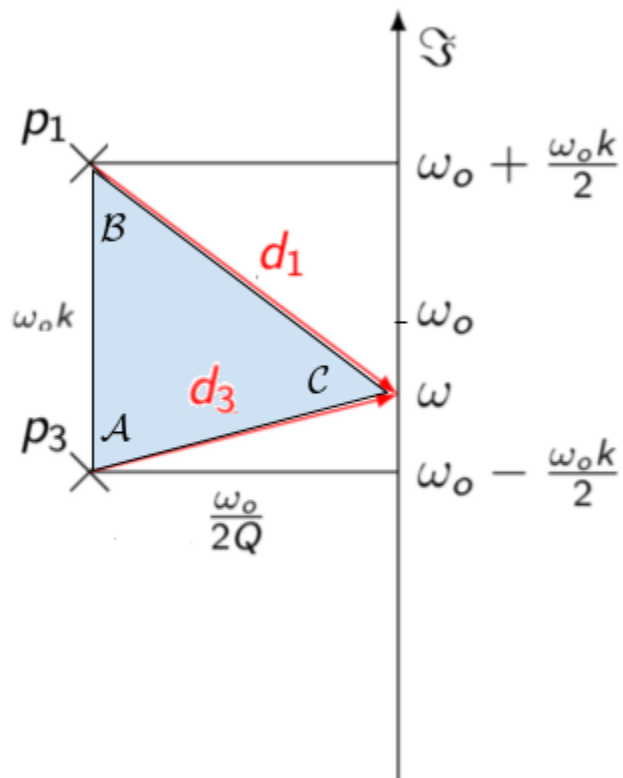


Haciendo uso de la aproximación de banda angosta para un punto  $j\omega$  cercano a  $j\omega_o$  se cumple que:

$$|A(j\omega)| = K_{te} \frac{1}{d_1 d_3}$$

siendo  $K_{te}$  una constante.

Si se amplía la porción superior del eje  $j$ .



La superficie del triángulo sombreada resulta:

$$Sup\Delta = \frac{bh}{2}$$

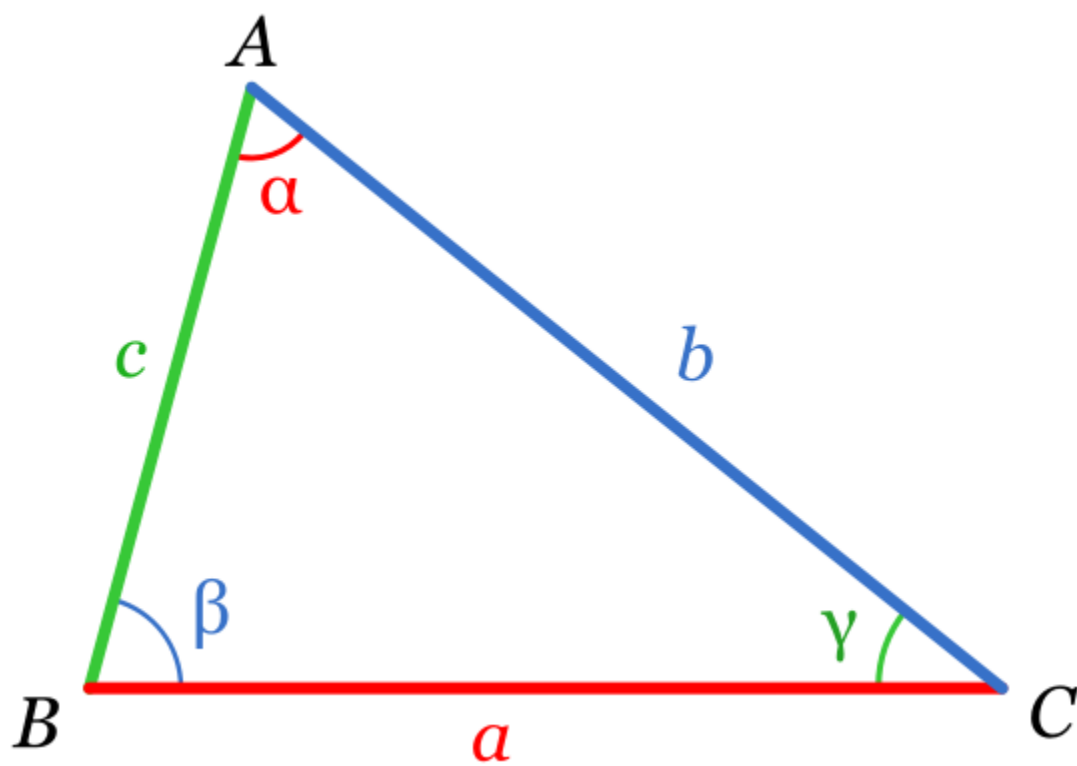
La superficie del triángulo permanece constante aunque se modifique  $\omega$  debido a que no modifica ni su base ( $\omega k$ ) ni su altura ( $\frac{\omega}{2Q}$ ).

Buscaremos una relación entre  $b$  y  $h$  con  $d_1$  y  $d_3$ .

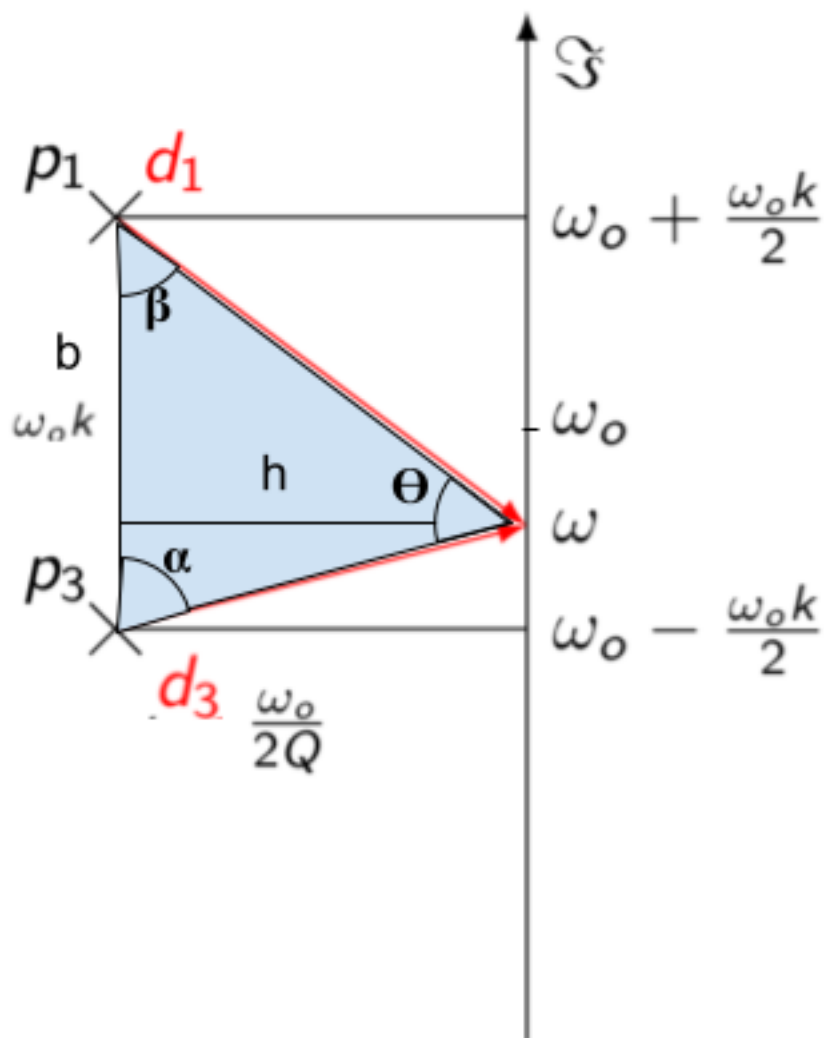
Recordando el teorema de los senos ([https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_los\\_senos](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_los_senos)):

Si en un triángulo "ABC", las medidas de los lados opuestos a los ángulos "A", "B" y "C" son respectivamente "a", "b", "c", entonces:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



Entonces:



Para relacionar la base:

$$\frac{b}{\sin \Theta} = \frac{d_3}{\sin \beta} = \frac{d_1}{\sin \alpha}$$

$$b =$$

De igual manera con la altura, pero ahora teniendo en cuenta que la altura se relacionan con un vector perpendicular a la base:

$$\frac{h}{\sin \beta} = \frac{d_1}{\sin \pi}$$

$$h = d_1 \sin \beta$$

$$Sup\Delta = \frac{bh}{2}$$

$$Sup\Delta = \frac{1}{2} \frac{d_3 \sin \Theta}{\sin \beta} d_1 \sin \beta$$

Volviendo a la expresión de la transferencia

$$|A(j\omega)| = K_{te} \frac{1}{d_1 d_3}$$

$$\frac{1}{d_1 d_3} = 2 \cdot Sup\Delta \sin \Theta$$

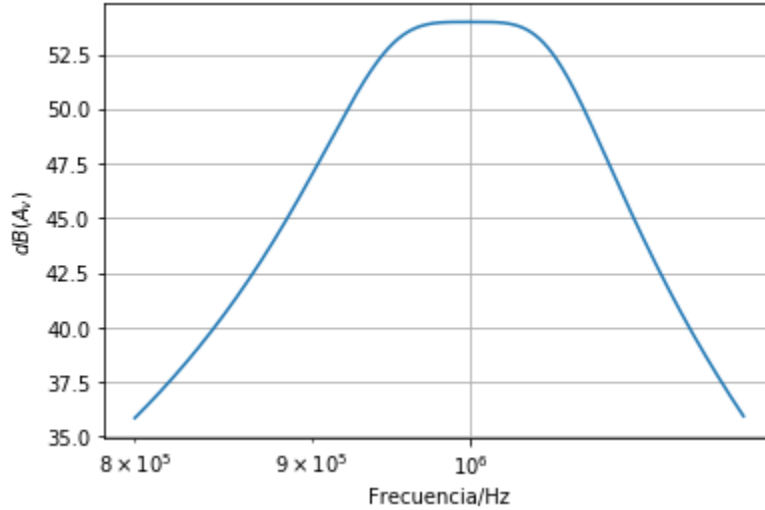
$$|A(j\omega)| = K_{te2} \sin \Theta$$

Esta expresión permite demostrar que la transferencia depende del seno del ángulo  $\Theta$ , formado en el punto  $\omega$  por los 2 vectores provenientes de los polos. La maxima transferencia entondes se logra cuando el angulo  $\Theta = \pi$ .

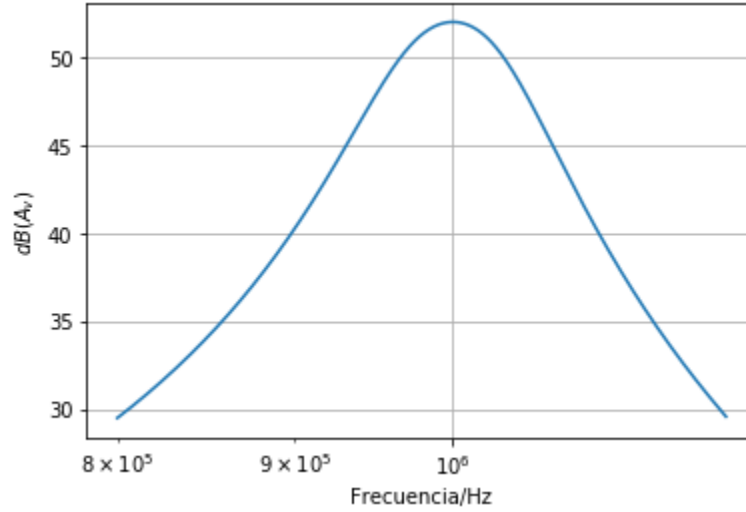
Se analiza la trasferencia en forma geométrica para distintos valores del coeficiente de acoplamiento que determina la longitud de la base del triángulo.

**Factor de acoplamiento critico**  $k_c = \frac{1}{Q_c}$  ( $h = 1$ ) La altura del triángulo es  $h = \frac{\omega_o}{2Q_c}$ .

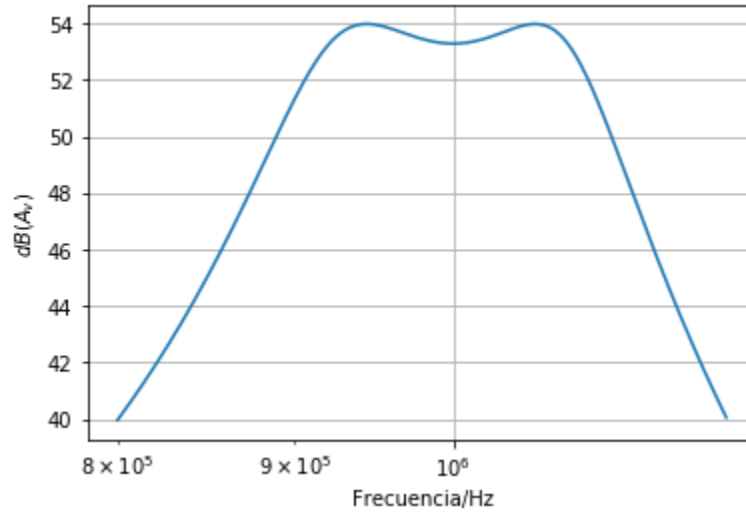
La base del triángulo es  $b = \omega k_c = \omega_o \frac{1}{Q_c}$ , que al ser el doble que la altura, se tiene un máximo en  $\omega = \omega_o$



**Factor de acoplamiento subacoplado**  $k_c < \frac{1}{Q_c}$  En este caso los polos se juntan y  $\Theta$  no llega a ser  $\pi$ .



**Factor de acoplamiento sobreacoplado**  $k_c > \frac{1}{Q_c}$  Ahora los polos se separan más entre sí, es decir que la base se hace mucho mayor que la altura. Aparecen dos máximos.



## 1.2 Transferencia a frecuencia central de un doble sintonizado

La transferencia a frecuencia central de un doble sintonizado la podemos calcular cuando  $\chi = 0$

$$A(\chi = 0) = g_m \cdot L \cdot \omega_o \cdot Q \frac{h}{(1 - jh)(1 + jh)}$$

A frecuencia central:

$$|A(\chi = 0)| = g_m \cdot L \cdot \omega_o \cdot Q \frac{h}{(1 + h^2)}$$

Normalizando:

$$\bar{A}(\chi) = \frac{A(\chi)}{A(\chi_o)} = \frac{1 + h^2}{(1 + j(\chi + h))(1 + j(\chi - h))}$$

$$|\bar{A}(\chi)| = \frac{1 + h^2}{\sqrt{\chi^4 + 2\chi^2(1 - h^2) + (1 + h^2)^2}}$$

**1.2.1 Máxima transferencia a frecuencia central, factor de acoplamiento critico ( $h = 1$ ).**

$$\frac{\partial |A(\chi = 0)|}{\partial h} = g_m \cdot L_1 \cdot \omega_o \cdot Q \frac{(1 + h^2) - 2h \cdot h}{(1 + h^2)^2} = 0$$

Entonces, con  $h = 1$  se obtiene el maximo acoplamiento.

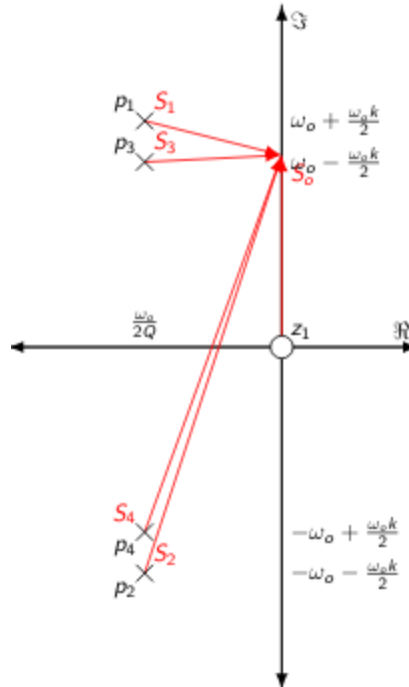
Por lo tanto, se llama  $k_c$  ( $k$  critico) cuando  $h = k \cdot Q = 1$ , siendo entonces  $k_c = \frac{1}{Q}$ .

$$\left| \frac{v_o}{v_i} \right| (\chi = 0)_{h=1} = \frac{g_m \cdot L_1 \cdot \omega_o \cdot Q}{2}$$

$$|\bar{A}(\chi)_{h=1}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\chi^4}{4}}}$$

### 1.2.2 Variacion de la trasferencia en funcion del coficiente de acoplamiento

El diagrama de polos y ceros en un doble sintonizado suponiendo  $L_1 = L_2$ ,  $Q_{c1} = Q_{c2}$  y ambos circuitos sintonizados a  $f_o$  es:



Haciendo uso de la aproximación de banda angosta para un punto  $j\omega$  cercano a  $j\omega_o$  se cumple que:

## 2 Topologia Butterworth

### 2.1 Tipo pasabajos

Para lograr maxima planicidad en la banda de paso, se debe emplear una topologia Butterworth. Hasta la frecuencia de corte, la salida se mantiene constante casi, luego disminuye a razón de  $20dB \cdot n$  por década (ó  $6dB \cdot n$  por octava), donde n es el número de polos del filtro.

Si llamamos H a la transferencia, se debe cumplir que las  $2N-1$  primeras derivadas de  $|H(\omega)|^2$  sean cero para  $\omega = 0$  y  $\omega = \infty$ . Únicamente posee polos y el cuadrado de la magnitud de la función de transferencia (para el filtro paso bajo de ganancia unitaria en la banda de paso) es:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2N}}$$

donde “N” es el orden del filtro,  $\omega_c$  es la frecuencia de corte (en la que la respuesta cae unos 3 dB por debajo de la banda pasante) y  $\omega$  es la frecuencia angular.

La función de transferencia para dicho filtro pasabajos es:

$$H(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)/\omega_c}$$

siendo  $s_k$  los polos del filtro, cuya expresión es:

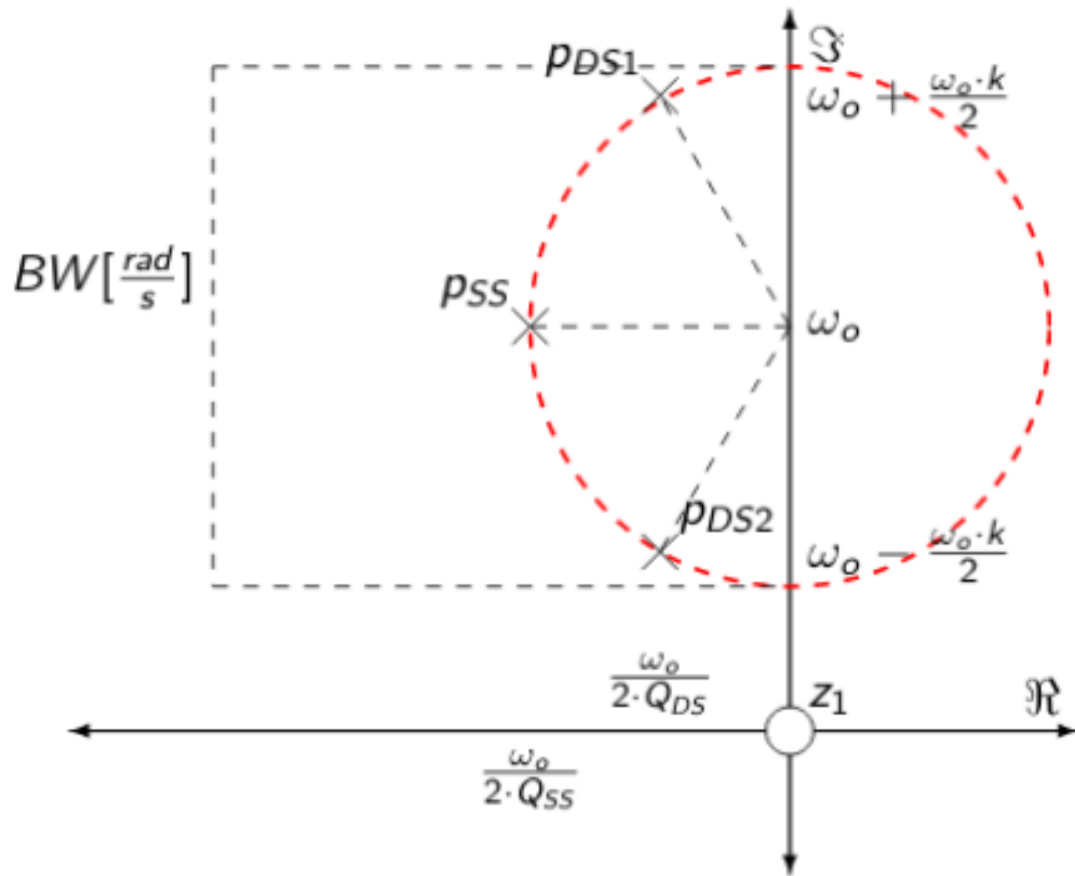
$$s_k = \omega_c e^{\frac{j(2k+n-1)\pi}{2n}}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n$$

### 2.2 Tipo pasabanda

El diagrama de polos y ceros.





El simple sintonizado corresponde al polo que esta a frecuencia central, y los polos mas cercadon al eje  $j\omega$  se logran con el doble sintonizado de la salida.

$$Q_{mB} = \frac{f_o}{BW} \frac{1}{\sin(\frac{2m-1}{2n}\pi)}$$

$$f_{mB} = f_o + \frac{BW}{2} \cos(\frac{2m-1}{2n}\pi)$$

[ ]: