

Taller de Métodos Geométricos en Física

Taller # 1

Tema: Coordenadas, vectores, longitud de arco, métrica, transformaciones, fórmulas de Frenet-Serret.

Docente: Juan P. Beltrán.

Parte 1. Ejercicios de los libro de consulta.

1. Ejercicios 1, 2, 5 y 6 de los ejercicios de la sección 1.3 del libro de Do Carmo.
2. Todos los ejercicios de las secciones 5.4 y 6.3 del capítulo 1 del libro de Dubrovin, Fomenko, Novikov.

Parte 2. Ejercicios adicionales.

1. Calcule las componentes de la métrica en \mathbb{R}^3 en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) . Verifique que el resultado es:

$$g'_{ij}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

2. Calcule las componentes de la métrica en $\mathbb{R}^3_{(1,2)}$ en coordenadas pseudo-esféricas (ρ, χ, φ) definidas por:

$$\begin{aligned} x^0 &= \rho \cosh \chi, \\ x^1 &= \rho \sinh \chi \cos \varphi, \\ x^2 &= \rho \sinh \chi \sin \varphi, \end{aligned}$$

con $-\infty < \rho < \infty$, $0 \leq \chi < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Verifique que el resultado es:

$$g'_{ij}(\rho, \chi, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 \sinh^2 \chi \end{pmatrix}.$$

3. Verifique explícitamente que para una curva paramétrica en dos dimensiones $r(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura es:

$$k = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Sugerencias y recomendaciones de lectura.

a) Cap.1 del libro: “Differential Geometry of curves and surfaces”, do Carmo, Manfredo, 2nd Edition.

b) Cap. 1 del texto: “Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces”, Theodore Shifrin, <http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>.