TallerClase#1

jueves, 31 de agosto de 2023 5:16 p. m.

1. Sea $\alpha(t) = (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$, con $t \in \mathbb{R}$ y (a, b) constantes, con $a > 0$ y $b < 0$. a) Calcule la longitud de arco desde un tiempo inicial $t_0 > 0$ hasta $t \to \infty$ de esta curva.
   b) Calcule la curvatura de esta curva en un punto cualquiera.

Angel David Almonacid
Juan Pablo Zuluaga
Diego alejandro Niño
Gregorio Junior Llanos

1.

a) $\ell = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\,dt \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)|\,dt$

$$\alpha'(t) = \left(ab\,e^{bt}\cos(t) - ae^{bt}\operatorname{sen}(t),\ ab\,e^{bt}\operatorname{sen}(t) + a\,e^{bt}\cos(t)\right)$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(ab)^2 e^{2bt} + (a)^2 e^{2bt}} = ae^{bt}\sqrt{(b)^2+1}$$

$$\lim_{t\to\infty} a\int_{t_0}^{t} e^{bt}\sqrt{b^2+1}\,dt = \lim_{t\to\infty} a\sqrt{b^2+1}\,\frac{1}{b}\left(\cancel{e^{bt}}^{\,0} - e^{bt_0}\right)$$

$$= -\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}\,e^{bt_0} = \ell$$

2. Para una curva suave cerrada C: $r = r(s)$, muestre que:

$$\oint_C \left(r\frac{dk}{ds} - \chi b\right) = 0.$$

$$\oint_C \left(r\frac{dK}{ds} - \chi b\right) = \oint_C \left(\cancel{Kv} - \frac{d}{ds}(rK) - \frac{dn}{ds} - \cancel{Kv}\right) = \oint_C -\frac{d}{ds}(rK) - \frac{dn}{ds} = \int_b^a \frac{d(rK)}{\cancel{ds}}\cancel{ds} + \int_b^a \frac{dn}{\cancel{ds}}\cancel{ds} = rK + n\Big|_b^a$$

En superficie cerrada $a = b$, así:

$$= rK + n\Big|_a^a = 0 \;// \;\blacksquare$$

$\chi b = \frac{dn}{d\ell} + Kv$

$\frac{d}{ds}(rK) = \frac{dr}{ds}K + r\frac{dK}{ds}$

$\frac{dr}{ds}K \Rightarrow vK$

$r\frac{dK}{ds} = \frac{dr}{ds}K - \frac{d}{ds}(rK)$