Mécanica Cuántica
Ejercicios

Angel Almonacid

September 24, 2023

Question 1: Schwabl 2.3

Using the Bohr–Sommerfeld quantization rules, determine the energy eigen- states of a particle of mass m moving in an infinitely high potential well:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant a \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Respuesta. Fuera de la barrera de potencial la función de onda es cero, dentro el potencial vale 0, cumpliendo la ecuación diferencial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Escribiéndola de manera alterna tenemos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi, \ \text{ donde } k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Así identificamos la solución para un oscilador armónica

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$$

y aplicando las siguientes condiciones iniciales

$$\psi(0) = \psi(a) = 0.$$

Encontramos:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= A\sin 0 + B\cos 0 = B = 0. \\ \psi(x) &= A\sin kx \\ \psi(a) &= A\sin ka = 0 \longrightarrow \sin ka = 0 \\ ka &= n\pi \\ k &= \frac{n\pi}{a} \end{aligned}$$

Sabiendo que el exponente se comporta indicialmente, la energía también tiene este comportamiento y está asociada de la siguiente manera:

$$E_n = \frac{h^2k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$

Question 2: Schwabl 2.4

1. $p^\dagger = p$, como $\boldsymbol{p}$ es un operador, debe cumplir: $\langle\psi|\, \boldsymbol{p}\, |\phi\rangle = \langle\phi|\, \boldsymbol{p}\, |\psi\rangle^*$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\, \boldsymbol{p}\, |\phi\rangle &= \int \phi^* \,(x\psi)\, dx \\
\langle\phi|\, \boldsymbol{p}\, |\psi\rangle^* &= \int \left(\phi \boldsymbol{p} \psi^*\right)^* dx \\
&= \int \Big(\phi - i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial x})^* dx \\
&= i\hbar \int \phi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \\
\text{Integrando por partes}: & \\
&= \left[\phi^* \psi\right]_{-\infty}^{\infty} - i\hbar \int \psi^* \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \\
&= \int \phi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi dx \\
&= \int \phi^* \boldsymbol{p} \psi dx = \langle\psi|\, \boldsymbol{p}\, |\phi\rangle \quad 😄
\end{aligned}$$

2. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. Desarrollando el producto:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & ann \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b11 & b12 & \dots & b1n \\ b21 & b22 & \dots & b2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ bn1 & bn2 & \dots & bnn \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a11b11 + ... + a1nbn1 & a11b12 + ... + a1nb2n & \dots & a11b1n + ... + a1nbnn \\ a21b11 + ... + a2nbn1 & a21b12 + ... + a2nb2n & \dots & a21b1n + ... + a2nbnn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1b11 + ... + annbn1 & an1b12 + ... + annb2n & \dots & an1b1n + ... + annbnn \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^\dagger = \begin{bmatrix} a11b11 + ... + a1nbn1 & a21b11 + ... + a2nbn1 & \dots & an1b11 + ... + annbn1 \\ a11b12 + ... + a1nb2n & a21b12 + ... + a2nb2n & \dots & an1b12 + ... + annb2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a11b1n + ... + a1nbnn & a21b1n + ... + a2nbnn & \dots & an1b1n + ... + annbnn \end{bmatrix}^*$$