Métodos Geométricos
Apuntes

Angel Almonacid

September 28, 2023

Chapter 1

Variedades y Tensores

1.1 Variedades diferenciables

Definition 1.1.1: Variedad

Una variedad n-dimensional es un conjunto de M puntos y una familia de mapeos y vecindarios (U_i, ϕ_i), tal que la familia U_i cubre la variedad y ϕ_i es un homeomorfismo de U_i a un subconjunto abierto $U_i^{'} \in \mathbb{R}$, que a su vez cumplen las siguientes condiciones: begin

- $\cup_i U_i = M$
- $\forall i, j, \cup_i \cap \cup_j \neq \emptyset = W$, $\phi_i(W), \phi_j(W)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y los mapeos $\psi_i j \equiv \phi_i \circ \phi_j^- 1$

Notacion:

- $U_i \longrightarrow$ vecindario
- $(U_i, \phi_i) \longrightarrow$ carta
- $(U_i, \phi_i) \longrightarrow$ atlas, define estructura deiferenciable en M.

1.1.1 Mapas entre variedades

Para dos variedades M y N mapeadas por $\psi(p) = x^\mu, \phi(f(p)) = y^\mu$

$$f : M \longrightarrow N$$
$$y = \psi \circ f \circ \phi^- 1(x)$$
$$\text{Podemos tomar como notación} \longrightarrow y = f(x), y^\mu = f(x^\mu)$$

Dos casos importantes de mapas entre variedades son las curvas y las funciones.

Curvas

$$c : (a, b) \longrightarrow M.a < 0 < b$$

En una carta (U, ϕ), la curva tiene la representación en coordenadas:

$$x = \phi \circ c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Funciones

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

En una carta (U, ϕ) la función f tiene la representación en coordenadas:

$$f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

Al conjunto de funciones suaves en M lo llamaremos $\mathcal{F}(x)$.

1.1.2 Vector Tangente

Vector: Para definir el vector tangente tomaremos una curva y una función definida en M:

$$f(c(t)) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Definiendo la derivada de f a lo largo de C, tenemos:

$$\frac{df(c(t))}{dt}_{t=0} = \frac{dx^i(c(t))}{dt}_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$