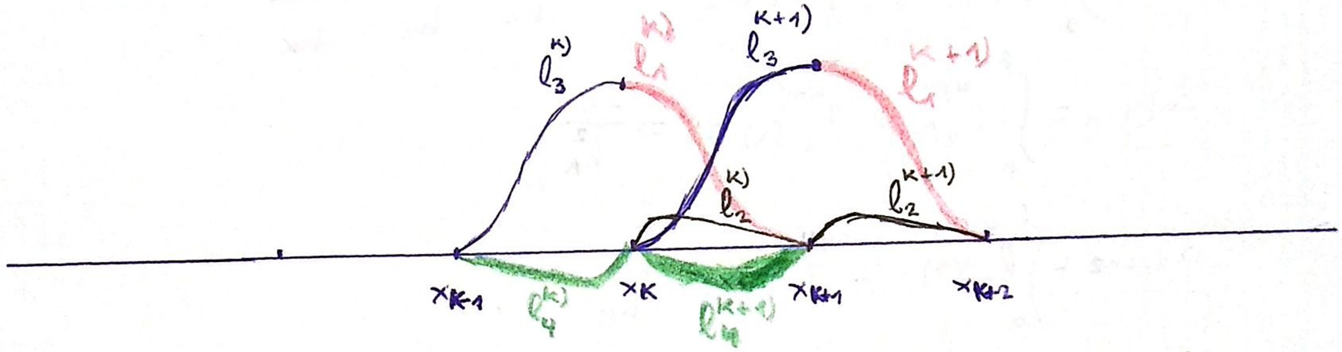
ALEJANDRO ALONSO MEMBRILLA Y PILAR NAVARRO RAMÍREZ

PROBLEMA PROTOTIPO DE 4º ORDEN: ejercicio optativo 3

Hemos calculado simbólicamente la matriz de rigidez local y el vector de cargas local para el problema dado (ver cuaderno ~~adjunto~~ de Jupyter adjunto).

Dados dos nodos, ~~(las funciones)~~ x_K y x_{K+1}, las funciones base centradas en dichos nodos pueden verse en el siguiente gráfico:



Ya podemos proceder a calcular la matriz de rigidez $R=(a_{ij})$.

Si $i=2K-1$; $\omega_i=\ell_1^{K)}+\ell_3^{K)}$. Si $i=2K$, $\omega_i=\ell_2^{K)}+\ell_4^{K)}$.

Para i impar:

$$a_{ii}=\int_0^\ell \omega_i''(x)^2\,dx=\int_0^\ell\left(\ell_1^{K)''}+\ell_3^{K)''}\right)^2(x)\,dx=\int_0^\ell \ell_1^{K)''}(x)^2\,dx+\int_0^\ell \ell_3^{K)''}(x)^2\,dx+$$

$$+2\cancel{\int_0^\ell \ell_1^{K)''}(x)\,\ell_3^{K)''}(x)\,dx}=\int_{x_K}^{x_{K+1}}\ell_1^{K)''}(x)^2\,dx+\int_{x_{K-1}}^{x_K}\ell_3^{K)''}(x)^2\,dx=\frac{12}{h_K^3}+\frac{12}{h_K^3}=\frac{24}{h_K^3}$$

donde, en la última igualdad, hemos usado la matriz local precalculada.

$$a_{i,i+1}=\int_0^\ell \omega_i''(x)\,\omega_{i+1}''(x)\,dx=\int_0^\ell \ell_1^{K)''}(x)\cdot\ell_2^{K)''}(x)\,dx+\cancel{\int_0^\ell \ell_1^{K)''}(x)\,\ell_4^{K)''}(x)\,dx}+$$

$$+\cancel{\int_0^\ell \ell_3^{K)''}(x)\,\ell_2^{K)''}(x)\,dx}+\int_0^\ell \ell_3^{K)''}(x)\,\ell_4^{K)''}(x)\,dx=\frac{6}{h_K^2}-\frac{6}{h_K^2}=0$$

$$a_{i,i+2} = \int_0^l \omega_i''(x)\,\omega_{i+2}''(x)\,dx = \cancelto{0}{\int_0^l l_1^{k)''}(x)\, l_1^{k+1)''}(x)\,dx} + \int_0^l l_1^{k)''}(x)\, l_3^{k+1)''}(x)\,dx \; +$$

$$+ \cancelto{0}{\int_0^l l_3^{k)''}(x)\, l_1^{k+1)''}(x)\,dx} + \cancelto{0}{\int_0^l l_3^{k)''}(x)\, l_3^{k+1)''}(x)} = \frac{-12}{h_k^3}$$

$$a_{i,i+3} = \cancelto{0}{\int_0^l l_1^{k)''}(x)\, l_2^{k+1)''}(x)\,dx} + \int_0^l l_1^{k)''}(x)\, l_4^{k+1)''}(x)\,dx + \cancelto{0}{\int_0^l l_3^{k)''}(x)\, l_2^{k+1)''}(x)\,dx} + \cancelto{0}{\int_0^l l_3^{k)''}(x)\, l_4^{k+1)''}(x)\,dx} = \frac{6}{h_k^2}$$

Para i par: (análogo al caso impar)

$$a_{ii} = \int_0^l l_2^{k)''}(x)^2\,dx + \int_0^l l_4^{k)''}(x)^2\,dx = \frac{4}{h_k} + \frac{4}{h_k} = \frac{8}{h_k}$$

$$a_{i,i+1} = \int_0^l l_2^{k)''}(x)\cdot l_3^{k+1)''}(x)\,dx = \frac{-6}{h_k^2}$$

$$a_{i,i+2} = \int_0^l l_2^{k)''}(x)\cdot l_4^{k+1)''}(x)\,dx = \frac{2}{h_k}$$

Para el caso particular estudiado, destacamos que solo hay 2 nodos internos, así que $K = 1, 2$ e $i = 1,2,3,4$. Tomando $h_k = h = 1$ para todo k, es fácil comprobar que R toma el valor que se pide. $a_{ii} = \frac{24}{h^3} = 24$ cuando i es impar, y $a_{ii} = \frac{8}{h} = 8$ cuando es par. Para a_{12} y a_{34} usamos la fórmula de $a_{i,i+1}$ con i impar, análogamente cuando es par con $a_{23} = \frac{-6}{h^2} = -6$. También se cumple que $a_{13} = \frac{-12}{h^3} = -12$, $a_{24} = \frac{2}{h} = 2$, y $a_{14} = \frac{6}{h^2} = 6$. Como la matriz es simétrica, esto calcula toda R. ■