Le principe de Pareto

1 author:

Frédéric Elie
french governmental institution

ACCUEIL

Le principe de Pareto

Frédéric ELIE, décembre 2007

Les études statistiques de Pareto étaient motivées par le problème de la répartition des produits de la croissance économique, et aboutissaient à une loi, qui se voulait universelle, sur l'inégalité et la pauvreté (« cours d'économie politique », 1897). Il introduit pour cela un paramètre, noté α, qui mesure l'inégalité. En fait, Pareto pensait que ce paramètre mesurait aussi la pauvreté, assimilant ainsi les deux notions ; mais des études ultérieures (Gini, Mourre, Benini…) ont montré que, à lui seul, sous certaines conditions, α mesurait seulement l'inégalité, la pauvreté dépendant d'un autre paramètre variable, le seuil x_0, que Pareto considérait fixe.

(source : *« la loi de Pareto : une loi sur l'inégalité ou sur la pauvreté ? réponses théorique et empirique »*, par Taladidia Thiombiano, maître de conférences, université de Ouagadougou, Burkina Faso)

Pareto introduit α de la manière suivante :
La réduction de l'inégalité dans la distribution des richesses se traduit par le fait que le nombre de pauvres diminue par rapport au nombre de riches, donc par rapport au nombre total de la population. Les pauvres sont ceux dont les revenus sont inférieurs à un seuil fixé d'avance x_0.
Désignons par X la variable aléatoire représentant ici le revenu, et par $F(x) = P(X \leq x)$ sa fonction de répartition, P étant la probabilité pour que X soit inférieure à une valeur x quelconque du revenu. F(x) représente donc la proportion de personnes de revenu inférieur à x.
Du principe précédent de Pareto, la fonction de répartition peut s'écrire suivant la loi suivante, dite loi de **Pareto** $L_p(\alpha, x_0)$ de paramètres α et x_0 :

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < x_0$$

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} \quad \text{si } x \geq x_0$$

Le seuil x_0 est le revenu le plus faible de la société. La proportion de personnes ayant un revenu supérieur à x_0 (les « riches ») est donnée par :

$$1-F(x)=\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$$ pour $x \geq x_0$.

Pour x et x_0 fixés, avec $x_0/x \leq 1$, la proportion de riches diminue, et celle des pauvres s'accroît, lorsque le paramètre α augmente.

D'où la conclusion de Pareto : l'inégalité des revenus augmente ou bien diminue lorsque α varie, et en corollaire, que la diminution de l'inégalité des revenus ne se produit que si le total des revenus augmente plus vite que la population.

Essayons de prouver cette conclusion de Pareto : pour cela nous avons besoin de connaître l'espérance mathématique du revenu, c'est-à-dire le revenu moyen (qui est le moment d'ordre 1), et de voir ensuite comment il varie lorsque les paramètres α et x_0 changent.
Soit E(x) l'espérance mathématique (le revenu moyen) compte tenu de la distribution donnée par F(x) ; par définition :

$$E(X)=\int_0^{\infty} x\left(\frac{dP(X \leq x)}{dx}\right)dx=\int_0^{\infty} x\frac{dF(x)}{dx}dx$$

où $dP(X\leq x)/dx$ est la densité de probabilité. De l'expression de F(x) donnée plus haut, la densité de probabilité est :

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}$$ avec $x_0 \leq x$.

Le calcul du revenu moyen E(X) est immédiat et conduit à :

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}x_0$$

C'est une fonction des deux paramètres α et x_0, qui doit rester finie (le revenu moyen ne peut pas être infini) et positive (un revenu négatif n'a pas de sens), donc si $\alpha > 1$.
Une variation infinitésimale des deux paramètres entraîne celle de E(X) selon :

$$dE(X)=\left(\frac{\partial E(X)}{\partial x_0}\right)dx_0+\left(\frac{\partial E(X)}{\partial \alpha}\right)d\alpha=\frac{\alpha}{\alpha-1}dx_0-\frac{x_0}{(1-\alpha)^2}d\alpha$$

Cette relation montre que le revenu moyen E(X) augmente:

- si le seuil de pauvreté x_0 s'élève (les plus bas revenus augmentent) : $dx_0 > 0$;
- et/ou si l'inégalité entre les revenus α se réduit : $d\alpha < 0$.

Mais si l'on raisonne à ressources constantes, comme le fit Pareto, un relèvement du seuil de pauvreté ($dx_0 > 0$) entraîne nécessairement une augmentation des inégalités ($d\alpha > 0$) puisque le montant restant des ressources à partager entre un nombre identique d'individus a diminué. Le revenu moyen E(X) diminue alors, tandis que la proportion de riches 1 – F(x) diminue et celle des pauvres s'accroît.
Il y a donc là un paradoxe dans le principe de Pareto (J. Bourgain, N. Vaneecloo, 1981), que confirment d'ailleurs les observations : dans la plupart des pays qui tentent de réduire la

pauvreté en élevant le revenu moyen, les inégalités de distribution des ressources demeurent ! Au fond, la difficulté réside dans l'interprétation du paramètre α : il ne peut pas à lui seul constituer une mesure de l'inégalité des revenus.
On sait maintenant qu'une façon de résoudre le paradoxe est de recourir à la « courbe de concentration » à partir de laquelle s'introduit un nouveau paramètre : l'indice de Gini-Lorentz, qui donne la « bonne » mesure des inégalités.

La courbe de concentration, ou courbe de Lorentz, permet de voir comment évolue la proportion des personnes de revenu inférieur à x,

$$p = F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$$

en fonction de la proportion (ramenée à la quantité totale des revenus) des revenus possédés par ces mêmes personnes, notée q. On montre facilement que q s'exprime par :

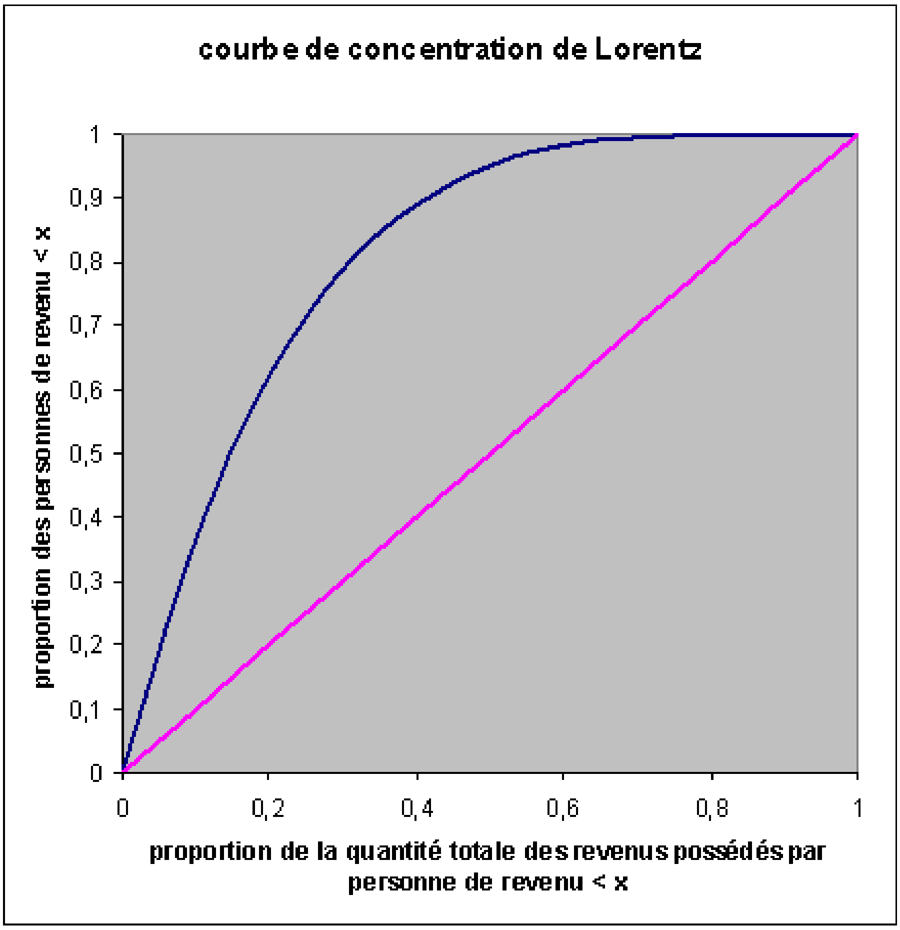
$$q = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha-1}$$

En éliminant (x_0/x) entre p et q, on aboutit à la relation p = f(q) qui définit la courbe de Lorentz :

$$p = 1 - (1-q)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = f(q)$$

Et réciproquement :

$$q = 1 - (1-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} = f^{-1}(p)$$

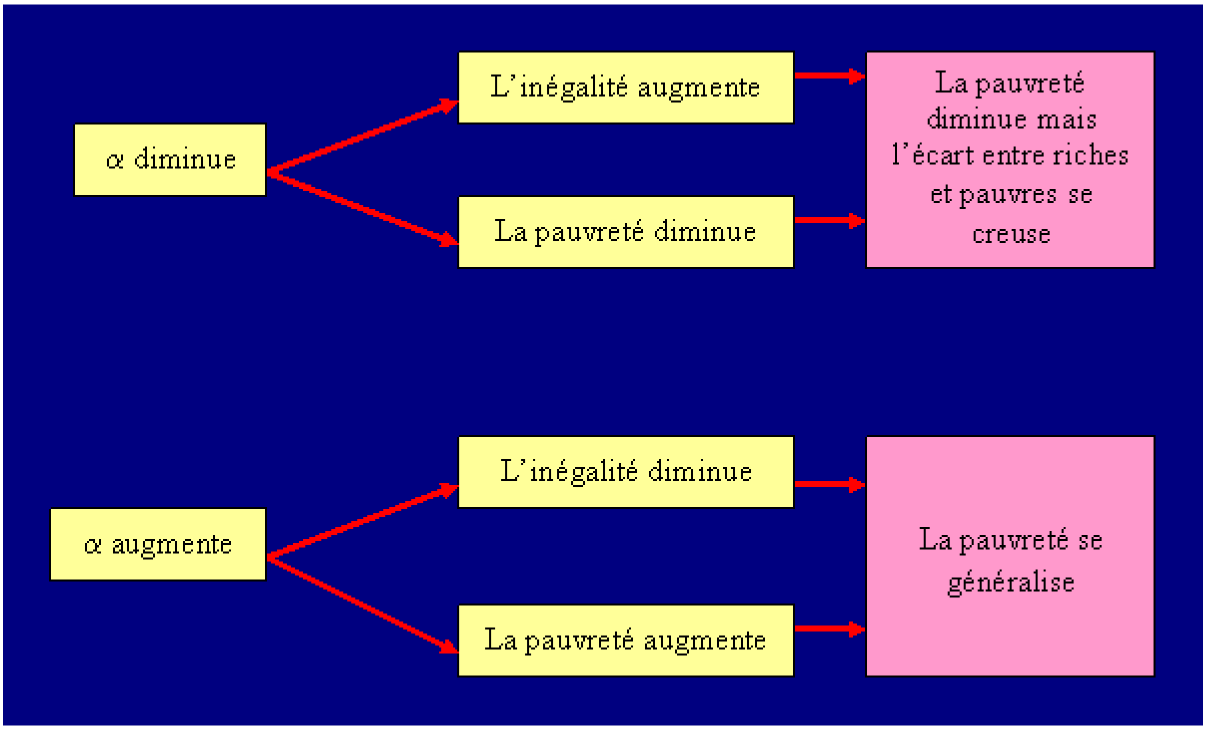


L'indice de Gini-Lorentz représente le ratio de l'aire comprise entre la courbe p = f(q) et la droite p = q, et l'aire définie par cette même droite :

$$I = 2\int_0^1 p dq - 1 = \frac{1}{2\alpha - 1}$$

Ce ratio caractérise l'écart de la répartition des richesses par rapport à une répartition homogène donnée par la droite p = q. D'ailleurs, lorsque α devient infini, la courbe de concentration tend à se confondre avec la droite, et l'indice de Gini-Lorentz tend vers zéro. Ceci montre bien que, lorsque α augmente, la concentration des revenus décroît, c'est-à-dire la répartition des revenus est plus « égalitaire ».
Or on sait que l'accroissement de α entraîne une diminution de la proportion de riches et une augmentation corrélative du nombre des pauvres. Conclusion : l'indice de Gini-Lorentz fait apparaître ce qui est observé dans nombre de sociétés, à savoir : une augmentation de α réduit l'inégalité dans le sens d'une baisse du revenu moyen mais ne réduit pas pour autant la pauvreté qui, au contraire, tend à augmenter.
Ainsi le paradoxe de Pareto est-il résolu.

L'impact des variations de α sur l'inégalité et la pauvreté consiste, finalement, en ceci : la relation entre α et la pauvreté est positive, tandis que la relation entre α et l'inégalité est négative. Ces relations sont illustrées comme suit :



En définitive, le paradoxe de Pareto vient de ce que le seuil de pauvreté x_0 est considéré constant : il s'ensuit que les variations du revenu moyen engendrent des variations de proportions de riches et de pauvres sans modifier l'inégalité. Or ce seuil peut varier pour diverses raisons : dues à des apports économiques externes qui font que les ressources évoluent par échanges avec l'environnement et création de nouvelles sources de richesses (matières premières, nouvelles technologies, etc.), dues à des changements socioculturels (avant, un pauvre n'avait pas la télé, aujourd'hui, sous la pression du marketing, il n'a pas de téléphone portable ou internet !... et ceci dépend de l'état économique et culturel du pays, ou dues à des échelles de valeurs individuelles (une société qui fait l'apologie du bien-être par la consommation pousse à considérer le seuil de pauvreté vers le haut), etc.

Au fond, le mérite de la théorie parétienne est de mettre en évidence le lien étroit entre la logique économique et la manipulation sociologique. Aujourd'hui, il existe une « ingénierie » sociale ou sociologique, notamment aux USA : est-ce pour se préoccuper de ce que souhaitent les individus pour leurs bonheurs, ou bien est-ce plutôt pour mieux les connaître afin d'actionner les leviers pertinents qui les pousseront à croire que leurs bonheurs sont là où on veut les mener à des fins de profits ? Je vous laisse deviner la réponse…