Министерство образования и науки РФ
Новосибирский Государственный Технический Университет
Кафедра ПМт

Лабораторная работа №2

«Двойственная процедура планирования»

по курсу «Математические методы планирования эксперимента»

Факультет:	ПМИ
Группа:	ПММ-81
Студенты:	Михайлов А.А.,
	Санина А.А.
Преподаватели:	Черникова О.С.,
	Чубич В.М.

Новосибирск 2013

1. Условие задачи

Построить и исследовать метод двойственной процедуры планирования для непрерывного D-оптимального плана.

2. Ход работы:

2.1. Постановка задачи

Пусть ν — возможное количество запусков системы, причём сигнал α_1 подаётся на вход системы k_1 раз, сигнал α_2 — k_2 раз и т.д., сигнал α_q — q раз.

Под *непрерывным нормированным планом* ξ условимся понимать совокупность величин

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_q \\ p_1, & p_2, & \dots, & p_q \end{pmatrix}, \ p_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{q} p_i = 1, \ \alpha_i \in \Omega_\alpha, \ i = \overline{1, q}. \tag{1}$$

В общем случае непрерывный нормированный план ξ соответствует вероятностной мере $\xi\left(d\alpha\right)$, заданной на области Ω_α и удовлетворяющей условиям неотрицательности и нормировки:

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} \xi\left(d\alpha\right) = 1, \ \xi\left(d\alpha\right) \geq 0, \ \alpha \in \Omega_\alpha. \tag{2}$$

При этом *нормированная информационная матрица* плана определяется соотношением

$$M\left(\xi\right) = \int\limits_{\Omega_\alpha} M\left(\alpha\right) \xi\left(d\alpha\right). \tag{3}$$

Для плана (1) интеграл в (3) переходит в сумму, т.е.

$$M\left(\xi\right) = \sum_{i=1}^{q} p_i \, M\left(\alpha_i\right), \tag{4}$$

где $M\left(\alpha_i\right)$ — информационные матрицы точек спектра плана. Планирование оптимальных экспериментов опирается на критерии оптимальности планов.

2.2. Двойственный алгоритм синтеза оптимальных входных сигналов

1) Зададим начальный невырожденный план ξ_0 и по формуле (4) вычислим нормированную матрицу $M\left(\xi_0\right)$ плана. Положим $l = 0$.

2) Найдём локальный максимум

   $$\alpha^l = \arg\max_{\alpha \in \Omega_\alpha} \mu\left(\alpha, \xi_l\right)$$

   методом проектирования градиента. Если окажется, что

   $$\left|\mu\left(\alpha^l, \xi_l\right) - \eta\right| \leq \delta,$$

   закончим процесс.

   Если

   $$\mu\left(\alpha^l, \xi_l\right) > \eta,$$

   перейдём к шагу 3. В противном случае будем искать новый локальный максимум.

3) Вычислим τ_l по формуле

   $$\begin{aligned} \tau_l &= \arg\min_{0 \leq \tau \leq l} X\left[M\left(\xi_{l+1}^{\tau}\right)\right], \\ \xi_{l+1}^{\tau} &= \left(1 - \tau\right)\xi_l + \tau_l \xi\left(\alpha^l\right), \end{aligned}$$

   где $\xi\left(\alpha^l\right)$ одноточечный план, размещённый в точке α^l.

4) Составим план

   $$\xi_{l+1} = \left(1 - \tau_l\right)\xi_l + \tau_l \xi\left(\alpha^l\right),$$

произведём его “очистку”, положим $l = l + 1$ и перейдём на шаг 2.

Приведённый алгоритм построения оптимальных сигналов требует вычисления градиента $\nabla_{\alpha}\mu(\alpha, \xi)$.

Соответствие значений параметров $X[M(\xi)]$, $\mu(\alpha, \xi)$, η прямой процедуры критерию D-оптимальности указано в табл. 1.

Таблица 1. Параметры критерий D-оптимального плана

$X[M(\xi)]$	$\mu(\alpha, \xi)$	η
$-\ln\det(M(\xi))$	$Sp\left[M^{-1}(\xi)\ M(\alpha)\right]$	s

2.3. Алгоритм “очистки” плана

Пусть в результате работы алгоритма построен план ξ_l, который может быть сколь угодно близок к оптимальному плану ξ^*, но все же отличаться от него (мы можем сделать большое, но конечное число итераций). Это отличие будет заключаться в том, что

1) $\left\|\alpha_j^* - \alpha_j^l\right\|^2 = \mu_j,\ j = \overline{1,\, q}$, где μ_j — малые положительные числа, $\|\bullet\|$ — евклидова норма;

2) $\left|p_j^* - p_j^l\right| = \pi_j$, где π — малые положительные числа;

3) план ξ_l по сравнению с планом ξ^* имеет “посторонние” точки $\alpha_{n+1}^l,\, \alpha_{n+2}^l,\, \ldots,\, \alpha_{n+v}^l$ с малыми весами $\tau \geq p_{n+1}^l \geq p_{n+2}^l \geq \cdots \geq p_{n+v}^l$;

4) вместо одной точки α_j^l, близкой к α_j^*, имеется набор точек $\alpha_{j_1}^l,\, \alpha_{j_2}^l,\, \ldots,\, \alpha_{j_l}^l$, каждая из которых близка к α_j^*:

$$\left\|\alpha_j^* - \alpha_{j_k}^l\right\|^2 \leq \mu_j,\ k = \overline{1,\, m},$$

и их суммарный вес близок к p_j^*:

$$\left|p_j^* - \sum_{k=1}^{m} p_{j_k}^l\right| = \pi_j.$$

Так как планы с большим числом точек нежелательны, то необходимо производить процедуру “очистки” плана, которая состоит из следующих шагов:

1) Точки с малыми весами, не тяготеющие ни к одной из групп, указанных в п. 4, выбрасываются. Их веса перераспределяются между оставшимися точками.

2) Точки, тяготеющие к одной из групп, объединяются по правилу

$$p_j^l = \sum_{k=1}^{m} p_{j_k}^l, \quad \alpha_j^l = 1/p_j^l \sum_{k=1}^{m} x_{j_k}^l p_{j_k}^l.$$

2.4. Алгоритм “округления” непрерывного плана до точного

1) Вычислим числа $\sigma_i^{'}$ и $\sigma_i^{''}$ по формулам

$$\sigma_i^{'} = \lceil (v-q)\, p_i^* \rceil\,; \quad \sigma_i^{''} = \lfloor v p_i^* \rfloor\,,\ i = \overline{1,\, q}.$$

Здесь

- $\lceil z \rceil$ — ближайшее к z целое число, большее z;
- $\lfloor z \rfloor$ — целая часть числа z.

2) Вычислим v' и $v^{''}$, воспользовавшись выражениями

$$v^{'} = v - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^{'}; \quad v^{''} = v - \sum_{i=1}^{q} \sigma_i^{''}.$$

При этом если $v^{'} < v^{''}$, то $\sigma_i = \sigma_i^{'}$ для $i = \overline{1,\, q}$ и $v_l = v^{'}$. В противном случае $\sigma_i = \sigma_i^{''}$, $v_l = v^{''}$.

3) Величины $vp_i^* - \sigma_i$ $\left(i = \overline{1,\, q}\right)$ расположим в порядке убывания их значений. Положим $j = 1$.

4) Если $vp_j^* - \sigma_j$ стоит на одном из первых v_l мест в указанном упорядоченном наборе, то положим $s_j = 1$ в противном случае $s_j = 0$.

5) Если $j < q$, увеличим j на единицу перейдём на шаг 4. В противном случае сформируем приближенный дискретный план

$$\xi_v^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^*, & \alpha_2^*, & \ldots, & \alpha_q^* \\ \frac{\sigma_1 + s_1}{v}, & \frac{\sigma_2 + s_2}{v}, & \ldots, & \frac{\sigma_q + s_q}{v} \end{pmatrix}.$$

2.5. Текст программы на языке Python

2.6. Результат работы программы

Тут приводили $X\left[M\left(\xi_0\right)\right]$, $X\left[M\left(\xi_0\right)\right]$, l, q, полученный план $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ p)$.

3. Вывод

В ходе лабораторной работы было проведено исследование двойственной процедуры планирования для непрерывного D-оптимального плана.