



# **Mitschrieb der Vorlesung**

## **“Systemtheorie und Regelungstechnik”**

(SS 2010)

Dozent: Dr.-Ing. A. Peter

Textsatz von William Glover

Stand: 29. Juni 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)</b>	<b>3</b>
1.1	Beispiele zum Aufstellen eines BSB . . . . .	3
1.2	Häufig verwendete Übertragungsglieder . . . . .	8
1.3	Nichtlineare Glieder und Linearisierung . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Systembeschreibung im Zeitbereich</b>	<b>10</b>
2.1	Differentialgleichungen . . . . .	10
2.1.1	Aufstellen der DGL . . . . .	10
2.1.2	Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	11
2.2	Übertragungsverhalten . . . . .	12
2.2.1	Gewichtsfunktion und Faltung . . . . .	12
2.2.2	Eigenschaften . . . . .	13
2.2.3	Sprungsantwort und Impulsantwort . . . . .	14
2.3	Darstellung im Zustandsraum . . . . .	15
2.3.1	Numerische Simulation . . . . .	18
2.3.2	Lineare Systeme . . . . .	19
2.3.3	Aufstellen der Zustandsgleichung aus BSB und DGL . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Systembeschreibung im Bildbereich</b>	<b>22</b>
3.1	Laplace-Transformation . . . . .	22
3.1.1	Grundlagen . . . . .	22
3.1.2	Lösung einer DGL . . . . .	23
3.2	Übertragungsfunktion ÜF . . . . .	24
3.3	Ortskurve . . . . .	25
3.4	Bode-Diagramm . . . . .	26
3.4.1	Definition . . . . .	26

3.4.2	Bode-Diagramme häufig verwendeter Übertragungsglieder . . . .	27
3.4.3	Rechenregeln . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Analyse von Systemeigenschaften</b>	<b>29</b>
4.1	Stabilität . . . . .	29
4.1.1	Definitionen und Bedingungen . . . . .	29
4.1.2	Hurwitz-Kriterium . . . . .	31
4.1.3	Nyquist-Kriterium . . . . .	33
4.2	Steuerbarkeit . . . . .	34
4.3	Beobachtbarkeit . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Reglerentwurf</b>	<b>36</b>
5.1	Reglerentwurf im Bildbereich . . . . .	37
5.1.1	Fehlt noch . . . . .	38
5.1.2	Forderungen für die Reglersynthese . . . . .	38
5.1.3	Auswahl geeigneter Glieder zur dynamischen Korrektur . . . . .	40
5.1.4	Reglersynthese auf Basis des Bodediagramms . . . . .	41



## 0 Vorwort

**Systemtheorie, Kybernetik:** Allgemeine, formale Wissenschaft von der Struktur, den Relationen und dem Verhalten dynamischer, insbesondere komplexer Systeme, die gewisse allgemeine Eigenschaften realer Systeme aus den verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit widerspiegeln.

### Ziele

#### Beschreibung dynamischer Systeme

**Methoden:** Modellierung (z.B. als Blockschaltbild, DGL oder Übertragungsfunktion), Simulation (kostengünstig, ungefährlich), ...

#### Analyse dynamischer Systeme

Fragestellungen wie z.B. ist das System...

- ...stabil?
- ...steuerbar?
- ...schwingungsfähig?

#### Beeinflussung dynamischer Systeme

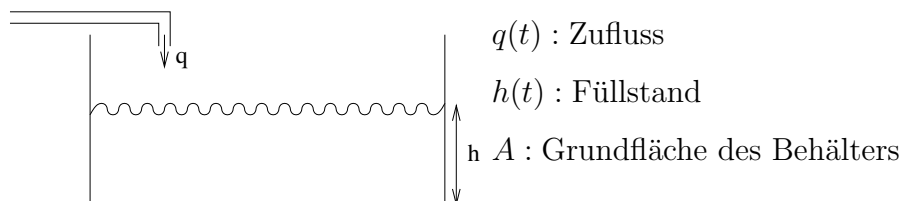
Ziel der Systemtheorie ist ein *automatisierter, sicherer, optimaler Betrieb von technischen Systemen*. Dies kann auf zwei Arten erreicht werden

- **Regelung (kont. Systemzustände):** Ansteuerung des Systems, sodass die Ausgangsgröße den gewünschten Sollverlauf erreicht
- **Steuerung (diskrete Systemzustände):** Bei gestörten oder zum Teil unbekannten Systemen fortlaufende Systembeobachtung und Rückführung.

# 1 Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)

## 1.1 Beispiele zum Aufstellen eines BSB

**Beispiel 1.1** (Füllen eines Behälters).



Lässt sich hier eine Gesetzmäßigkeit erkennen? Ja! Volumenbilanz:

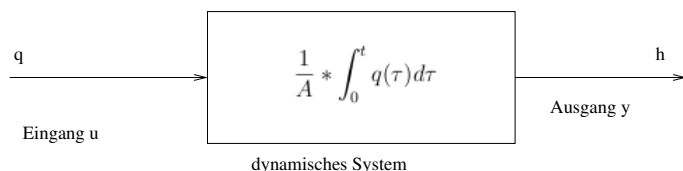
$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau (+v_0)$$

$v_0$ : Volumen zum Zeitpunkt  $t = 0$

$\Rightarrow$  für  $v_0 = 0$  gilt:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) d\tau$$

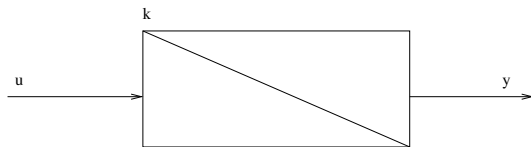
Diese Abhängigkeit lässt sich als ein sogenanntes *Blockschaltbild* wie folgt darstellen:



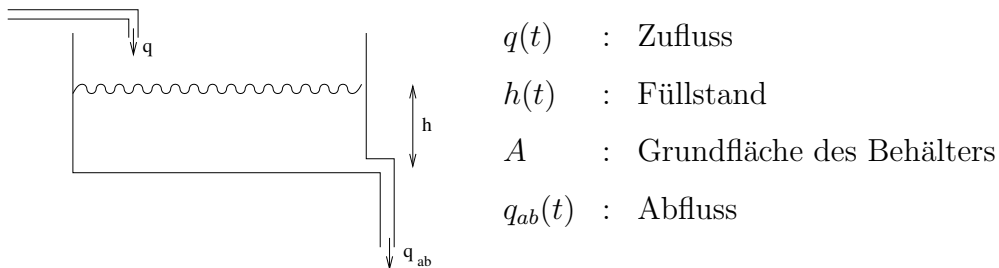
Es ist naheliegend, für übliche Operationen eine Bibliothek mit Standard-Blöcken anzulegen, im hier betrachteten Fall z.B. das sogenannte *Integrierglied* (I-Glied). Die allgemeine Integrationsfunktion

$$y(t) = k * \int_0^t u(\tau) d\tau$$

wird durch den folgenden Standardblock beschrieben:



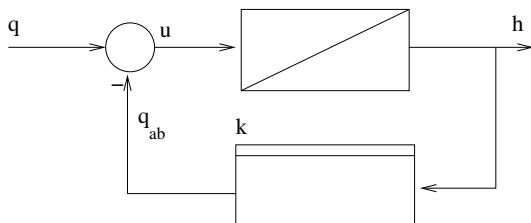
**Beispiel 1.2** (Erweiterung des Behälters um einen Ablauf).



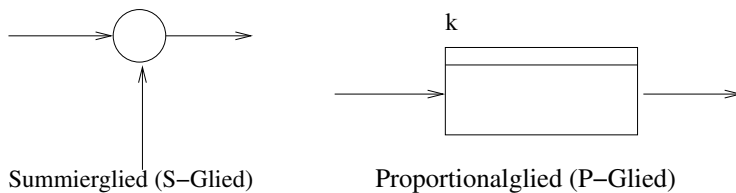
Für diesen erweiterten Fall wird erneut die Volumenbilanz aufgestellt:

$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) - q_{ab} d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Diese lässt sich unter der Annahme, dass  $q_{ab}$  von der aktuellen Füllhöhe abhängt, erneut in einem Blockschaltbild folgendermaßen darstellen:



Hier wurden bereits zwei weitere, wichtige Standardblöcke eingeführt:

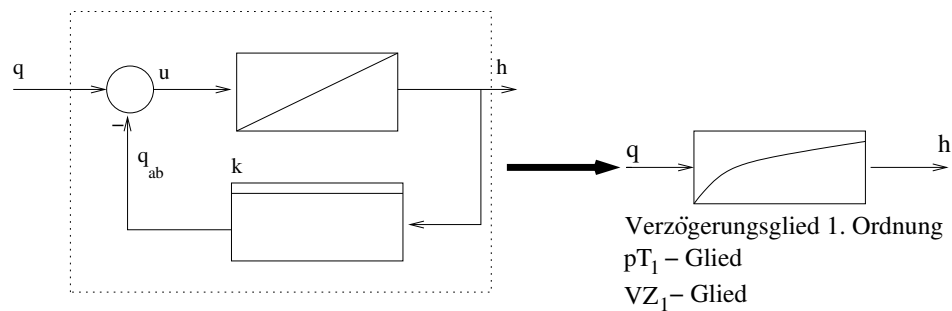


Anhand des Blockschaltbild erkennt man sehr leicht, dass der Füllstand  $h(t)$  sich nach einer gewissen Zeit nicht mehr ändert. Der aktuelle Füllstand wird zurückgeführt und

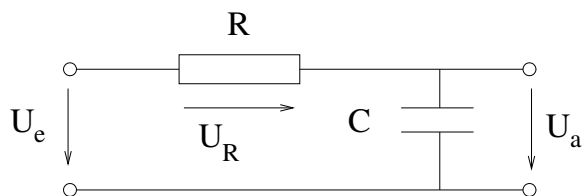


vor der Integration von  $q(t)$  abgezogen. Sobald gilt  $q_{ab} = q$ , bleibt  $h(t)$  konstant.  $u(t)$  wird Null (Stationärer Zustand)!

Da das beschriebene Systemverhalten sehr häufig vorkommt, wird dieses Blockschaltbild zu einem eigenen Standardblock zusammengefasst:



### Beispiel 1.3 (RC-Glied).



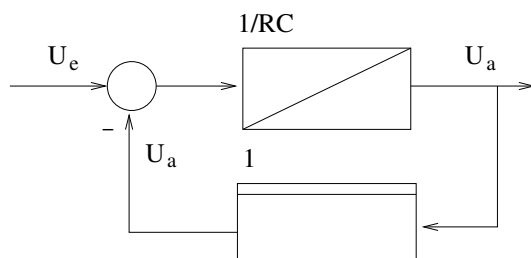
Das abgebildete RC Glied wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 U_a(t) &= \frac{1}{C} * \int_0^t i(\tau) d\tau \\
 U_e &= U_R + U_a \quad \Rightarrow U_R = U_e - U_a \\
 \rightarrow i &= \frac{U_R}{R} \\
 \Rightarrow i &= \frac{1}{R}(U_e - U_a)
 \end{aligned}$$

beschrieben. Für  $U_a$  ergibt sich daraus die Gleichung

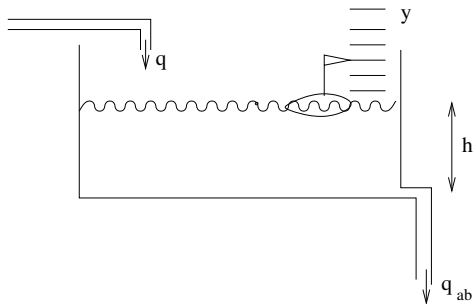
$$U_a(t) = \frac{1}{RC} * \int_0^t U_e(\tau) - U_a(\tau) d\tau$$

Auch diese Funktion wird anschließend als Blockschaubild dargestellt:



**Man erkennt:** Es handelt sich hier ebenfalls um ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. Unabhängig von der physikalischen Realisierung haben beide Systeme die gleiche dynamische Struktur!

**Beispiel 1.4** (Erweiterung des Behälters um einen Schwimmer).



$h$  :  $y$  in Ruhe

$m$  : Masse des Schwimmers

$a$  : Fläche des Schwimmers

$\rho$  : Dichte der Flüssigkeit

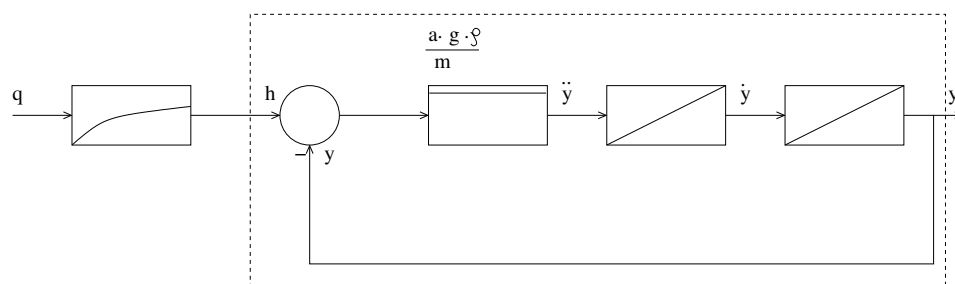
Die Auftriebskraft ist gegeben durch  $F = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$ . Durch Umformen lässt sich hieraus die vom Zeiger des Schwimmers angezeigte Skalaposition berechnen:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} (h(t) - y(t))$$

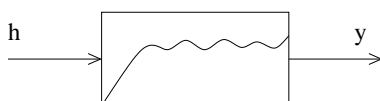
$$\Rightarrow y(t) = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} \int_0^t \int_0^\tau h(T) - y(T) dT d\tau$$

## BSB

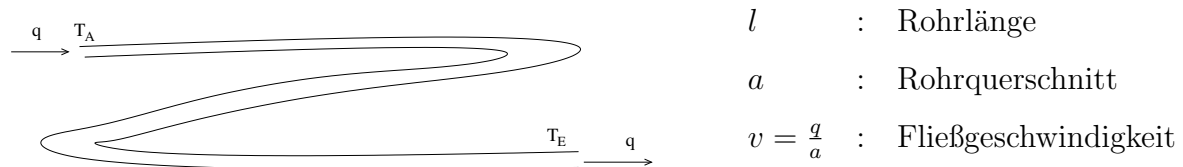


$PT_2$ -Glied; Verzögerungsglied 2. Ordnung

Auch für das  $PT_2$ -Glied wird ein eigenes Standardsymbol definiert:



## Beispiel 1.5 (Zuleitung).



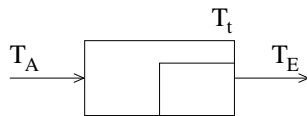
Die Zeit, bis eine Probenmenge das Rohr durchflossen hat, wird *Totzeit*  $T_t$  genannt. Sie ist gegeben durch

$$T_t = \frac{l}{v} = \frac{l \cdot a}{q}$$

$T_A$  und  $T_E$  sind die Temperaturen am Rohranfang bzw. Rohrende. Unter der Annahme, dass das Rohr perfekt isoliert ist, beim Transport also keine Wärme verloren geht, hängen diese beiden Größen über die Sprungfunktion

$$T_E(t) = T_A(t - T_t)$$

zusammen. Dieser Zusammenhang wird im Blockschaubild durch das sogenannte *Totzeitglied* dargestellt:



## Blockschaltbilder

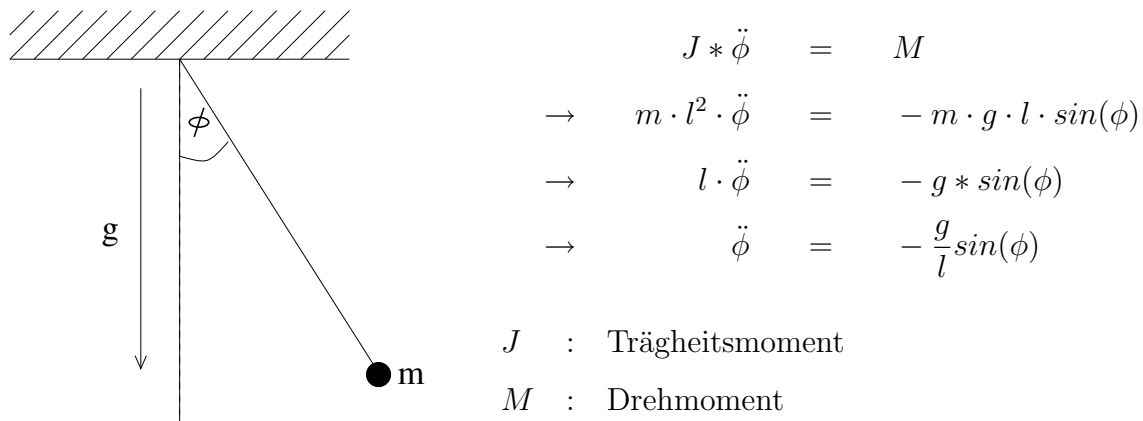
- beschreiben Ursache-Wirkungszusammenhänge in einer allgemeinen Form
- sind insbesondere bei komplexen Systemen oft übersichtlicher als Darstellungen in Gleichungen
- lassen sich schrittweise aufbauen und verifizieren
- sind Basis für numerische Simulationen( $\rightarrow$  Simulink)

## 1.2 Häufig verwendete Übertragungsglieder

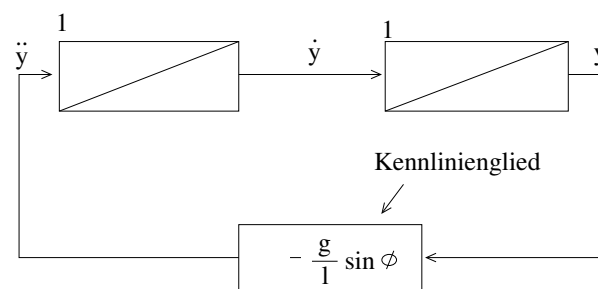
- elementare: P, I, D, S,  $T_t$
- zusammengesetzte:  $PT_1, PT_2$
- nichtlineare: KL, M

In der Vorlesung werden hauptsächlich elementare und zusammengesetzte Übertragungsglieder verwendet!

## 1.3 Nichtlineare Glieder und Linearisierung



Erneut wird das Blockschaltbild aufgestellt, unter Verwendung des sog. *Kennliniengliedes* (KL-Glied):



# 1 BESCHREIBUNG DYNAMISCHER SYSTEME DURCH DAS BLOCKSCHALTBILD (BSB)

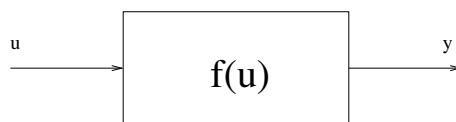
---

Ein nichtlineares System lässt sich zwar numerisch simulieren, stellt aber ein Problem bei der Analyse oder beim Regelentwurf dar. Als Hilfsmittel wird daher eine Linearisierung im Arbeitspunkt verwendet.

**Arbeitspunkt:** Betriebszustand eines Systems, in dem die zeitveränderlichen Größen fest sind (stationärer Zustand) und sich das System in einem gewünschten Sollzustand befindet.

Wird das System nun um den Arbeitspunkt linearisiert, sind die Abweichungen zwischen nichtlinearem und linearem Modell *in der Umgebung um diesen Arbeitspunkt herum* nur klein. Bei zu großer Abweichung vom Arbeitspunkt bildet das lineare Modell das nichtlineare nur unzureichend ab. Der Arbeitspunkt muss dann verändert/neu bestimmt werden.

## Linearisierung eines KL-Gliedes



$$y = f(u)$$

$$y_0 + \Delta y = f(u_0 + \Delta u)$$

Es wird nun die Taylorreihen-Entwicklung für diese Funktion durchgeführt:

$$y_0 + \Delta y = f(u_0) + \left[ \frac{df(u)}{du} \right]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots$$

$$\Rightarrow y_0 = f(u_0)$$

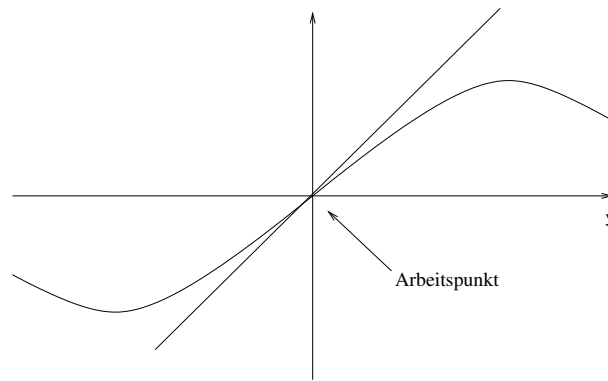
$$\Delta y = \left[ \frac{df(u)}{du} \right]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots \quad (\text{Nichtlineare Terme werden Vernachlässigt!})$$

z.B.  $y = \sin(\phi)$ : Linearisierung um den Arbeitspunkt  $\phi_0 = 0$

$$y_0 = 0$$

$$\Delta y = [\cos(\phi)]_{\phi_0=0} \cdot \Delta \phi$$

$$\Rightarrow T_y = 1 \cdot \Delta \phi$$



## 2 Systembeschreibung im Zeitbereich

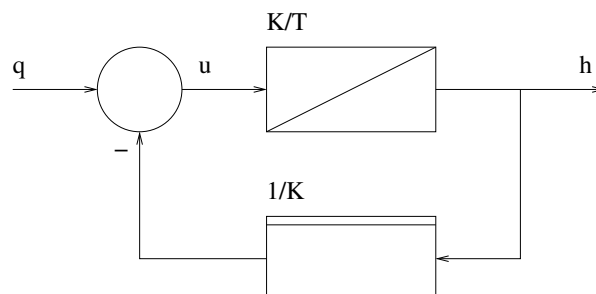
### 2.1 Differentialgleichungen

#### 2.1.1 Aufstellen der DGL

Die Differentialgleichung eines Systems kann auf 2 Arten bestimmt werden:

- aus den physikalischen Gleichungen, z.B.:
  - Bewegungsgleichungen:  $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$  ;  $M(t) = J \cdot \ddot{\phi}$
  - Bilanzierung von Volumen:  $q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = \dot{v}(t)$
- aus dem Blockschaubild:
  - eventuell Hilfsgrößen einführen (z.B. Ausgang von S-Gliedern, ...)
  - Entgegen der Signalflussrichtung durch das BSB gehen und Funktionsbeziehungen der Blöcke auswerten

**Bsp.:**  $PT_1$ -Glied



$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{K}{T} \int_0^t u(\tau) d\tau \\ \rightarrow \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot u(t) \\ u(t) &= q - \frac{1}{K} \cdot h(t) \\ \Rightarrow \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot (q(t) - \frac{1}{K} \cdot h(t)) \\ \Rightarrow \frac{1}{T} \cdot h(t) + \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot q(t) \\ \Rightarrow \underbrace{h(t) + T \cdot \dot{h}(t)}_{\text{DGL in } h(t)} &= \underbrace{k \cdot q(t)}_{\text{Anregung}} \\ \rightarrow \text{homogene DGL, falls } q(t) = 0 \text{ (Anregung} &= 0)\end{aligned}$$

### 2.1.2 Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Beispiel 2.1** (Lösung der DGL des  $PT_1$ -Gliedes).

Gegeben ist die Gleichung

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot u(t)$$

mit  $y(0) = y_0$  und beliebigem  $u(t)$  für  $t > 0$ .

- **1. Schritt:** charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}T \cdot s + 1 &= 0 \\ \rightarrow s_1 &= -\frac{1}{T} \\ \Rightarrow y_h(t) &= C_1 \cdot y_1(t) = c_1 * e^{-\frac{t}{T}} \quad (\text{Formelsammlung})\end{aligned}$$

- **2. Schritt:** Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}y_p(t) &= C_1(t) e^{-\frac{t}{T}} \\ \text{ableiten: } \dot{y}_p(t) &= \frac{-C_1(t)}{T} e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t) e^{-\frac{t}{T}}\end{aligned}$$

In die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{aligned}K \cdot u(t) &= T \cdot \left( -\frac{C_1(t)}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) + \cancel{C_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}} \\ \dot{C}_1(t) &= \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{t}{T}} \cdot u(t) \\ \text{Integrieren: } C_1(t) &= \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \\ \Rightarrow y_p(t) &= \left[ \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-\frac{t}{T}} \\ &= \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- **3. Schritt:** Zusammenfassen zur Gesamtlösung

$$\begin{aligned}y(t) &= y_n(t) + y_p(t) \\&= c_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- **4. Schritt:**  $C_1$  bestimmen

$$\begin{aligned}y(0) &= C_1 = y_0 \\ \Rightarrow \text{Lösung: } y(t) &= \underbrace{y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}}_1 + \underbrace{\int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau}_2\end{aligned}$$

- **Formelteil 1** ist die homogene Lösung. Sie ist nur vom Anfangswert  $y_0$  abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *freie Bewegung*
- **Formelteil 2** ist die Partikulärlösung. Sie ist nur von der Eingangsfunktion  $u(t)$  abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *erzwungene Bewegung*

## 2.2 Übertragungsverhalten

### 2.2.1 Gewichtsfunktion und Faltung

Das Übertragungsverhalten von  $u(t)$  zu  $y(t)$  wird durch den Term

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau$$

definiert. Er beschreibt das Übertragungsverhalten bei verschwindenden Anfangsbedingungen ( $y_0 = 0$ ). Mit der Funktion

$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

lässt sich das Integral zu

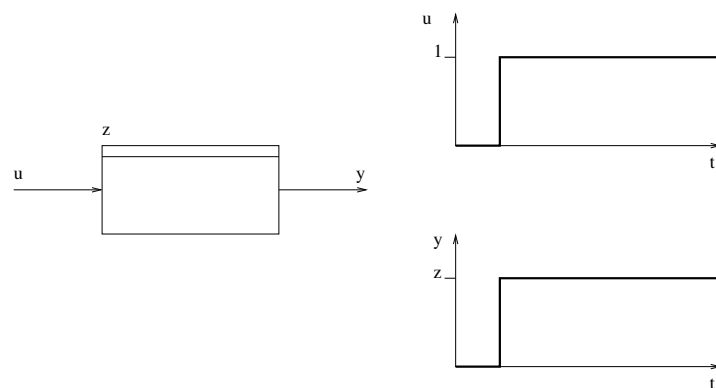
$$y(t) = \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{Faltungsintegral}} = g(t) * u(t)$$

vereinfachen. Das Zeichen  $*$  wird als “gefaltet mit” ( $g(t)$  gefaltet mit  $u(t)$ ) gelesen.  $g(t)$  nennt man *Gewichtsfunktion*. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten des Systems vollständig!

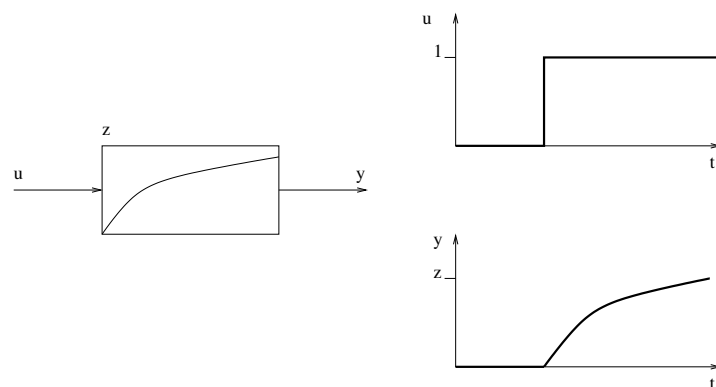


**Es gilt:**  $g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

Die Gewichtsfunktion  $g(t)$  gibt an, mit welchem Gewicht der Wert der Eingangsfunktion  $u(t)$  von *zurückliegenden* Zeitpunkten  $(t - \tau)$  in den Wert der Ausgangsfunktion  $y(t)$  zum *aktuellen* Zeitpunkt  $t$  eingeht.



Der Ausgang hängt nur vom aktuellen Eingang ab.



In diesem Fall hingegen ist der Ausgang auch von vergangenen Werten abhängig.

### 2.2.2 Eigenschaften

**Lineare** und **zeitinvariante** Systeme lassen sich durch die Gewichtsfunktion vollständig beschreiben. (Entspricht der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten)

**Linearität:** Ein System ist linear, wenn...

- ...das Superpositionsprinzip:  $y(t) = g(t) * [u_1(t) + u_2(t)] = g(t) * u_1(t) + g(t) * u_2(t)$
- ...das Verstärkungsprinzip:  $y(t) = g(t) * [\alpha \cdot u(t)] = \alpha \cdot [g(t) * u(t)]$

gelten.

**Zeitinvarianz:** Das System ist invariant gegenüber Zeitverschiebungen:

Aus  $y(t) = g(t) * u(t)$  muss für eine beliebige Zeitverschiebung  $T$  folgen, dass  
 $y(t - T) = g(t) * u(t - T)$

**Kausalität:** Das Ausgang  $y(t)$  eines kausalen Systems hängt *nur* vom Verlauf des Eingangs  $u(t)$  für Zeiten  $t \leq t_0$  ab. Das System hängt also nur von vergangenen Eingangswerten ab. Für  $g(t)$  kausaler Systeme gilt also:

$$g(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

### 2.2.3 Sprungsantwort und Impulsantwort

**Sprungantwort:** Auf den Systemeingang wird ein *Einheitssprung* gegeben



$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Antwort des Systems heißt *Sprungantwort* und wird beschrieben durch

$$h(t) := y(t)$$

Mit dem Flächenintegral  $y(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$  vereinfacht sich das zu

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) \cdot \underbrace{\sigma(t - \tau)}_{=1} d\tau \\ h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die Sprungantwort, genau wie die Gewichtsfunktion, charakterisiert das dynamische System vollständig!

**Impulsantwort:** Die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist die formale Ableitung des Einheitssprungs.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \Leftrightarrow \int_0^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

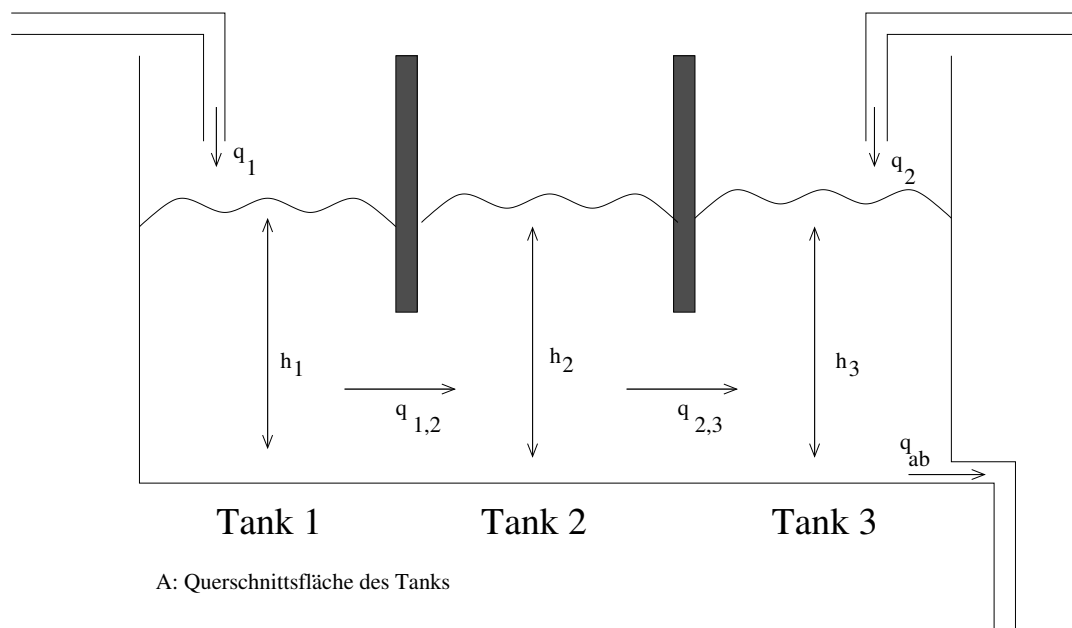
Für die Impulsantwort gilt damit:

$$\int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

$\Rightarrow$  Die Gewichtsfunktion  $g(t)$  kann auch als Impulsantwort interpretiert werden.

## 2.3 Darstellung im Zustandsraum

**Beispiel 2.2** (System aus 3 verbundenen Wassertanks).



Volumenbilanz:

$$\text{Tank 1: } \dot{h}_1 = \frac{1}{A}(q_1 - q_{1,2})$$

$$\text{Tank 2: } \dot{h}_2 = \frac{1}{A}(q_{1,2} - q_{2,3})$$

$$\text{Tank 3: } \dot{h}_3 = \frac{1}{A}(q_2 + q_{2,3} - q_{ab})$$

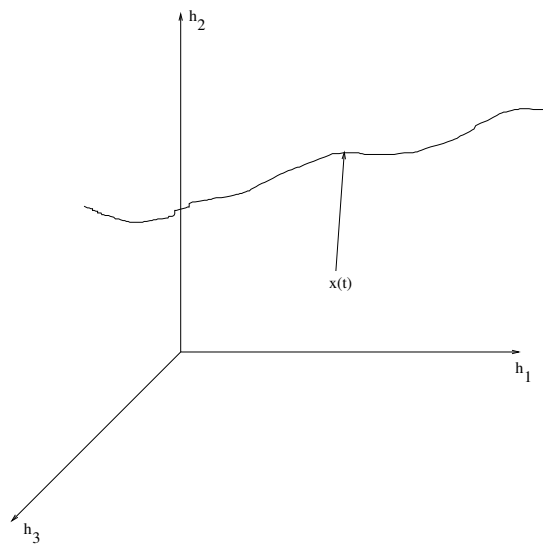
**Annahme:** Der Ausgleichsfluss zwischen den Tanks ist proportional zur Füllstands Differenz:

$$q_{1,2} = c \cdot (h_1 - h_2); q_{2,3} = c \cdot (h_2 - h_3); q_{ab} = ch_3$$

$$\begin{aligned} \text{damit: } \dot{h}_1 &= \frac{1}{A}(q_1 - ch_1 + ch_3) \\ \dot{h}_2 &= \frac{1}{A}(ch_1 - 2ch_2 + ch_3) \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{A}(q_2 + ch_2 - 2ch_3) \end{aligned}$$

Kennt man  $h_1, h_2, h_3$ , so ist der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  vollständig bestimmt.  $\Rightarrow h_1, h_2, h_3$  sind die Zustandsgrößen des Systems.

**Geometrische Deutung:**  $h_1, h_2, h_3$  spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf, den sogenannten *Zustandsraum*.



$\vec{x}(t)$  : Zustandsvektor

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}$$

Das System wird durch  $q_1(t)$  und  $q_2(t)$  angeregt, diese sind die *Eingangsgrößen*. Aus ihnen lässt sich der sogenannte *Eingangsvektor* bestimmen:

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

**Verallgemeinerung**

Das System lässt sich durch  $n$  Zustände beschreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das System besitzt  $m$  Eingänge:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Dieses System lässt sich durch  $n$  DGL 1. Ordnung beschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = f_1(\vec{x}, \vec{u}) \\ \vdots \\ x_n = f_n(\vec{x}, \vec{u}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \text{Zustandsdifferentialgleichung} \end{array}$$

Durch Messung des Systems wird aus dem aktuellen Zustand  $\vec{x}(t)$  und dem Eingang  $\vec{u}(t)$  der Ausgangsvektor  $\vec{y}(t)$  bestimmt. Die daraus resultierende Gleichung

$$\vec{y}(t) = g(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

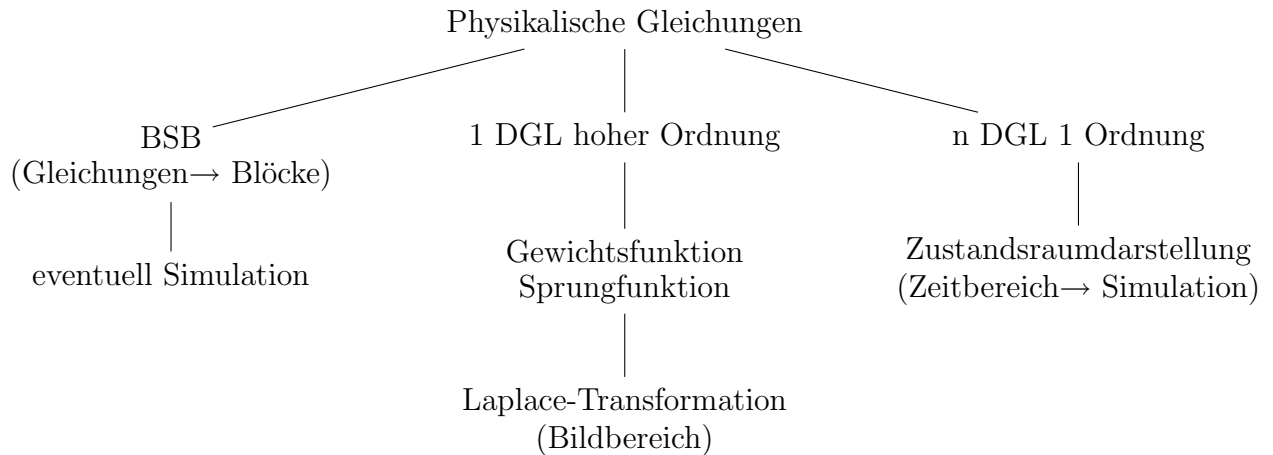
heißt *Ausgangsgleichung*.  $\vec{y}(t)$  ist gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Da man bei komplexen Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen für jedes Eingang/Ausgangspaar eine eigene Gewichtsfunktion aufstellen müsste, bietet sich bei der Simulation solcher Systeme die Zustandsraumdarstellung an.

Die Beschreibung eines Systems im Zustandsraum oder allgemein durch Gleichungen ist

der Darstellung im Blockschaubild äquivalent. Je nach Anwendung wird die optimale Beschreibung gewählt.



### 2.3.1 Numerische Simulation

gegeben:

$$\vec{\dot{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) (*)$$

$$\text{Anfangswert } \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

**gesucht:** numerische Näherung  $\tilde{x}$  für die Lösung der DGL auf einem Zeitintervall  $[0, t_{max}]$

**Idee:** Approximation von  $\vec{\dot{x}}(t)$  durch den Differenzenquotienten:

$$\vec{\dot{x}} \approx \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} \text{ mit Zeitschritt } h$$

**Einsetzen in (\*) :**

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} &\approx \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \Rightarrow \vec{x}(t) + h \cdot \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) &\approx \vec{x}(t+h) \end{aligned}$$

mit festen Zeitschritten  $t_i = i \cdot h$

$$\underbrace{\vec{\tilde{x}}(t_{i+1})}_{\text{neuer Zustand}} = \underbrace{\vec{\tilde{x}}(t_i)}_{\text{alter Zustand}} + h \cdot \vec{f}(\vec{\tilde{x}}(t_i), \vec{u}(t_i))$$

Diese Gleichung lässt sich mithilfe des *Euler-Verfahrens* lösen.

### 2.3.2 Lineare Systeme

#### Fortsetzung Bsp 2.2:

Sortieren der Zustände und der Eingänge:

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= -\frac{C}{A}h_1(t) + \frac{C}{A}h_2(t) + \frac{1}{A}q_1(t) \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{C}{A}h_1(t) - \frac{2C}{A}h_2(t) + \frac{C}{A}h_3(t) \\ \dot{h}_3(t) &= \frac{C}{A}h_2(t) - \frac{2C}{A}h_3(t) + \frac{1}{A}q_2(t)\end{aligned}$$

Die obige Gleichung lässt sich auch in Vektoren und Matrizen ausdrücken:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{C}{A} & +\frac{C}{A} & 0 \\ \frac{C}{A} & -\frac{2C}{A} & \frac{C}{A} \\ 0 & \frac{C}{A} & -\frac{2C}{A} \end{pmatrix}}_{\text{Systemmatrix } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}}_{\text{Zustands-vektor } \vec{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{pmatrix}}_{\text{Eingangs-matrix } \mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Eingangsvektor } \vec{u}}$$

Diese Gleichung gilt nur bei linearen Systemen und ist außerdem eine beliebte **Klausuraufgabe!** Allgemein gilt:

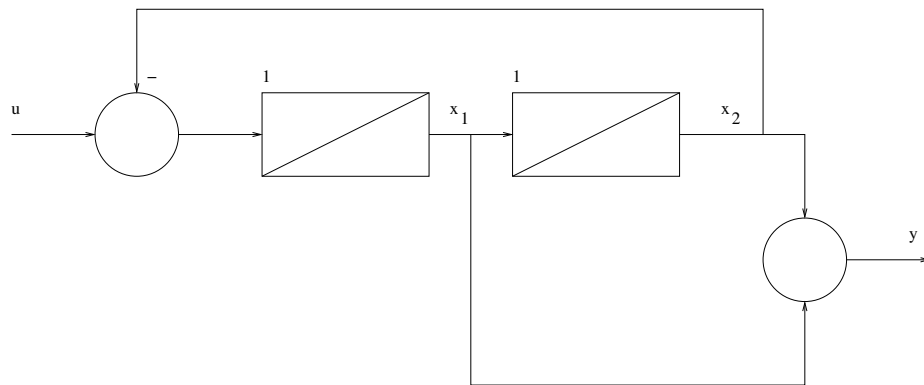
$$\begin{aligned}\vec{\dot{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \vec{u}(t) \quad \text{Zustandsdifferentialgleichung} \\ y(t) &= \mathbf{C} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \vec{u}(t) \quad \text{Ausgangsgleichung}\end{aligned}$$

### 2.3.3 Aufstellen der Zustandsgleichung aus BSB und DGL

#### aus dem Blockschaubild

**Idee:** Jedes I-Glied (und  $PT_1$ ) speichert einen Zustand. Um die Zustandsgleichung aufzustellen muss also wie folgt vorgegangen werden:

1.  $PT_2$ -Glieder zerlegen
2. Alle Ausgänge von I- und  $PT_1$ -Gliedern als Zustände einführen (Buchstaben im BSB zuweisen!)
3. Entgegen der Signalflussrichtung die Gleichungen bestimmen

**Beispiel 2.3.**


$$\begin{aligned}
 y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\
 x_2(t) &= \int x_1(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) \\
 x_1(t) &= \int u(\tau) - x_2(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t)
 \end{aligned}$$

**Vektoriell:**

$$\vec{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\vec{\dot{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \vec{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t)$$

$$\vec{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \vec{x}(t)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

**Aus der Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_{n-1} u^{(n-1)}(t)$$



(mit  $a_n = 1, b_n = 0$ , sonstige  $a_i, b_j$  beliebig!)

Nach höchster Ableitung auflösen:

$$\Rightarrow y^{(n)}(t) = \underbrace{[b_0 u(t) - a_0 y(t)]}_{=x_1(t)} + \underbrace{[b_1 \dot{u}(t) - a_1 \dot{y}(t)]}_{=\ddot{x}_2(t)} + \cdots + \underbrace{[b_{n-1} u^{(n-1)}(t) - a_{n-1} y^{(n-1)}(t)]}_{=x_n^{(n)}(t) \Rightarrow y(t) = x_n(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_n(t) (**) \\ \Rightarrow \dot{x}_1(t) &= -a_0 x_n(t) + b_0 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1 - a_1 x_n(t) + b_1 u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= x_{n-1} - a_{n-1} x_n(t) + b_{n-1} u(t) \end{aligned}$$

**Vektoriell:**

$$\vec{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u(t)$$

Aus (\*\*) folgt damit durch Integrieren von  $x_n(t)$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

## 3 Systembeschreibung im Bildbereich

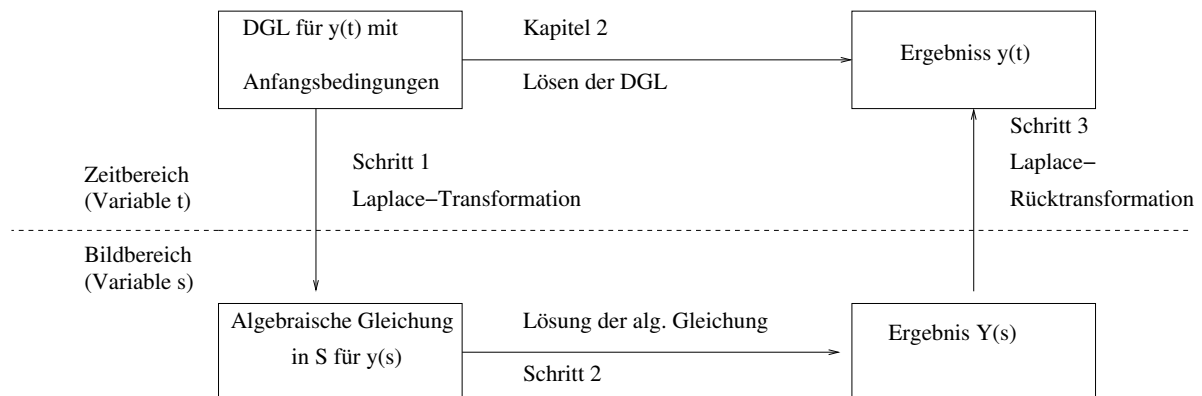
### 3.1 Laplace-Transformation

#### 3.1.1 Grundlagen

**Idee:** Die Lösung einer algebraischen Gleichung ist einfacher als Lösung einer DGL.

Allerdings ist eine Transformation notwendig.

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$
$$y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{ts} ds$$



#### Vorraussetzung

1. Es muss  $y(t) = 0$  für  $t < 0$  sein! Ansonsten stimmt das Modell nicht mit der Realität überein, das System würde antworten, *bevor* ein Eingang angelegt ist. Schreibweise am besten:  $y(t) \cdot \sigma(t)$   
 $y(t)$  kann Gewichtsfunktion eines Systems sein  $\Rightarrow$  System ist kausal!
2. Das uneigentliche Integral muss konvergieren.

Der "Umweg" wird durch tabellierte Korrespondenzen attraktiv. Im Allgemeinen ist die Rücktransformation am aufwendigsten, da die Lösung aufgespalten und in Teilen transformiert werden muss.

### 3.1.2 Lösung einer DGL

**Beispiel 3.1** (Sprungantwort eines  $PT_1$ -Gliedes).

**DGL:**

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

mit  $y(0) = y_0$  und  $u(t) = u_0\sigma(t)$

**Schritt 1:** Regel 1 und Regel 5

$$T \cdot (sY(s) - y_0) + Y(s) = k \cdot U(s)$$

$\Rightarrow$  Eingangssignal: Regel 1, Korr. 2

$$U(s) = u_0 \cdot \frac{1}{s}$$

**Schritt 2:** Nach  $Y(s)$  auflösen

$$\begin{aligned} Y(s)(sT + 1) &= kU(s) + Ty_0 \\ Y(s) &= \frac{T}{sT+1}y_0 + \frac{k}{sT+1}u(s) \\ \text{mit } U(s) &= u_0 \cdot \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \underbrace{\frac{T}{sT+1}y_0}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k}{sT+1} \cdot \frac{u_0}{s}}_{Y_2(s)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Rücktransformation

$$Y_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}y_0$$

mit Korr. 6:

$$Y_1(t) = e^{-\frac{1}{T}t} \cdot y_0 \cdot \underbrace{\sigma(t)}_{=0 \text{ für } t < 0}$$

Partialbruchzerlegung für  $Y_2(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{ku_0}{(sT+1)s} &= \frac{A}{sT+1} + \frac{B}{s} \\ \Rightarrow k \cdot u_0 &= A \cdot s + B(sT+1) \end{aligned}$$

**HIER FEHLT WAS!!!!**

## 3.2 Übertragungsfunktion ÜF

aus Bsp 3.1 :

$$Y(s) = \underbrace{\frac{T}{sT+1}y_0}_{\text{nur vom Anfangswert abh. Freie Bewegung}} + \underbrace{\frac{k}{sT+1}u(s)}_{\text{vom Eingang } U(s) \text{ abh. Erzwungene Bew.} := G(s)}$$

$G(s)$  heißt *Übertragungsfunktion*. Sie beschreibt das System vollständig. Das Übertragungsverhalten bei verschwindendem Anfangswert, also  $y(s) = G(s) \cdot u(s)$  entspricht  $y(t) = g(t) * u(t)$  im Zeitbereich. Es gilt also  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ . (Regel 9)

Im Bildbereich können Systeme sehr einfach verknüpft werden, z.B. durch Serienschaltungen:

$$\begin{aligned} V(s) &= G_1(s) \cdot U(s) \\ Y(s) &= G_2(s) \cdot V(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot U(s) \end{aligned}$$

### Beziehung zwischen DGL und ÜF

z.B. Beispiel 3.1:

$$\underbrace{T}_{a_1} \cdot \dot{y}(t) + \underbrace{1}_{a_0} y(t) = \underbrace{k}_{b_0} \cdot U(t)$$

$$G(s) = \frac{\overbrace{k}^{b_0}}{\underbrace{T}_{a_1} s + \underbrace{1}_{a_0}}$$

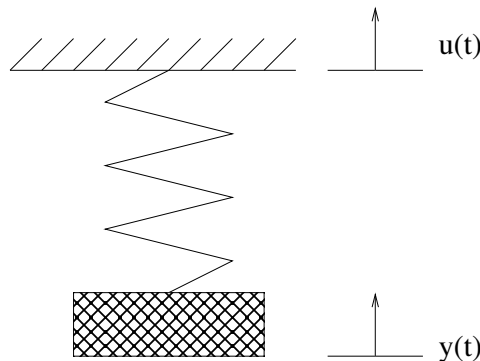
**allgemein:** DGL der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b(u(t)) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$$

$\Rightarrow$  Rationale ÜF (Regel 5 mit verschwindendem Anfangswert)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_m s^m}{\underbrace{a_0 + a_1 \cdot s + a_n s^n}_{\text{Nullstellen des Nenners} := \text{Pole der ÜF}}}$$

- Falls  $n < m$ : "Reales" System
- Falls  $n < m$ : differenzierendes Verhalten
- falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_\rho = 0$ :  $s^\rho$  kann im Nenner ausgeklammert werden  $\Rightarrow \rho$ -fach integrierend.

**praktische Betrachtung****Beispiel 3.2.** *Harmonische Anregung eines Federschwingers***Messungen**

$\omega$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	10
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	31,4	15,7	10,5	7,9	6,3	5,2	4,5	3,1	0,62
$A(\omega)$	1,04	1,16	1,45	2,1	2,5	1,5	0,9	0,3	0,01
$\Phi(\omega)$	$-\frac{0,4}{31,4} \cdot 360^\circ = -4,5^\circ$	$-9^\circ$	$-17^\circ$	$-45^\circ$	$-90^\circ$	$-139^\circ$	$-160$	$-174$	$-180$

- Der Frequenzgang  $G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$  wird in Stützstellen  $\omega$  definiert
- Damit ist auch die ÜF  $G(s)$  definiert!
- Graphische Darstellung? Die sog. *Ortskurve* wird in Kap. 3.5 beschrieben, das sog. *Bode-Diagramm* in Kap. 3.6

**3.3 Ortskurve**

Die Ortskurve ist ein Kurvenzug, der von  $G(j\omega)$  in der komplexen Ebene beschrieben wird, wenn die Anregungsfrequenz  $\omega$  im Intervall  $(0 \leq \omega \leq \infty)$  variiert wird. Auftragen von  $A(j\omega)$  in einem Zeigerdiagramm (Imaginärteil über Realteil). Durch anschließendes Verbinden der Punkte erhält man die sog. *Ortskurve*.

Die Ortskurve kann auch aus  $G(s)$  berechnet werden:

- I-Glied:  $G(s) = k \cdot \frac{1}{s} \xRightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = k \cdot \frac{1}{j\omega} = \underbrace{k \cdot \frac{1}{\omega}}_{A(\omega)=const.} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{\Phi(\omega)}$
- $T_t$ -Glied:  $G(s) = k \cdot e^{-sT_t}; G(j\omega) = \underbrace{k}_{A(\omega)=const.} \cdot \underbrace{e^{-j\omega T_t}}_{\Phi(\omega)}$

Für eine Übersicht genügt die Betrachtung der Asymptoten der Ortskurve:

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n} \cdot e^{-(j\omega)T_t}$$

### Anfang der Ortskurve:

- falls  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0} = k \text{ Start der OK auf der Re-Achse}$$

- falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_{\rho-1} = 0$   $\rho$ -fach Integrierend

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{b_0 + \dots + b_m}{a_\rho(j\omega)^\rho + \dots + a_n(j\omega)^n} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{(j\omega)^\rho} \cdot \frac{b_0 + \dots}{a_\rho + \dots} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^\rho} \cdot \frac{b_0}{a_\rho} \cdot e^{-j\rho\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{OK}$$

kommt aus dem Unendlichen mit Phasenwinkel  $-\rho\frac{\pi}{2}$

**Ende der Ortskurve:** Das Ende der Ortskurve lässt sich analog zum Anfang über  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega)$  Vgl. auch Skript S. 33

### Beispiel 3.3.

$$G_1(s) = \frac{s+2}{(s+1)^4}$$

mit  $\omega = 1; n = 4; \rho = 0; T_t = 0$

$$G_2(s) = \frac{1}{s+s^2} \cdot e^{-2s}$$

mit  $m = 0; n = 2; \rho = 1; T_t = 2$

**HIER FEHLEN BILDER UND EINE TABELLE**

## 3.4 Bode-Diagramm

### 3.4.1 Definition

Das Bode-Diagramm ist die getrennte graphische Darstellung des *Amplitudenverlaufs*  $A(\omega)$  und des *Phasenverlaufs*  $\Phi(\omega)$  über der Frequenz  $\omega$ . In der Regel werden die Größen

logarithmisch aufgetragen.

Die Amplitude wird auch logarithmisch in Dezibel (dB) dargestellt:

$$A(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} A(\omega)$$

### 3.4.2 Bode-Diagramme häufig verwendeter Übertragungsglieder

#### P-Glied

$$G(j\omega) = k A(\omega)_{dB} = 20 \cdot \log K \Phi(\omega) = 0^\circ$$

#### I-Glied

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow A(\omega)_{dB} = 20 \cdot \log \frac{k}{\omega} = -20 \log \frac{\omega}{k} \Phi(\omega) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$$

Nulldurchgang von A für  $\frac{\omega}{k} = 1$ , also  $\omega = k$

Amplitudenverlauf sinkt um 20 dB, wenn sich  $\omega$  verzehnfacht.

#### $T_t$ -Glied

$$G(j\omega) = k \cdot e^{-j\omega T_t} \text{ mit } k = 1 \Rightarrow A(\omega)_{dB} = 0 \Phi(\omega) = -\omega T_t$$

Phasenverlauf sinkt linear mit der Frequenz  $\omega$ . Durch die logarithmische  $\omega$ -Achse wird der Phasenverlauf gestaucht. → Kurve aus den Stützstellen konstruieren!

$\Phi(\omega)$  ist normalerweise in Grad:

$$\Phi(\omega) = -\omega T_t \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Es gilt  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{T_t}$

$$\Phi(\omega_0) = -1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -57,3^\circ$$

#### $pT_1$ -Glied

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \text{ mit } k = 1 \text{ und } \omega_0 = \frac{1}{T} G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}}$$

$\omega_0$ : Eckfrequenz

- für  $\omega \ll \omega_0$ :  $A(\omega) \approx 1 = 0dB$
- für  $\omega = \omega_0$ :  $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$
- für  $\omega \gg \omega_0$ :  $A(\omega) \approx \frac{\omega_0}{\omega}$   
 $\Rightarrow A(\omega)_{dB} = 20 \log \frac{\omega_0}{\omega} = -20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$

$$G(j\omega) \underset{\text{konj. kompl. erweitern}}{=} \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2} \Rightarrow \Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))} = \arctan \frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = -\arctan \frac{\omega}{\omega_0}$$

**HIER FEHLT WAS!!!**

$pT_2$ -Glieder  $\rightarrow$  Blatt 1-10

**Beispiel 3.4.**

Parameter aus dem Bode-Diagramm ablesen:  $\omega_0 \approx 1 \rightarrow T = \frac{1}{\omega} = 1$  **Auch hier fehlt was**

### 3.4.3 Rechenregeln

**Serienschaltung** Hier fehlt das Bild

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega)$$

mit  $G_i = A_i(\omega)e^{j\Phi_i(\omega)}$

$$G(j\omega) = \underbrace{A_1(\omega) \cdot A_2(\omega) \cdot \dots \cdot A_n(\omega)}_{A(\omega)} \cdot e^{j(\underbrace{\Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega) + \dots + \Phi_n(\omega)}_{\Phi(\omega)})}$$

**Beispiel 3.5.**

**P-Glieder**

$$G(j\omega) = \frac{10 \cdot (1 + 2j\omega)}{(1 + 10j\omega)(1 + 0.2j\omega)} = \frac{10 \cdot (1 + j\frac{\omega}{0.5})}{(1 + j\frac{\omega}{0.1})(1 + j\frac{\omega}{5})}$$

**Logarithmische Plots fehlen**

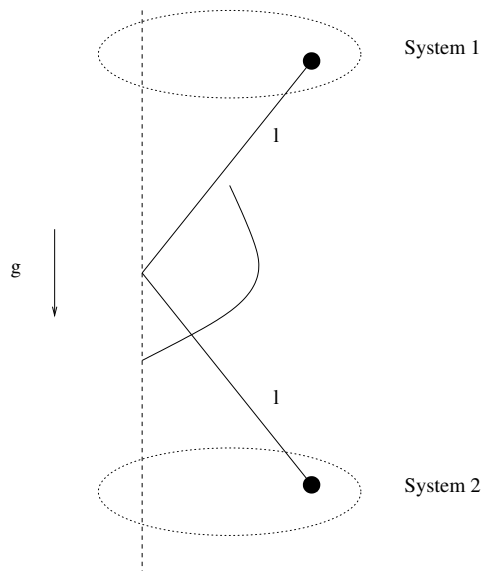


## 4 Analyse von Systemeigenschaften

### 4.1 Stabilität

#### 4.1.1 Definitionen und Bedingungen

Beispiel 4.1. *Pendel*



**Linearisierung oben und unten, mitte DGL** Gesucht ist der Zeitverlauf der Systeme bei beliebigen Anfangsbedingungen.

#### System 1

$$\ddot{\phi} + d\dot{\phi} - \frac{g}{l}\phi = 0$$

Homogene Lösung:

$$s^2 + ds - \frac{g}{l} = 0$$

$$\Rightarrow s_{1,2} = -\frac{d}{s} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{g}{l}}$$

$\Rightarrow s_{1,2}$  sind reel, z.B.  $s_1 < 0, s_2 > 0$

Ansatz:  $\phi(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$ . Ein Anteil geht also gegen 0, der andere gegen  $\infty$ .

Man nennt solche Systeme *instabil*.

**System 2** Analog oben. Die Lösungen sind komplex oder reell, und größer  $\frac{d}{2}$ . Beim Ansatz gehen nun beide Anteile gegen 0. Man nennt solche Systeme *stabil*.

**System 3**  $d = 0 \rightarrow$  Keine Dämpfung. Homogene Lösung:

$$s^2 + \frac{g}{l} = 0$$

$$S_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{g}{l}} = \pm j \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\text{Ansatz: } \phi(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

Betragsmäßig gesehen sind die Anteile stets größer oder gleich der jeweiligen Konstante. Das System strebt also gegen keinen Endwert, bleibt aber beschränkt. Man nennt solche Systeme *grenzstabil*.

Die Stabilität wird als eine *Systemeigenschaft* definiert, die nicht von der Art der Anregung abhängt.

- Das System ist durch die Gewichtsfunktion  $g(t)$  gegeben.

Die Anfangsanregung für  $t > 0$ ,  $u(t) = 0$  ist gegeben durch:

$$u(t) = C \cdot \delta(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = C \cdot \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = C \cdot g(t)$$

Die Stabilitätsdefinition für  $y(t)$  ist auch auf  $g(t)$  anwendbar, z.B. falls  $g(t) \mapsto o$  für  $t \mapsto \infty \Rightarrow$  stabil

- Das System ist durch die ÜF  $G(s)$  gegeben:

Man bestimmt die Polstellen der ÜF. Das System heißt

- instabil, sobald für einen Pol gilt  $\operatorname{Re}(s_i) > 0$
- stabil, sobald alle Pole  $s_i$  nur Realteil haben  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$
- grenzstabil, sobald für einen Pol  $s_i$  gilt  $\operatorname{Re}(s_i) = 0$

- Einen Sonderfall bildet ein mehrfacher Pol mit  $\operatorname{Re}(S_i) = 0$ . z.B.  $s_1 = s_2 = 0$ :

$$G(s) = \frac{1}{s^2}, g(t) = t \cdot \sigma(t).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty \Rightarrow \text{instabil!}$$

- Das System ist im Zustandsraum gegeben:

$$\dot{\vec{y}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t)$$

mit  $\vec{u}(t) = 0$  und  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$  beliebig.

- Ein Sonderfall existiert, wenn der Zustandsvektor ein Skalar ist:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \dot{x}(t) - ax(t) = 0$$

Hier lautet die homogene Lösung

$$s - a = 0 \Rightarrow s_1 = a$$

$$x(t) = Ce^{at}$$

$\Rightarrow$  stabil für  $\operatorname{Re}(a) < 0$

- Verallgemeinerung (ohne Beweis!)

Das dynamische System

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \mathbf{B}\vec{u}(t)$$

ist stabil, wenn für sämtliche Eigenwerte  $S_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  gilt:  $\operatorname{Re}(s_i) < 0$

#### 4.1.2 Hurwitz-Kriterium

$$G(s) = \frac{Z(s)}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^2} = \frac{Z(s)}{(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}$$

Die  $s_i$  bestimmen die Stabilität. Gesucht ist ein einfaches Stabilitätskriterium, welches die zum Teil aufwändige Faktorzerlegung (s.o.) nicht erfordert.

1. Notwendige Bedingung:

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0.$$

Es gibt davon  $Z_q$  konjugiert komplexe Wurzelpaare:

$$s_{2k-1,2k} = \sigma_{2k} \pm j\omega_{2k} \text{ mit } k = 1 \dots q.$$

Für asymptotische Stabilität muss gelten.

$$\sigma_k < 0 \text{ bzw. } \sigma_k = -|\sigma_k| \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Nach einsetzen und ausmultiplizieren ergeben sich nur positive Koeffizienten vor  $s_i$ .

Dies ist die notwendige Bedingung für Stabilität!

2. Hinreichende Bedingung (am Beispiel  $n=4$ ):

$$a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 = 0$$

Die Stabilitätsgrenze ist die imaginäre Achse. Es wird also  $s = j\omega$  eingesetzt:

$$a_0 + a_1j\omega + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 = 0$$

- Re:  $a_0 - a_2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{a_0}{a_2}$
- Im:  $a_1\omega - a_3\omega^3 = 0 \Rightarrow a_1 - a_3\omega^2 = 0 \Rightarrow a_1 - a_3\frac{a_0}{a_2} = 0$   
 $a_2 \neq 0 \Rightarrow a_1a_2 - a_3a_0 = 0$

Auf welcher Seite der Grenze ist das System stabil?

Das System ist stabil, falls

$$a_1a_2 - a_3a_0 > 0$$

Die allgemeine Form findet sich im Skript auf Blatt 4-2 und 4-3

### Beispiel 4.2.

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 8s + 1 + h}$$

Für welche  $h$  ist das System stabil?

1. Alle  $a_i$  müssen größer 0 sein.  $1 + h > 0 \Rightarrow h > -1$

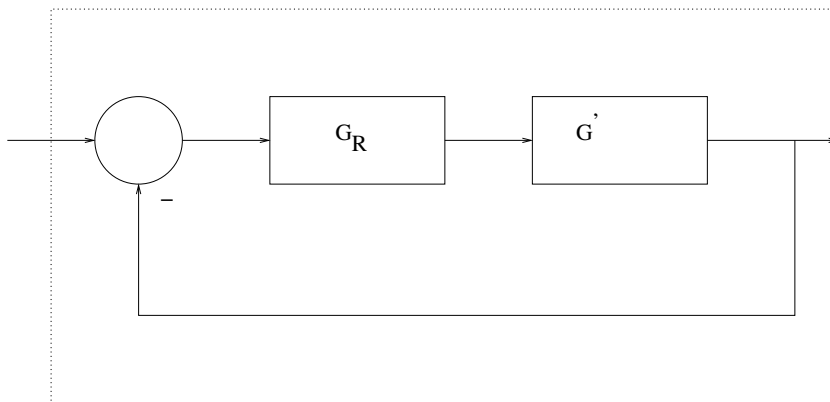
2.  $a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0$ :

$$\Rightarrow 2 \cdot 8 - 1(1 + k) = 15 - k > 0$$

$$k < 15 \Rightarrow \text{stabil für } -1 < k < 15$$

### 4.1.3 Nyquist-Kriterium

- speziell für rückgekoppelte Systeme
- anders als Hurwitz-Kriterium ist es auch für Systeme mit Totzeit geeignet.



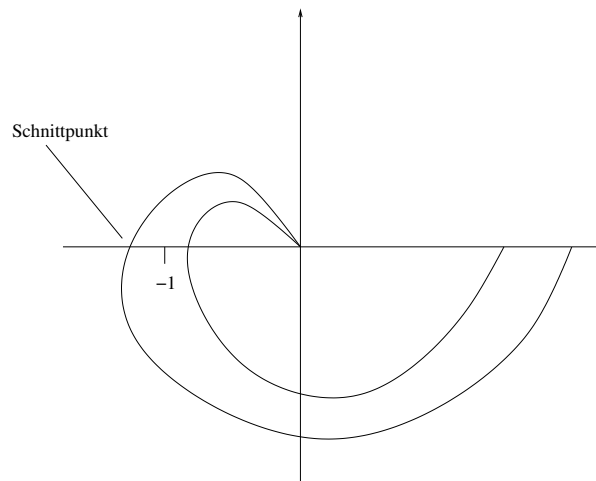
Kriterium für einfache Fälle:

Der *geschlossene* Kreis ist stabil, falls die Ortskurve des *offenen* Kreises den kritischen Punkt  $-1$  links liegen lässt. → Blatt 4-4

#### Beispiel 4.3.

$$G_0(s) = \frac{k}{(1 + s)^3}$$

wird rückgekoppelt. Für welche  $K$  ist das System stabil?



- Berechnung des Schnittpunktes

$G_0(j\omega)$  ist reell, wenn der Nenner reell ist:

$$(1 + j\omega)^3 = 1 + 3j\omega - 3\omega^2 - j\omega^3$$

Für den Imaginärteil muss also gelten:  $3\omega - \omega^3 = 0$ . Da  $\omega$  zusätzlich immer größer als 0 ist, gilt:  $3 - \omega^2 = 0 \rightarrow \omega_0^2 = 3$

- $\omega_0$  in die Übertragungsfunktion einsetzen, mit der Stabilitätsbedingung  $G < -1$

$$G_0(j\omega_0) = \frac{k}{1 - 3 \cdot 3} > -1 \Rightarrow k < 8$$

Das Nyquist-Kriterium kann analog im Bodediagramm angewandt werden:

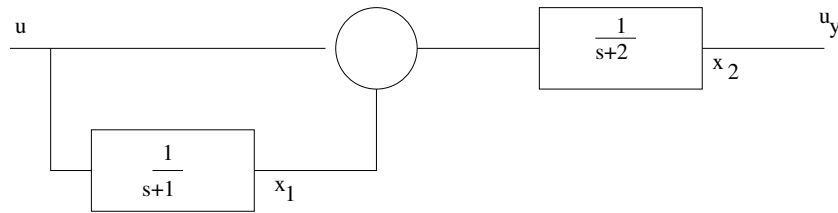
$\Rightarrow$  bei  $\Phi(\omega) = -180^\circ$  muss gelten  $A(\omega) < 0dB$

## 4.2 Steuerbarkeit

Im folgenden Kapitel 5 sollen dynamische Systeme durch einen Regler dynamisch korrigiert werden, indem sie über ihre Eingänge geeignet angesteuert werden.

Unter welchen Voraussetzungen gelingt das?

- Die Eingänge  $u(t)$  müssen auf alle Systemteile wirken können.
- Ein System heißt dann *steuerbar*. (vgl Blatt 4-6)



**BSP:** Ist dieses System steuerbar?

$$x_1(s) = \frac{1}{(s+1)} \cdot u(s); x_2(s) = \frac{1}{s+2} \cdot (U(s) + x_1(s))$$

$$sx_1(s) = -x_1(s) + u(s); sx_2(s) = x_1(s) - 2x_2(s) + u(s)$$

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + u(t); \dot{x}_2(t) = x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \cdot u(t)$$

Steuerbarkeitsmatrix:

$$Q_s = (\mathbf{B}, \mathbf{AB}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Ranges der Matrix:

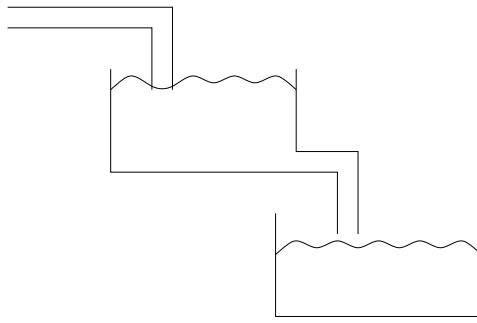
$$\text{rang}(Q_s) = 1 \neq u = 2 \Rightarrow \text{Nicht steuerbar}$$

**Erklärung**  $G(s) = \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+1} \rightarrow \text{Ordnung}=1$

$\Rightarrow$  Das System besitzt keine zwei Freiheitsgrade!

### 4.3 Beobachtbarkeit

Um ein System beherrschen zu können, müssen alle inneren Zustände auf die Ausgangsgröße  $y(t)$  wirken. Ein solches System heißt *Beobachtbar* (vgl. Blatt 4-2)

**Beispiel 4.4.**

Bilanzen:

$$\dot{h}_1(t) = -kh_1(t) + q(t)$$

$$\dot{h}_2(t) = kh_1(t) - kh_2(t)$$

o.B.d.A. sei  $k=1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot q(t)$$

Sollte der Füllstandssensor sinnvollerweise am Behälter 1 oder am Behälter 2 installiert werden?

Behälter 1:

$$Q_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Behälter 2 analog:

$$Q_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix von Behälter 1 ist 1, das System ist also nicht beobachtbar. Der Rang von Behälter 2 ist 2 und damit gleich  $u$ , somit ist das System beobachtbar. Man sollte den Sensor also an Behälter 2 anbringen.

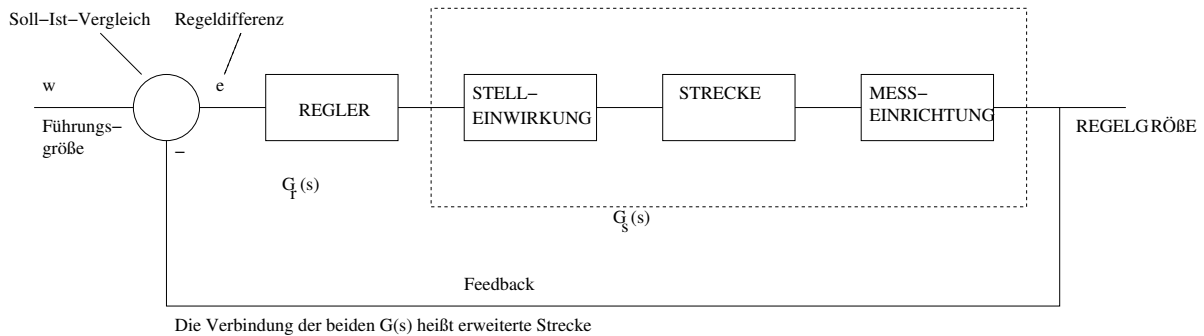
## 5 Reglerentwurf

**Idee** Aus dem Sollwert und der fortlaufenden Beobachtung des dynamischen Systems (“Strecke”) wird eine geeignete Änderung des Systems (“Stellgröße”) bestimmt, die



dazu führt, dass der Ausgangswert des Systems (‘‘Regelgröße’’) dem Sollwert folgt. Dies geschieht auch bei Störeinwirkung.

## 5.1 Reglerentwurf im Bildbereich



Beispiele für Regler sind z.B. in einem Spülkasten oder in einer Wohnraumheizung zu finden.

System	Führungsgr.	Regler	Stelleinricht.	Strecke	Messeinricht.	Regelgr.
Spülkasten	Sollhöhe	Ventil	—————	Spülkasten	Schwimmer	Füllhöhe
Heizung	Handrad	Ventil	Heizkörper	Wohnraum	Thermometer	Raumtemp.

**Führungsverhalten** Die Regelgröße  $y(t)$  soll der Führungsgröße  $w(t)$  möglichst gut folgen.

Führungs-Übertragungsfunktion:

$$\frac{Y(s)}{w(s)} = G_w(s)$$

$$Y(s) = w(s) \cdot G_R(s) \cdot G_s(s) - Y(s) \cdot G_R(s) \cdot G_S(s)$$

$$Y(s) \cdot [1 + G_R(s) \cdot G_S(s)] = G_S(s) \cdot G_R(s) \cdot w(s)$$

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{w(s)} = \frac{G_s(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \stackrel{!}{=} 1 \text{ (ideales Führungsverhalten)}$$

mit  $G_0(s)$ : erweiterte Strecke.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = w = \text{const.} \rightarrow \text{Regelkreis stationär genau}$$

**Störverhalten** Die meist unbestimmte Störung  $z(t)$  soll möglichst keine Wirkung auf das System haben. Analog zum Führungsverhalten mit  $z_1$ : Additive Störung  
Störungs-Übertragungsfunktion:

$$G_{z_1}(s) = \frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_s(s) \cdot G_R(s)} \stackrel{!}{=} 0 \text{ (ideales Störverhalten)}$$

Im Allgemeinen kann eine Störung am Ende des Regelkreises schlechter ausgeglichen werden als eine Störung am Anfang des Regelkreises.

## HIER FEHLT NOCH 5.1.1

### 5.1.1 Fehlt noch

### 5.1.2 Forderungen für die Reglersynthese

I. Der Regelkreis soll stabil sein!

Überprüfung durch

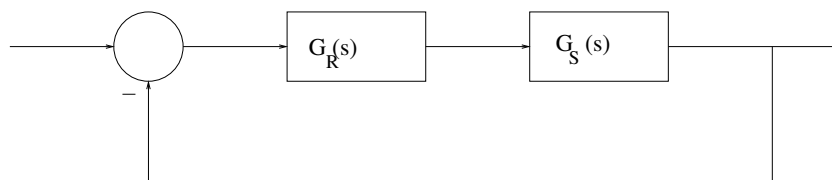
- Hurwitz-Kriterium (geschlossener Kreis  $G_w(s)$ !)
- Nyquist-Kriterium (offener Kreis  $G_0(s) = G_R(s)G_s(s)$  (Auch für Systeme mit Totzeit)

II. Der Regelkreis muss genügend stationäre Genauigkeit besitzen!

**Beispiel:** Die Strecke

$$G_s(s) = \frac{0.1}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + 2s)}$$

soll durch ein P-Glied mit  $G_R(s) = K_R$  geregelt werden.



Nach (I.): geschlossener Kreis

$$\begin{aligned} G_w(s) &= \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{K_R \cdot 0.1}{(1+10s)(1+5s)(1+2s)}}{\frac{1+K_R \cdot 0.1}{(1+10s)(1+5s)(1+2s)}} \\ &= \frac{0.1K_R}{(1+10s)(1+5s)(1+2s)+0.1K_R} = \frac{0.1K_R}{100s^2+80s^2+17s+1+0.1K_R} \end{aligned}$$

Nach dem Hurwitzkriterium folgt mit

1.  $a_i > 0 \Rightarrow 1 + 0.1k_R > 0 \Rightarrow K_R > -10$
2.  $a_1a_2 - a_0a_3 = 1360 - 100(1 + 0.1K_R) \Rightarrow K_R < 126$

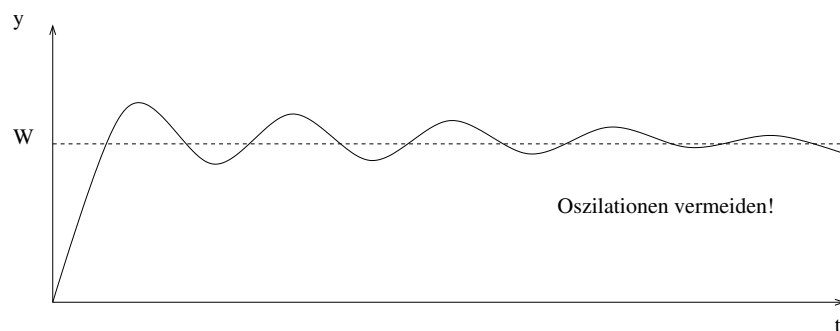
das das System für  $-10 < K_R < 126$  stabil ist.  $K_R$  kann also *nicht* beliebig groß sein! Die Fragestellung für (II.) lautet nun “Wie folgt die Regelgröße  $y(t)$  einem Einheitssprung für  $t \mapsto \infty$ ”

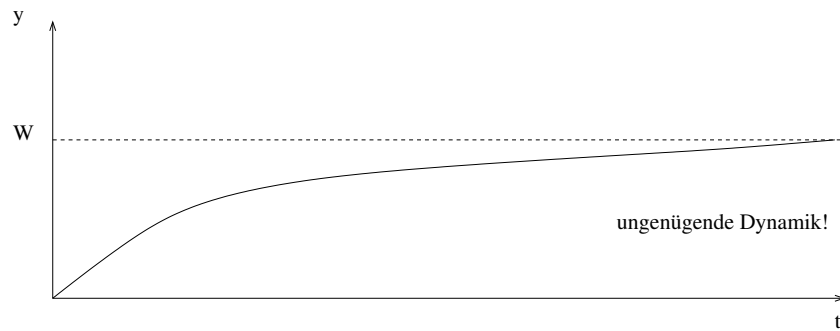
$$\begin{aligned} \omega(t) &= \sigma(t) \Rightarrow \omega(s) = \frac{1}{s} \\ Y(s) &= G_u(s) \cdot \omega(s) = \frac{0.1K_R}{(100s^3+80s^2+17s+1+0.1K_R)s} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \underbrace{=}_{\text{Regel 12}} \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{0.1K_R}{1 + 0.1K_R} = \frac{K_R}{10 + K_R} \mapsto 1 \text{ für } K_R \mapsto \infty$$

Stationäre Genauigkeit ist nur für  $K_R \mapsto \infty$  zu erzielen. Dies ist ein Zielkonflikt mit (I.)

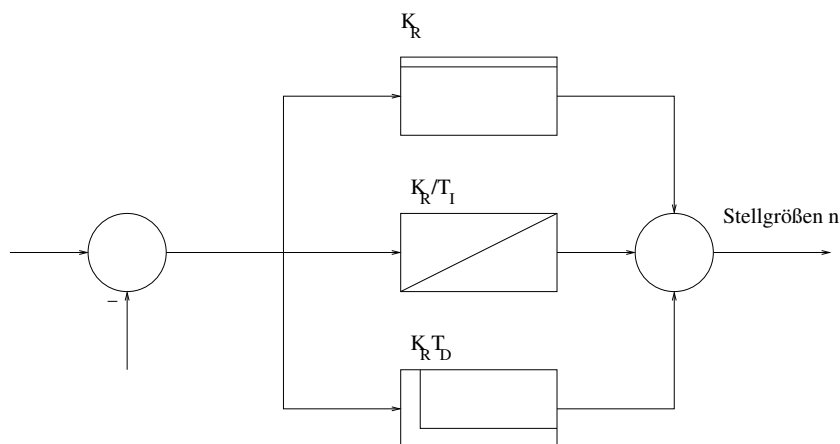
### III. Der Regelkreis muss genügend gedämpft sein



IV. Der Regelkreis muss hinreichend schnell sein

Auch (III.) und (IV.) führen zu einem Zielkonflikt. Durch eine geeignete Korrektoreinrichtung muss ein Kompromiss gefunden werden.

## 5.1.3 Auswahl geeigneter Glieder zur dynamischen Korrektur



**R-Regler:** Je größer die Regeldifferenz, desto größer ist die Stellgröße

**I-Regler:** Lange andauernde Regeldifferenzen werden integriert, sodass die Stellgröße anwächst. Diese Regler sind *stationär genau* nach Forderung II.

**D-Regler:** Sobald sich die Regeldifferenz ändert, wird eine Stellgröße erzeugt. Hier aus ergibt sich eine schnelle Reaktion nach Forderung IV.

**Kombination: PID-Regler**

$$\begin{aligned} G_R(s) &= K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \\ G_R(s) &= \underbrace{\frac{K_R}{T_I}}_u \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{s} = u \cdot \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s} \end{aligned}$$

mit  $T_1 > T_2$  und  $T_1 T_2 = T_I + T_D$  sowie  $T_1 + T_2 = T_I$

Dies ist schlecht realisierbar, da der Zählergrad=2; Nennergrad. Daher wird das System durch eine zusätzliche Zeitkonstante im Nenner zum “realen PID-Regler” erweitert:

$$G_R(s) = \frac{K_R}{T_I} \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s(1 + T_N s)}$$

**Faustregel:**  $T_N \approx \frac{1}{10} T_2$

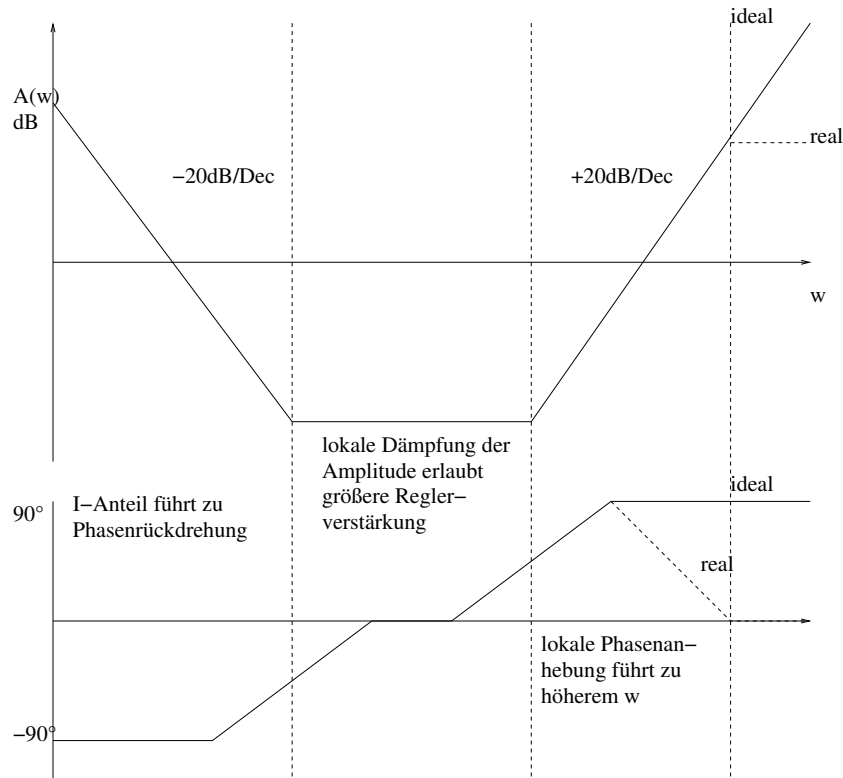
**5.1.4 Reglersynthese auf Basis des Bodediagramms**

- Vorab für (II.): I-Anteil einführen, falls Strecke keinen eigenen I-Anteil besitzt.
- für (I.): Stabilität nach dem Nyquist-Kriterium
- Direkt an der Stabilitätsgrenze schwingt das System stark, daher wird der Regler in einem gewissen Abstand zu dieser Grenze dimensioniert. Es wird eine Phasenreserve  $\Phi_R$  vorgegeben, um die Forderung (III.) zu erfüllen. Dadurch wird die Schwingung unterbunden, und Bauteiltoleranzen und Störungen führen nicht zu Instabilitäten der Systems.

**Faustregel:**  $\Phi_R$  wird zwischen  $30^\circ$  und  $70^\circ$  gewählt. Je kleiner  $\Phi_R$ , desto mehr werden Schwingungen gedämpft. Allerdings wird der Regler mit zunehmendem  $\Phi_R$  auch langsamer. Es muss also ein Kompromiss gefunden werden.

Die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  bestimmt die Dynamik (“Schnelligkeit”) des geregelten Systems. Daher ist die Dynamische Korrektur so zu wählen, dass  $\omega_D$  möglichst hoch liegt, um gute Dynamik zu erreichen (IV.)

- z.B. PID-Regler zur dynamischen Korrektur (im Bodediagramm)



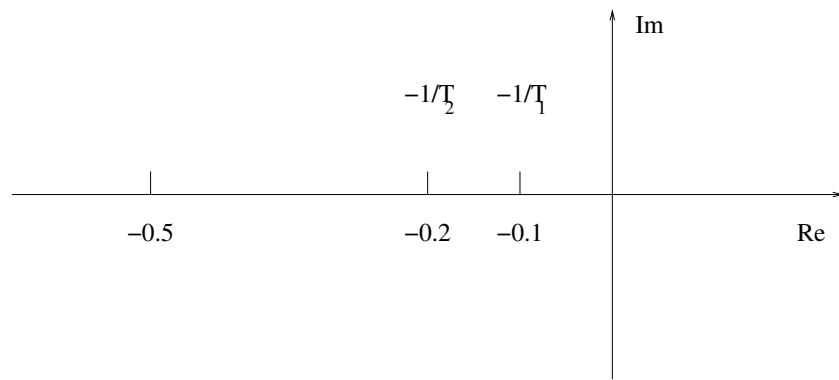
**Alternatives Vorgehen:** Reglerzeitkonstanten so wählen, dass die größten Zeitkonstanten (dynamisch dominant) der Strecke kompensiert werden.

### Beispiel 5.1.

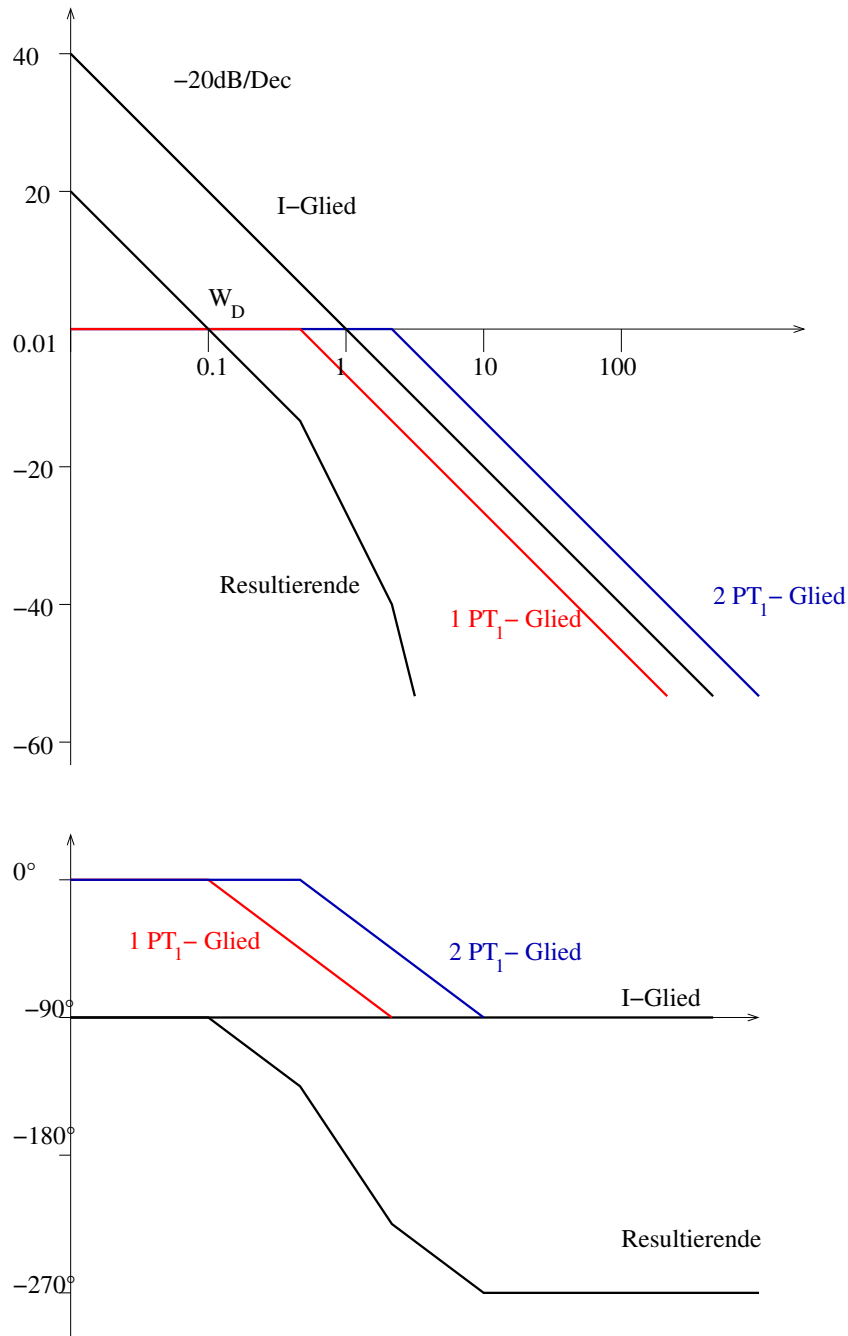
Strecke aus dem vorhergehenden Beispiel:

$$G_s(s) = \frac{0.1}{(1 + 10s)(1 + 5s)(1 + 2s)}$$

- Strecke ist stabil ✓
- Strecke hat keinen I-Anteil  $\rightarrow$  PID-Regler verwenden (real)
- Reglerzeitkonstanten sollen Streckenzeitkonstanten kompensieren



$$\begin{aligned}
 G_0(s) &= G_R(s) \cdot G_s(s) &= v \cdot \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{s(1+T_ns)} \cdot \frac{0.1}{(1+10s)(1+5s)(1+2s)} \\
 &= v \cdot \frac{\cancel{(1+10s)}\cancel{(1+5s)} \cdot 0.1}{s \cdot \cancel{(1+10s)}\cancel{(1+5s)}(1+2s)(1+0.5s)} &= \underbrace{\frac{v \cdot 0.1}{s}}_I \underbrace{(1+2s)}_{1.PT_1} \underbrace{(1+0.5s)}_{2.PT_1}
 \end{aligned}$$



**Bodediagramm für  $v=1$**  Man erkennt, dass bei  $\Phi_R = 40^\circ$   $\omega_D = 0.5$  ist. Damit  $\omega_D$  die Durchtrittsfrequenz ist (Schnitt mit 0 dB) kann die Amplitude um ca. 14 dB verschoben werden. ( $\rightarrow v \approx 7$ ). Damit ist der PID-Regler definiert als:

$$G_R(s) = 7 \cdot \frac{1 + 10s)(1 + 5s)}{s(1 + 0.5s)}$$