Mitschrieb der Vorlesung

“Systemtheorie und Regelungstechnik”

(SS 2010)

Dozent: Dr.-Ing. A. Peter

Textsatz von William Glover

Stand: 16. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Systemtheorie, Kybernetik: Allgemeine, formale Wissenschaft von der Struktur, den Relationen und dem Verhalten dynamischer, insbesondere komplexer Systeme, die gewisse allgemeine Eigenschaften realer Systeme aus den verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit widerspiegeln.

Ziele

Beschreibung dynamischer Systeme

Methoden: Modellierung (z.B. als Blockschaltbild, DGL oder Übertragungsfunktion), Simulation (kostengünstig, ungefährlich), ...

Analyse dynamischer Systeme

Fragestellungen wie z.B. ist das System...

- ...stabil?
- ...steuerbar?
- ...schwingungsfähig?

Beeinflussung dynamischer Systeme

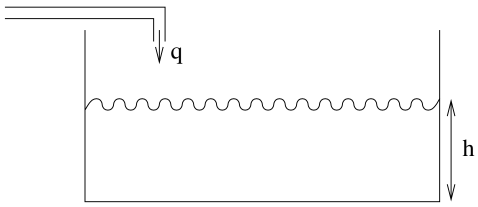
Ziel der Systemtheorie ist ein *automatisierter, sicherer, optimaler Betrieb von technischen Systemen.* Dies kann auf zwei Arten erreicht werden

- **Regelung (kont. Systemzustände):** Ansteuerung des Systems, sodass die Ausgangsgröße den gewünschten Sollverlauf erreicht
- **Steuerung (diskrete Systemzustände):** Bei gestörten oder zum Teil unbekannten Systemen fortlaufende Systembeobachtung und Rückführung.

1 Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)

1.1 Beispiele zum Aufstellen eines BSB

Beispiel 1.1 (Füllen eines Behälters).



$q(t)$: Zufluss

$h(t)$: Füllstand

A : Grundfläche des Behälters

Lässt sich hier eine Gesetzmäßigkeit erkennen? Ja! Volumenbilanz:

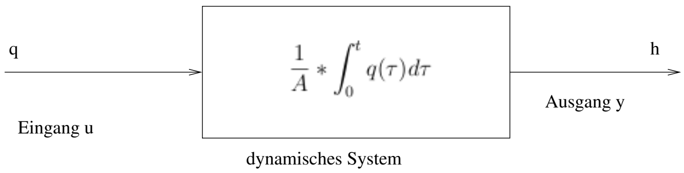
$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau (+v_0)$$

v_0: Volumen zum Zeitpunkt $t = 0$

$\Rightarrow$ für $v_0 = 0$ gilt:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) d\tau$$

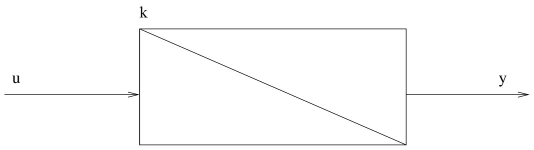
Diese Abhängigkeit lässt sich als ein sogenanntes *Blockschaltbild* wie folgt darstellen:



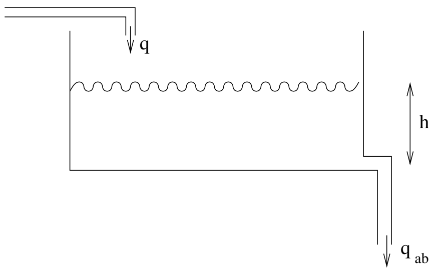
Es ist naheliegend, für übliche Operationen eine Bibliothek mit Standard-Blöcken anzulegen, im hier betrachteten Fall z.B. das sogenannte *Integrierglied* (I-Glied). Die allgemeine Integrationsfunktion

$$y(t) = k * \int_0^t u(\tau) d\tau$$

wird durch den folgenden Standardblock beschrieben:



Beispiel 1.2 (Erweiterung des Behälters um einen Ablauf)**.**

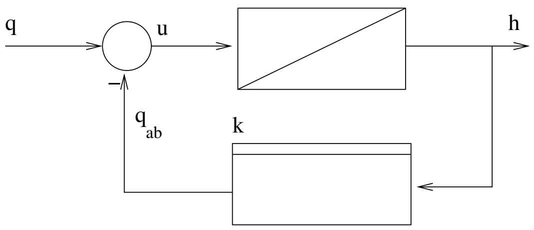


$q(t)$	:	Zufluss
$h(t)$	:	Füllstand
A	:	Grundfläche des Behälters
$q_{ab}(t)$	:	Abfluss

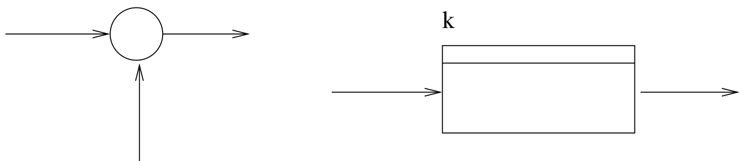
Für diesen erweiterten Fall wird erneut die Vulumenbilanz aufgestellt:

$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) - q_{ab} d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Diese lässt sich unter der Annahme, dass q_{ab} von der aktuellen Füllhöhe abhängt, erneut in einem Blockschaltbild folgendermaßen darstellen:



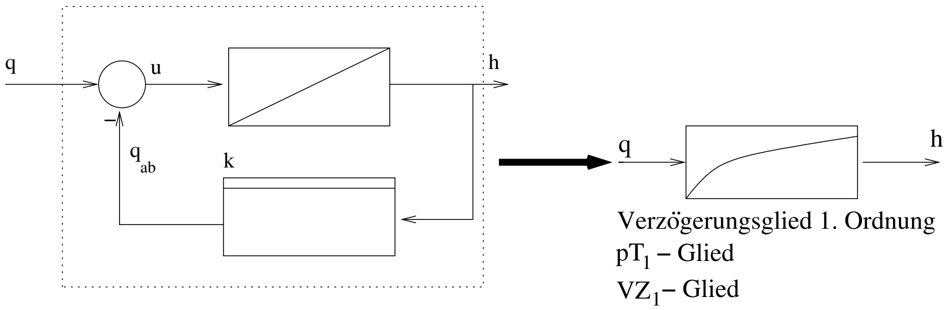
Hier wurden bereits zwei weitere, wichtige Standardblöcke eingeführt:



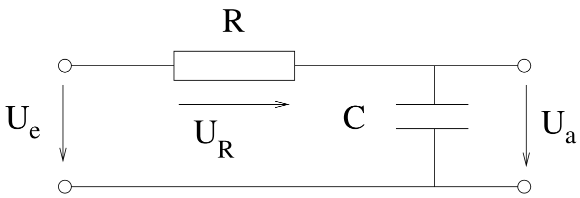
Summierglied (S−Glied) Proportionalglied (P−Glied)

Anhand des Blockschaltbild erkennt man sehr leicht, dass der Füllstand $h(t)$ sich nach einer gewissen Zeit nicht mehr ändert. Der aktuelle Füllstand wird zurückgeführt und vor der Integration von $q(t)$ abgezogen. Sobald gilt $q_{ab} = q$, bleibt $h(t)$ konstant. $u(t)$ wird Null (Stationärer Zustand)!

Da das beschriebene Systemverhalten sehr häufig vorkommt, wird dieses Blockschaltbild zu einem eigenen Standardblock zusammengefasst:



Beispiel 1.3 (RC-Glied).



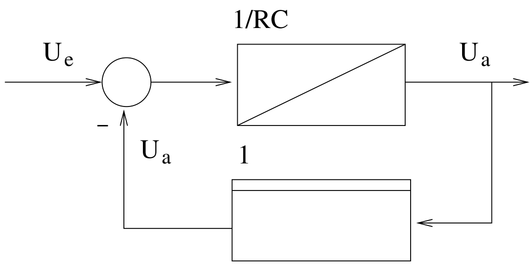
Das abgebildete RC Glied wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
U_a(t) &= \tfrac{1}{C} * \textstyle\int_0^t i(\tau) d\tau \\
U_e &= U_R + U_a \qquad \Rightarrow U_R = U_e + U_a \\
\rightarrow i &= \tfrac{U_R}{R} \\
\Rightarrow i &= \tfrac{1}{R}(U_e - U_a)
\end{aligned}$$

beschrieben. Für U_a ergibt sich daraus die Gleichung

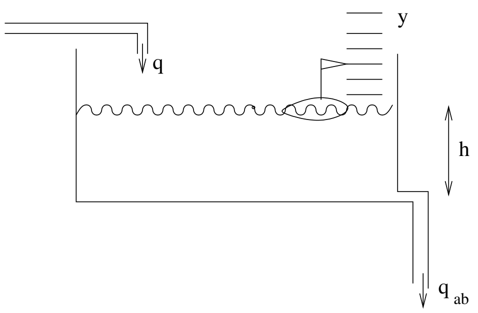
$$U_a(t) = \frac{1}{RC} * \int_0^t U_e(\tau) - U_a(\tau) d\tau$$

Auch diese Funktion wird anschließend als Blockschaubild dargestellt:



Man erkennt: Es handelt sich hier ebenfalls um ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. Unabhängig von der physikalischen Realisierung haben beide Systeme die gleiche dynamische Struktur!

Beispiel 1.4 (Erweiterung des Behälters um einen Schwimmer)**.**



h : y in Ruhe

m : Masse des Schwimmers

a : Fläche des Schwimmers

ρ : Dichte der Flüssigkeit

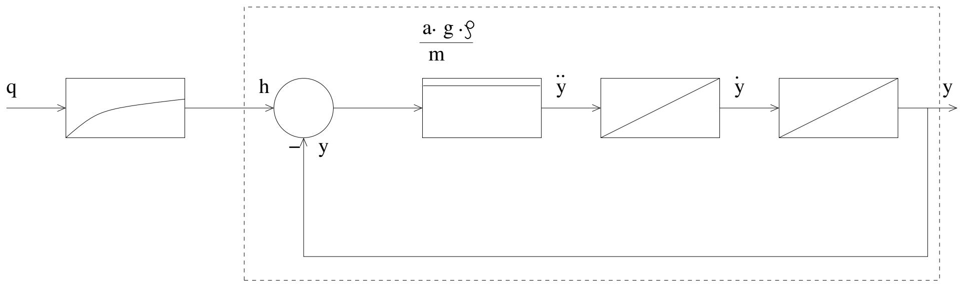
Die Auftriebskraft ist gegeben durch $F = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$. Durch Umformen lässt sich hieraus die vom Zeiger des Schwimmers angezeigte Skalaposition berechnen:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m}(h(t) - y(t))$$

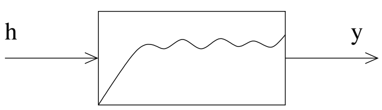
$$\Rightarrow y(t) = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} \int_0^t \int_0^\tau h(T) - y(T) dT d\tau$$

BSB

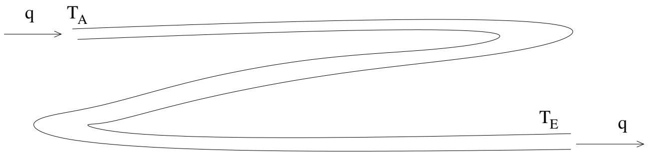


PT_2–Glied; Verzögerungsglied 2. Ordnung

Auch für das PT_2-Glied wird ein eigenes Standardsymbol definiert:



Beispiel 1.5 (Zuleitung).



l	:	Rohrlänge
a	:	Rohrquerschnitt
$v = \frac{q}{a}$	:	Fließgeschwindigkeit

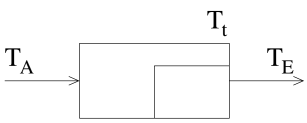
Die Zeit, bis eine Probemenge das Rohr durchflossen hat, wird *Totzeit* T_t genennt. Sie ist gegeben durch

$$T_t = \frac{l}{v} = \frac{l \cdot a}{q}$$

T_A und T_E sind die Temperaturen am Rohranfang bzw. Rohrende. Unter der Annahme, dass das Rohr perfekt isoliert ist, beim Transport also keine Wärme verloren geht, hängen diese beiden Größen über die Sprungfunktion

$$T_E(t) = T_A(t - T_t)$$

zusammen. Dieser Zusammenhang wird im Blockschaubild durch das sogenannte *Totzeitglied* dargestellt:



Blockschaltbilder

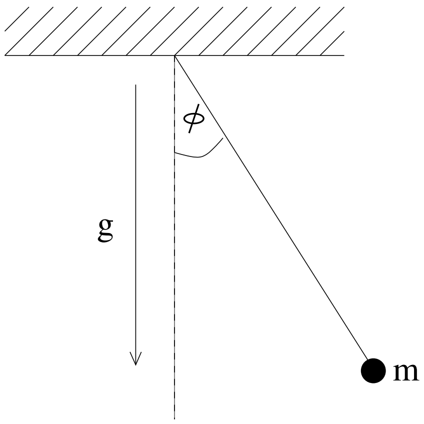
- beschreiben Ursache-Wirkungszusammenhänge in einer allgemeinen Form
- sind insbesondere bei komplexen Systemen oft übersichtlicher als Darstellungen in Gleichungen
- lassen sich schrittweise aufbauen und verifizieren
- sind Basis für numerische Simulationen(→ Simulink)

1.2 Häufig verwendete Übertragungsglieder

- **elementare:** P,I,D,S,T_t
- **zusammengesetzte:** PT_1, PT_2
- **nichtlineare:** KL, M

In der Vorlesung werden hauptsächlich elementare und zusammengesetzte Übertragungsglieder verwendet!

1.3 Nichtlineare Glieder und Linearisierung

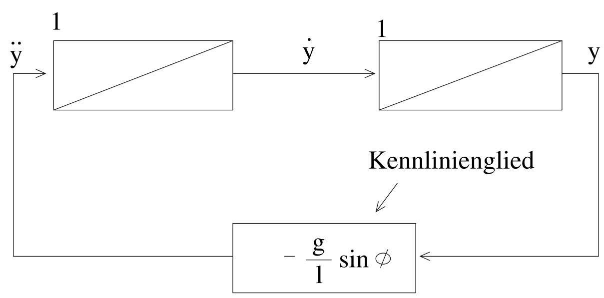


$$
\begin{aligned}
J * \ddot{\phi} &= M \\
\rightarrow \quad m \cdot l^2 \cdot \ddot{\phi} &= -m \cdot g \cdot l \cdot sin(\phi) \\
\rightarrow \quad l \cdot \ddot{\phi} &= -g * sin(\phi) \\
\rightarrow \quad \ddot{\phi} &= -\frac{g}{l} sin(\phi)
\end{aligned}
$$

J : Trägheitsmoment

M : Drehmoment

Erneut wird das Blockschaltbild aufgestellt, unter Verwendung des sog. *Kennliniengliedes* (KL-Glied):

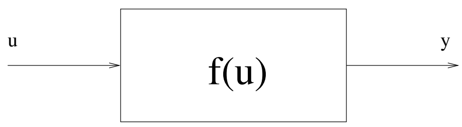


Ein nichtlineares System lässt sich zwar numerisch simulieren, stellt aber ein Problem bei der Analyse oder beim Regelentwurf dar. Als Hilfsmittel wird daher eine Linearisierung im Arbeitspunkt verwendet.

Arbeitspunkt: Betriebszustand eines Systems, in dem die zeitveränderlichen Größen fest sind (stationärer Zustand) und sich das System in einem gewünschten Sollzustand befindet.

Wird das System nun um den Arbeitspunkt linearisiert, sind die Abweichungen zwischen nichtlinearem und linearem Modell *in der Umgebung um diesen Arbeitspunkt herum* nur klein. Bei zu großer Abweichung vom Arbeitspunkt bildet das lineare Modell das nichtlineare nur unzureichend ab. Der Arbeitspunkt muss dann verändert/neu bestimmt werden.

Linearisierung eines KL-Gliedes



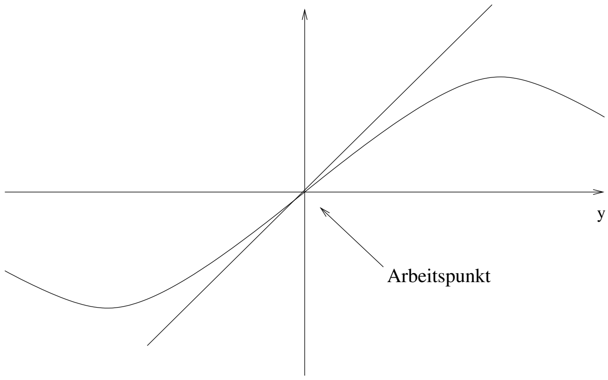
$$\begin{aligned} y &= f(u) \\ y_0 + \Delta y &= f(u_0 + \Delta u) \end{aligned}$$

Es wird nun die Taylorreihen-Entwicklung für diese Funktion durchgeführt:

$$\begin{aligned} y_0 + \Delta y &= f(u_0) + [\frac{df(u)}{du}]_{u_0} \cdot \Delta u + \ldots \\ \Rightarrow y_0 &= f(u_0) \\ \Delta y &= [\frac{df(u)}{du}]_{u_0} \cdot \Delta u + \ldots \text{ (Nichtlineare Terme werden Vernachlässigt!)} \end{aligned}$$

z.B. $y = sin(\phi)$: Linearisierung um den Arbeitspunkt $\phi_0 = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ \Delta y &= [cos(\phi)]_{\phi_0=0} \cdot \Delta\phi \\ \Rightarrow T_y &= 1 \cdot \Delta\phi \end{aligned}$$



2 Systembeschreibung im Zeitbereich

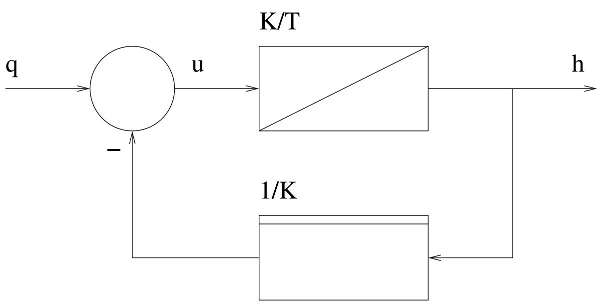
2.1 Differentialgleichungen

2.1.1 Aufstellen der DGL

Die Differentialgleichung eines Systems kann auf 2 Arten bestimmt werden:

- aus den physikalischen Gleichungen, z.B.:
  - Bewegungsgleichungen: $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$; $M(t) = J \cdot \ddot{\phi}$
  - Bilanzierung von Volumen: $q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = \dot{v}(t)$
- aus dem Blockschaubild:
  - eventuell Hilfsgrößen einführen (z.B. Ausgang von S-Gliedern,...
  - Entgegen der Signalflussrichtung durch das BSB gehen und Funktionsbeziehungen der Blöcke auswerten

Bsp.: PT_1-Glied



$$
\begin{array}{lll}
 & h(t) & = \frac{K}{T}\int_0^t u(\tau)d\tau \\
\rightarrow & \dot{h}(t) & = \frac{K}{T}\cdot u(t) \\
 & u(t) & = q - \frac{1}{K}\cdot h(t) \\
\Rightarrow & \dot{h}(t) & = \frac{K}{T}\cdot (q(t) - \frac{1}{K}\cdot h(t)) \\
\Rightarrow & \frac{1}{T}\cdot h(t) + \dot{h}(t) & = \frac{K}{T}\cdot q(t) \\
\Rightarrow & \underbrace{h(t) + T\cdot \dot{h}(t)}_{\text{DGL in } h(t)} & = \underbrace{k\cdot q(t)}_{\text{Anregung}}
\end{array}
$$

$\rightarrow$ homogene DGL, falls $q(t) = 0$ (Anregung $= 0$)

2.1.2 Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beispiel 2.1 (Lösung der DGL des PT_1-Gliedes)**.**

Gegeben ist die Gleichung

$$T\cdot \dot{y}(t) + y(t) = k\cdot u(t)$$

mit $y(0) = y_0$ und beliebigem $u(t)$ für $t > 0$.

- **1. Schritt:** characteristische Gleichung:

$$
\begin{array}{lll}
 & T\cdot s + 1 & = 0 \\
\rightarrow & s_1 & = -\frac{1}{T} \\
\Rightarrow & y_h(t) & = C_1\cdot y_1(t) \quad = \quad c_1 * e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{(Formelsammlung)}
\end{array}
$$

- **2. Schritt:** Variation der Konstanten

$$
\begin{array}{lll}
 & y_p(t) & = C_1(t)e^{-\frac{t}{T}} \\
\text{ableiten:} & \dot{y_p}(t) & = \frac{-C_1(t)}{T}e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t)e^{-\frac{t}{T}}
\end{array}
$$

In die inhomogene DGL einsetzen:

$$
\begin{array}{lll}
 & K\cdot u(t) & = T\cdot(-\cancel{\frac{c_1(t)}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}} + \dot{C}_1(t)\cdot e^{-\frac{t}{T}}) + \cancel{C_1(t)\cdot e^{-\frac{t}{T}}} \\
 & \dot{C}_1(t) & = \frac{K}{T}\cdot e^{\frac{t}{T}}\cdot u(t) \\
\text{Integrieren:} & C_1(t) & = \int_0^t \frac{K}{T}\cdot e^{\frac{\tau}{T}}\cdot u(\tau)d\tau \\
\Rightarrow & y_p(t) & = [\int_0^t \frac{K}{T}\cdot e^{\frac{\tau}{T}}\cdot u(\tau)d\tau]\cdot e^{-\frac{t}{T}} \\
 & & = \int_0^t \frac{K}{T}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}}\cdot u(\tau)d\tau
\end{array}
$$

- **3. Schritt:** Zusammenfassen zur Gesamtlösung

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + y_p(t) \\ &= c_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- **4. Schritt:** C_1 bestimmen

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = y_0 \\ \Rightarrow \text{Lösung:} \quad y(t) &= \underbrace{y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}}_{1} + \underbrace{\int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau}_{2} \end{aligned}$$

  - **Formelteil 1** ist die homogene Lösung. Sie ist nur vom Anfangswert y_0 abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *freie Bewegung*
  - **Formelteil 2** ist die Partikulärlösung. Sie ist nur von der Eingangsfunktion $u(t)$ abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *erzwungene Bewegung*

2.2 Übertragungsverhalten

2.2.1 Gewichtsfunktion und Faltung

Das Übertragungsverhalten von $u(t)$ zu $y(t)$ wird durch den Term

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{-t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau$$

definiert. Er beschreibt das Übertragungsverhalten bei verschwindenden Anfangsbedingungen ($y_0 = 0$). Mit der Funktion

$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

lässt sich das Integral zu

$$y(t) = \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau}_{Faltungsintegral} = g(t) * u(t)$$

vereinfachen. Das Zeichen $*$ wird als "gefaltet mit" ($g(t)$ gefaltet mit $u(t)$) gelesen.
$g(t)$ nennt man *Gewichtsfunktion*. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten des Systems vollständig!

Es gilt: $g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ gibt an, mit welchem Gewicht der Wert der Eingangsfunktion $u(t)$ von *zurückliegenden* Zeitpunkten $(t - \tau)$ in den Wert der Ausgangsfunktion $y(t)$ zum *aktuellen* Zeitpunkt t eingeht.
BILDER FEHLEN!!!

2.2.2 Eigenschaften

Lineare und **zeitinvariante** Systeme lassen sich durch die Gewichtsfunktion vollständig beschreiben. (Entspricht der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten)

Linearität: Ein System ist linear, wenn...

- ...das Superpositionsprinzip: $y(t) = g(t)*[u_1(t)+u_2(t)] = g(t)*u_1(t)+g(t)*u_2(t)$
- ...das Verstärkungsprinzip: $y(t) = g(t) * [\alpha \cdot u(t)] = \alpha \cdot [g(t) * u(t)]$

gelten.

Zeitinvarianz: Das System ist invariant gegenüber Zeitverschiebungen:
Aus $y(t) = g(t) * u(t)$ muss für eine beliebige Zeitverschiebung T folgen, dass $y(t - T) = g(t) * u(t - T)$

Kausalität: Das Ausgang $y(t)$ eines kausalen Systems hängt *nur* vom Verlauf des Eingangs $u(t)$ für Zeiten $t \leq t_0$ ab. Das System hängt also nur von vergangenen Eingangswerten ab. Für $g(t)$ kausaler Systeme gilt also:

$$g(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

2.2.3 Sprungsantwort und Impulsantwort

Sprungantwort: Auf den Systemeingang wird ein *Einheitssprung* gegeben **evtl. Bild einfügen!**:

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Antwort des Systems heißt *Sprungantwort* und wird beschrieben durch

$$h(t) := y(t)$$

Mit dem Flächenintegral $y(t) = \int\limits_0^t g(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau$ vereinfacht sich das zu

$$\begin{aligned} h(t) &= \int\limits_0^t g(\tau) \cdot \underbrace{\sigma(t-\tau)}_{=1} d\tau \\ h(t) &= \int\limits_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die Sprungantwort, genau wie die Gewichtsfunktion, characterisiert das dynamische System vollständig!

Impulsantwort: Die Impulsfunktion $\delta(t)$ ist die formale Ableitung des Einheitssprungs.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \Leftrightarrow \int\limits_0^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

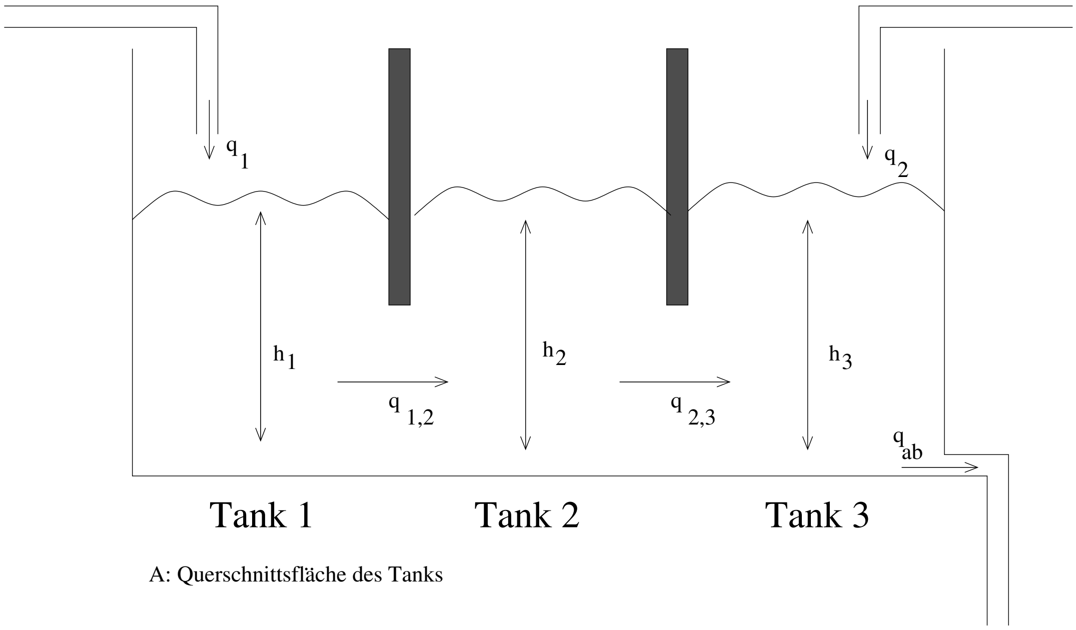
Für die Impulsantwort gilt damit:

$$\int\limits_0^t g(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau = \int\limits_0^t g(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = g(t)$$

$\Rightarrow$ Die Gewichtsfunktion $g(t)$ kann auch als Impulsantwort interpretiert werden.

2.3 Darstellung im Zustandsraum

Beispiel 2.2 (System aus 3 verbundenen Wassertanks)**.**



Volumenbilanz:

$$\begin{aligned}
\text{Tank 1:}\quad \dot{h}_1 &= \tfrac{1}{A}(q_1 - q_{1,2}) \\
\text{Tank 2:}\quad \dot{h}_2 &= \tfrac{1}{A}(q_{1,2} - q_{2,3}) \\
\text{Tank 3:}\quad \dot{h}_3 &= \tfrac{1}{A}(q_2 + q_{2,3} - q_{ab})
\end{aligned}$$

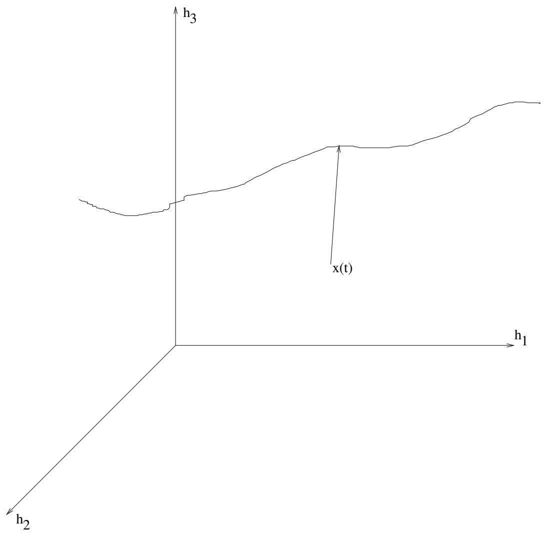
Annahme: Der Ausgleichsfluss zwischen den Tanks ist proportional zur Füllstandsdifferenz:

$$q_{1,2} = c \cdot (h_1 - h_2); q_{2,3} = c \cdot (h_2 - h_3); q_{ab} = ch_3$$

$$\begin{aligned}
\text{damit:}\quad \dot{h}_1 &= \tfrac{1}{A}(q_1 - ch_1 + ch_3) \\
\dot{h}_2 &= \tfrac{1}{A}(ch_1 - 2ch_2 + ch_3) \\
\dot{h}_3 &= \tfrac{1}{A}(q_2 + ch_2 - 2ch_3)
\end{aligned}$$

Kennt man h_1, h_2, h_3, so ist der Zustand des Systems zum Zeitpunkt t vollständig bestimmt. $\Rightarrow h_1, h_2, h_3$ sind die Zustandsgrößen des Systems.

Geometrische Deutung: h_1, h_2, h_3 spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf, den sogenannten *Zustandsraum*.



$\vec{x}(t)$: Zustandsvektor

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}$$

Das System wird durch $q_1(t)$ und $q_2(t)$ angeregt, diese sind die *Eingangsgrößen*. Aus ihnen lässt sich der sogenannte *Eingangsvektor* bestimmen:

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

Verallgemeinerung

Das Systrem lässt sich durch n Zustände beschreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das Systrem besitzt m Eingänge:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Dieses System lässt sich durch n DGL 1 Ordnung beschreiben:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = f_1(\vec{x},\vec{u}) \\ \vdots \\ x_n = f_n(\vec{x},\vec{u}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t),\vec{u}(t)) \\ \text{Zustandsdifferentialgleichung} \end{array}$$

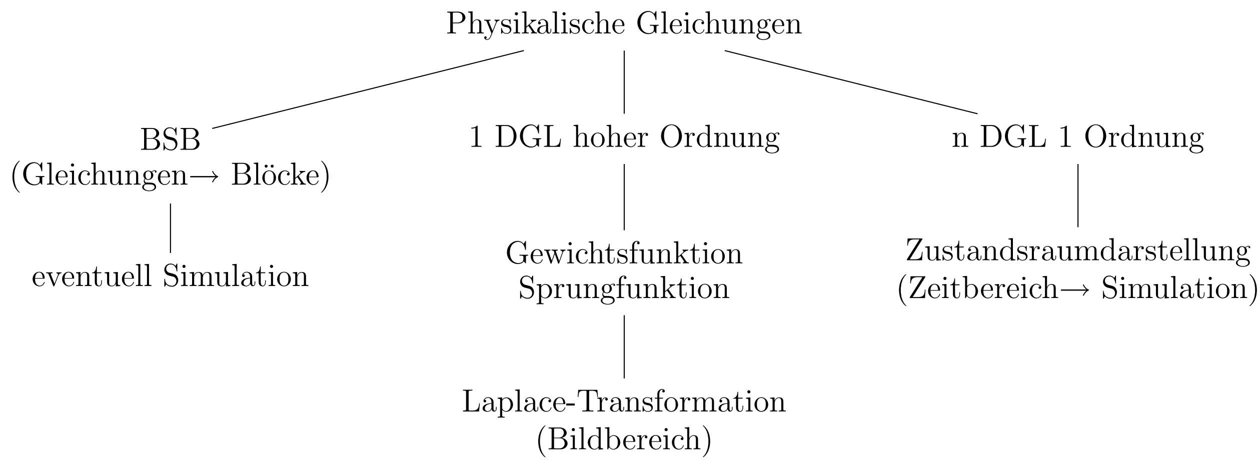
Durch Messung des Systems wird aus dem aktuellen Zustand $\vec{x}(t)$ und dem Eingang $\vec{u}(t)$ der Ausgangsvektor $\vec{y}(t)$ bestimmt. Die daraus resultierende Gleichung

$$\vec{y}(t) = g(\vec{x}(t),\vec{u}(t))$$

heißt *Ausgangsgleichung*. $\vec{y}(t)$ ist gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Da man bei komplexen Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen für jedes Eingang/Ausgangpaar eine eigene Gewichtsfunktion aufstellen müsste, bietet sich bei der Simulation solcher Systeme die Zustandsraumdarstellung an.
Die Beschreibung eines Systems im Zustandsraum oder allgemein durch Gleichungen ist der Darstellung im Blockschaubild äquivalent. Je nach Anwendung wird die optimale Beschreibung gewählt.



2.3.1 Numerische Simulation

gegeben:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t))(*)$$

$$\text{Anfangswert } \vec{x}(0) = \vec{x_0}$$

gesucht: numerische Näherung $\tilde{x}$ für die Lösung der DGL auf einem Zeitintervall $[0, t_{max}]$

Idee: Approximation von $\dot{\vec{x}}(t)$ durch den Differenzenquotienten