



# **Mitschrieb der Vorlesung**

## **“Systemtheorie und Regelungstechnik”**

(SS 2010)

Dozent: Dr.-Ing. A. Peter

Textsatz von William Glover

Stand: 31. Mai 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Vorwort</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)</b>	<b>3</b>
1.1	Beispiele zum Aufstellen eines BSB . . . . .	3
1.2	Häufig verwendete Übertragungsglieder . . . . .	8
1.3	Nichtlineare Glieder und Linearisierung . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Systembeschreibung im Zeitbereich</b>	<b>10</b>
2.1	Differentialgleichungen . . . . .	10
2.1.1	Aufstellen der DGL . . . . .	10
2.1.2	Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten .	11
2.2	Übertragungsverhalten . . . . .	12
2.2.1	Gewichtsfunktion und Faltung . . . . .	12
2.2.2	Eigenschaften . . . . .	13
2.2.3	Sprungsantwort und Impulsantwort . . . . .	14
2.3	Darstellung im Zustandsraum . . . . .	15
2.3.1	Numerische Simulation . . . . .	18
2.3.2	Lineare Systeme . . . . .	19
2.3.3	Aufstellen der Zustandsgleichung aus BSB und DGL . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Systembeschreibung im Bildbereich</b>	<b>22</b>
3.1	Laplace-Transformation . . . . .	22
3.1.1	Grundlagen . . . . .	22
3.1.2	Lösung einer DGL . . . . .	23
3.2	Übertragungsfunktion ÜF . . . . .	24
3.3	Ortskurve . . . . .	25
3.4	Bode-Diagramm . . . . .	26
3.4.1	Definition . . . . .	26



## 0 Vorwort

**Systemtheorie, Kybernetik:** Allgemeine, formale Wissenschaft von der Struktur, den Relationen und dem Verhalten dynamischer, insbesondere komplexer Systeme, die gewisse allgemeine Eigenschaften realer Systeme aus den verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit widerspiegeln.

### Ziele

#### Beschreibung dynamischer Systeme

**Methoden:** Modellierung (z.B. als Blockschaltbild, DGL oder Übertragungsfunktion), Simulation (kostengünstig, ungefährlich), ...

#### Analyse dynamischer Systeme

Fragestellungen wie z.B. ist das System...

- ...stabil?
- ...steuerbar?
- ...schwingungsfähig?

#### Beeinflussung dynamischer Systeme

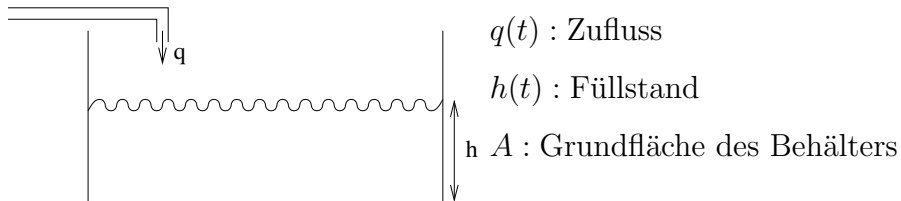
Ziel der Systemtheorie ist ein *automatisierter, sicherer, optimaler Betrieb von technischen Systemen*. Dies kann auf zwei Arten erreicht werden

- **Regelung (kont. Systemzustände):** Ansteuerung des Systems, sodass die Ausgangsgröße den gewünschten Sollverlauf erreicht
- **Steuerung (diskrete Systemzustände):** Bei gestörten oder zum Teil unbekannten Systemen fortlaufende Systembeobachtung und Rückführung.

# 1 Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)

## 1.1 Beispiele zum Aufstellen eines BSB

**Beispiel 1.1** (Füllen eines Behälters).



Lässt sich hier eine Gesetzmäßigkeit erkennen? Ja! Volumenbilanz:

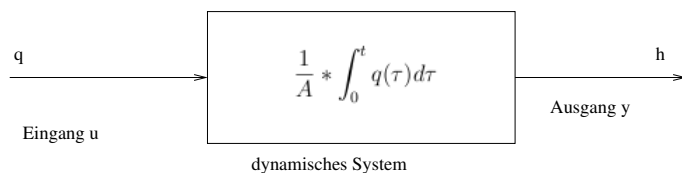
$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau (+v_0)$$

$v_0$ : Volumen zum Zeitpunkt  $t = 0$

$\Rightarrow$  für  $v_0 = 0$  gilt:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) d\tau$$

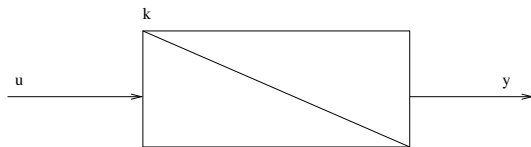
Diese Abhängigkeit lässt sich als ein sogenanntes *Blockschaltbild* wie folgt darstellen:



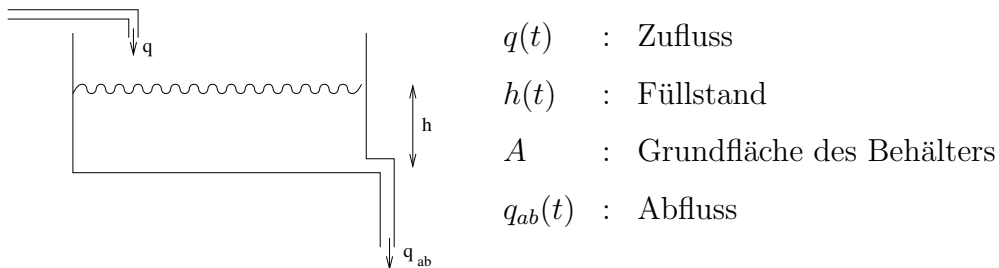
Es ist naheliegend, für übliche Operationen eine Bibliothek mit Standard-Blöcken anzulegen, im hier betrachteten Fall z.B. das sogenannte *Integrierglied* (I-Glied). Die allgemeine Integrationsfunktion

$$y(t) = k * \int_0^t u(\tau) d\tau$$

wird durch den folgenden Standardblock beschrieben:



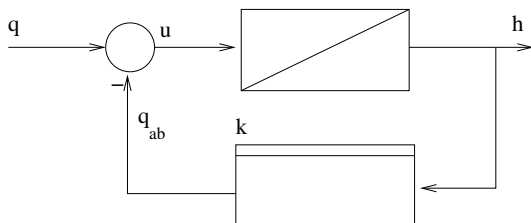
**Beispiel 1.2** (Erweiterung des Behälters um einen Ablauf).



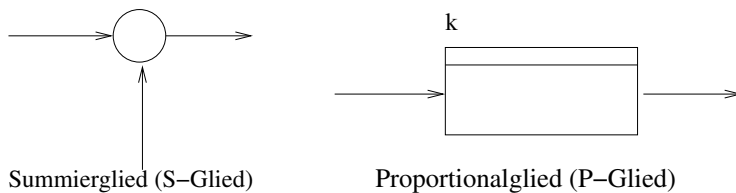
Für diesen erweiterten Fall wird erneut die Volumenbilanz aufgestellt:

$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) - q_{ab} d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Diese lässt sich unter der Annahme, dass  $q_{ab}$  von der aktuellen Füllhöhe abhängt, erneut in einem Blockschaltbild folgendermaßen darstellen:



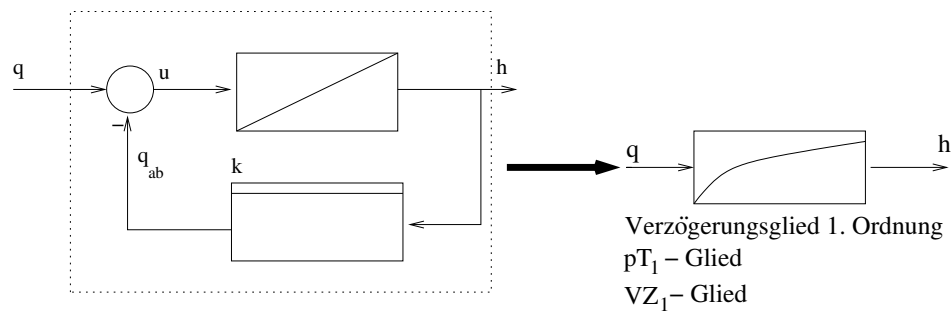
Hier wurden bereits zwei weitere, wichtige Standardblöcke eingeführt:



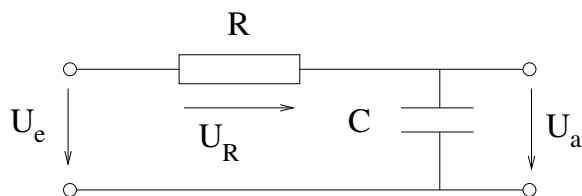
Anhand des Blockschaltbild erkennt man sehr leicht, dass der Füllstand  $h(t)$  sich nach einer gewissen Zeit nicht mehr ändert. Der aktuelle Füllstand wird zurückgeführt und

vor der Integration von  $q(t)$  abgezogen. Sobald gilt  $q_{ab} = q$ , bleibt  $h(t)$  konstant.  $u(t)$  wird Null (Stationärer Zustand)!

Da das beschriebene Systemverhalten sehr häufig vorkommt, wird dieses Blockschaltbild zu einem eigenen Standardblock zusammengefasst:



### Beispiel 1.3 (RC-Glied).



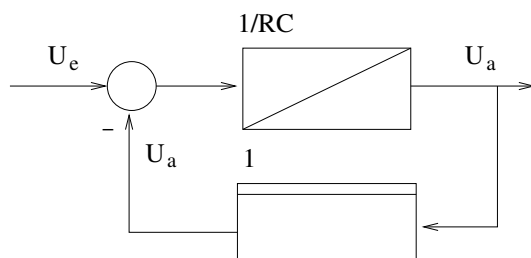
Das abgebildete RC Glied wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 U_a(t) &= \frac{1}{C} * \int_0^t i(\tau) d\tau \\
 U_e &= U_R + U_a \quad \Rightarrow U_R = U_e - U_a \\
 \rightarrow i &= \frac{U_R}{R} \\
 \Rightarrow i &= \frac{1}{R}(U_e - U_a)
 \end{aligned}$$

beschrieben. Für  $U_a$  ergibt sich daraus die Gleichung

$$U_a(t) = \frac{1}{RC} * \int_0^t U_e(\tau) - U_a(\tau) d\tau$$

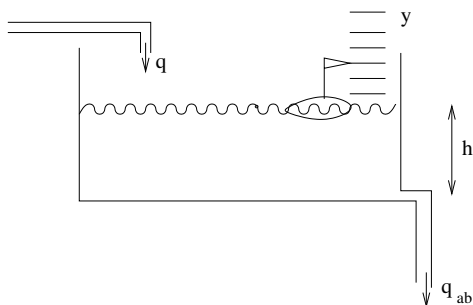
Auch diese Funktion wird anschließend als Blockschaubild dargestellt:





**Man erkennt:** Es handelt sich hier ebenfalls um ein Verzögerungsglied 1. Ordnung. Unabhängig von der physikalischen Realisierung haben beide Systeme die gleiche dynamische Struktur!

**Beispiel 1.4** (Erweiterung des Behälters um einen Schwimmer).



$h$  :  $y$  in Ruhe

$m$  : Masse des Schwimmers

$a$  : Fläche des Schwimmers

$\rho$  : Dichte der Flüssigkeit

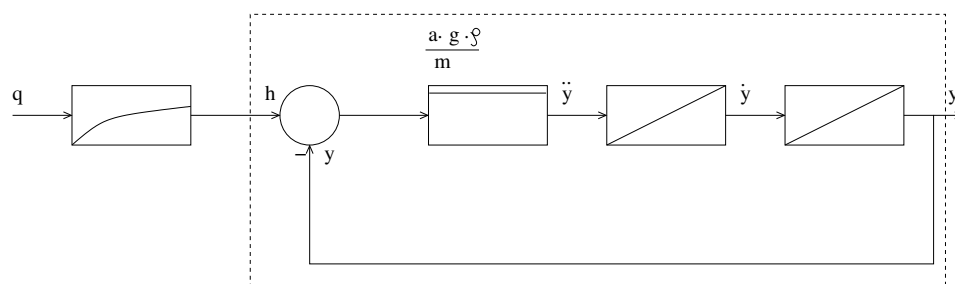
Die Auftriebskraft ist gegeben durch  $F = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$ . Durch Umformen lässt sich hieraus die vom Zeiger des Schwimmers angezeigte Skalaposition berechnen:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} (h(t) - y(t))$$

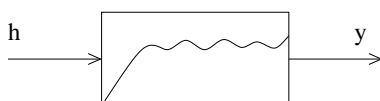
$$\Rightarrow y(t) = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} \int_0^t \int_0^\tau h(T) - y(T) dT d\tau$$

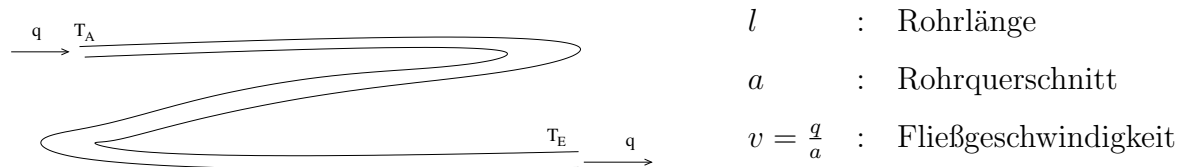
## BSB



$PT_2$ -Glieder; Verzögerungsglied 2. Ordnung

Auch für das  $PT_2$ -Glieder wird ein eigenes Standardsymbol definiert:



**Beispiel 1.5** (Zuleitung).

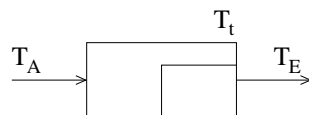
Die Zeit, bis eine Probenmenge das Rohr durchflossen hat, wird *Totzeit*  $T_t$  genannt. Sie ist gegeben durch

$$T_t = \frac{l}{v} = \frac{l \cdot a}{q}$$

$T_A$  und  $T_E$  sind die Temperaturen am Rohranfang bzw. Rohrende. Unter der Annahme, dass das Rohr perfekt isoliert ist, beim Transport also keine Wärme verloren geht, hängen diese beiden Größen über die Sprungfunktion

$$T_E(t) = T_A(t - T_t)$$

zusammen. Dieser Zusammenhang wird im Blockschaubild durch das sogenannte *Totzeitglied* dargestellt:

**Blockschaltbilder**

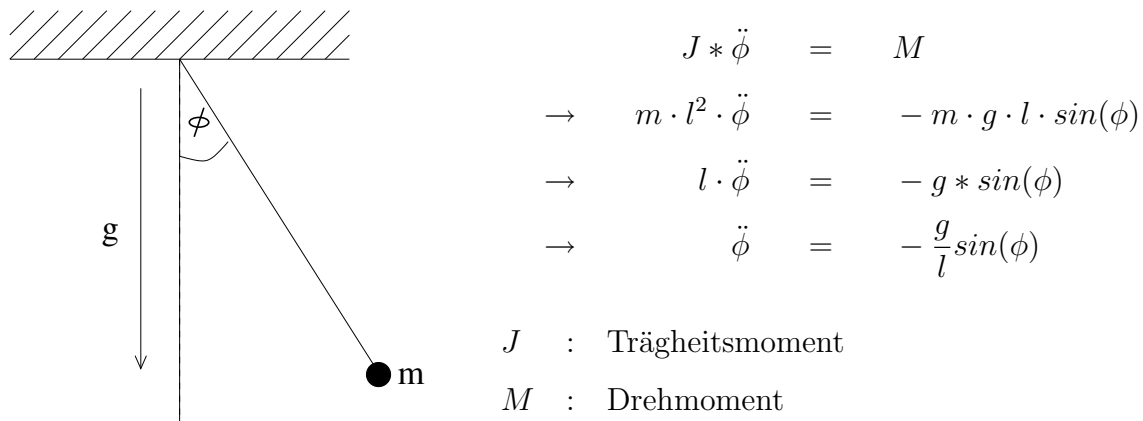
- beschreiben Ursache-Wirkungszusammenhänge in einer allgemeinen Form
- sind insbesondere bei komplexen Systemen oft übersichtlicher als Darstellungen in Gleichungen
- lassen sich schrittweise aufbauen und verifizieren
- sind Basis für numerische Simulationen ( $\rightarrow$  Simulink)

## 1.2 Häufig verwendete Übertragungsglieder

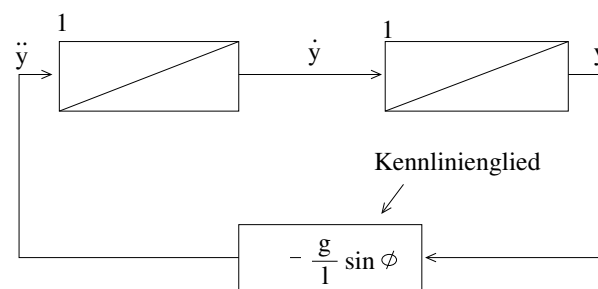
- elementare: P, I, D, S,  $T_t$
- zusammengesetzte:  $PT_1, PT_2$
- nichtlineare: KL, M

In der Vorlesung werden hauptsächlich elementare und zusammengesetzte Übertragungsglieder verwendet!

## 1.3 Nichtlineare Glieder und Linearisierung



Erneut wird das Blockschaltbild aufgestellt, unter Verwendung des sog. *Kennliniengliedes* (KL-Glied):

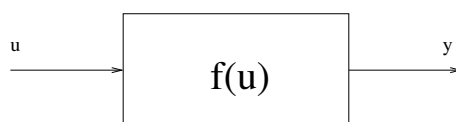


Ein nichtlineares System lässt sich zwar numerisch simulieren, stellt aber ein Problem bei der Analyse oder beim Regelentwurf dar. Als Hilfsmittel wird daher eine Linearisierung im Arbeitspunkt verwendet.

**Arbeitspunkt:** Betriebszustand eines Systems, in dem die zeitveränderlichen Größen fest sind (stationärer Zustand) und sich das System in einem gewünschten Sollzustand befindet.

Wird das System nun um den Arbeitspunkt linearisiert, sind die Abweichungen zwischen nichtlinearem und linearem Modell *in der Umgebung um diesen Arbeitspunkt herum* nur klein. Bei zu großer Abweichung vom Arbeitspunkt bildet das lineare Modell das nichtlineare nur unzureichend ab. Der Arbeitspunkt muss dann verändert/neu bestimmt werden.

### Linearisierung eines KL-Gliedes



$$y = f(u)$$

$$y_0 + \Delta y = f(u_0 + \Delta u)$$

Es wird nun die Taylorreihen-Entwicklung für diese Funktion durchgeführt:

$$y_0 + \Delta y = f(u_0) + \left[ \frac{df(u)}{du} \right]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots$$

$$\Rightarrow y_0 = f(u_0)$$

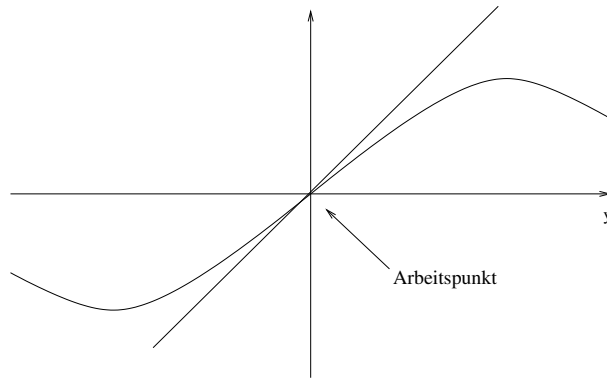
$$\Delta y = \left[ \frac{df(u)}{du} \right]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots \quad (\text{Nichtlineare Terme werden Vernachlässigt!})$$

z.B.  $y = \sin(\phi)$ : Linearisierung um den Arbeitspunkt  $\phi_0 = 0$

$$y_0 = 0$$

$$\Delta y = [\cos(\phi)]_{\phi_0=0} \cdot \Delta \phi$$

$$\Rightarrow T_y = 1 \cdot \Delta \phi$$



## 2 Systembeschreibung im Zeitbereich

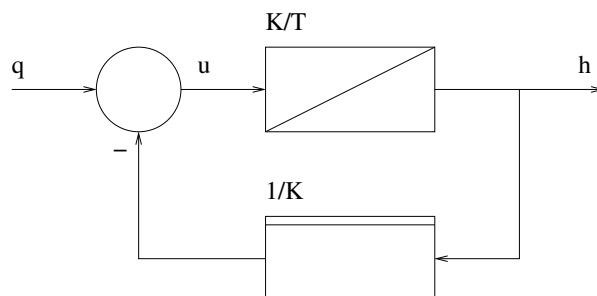
### 2.1 Differentialgleichungen

#### 2.1.1 Aufstellen der DGL

Die Differentialgleichung eines Systems kann auf 2 Arten bestimmt werden:

- aus den physikalischen Gleichungen, z.B.:
  - Bewegungsgleichungen:  $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$  ;  $M(t) = J \cdot \ddot{\phi}$
  - Bilanzierung von Volumen:  $q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = \dot{v}(t)$
- aus dem Blockschaubild:
  - eventuell Hilfsgrößen einführen (z.B. Ausgang von S-Gliedern, ...)
  - Entgegen der Signalflussrichtung durch das BSB gehen und Funktionsbeziehungen der Blöcke auswerten

**Bsp.:**  $PT_1$ -Glied



$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{K}{T} \int_0^t u(\tau) d\tau \\
\rightarrow \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot u(t) \\
u(t) &= q - \frac{1}{K} \cdot h(t) \\
\Rightarrow \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot (q(t) - \frac{1}{K} \cdot h(t)) \\
\Rightarrow \frac{1}{T} \cdot h(t) + \dot{h}(t) &= \frac{K}{T} \cdot q(t) \\
\Rightarrow \underbrace{h(t) + T \cdot \dot{h}(t)}_{\text{DGL in } h(t)} &= \underbrace{k \cdot q(t)}_{\text{Anregung}} \\
\rightarrow \text{homogene DGL, falls } q(t) = 0 \text{ (Anregung} &= 0)
\end{aligned}$$

### 2.1.2 Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

**Beispiel 2.1** (Lösung der DGL des  $PT_1$ -Gliedes).

Gegeben ist die Gleichung

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot u(t)$$

mit  $y(0) = y_0$  und beliebigem  $u(t)$  für  $t > 0$ .

- **1. Schritt:** charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
T \cdot s + 1 &= 0 \\
\rightarrow s_1 &= -\frac{1}{T} \\
\Rightarrow y_h(t) &= C_1 \cdot y_1(t) = c_1 * e^{-\frac{t}{T}} \quad (\text{Formelsammlung})
\end{aligned}$$

- **2. Schritt:** Variation der Konstanten

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= C_1(t) e^{-\frac{t}{T}} \\
\text{ableiten: } \dot{y}_p(t) &= \frac{-C_1(t)}{T} e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t) e^{-\frac{t}{T}}
\end{aligned}$$

In die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{aligned}
K \cdot u(t) &= T \cdot \left( -\frac{C_1(t)}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right) + \cancel{C_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}} \\
\dot{C}_1(t) &= \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{t}{T}} \cdot u(t) \\
\text{Integrieren: } C_1(t) &= \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \\
\Rightarrow y_p(t) &= \left[ \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-\frac{t}{T}} \\
&= \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

- **3. Schritt:** Zusammenfassen zur Gesamtlösung

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + y_p(t) \\ &= c_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

- **4. Schritt:**  $C_1$  bestimmen

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = y_0 \\ \Rightarrow \text{Lösung: } y(t) &= \underbrace{y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}}_1 + \underbrace{\int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau}_2 \end{aligned}$$

- **Formelteil 1** ist die homogene Lösung. Sie ist nur vom Anfangswert  $y_0$  abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *freie Bewegung*
- **Formelteil 2** ist die Partikulärlösung. Sie ist nur von der Eingangsfunktion  $u(t)$  abhängig. Man sagt: Sie beschreibt die *erzwungene Bewegung*

## 2.2 Übertragungsverhalten

### 2.2.1 Gewichtsfunktion und Faltung

Das Übertragungsverhalten von  $u(t)$  zu  $y(t)$  wird durch den Term

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau) d\tau$$

definiert. Er beschreibt das Übertragungsverhalten bei verschwindenden Anfangsbedingungen ( $y_0 = 0$ ). Mit der Funktion

$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

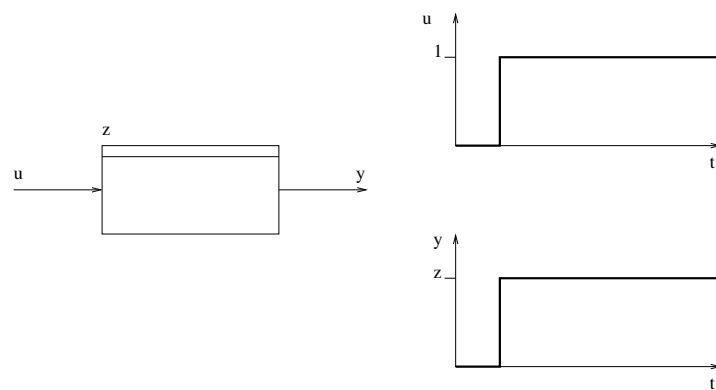
lässt sich das Integral zu

$$y(t) = \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{Faltungsintegral}} = g(t) * u(t)$$

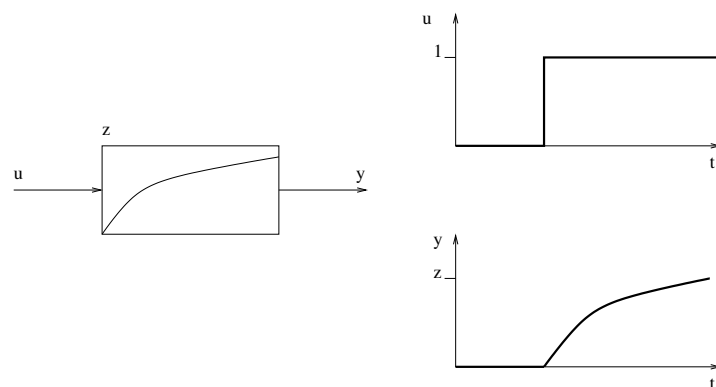
vereinfachen. Das Zeichen  $*$  wird als “gefaltet mit” ( $g(t)$  gefaltet mit  $u(t)$ ) gelesen.  $g(t)$  nennt man *Gewichtsfunktion*. Sie beschreibt das Übertragungsverhalten des Systems vollständig!

**Es gilt:**  $g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

Die Gewichtsfunktion  $g(t)$  gibt an, mit welchem Gewicht der Wert der Eingangsfunktion  $u(t)$  von *zurückliegenden* Zeitpunkten  $(t - \tau)$  in den Wert der Ausgangsfunktion  $y(t)$  zum *aktuellen* Zeitpunkt  $t$  eingeht.



Der Ausgang hängt nur vom aktuellen Eingang ab.



In diesem Fall hingegen ist der Ausgang auch von vergangenen Werten abhängig.

### 2.2.2 Eigenschaften

**Lineare** und **zeitinvariante** Systeme lassen sich durch die Gewichtsfunktion vollständig beschreiben. (Entspricht der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten)

**Linearität:** Ein System ist linear, wenn...



- ...das Superpositionsprinzip:  $y(t) = g(t) * [u_1(t) + u_2(t)] = g(t) * u_1(t) + g(t) * u_2(t)$
- ...das Verstärkungsprinzip:  $y(t) = g(t) * [\alpha \cdot u(t)] = \alpha \cdot [g(t) * u(t)]$

gelten.

**Zeitinvarianz:** Das System ist invariant gegenüber Zeitverschiebungen:

Aus  $y(t) = g(t) * u(t)$  muss für eine beliebige Zeitverschiebung  $T$  folgen, dass  
 $y(t - T) = g(t) * u(t - T)$

**Kausalität:** Das Ausgang  $y(t)$  eines kausalen Systems hängt *nur* vom Verlauf des Eingangs  $u(t)$  für Zeiten  $t \leq t_0$  ab. Das System hängt also nur von vergangenen Eingangswerten ab. Für  $g(t)$  kausaler Systeme gilt also:

$$g(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

### 2.2.3 Sprungsantwort und Impulsantwort

**Sprungantwort:** Auf den Systemeingang wird ein *Einheitssprung* gegeben



$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Die Antwort des Systems heißt *Sprungantwort* und wird beschrieben durch

$$h(t) := y(t)$$

Mit dem Flächenintegral  $y(t) = \int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$  vereinfacht sich das zu

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t g(\tau) \cdot \underbrace{\sigma(t - \tau)}_{=1} d\tau \\ h(t) &= \int_0^t g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Die Sprungantwort, genau wie die Gewichtsfunktion, charakterisiert das dynamische System vollständig!

**Impulsantwort:** Die Impulsfunktion  $\delta(t)$  ist die formale Ableitung des Einheitssprungs.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \Leftrightarrow \int_0^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t)$$

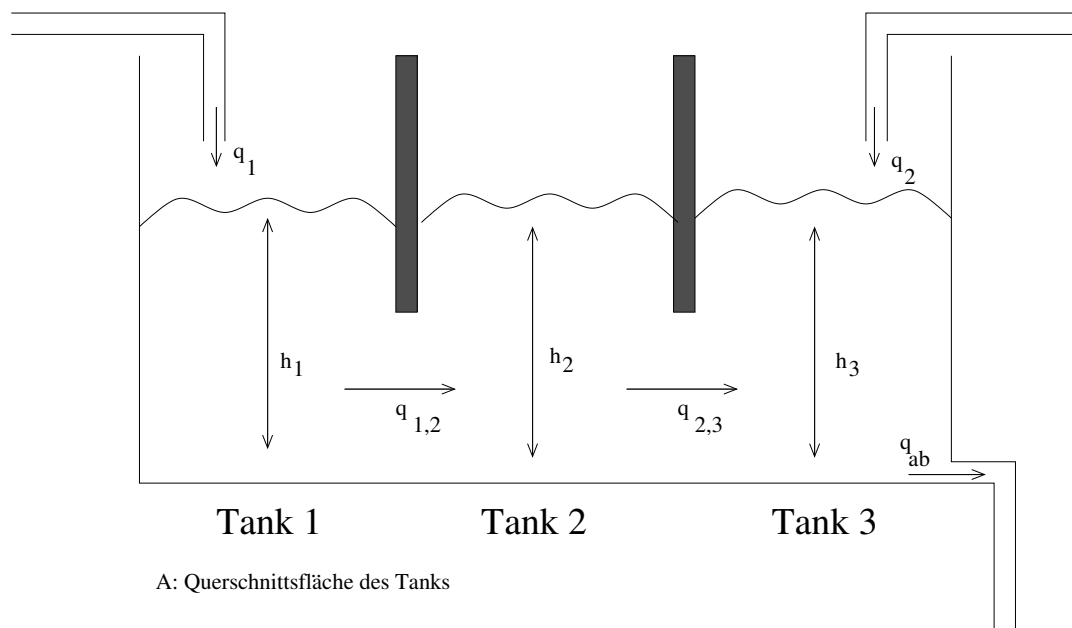
Für die Impulsantwort gilt damit:

$$\int_0^t g(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = g(t)$$

$\Rightarrow$  Die Gewichtsfunktion  $g(t)$  kann auch als Impulsantwort interpretiert werden.

## 2.3 Darstellung im Zustandsraum

**Beispiel 2.2** (System aus 3 verbundenen Wassertanks).



Volumenbilanz:

$$\text{Tank 1: } \dot{h}_1 = \frac{1}{A}(q_1 - q_{1,2})$$

$$\text{Tank 2: } \dot{h}_2 = \frac{1}{A}(q_{1,2} - q_{2,3})$$

$$\text{Tank 3: } \dot{h}_3 = \frac{1}{A}(q_2 + q_{2,3} - q_{ab})$$

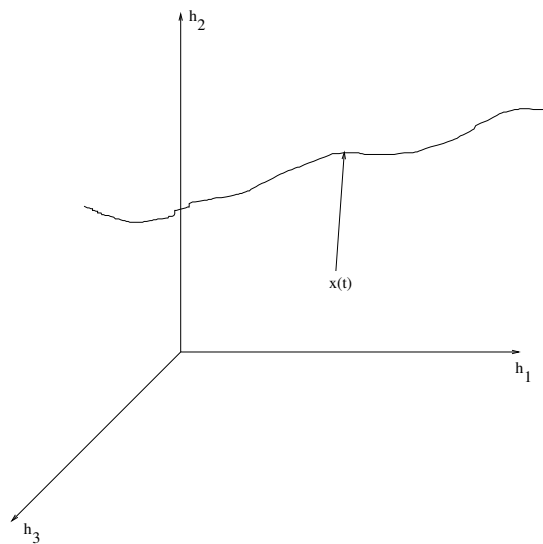
**Annahme:** Der Ausgleichsfluss zwischen den Tanks ist proportional zur Füllstands Differenz:

$$q_{1,2} = c \cdot (h_1 - h_2); q_{2,3} = c \cdot (h_2 - h_3); q_{ab} = ch_3$$

$$\begin{aligned} \text{damit: } \dot{h}_1 &= \frac{1}{A}(q_1 - ch_1 + ch_3) \\ \dot{h}_2 &= \frac{1}{A}(ch_1 - 2ch_2 + ch_3) \\ \dot{h}_3 &= \frac{1}{A}(q_2 + ch_2 - 2ch_3) \end{aligned}$$

Kennt man  $h_1, h_2, h_3$ , so ist der Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t$  vollständig bestimmt.  $\Rightarrow h_1, h_2, h_3$  sind die Zustandsgrößen des Systems.

**Geometrische Deutung:**  $h_1, h_2, h_3$  spannen einen dreidimensionalen Vektorraum auf, den sogenannten *Zustandsraum*.



$\vec{x}(t)$  : Zustandsvektor

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}$$

Das System wird durch  $q_1(t)$  und  $q_2(t)$  angeregt, diese sind die *Eingangsgrößen*. Aus ihnen lässt sich der sogenannte *Eingangsvektor* bestimmen:

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

**Verallgemeinerung**

Das System lässt sich durch  $n$  Zustände beschreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das System besitzt  $m$  Eingänge:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

Dieses System lässt sich durch  $n$  DGL 1. Ordnung beschreiben:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = f_1(\vec{x}, \vec{u}) \\ \vdots \\ x_n = f_n(\vec{x}, \vec{u}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \text{Zustandsdifferentialgleichung} \end{array}$$

Durch Messung des Systems wird aus dem aktuellen Zustand  $\vec{x}(t)$  und dem Eingang  $\vec{u}(t)$  der Ausgangsvektor  $\vec{y}(t)$  bestimmt. Die daraus resultierende Gleichung

$$\vec{y}(t) = g(\vec{x}(t), \vec{u}(t))$$

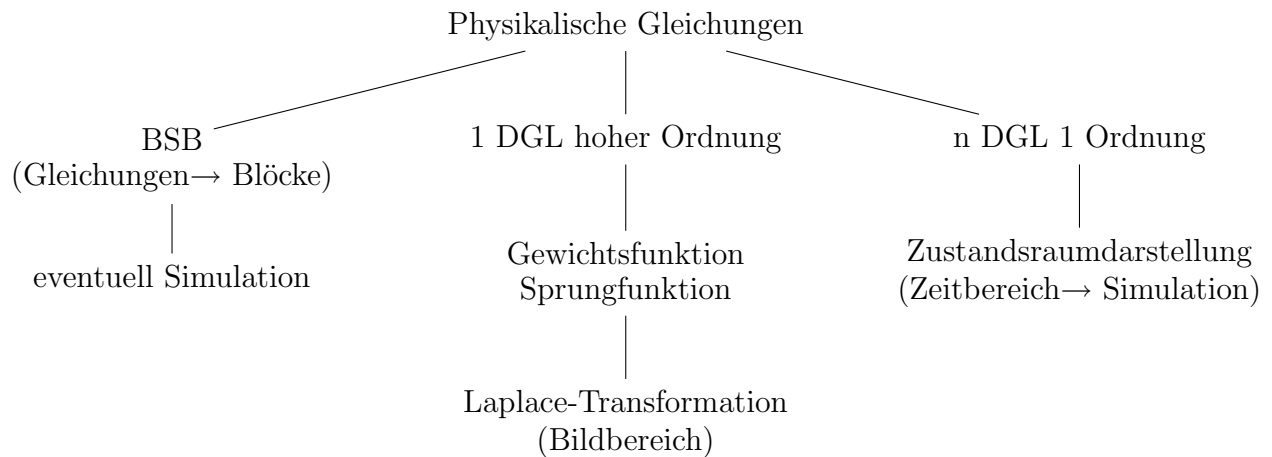
heißt *Ausgangsgleichung*.  $\vec{y}(t)$  ist gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$$

Da man bei komplexen Systemen mit mehreren Ein- und Ausgängen für jedes Eingang/Ausgangspaar eine eigene Gewichtsfunktion aufstellen müsste, bietet sich bei der Simulation solcher Systeme die Zustandsraumdarstellung an.

Die Beschreibung eines Systems im Zustandsraum oder allgemein durch Gleichungen ist

der Darstellung im Blockschaubild äquivalent. Je nach Anwendung wird die optimale Beschreibung gewählt.



### 2.3.1 Numerische Simulation

gegeben:

$$\vec{\dot{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) (*)$$

$$\text{Anfangswert } \vec{x}(0) = \vec{x}_0$$

**gesucht:** numerische Näherung  $\tilde{x}$  für die Lösung der DGL auf einem Zeitintervall  $[0, t_{max}]$

**Idee:** Approximation von  $\vec{\dot{x}}(t)$  durch den Differenzenquotienten:

$$\vec{\dot{x}} \approx \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} \text{ mit Zeitschritt } h$$

**Einsetzen in (\*) :**

$$\begin{aligned} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} &\approx \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) \\ \Rightarrow \vec{x}(t) + h \cdot \vec{f}(\vec{x}(t), \vec{u}(t)) &\approx \vec{x}(t+h) \end{aligned}$$

mit festen Zeitschritten  $t_i = i \cdot h$

$$\underbrace{\vec{\tilde{x}}(t_{i+1})}_{\text{neuer Zustand}} = \underbrace{\vec{\tilde{x}}(t_i)}_{\text{alter Zustand}} + h \cdot \vec{f}(\vec{\tilde{x}}(t_i), \vec{u}(t_i))$$

Diese Gleichung lässt sich mithilfe des *Euler-Verfahrens* lösen.

### 2.3.2 Lineare Systeme

#### Fortsetzung Bsp 2.2:

Sortieren der Zustände und der Eingänge:

$$\begin{aligned}\dot{h}_1(t) &= -\frac{C}{A}h_1(t) + \frac{C}{A}h_2(t) + \frac{1}{A}q_1(t) \\ \dot{h}_2(t) &= \frac{C}{A}h_1(t) - \frac{2C}{A}h_2(t) + \frac{C}{A}h_3(t) \\ \dot{h}_3(t) &= \frac{C}{A}h_2(t) - \frac{2C}{A}h_3(t) + \frac{1}{A}q_2(t)\end{aligned}$$

Die obige Gleichung lässt sich auch in Vektoren und Matrizen ausdrücken:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{C}{A} & +\frac{C}{A} & 0 \\ \frac{C}{A} & -\frac{2C}{A} & \frac{C}{A} \\ 0 & \frac{C}{A} & -\frac{2C}{A} \end{pmatrix}}_{\text{Systemmatrix } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{pmatrix}}_{\text{Zustandsvektor } \vec{x}(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \end{pmatrix}}_{\text{Eingangsmatrix } \mathbf{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}}_{\text{Eingangsvektor } \vec{u}}$$

Diese Gleichung gilt nur bei linearen Systemen und ist außerdem eine beliebte **Klausuraufgabe!** Allgemein gilt:

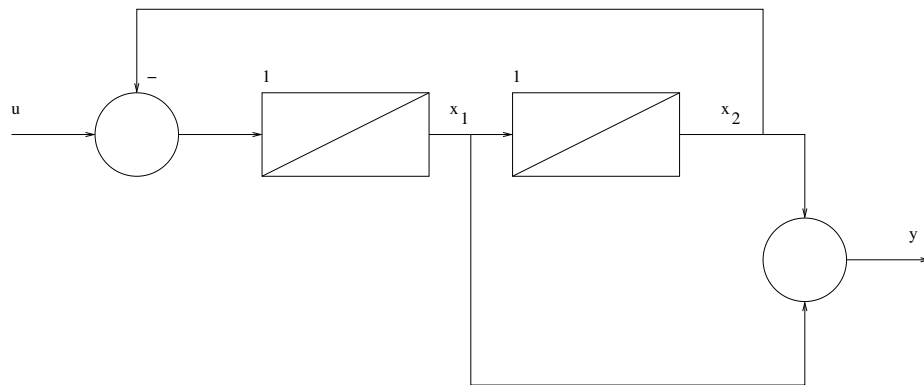
$$\begin{aligned}\vec{\dot{x}}(t) &= \mathbf{A} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \vec{u}(t) \quad \text{Zustandsdifferentialgleichung} \\ y(t) &= \mathbf{C} \cdot \vec{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \vec{u}(t) \quad \text{Ausgangsgleichung}\end{aligned}$$

### 2.3.3 Aufstellen der Zustandsgleichung aus BSB und DGL

#### aus dem Blockschaubild

**Idee:** Jedes I-Glied (und  $PT_1$ ) speichert einen Zustand. Um die Zustandsgleichung aufzustellen muss also wie folgt vorgegangen werden:

1.  $PT_2$ -Glieder zerlegen
2. Alle Ausgänge von I- und  $PT_1$ -Gliedern als Zustände einführen (Buchstaben im BSB zuweisen!)
3. Entgegen der Signalflussrichtung die Gleichungen bestimmen

**Beispiel 2.3.**

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_2(t) = \int x_1(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$x_1(t) = \int u(\tau) - x_2(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = -x_2(t) + u(t)$$

**Vektoriell:**

$$\vec{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$\vec{\dot{x}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \vec{x}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t)$$

$$\vec{y}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \vec{x}(t)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

**Aus der Differentialgleichung**

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_{n-1} u^{(n-1)}(t)$$

(mit  $a_n = 1, b_n = 0$ , sonstige  $a_i, b_j$  beliebig!)

Nach höchster Ableitung auflösen:

$$\Rightarrow y^{(n)}(t) = \underbrace{[b_0 u(t) - a_0 y(t)]}_{=x_1(t)} + \underbrace{[b_1 \dot{u}(t) - a_1 \dot{y}(t)] + \dots + [b_{n-1} u^{(n-1)}(t) - a_{n-1} y^{(n-1)}(t)]}_{=x_2(t)} \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{=x_n^{(n)}(t) \Rightarrow y(t) = x_n(t)}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_n(t) (**) \\ \Rightarrow \dot{x}_1(t) &= -a_0 x_n(t) + b_0 u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1 - a_1 x_n(t) + b_1 u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= x_{n-1} - a_{n-1} x_n(t) + b_{n-1} u(t) \end{aligned}$$

**Vektoriell:**

$$\vec{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u(t)$$

Aus (\*\*) folgt damit durch Integrieren von  $x_n(t)$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$



## 3 Systembeschreibung im Bildbereich

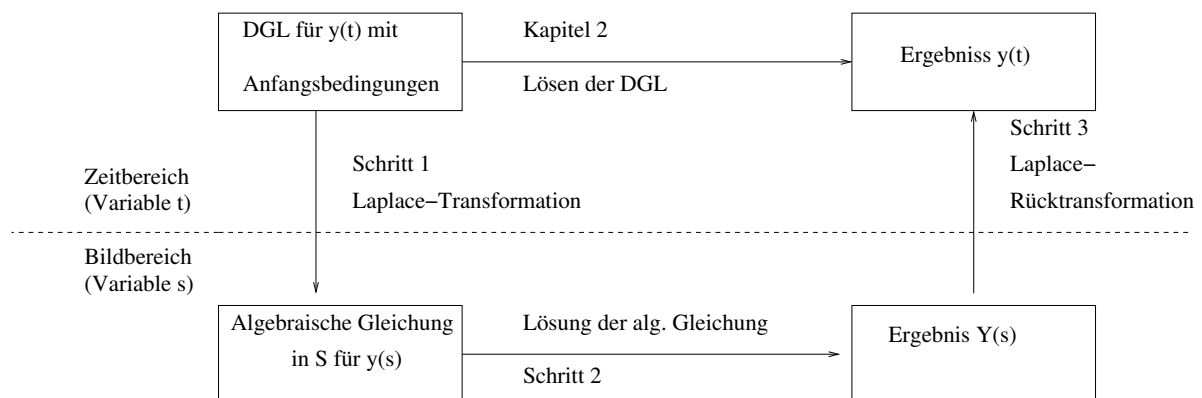
### 3.1 Laplace-Transformation

#### 3.1.1 Grundlagen

**Idee:** Die Lösung einer algebraischen Gleichung ist einfacher als Lösung einer DGL.  
Allerdings ist eine Transformation notwendig.

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

$$y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{ts} ds$$



#### Vorraussetzung

1. Es muss  $y(t) = 0$  für  $t < 0$  sein! Ansonsten stimmt das Modell nicht mit der Realität überein, das System würde antworten, *bevor* ein Eingang angelegt ist. Schreibweise am besten:  $y(t) \cdot \sigma(t)$   
 $y(t)$  kann Gewichtsfunktion eines Systems sein  $\Rightarrow$  System ist kausal!
2. Das uneigentliche Integral muss konvergieren.

Der "Umweg" wird durch tabellierte Korrespondenzen attraktiv. Im Allgemeinen ist die Rücktransformation am aufwendigsten, da die Lösung aufgespalten und in Teilen transformiert werden muss.

### 3.1.2 Lösung einer DGL

**Beispiel 3.1** (Sprungantwort eines  $PT_1$ -Gliedes).

**DGL:**

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

mit  $y(0) = y_0$  und  $u(t) = u_0\sigma(t)$

**Schritt 1:** Regel 1 und Regel 5

$$T \cdot (sY(s) - y_0) + Y(s) = k \cdot U(s)$$

$\Rightarrow$  Eingangssignal: Regel 1, Korr. 2

$$U(s) = u_0 \cdot \frac{1}{s}$$

**Schritt 2:** Nach  $Y(s)$  auflösen

$$\begin{aligned} Y(s)(sT + 1) &= kU(s) + Ty_0 \\ Y(s) &= \frac{T}{sT+1}y_0 + \frac{k}{sT+1}u(s) \\ \text{mit } U(s) &= u_0 \cdot \frac{1}{s} \\ Y(s) &= \underbrace{\frac{T}{sT+1}y_0}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k}{sT+1} \cdot \frac{u_0}{s}}_{Y_2(s)} \end{aligned}$$

**Schritt 3:** Rücktransformation

$$Y_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T}}y_0$$

mit Korr. 6:

$$Y_1(t) = e^{-\frac{1}{T}t} \cdot y_0 \cdot \underbrace{\sigma(t)}_{=0 \text{ für } t < 0}$$

Partialbruchzerlegung für  $Y_2(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{ku_0}{(sT+1)s} &= \frac{A}{sT+1} + \frac{B}{s} \\ \Rightarrow k \cdot u_0 &= A \cdot s + B(sT+1) \end{aligned}$$

**HIER FEHLT WAS!!!!**

## 3.2 Übertragungsfunktion ÜF

aus Bsp 3.1 :

$$Y(s) = \underbrace{\frac{T}{sT+1}y_0}_{\text{nur vom Anfangswert abh. Freie Bewegung}} + \underbrace{\frac{k}{sT+1}u(s)}_{\text{vom Eingang } U(s) \text{ abh. Erzwungene Bew.} := G(s)}$$

$G(s)$  heißt *Übertragungsfunktion*. Sie beschreibt das System vollständig. Das Übertragungsverhalten bei verschwindendem Anfangswert, also  $y(s) = G(s) \cdot u(s)$  entspricht  $y(t) = g(t) * u(t)$  im Zeitbereich. Es gilt also  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ . (Regel 9)

Im Bildbereich können Systeme sehr einfach verknüpft werden, z.B. durch Serienschaltungen:

$$\begin{aligned} V(s) &= G_1(s) \cdot U(s) \\ Y(s) &= G_2(s) \cdot V(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot U(s) \end{aligned}$$

### Beziehung zwischen DGL und ÜF

z.B. Beispiel 3.1:

$$\underbrace{T}_{a_1} \cdot \dot{y}(t) + \underbrace{1}_{a_0} y(t) = \underbrace{k}_{b_0} \cdot U(t)$$

$$G(s) = \frac{\overbrace{k}^{b_0}}{\underbrace{T}_{a_1} s + \underbrace{1}_{a_0}}$$

**allgemein:** DGL der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b(u(t)) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$$

$\Rightarrow$  Rationale ÜF (Regel 5 mit verschwindendem Anfangswert)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + b_m s^m}{\underbrace{a_0 + a_1 \cdot s + a_n s^n}_{\text{Nullstellen des Nenners} := \text{Pole der ÜF}}}$$

- Falls  $n < m$ : "Reales" System
- Falls  $n < m$ : differenzierendes Verhalten
- falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_\rho = 0$ :  $s^\rho$  kann im Nenner ausgeklammert werden  $\Rightarrow \rho$ -fach integrierend.

**praktische Betrachtung****Beispiel 3.2.** *Harmonische Anregung eines Federschwingers***Messungen**

$\omega$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0	10
$T = \frac{2\pi}{\omega}$	31,4	15,7	10,5	7,9	6,3	5,2	4,5	3,1	0,62
$A(\omega)$	1,04	1,16	1,45	2,1	2,5	1,5	0,9	0,3	0,01
$\Phi(\omega)$	$-\frac{0,4}{31,4} \cdot 360^\circ = -4,5^\circ$	$-9^\circ$	$-17^\circ$	$-45^\circ$	$-90^\circ$	$-139^\circ$	$-160^\circ$	$-174^\circ$	$-180^\circ$

**HIER FEHLT MAL WIEDER WAS**

- Der Frequenzgang  $G(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\Phi(\omega)}$  wird in Stützstellen  $\omega$  definiert
- Damit ist auch die ÜF  $G(s)$  definiert!
- Graphische Darstellung? Die sog. *Ortskurve* wird in Kap. 3.5 beschrieben, das sog. *Bode-Diagramm* in Kap. 3.6

**3.3 Ortskurve**

Die Ortskurve ist ein Kurvenzug, der von  $G(j\omega)$  in der komplexen Ebene beschrieben wird, wenn die Anregungsfrequenz  $\omega$  im Intervall  $(0 \leq \omega \leq \infty)$  variiert wird.

**Falls nicht in der VL gemacht, hier aufstellung der Ortskurve theoretisch erläutern!** Auftragen von  $A(j\omega)$  in einem Zeigerdiagramm (Imaginärteil über Realteil). Durch anschließendes Verbinden der Punkte erhält man die sog. *Ortskurve*.

Die Ortskurve kann auch aus  $G(s)$  berechnet werden:

- I-Glied:  $G(s) = k \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow G(j\omega) = k \cdot \frac{1}{j\omega} = \underbrace{k \cdot \frac{1}{\omega}}_{A(\omega)=const.} \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{\Phi(\omega)}$
- $T_t$ -Glied:  $G(s) = k \cdot e^{-sT_t}; G(j\omega) = \underbrace{k}_{A(\omega)=const.} \cdot \underbrace{e^{-j\omega T_t}}_{\Phi(\omega)}$

Für eine Übersicht genügt die Betrachtung der Asymptoten der Ortskurve:

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + \dots + a_n(j\omega)^n} \cdot e^{-(j\omega)T_t}$$

**Anfang der Ortskurve:**

- falls  $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$

$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{b_0}{a_0} = k$  Start der OK auf der Re-Achse

- falls  $a_0 = a_1 = \dots = a_{\rho-1} = 0$   $\rho$ -fach Integrierend

$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{b_0 + \dots + b_m}{a_\rho (j\omega)^\rho + \dots + a_n (j\omega)^n} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{(j\omega)^\rho} \cdot \frac{b_0 + \dots}{a_\rho + \dots} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega^\rho} \cdot \frac{b_0}{a_\rho} \cdot e^{-j\rho \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{OK}$   
 kommt aus dem Unendlichen mit Phasenwinkel  $-\rho \frac{\pi}{2}$

**3.4 Bode-Diagramm****3.4.1 Definition**

Das Bode-Diagramm ist die getrennte graphische Darstellung des *Amplitudenverlaufs*  $A(\omega)$  und des *Phasenverlaufs*  $\Phi(\omega)$  über der Frequenz  $\omega$ . In der Regel werden die Größen logarithmisch aufgetragen.

Die Amplitude wird auch logarithmisch in Dezibel (dB) dargestellt:

$$A(\omega)_{dB} = 20 \log_{10} A(\omega)$$