Mitschrieb der Vorlesung

“Systemtheorie und Regelungstechnik”

(SS 2010)

Dozent: Dr.-Ing. A. Peter

Textsatz von William Glover

Stand: 30. April 2010

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Systemtheorie, Kybernetik: Allgemeine, formale Wissenschaft von der Struktur, den Relationen und dem Verhalten dynamischer, insbesondere komplexer Systeme, die gewisse allgemeine Eigenschaften realer Systeme aus den verschiedenen Bereichen der Wirklichkeit widerspiegeln.

Ziele

Beschreibung dynamischer Systeme

Methoden: Modellierung (z.B. als Blockschaltbild, DGL oder Ãbertragungsfunktion), Simulation (kostengÃ¼nstig, ungefÃ¤hrlich), ...

Analyse dynamischer Systeme

Fragestellungen wie z.B. ist das System...

- ...stabil?
- ...steuerbar?
- ...schwingungsfÃ¤hig?

Beeinflussung dynamischer Systeme

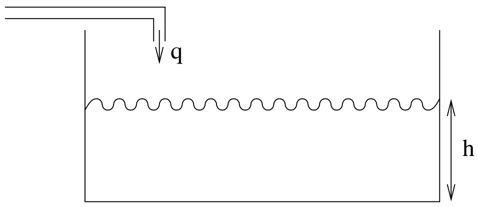
Ziel der Systemtheorie ist ein *automatisierter, sicherer, optimaler Betrieb von technischen Systemen.* Dies kann auf zwei Arten erreicht werden

- **Regelung (kont. SystemzustÃ¤nde):** Ansteuerung des Systems, sodass die AusgangsgrÃ¶Ãe den gewÃ¼nschten Sollverlauf erreicht
- **Steuerung (diskrete SystemzustÃ¤nde):** Bei gestÃ¶rten oder zum Teil unbekannten Systemen fortlaufende Systembeobachtung und RÃ¼ckfÃ¼hrung.

1 Beschreibung dynamischer Systeme durch das Blockschaltbild (BSB)

1.1 Beispiele zum Aufstellen eines BSB

Beispiel 1.1 (FÃ¼llen eines BehÃ¤lters)**.**



$q(t)$: Zufluss

$h(t)$: FÃ¼llstand

A : GrundflÃ¤che des BehÃ¤lters

LÃ¤sst sich hier eine GesetzmÃ¤Ãigkeit erkennen? Ja! Volumenbilanz:

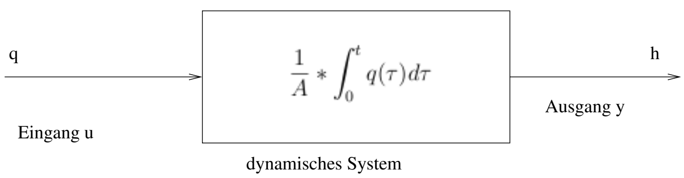
$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau (+v_0)$$

v_0: Volumen zum Zeitpunkt $t = 0$

$\Rightarrow$ fÃ¼r $v_0 = 0$ gilt:

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) d\tau$$

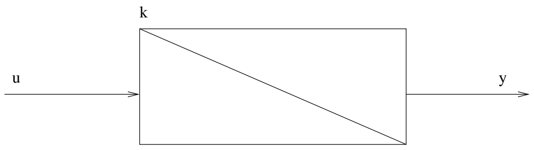
Diese AbhÃ¤ngigkeit lÃ¤sst sich als ein sogenanntes *Blockschaltbild* wie folgt darstellen: Es ist naheliegend, fÃ¼r Ã¼bliche Operationen eine Bibliothek mit Standard-BlÃ¶cken



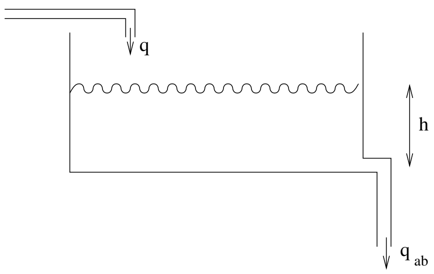
anzulegen, im hier betrachteten Fall z.B. das sogenannte *Integrierglied* (I-Glied). Die allgemeine Integrationsfunktion

$$y(t) = k * \int_0^t u(\tau) d\tau$$

wird durch den folgenden Standardblock beschrieben:



Beispiel 1.2 (Erweiterung des BehÃ¤lters um einen Ablauf).

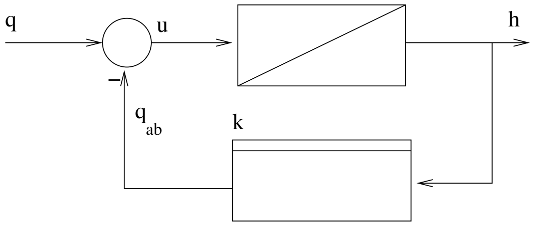


$q(t)$	:	Zufluss
$h(t)$	:	FÃ¼llstand
A	:	GrundflÃ¤che des BehÃ¤lters
$q_{ab}(t)$	:	Abfluss

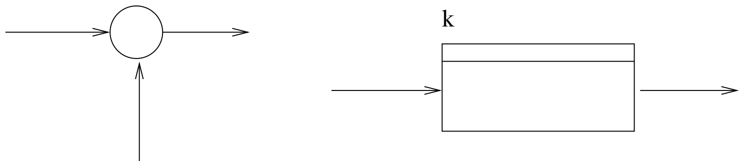
FÃ¼r diesen erweiterten Fall wird erneut die Vulumenbilanz aufgestellt:

$$v(t) = A \cdot h(t) = \int_0^t q(\tau) - q_{ab} d\tau = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Diese lÃ¤sst sich unter der Annahme, dass q_{ab} von der aktuellen FÃ¼llhÃ¶he abhÃ¤ngt, erneut in einem Blockschaltbild folgendermaÃen darstellen:



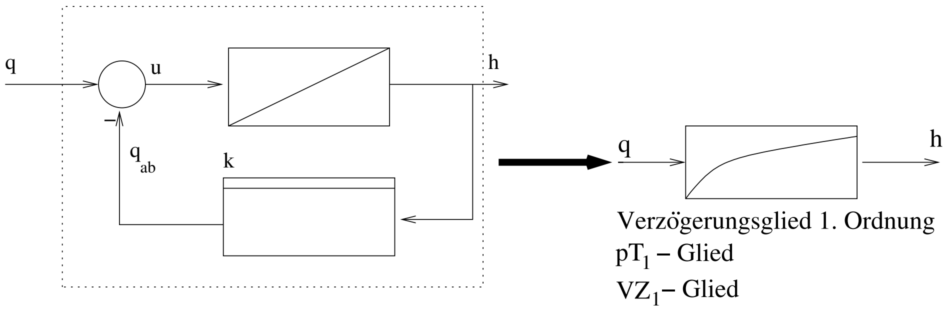
Hier wurden bereits zwei weitere, wichtige StandardblÃ¶cke eingefÃ¼hrt:



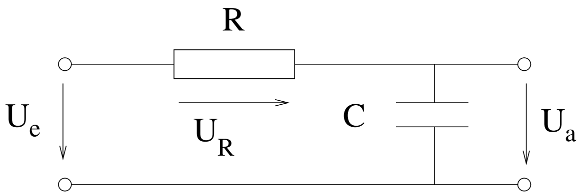
Summierglied (S–Glied) Proportionalglied (P–Glied)

Anhand des Blockschaltbild erkennt man sehr leicht, dass der FÃ¼llstand $h(t)$ sich nach einer gewissen Zeit nicht mehr Ã¤ndert. Der aktuelle FÃ¼llstand wird zurÃ¼ckgefÃ¼hrt

und vor der Integration von $q(t)$ abgezogen. Sobald gilt $q_{ab} = q$, bleibt $h(t)$ konstant. $u(t)$ wird Null (Stationï¿½rer Zustand)!
Da das beschriebene Systemverhalten sehr hÃ¤ufig vorkommt, wird dieses Blockschaltbild zu einem eigenen Standardblock zusammengefasst:



Beispiel 1.3 (RC-Glied).



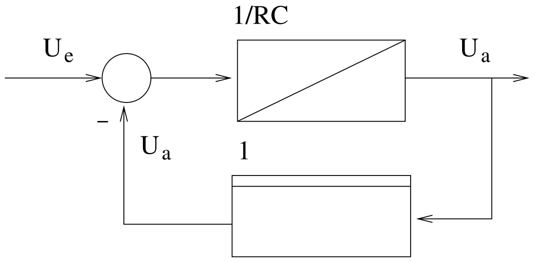
Das abgebildete RC Glied wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_a(t) &= \tfrac{1}{C} * \textstyle\int_0^t i(\tau)d\tau \\ U_e &= U_R + U_a & \Rightarrow U_R = U_e + U_a \\ \to i &= \tfrac{U_R}{R} \\ \Rightarrow i &= \tfrac{1}{R}(U_e - U_a) \end{aligned}$$

beschrieben. FÃ¼r U_a ergibt sich daraus die Gleichung

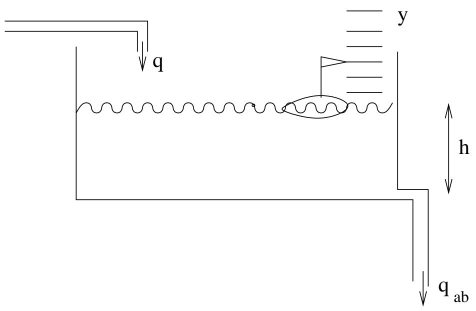
$$U_a(t) = \frac{1}{RC} * \int_0^t U_e(\tau) - U_a(\tau)d\tau$$

Auch diese Funktion wird anschlieÃend als Blockschaubild dargestellt:



Man erkennt: Es handelt sich hier ebenfalls um ein VerzÃ¶gerungsglied 1. Ordnung. UnabhÃ¤ngig von der physikalischen Realisierung haben beide Systeme die gleiche dynamische Struktur!

Beispiel 1.4 (Erweiterung des BehÃ¤lters um einen Schwimmer)**.**



h : y in Ruhe

m : Masse des Schwimmers

a : Flï¿½che des Schwimmers

ρ : Dichte der FlÃ¼ssigkeit

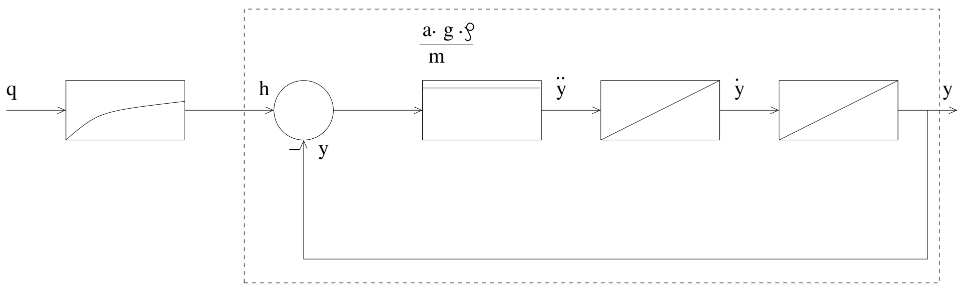
Die Auftriebskraft ist gegeben durch $F = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$. Durch Umformen lÃ¤sst sich hieraus die vom Zeiger des Schwimmers angezeigte Skalaposition berechnen:

$$F = m \cdot a = m \cdot \ddot{y} = (h(t) - y(t)) \cdot a \cdot \rho \cdot g$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m}(h(t) - y(t))$$

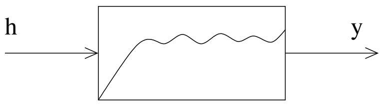
$$\Rightarrow y(t) = \frac{a \cdot \rho \cdot g}{m} \int_0^t \int_0^\tau h(T) - y(T) dT d\tau$$

BSB

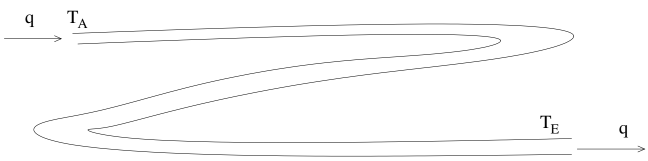


PT_2−Glied; Verzögerungsglied 2. Ordnung

Auch fÃ¼r das PT_2-Glied wird ein eigenes Standardsymbol definiert:



Beispiel 1.5 (Zuleitung).



l	:	RohrlÃ¤nge
a	:	Rohrquerschnitt
$v = \frac{q}{a}$	:	FlieÃgeschwindigkeit

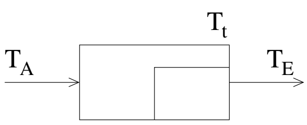
Die Zeit, bis eine Probemenge das Rohr durchflossen hat, wird *Totzeit* T_t genennt. Sie ist gegeben durch

$$T_t = \frac{l}{v} = \frac{l \cdot a}{q}$$

T_A und T_E sind die Temperaturen am Rohranfang bzw. Rohrende. Unter der Annahme, dass das Rohr perfekt isoliert ist, beim Transport also keine WÃ¤rme verloren geht, hÃ¤ngen diese beiden GrÃ¶Ãen Ã¼ber die Sprungfunktion

$$T_E(t) = T_A(t - T_t)$$

zusammen. Dieser Zusammenhang wird im Blockschaubild durch das sogenannte *Totzeitglied* dargestellt:



Blockschaltbilder

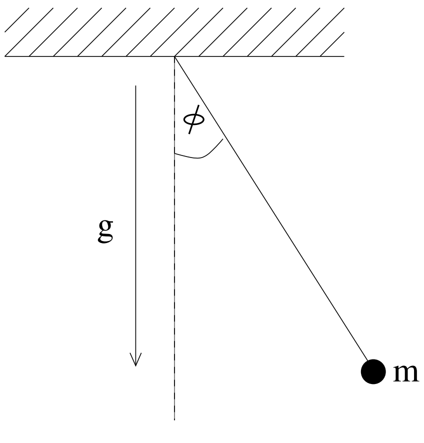
- beschreiben Ursache-WirkungszusammenhÃ¤nge in einer allgemeinen Form
- sind insbesondere bei komplexen Systemen oft Ã¼bersichtlicher als Darstellungen in Gleichungen
- lassen sich schrittweise aufbauen und verifizieren
- sind Basis fÃ¼r numerische Simulationen(→ Simulink)

1.2 HÃ¤ufig verwendete Ãbertragungsglieder

- **elementare:** P,I,D,S,T_t
- **zusammengesetzte:** PT_1, PT_2
- **nichtlineare:** KL, M

In der Vorlesung werden hauptsÃ¤chlich elementare und zusammengesetzte Ãbertragungsglieder verwendet!

1.3 Nichtlineare Glieder und Linearisierung

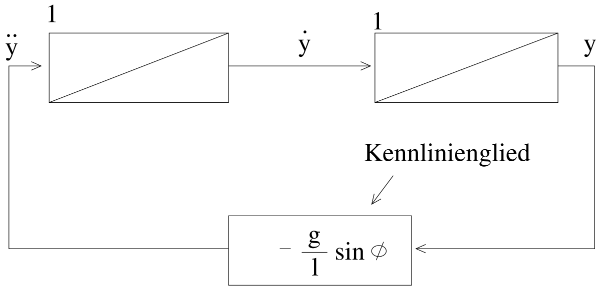


$$
\begin{aligned}
& & J * \ddot{\phi} &= M \\
&\rightarrow & m \cdot l^2 \cdot \ddot{\phi} &= -m \cdot g \cdot l \cdot sin(\phi) \\
&\rightarrow & l \cdot \ddot{\phi} &= -g * sin(\phi) \\
&\rightarrow & \ddot{\phi} &= -\frac{g}{l} sin(\phi)
\end{aligned}
$$

J : TrÃ¤gheitsmoment

M : Drehmoment

Erneut wird das Blockschaltbild aufgestellt, unter Verwendung des sog. *Kennliniengliedes* (KL-Glied):

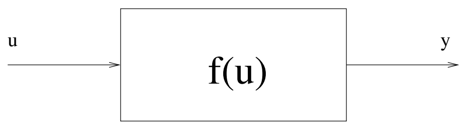


Ein nichtlineares System lÃ¤sst sich zwar numerisch simulieren, stellt aber ein Problem bei der Analyse oder beim Regelentwurf dar. Als Hilfsmittel wird daher eine Linearisierung im Arbeitspunkt verwendet.

Arbeitspunkt: Betriebszustand eines Systems, in dem die zeitverÃ¤nderlichen GrÃ¶Ãen fest sind (stationÃ¤rer Zustand) und sich das System in einem gewÃ¼nschten Sollzustand befindet.

Wird das System nun um den Arbeitspunkt linearisiert, sind die Abweichungen zwischen nichtlinearem und linearem Modell *in der Umgebung um diesen Arbeitspunkt herum* nur klein. Bei zu groÃer Abweichung vom Arbeitspunkt bildet das lineare Modell das nichtlineare nur unzureichend ab. Der Arbeitspunkt muss dann verÃ¤ndert/neu bestimmt werden.

Linearisierung eines KL-Gliedes



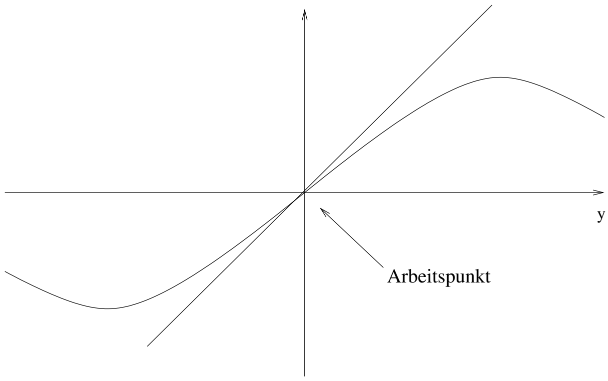
$$\begin{aligned} y &= f(u) \\ y_0 + \Delta y &= f(u_0 + \Delta u) \end{aligned}$$

Es wird nun die Taylorreihen-Entwicklung fÃ¼r diese Funktion durchgefÃ¼hrt:

$$\begin{aligned} y_0 + \Delta y &= f(u_0) + [\frac{df(u)}{du}]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots \\ \Rightarrow y_0 &= f(u_0) \\ \Delta y &= [\frac{df(u)}{du}]_{u_0} \cdot \Delta u + \dots \text{ (Nichtlineare Terme werden VernachlÃ¤ssigt!)} \end{aligned}$$

z.B. $y = sin(\phi)$: Linearisierung um den Arbeitspunkt $\phi_0 = 0$

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ \Delta y &= [cos(\phi)]_{\phi_0=0} \cdot \Delta\phi \\ \Rightarrow T_y &= 1 \cdot \Delta\phi \end{aligned}$$



2 Systembeschreibung im Zeitbereich

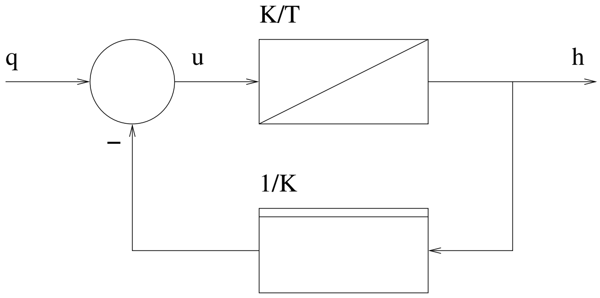
2.1 Differentialgleichungen

2.1.1 Aufstellen der DGL

Die Differentialgleichung eines Systems kann auf 2 Arten bestimmt werden:

- aus den physikalischen Gleichungen, z.B.:
  - Bewegungsgleichungen: $F(t) = m \cdot \ddot{x}(t)$; $M(t) = J \cdot \ddot{\phi}$
  - Bilanzierung von Volumen: $q_{zu}(t) - q_{ab}(t) = \dot{v}(t)$
- aus dem Blockschaubild:
  - eventuell HilfsgrÃ¶Ãen einfÃ¼hren (z.B. Ausgang von S-Gliedern,...
  - Entgegen der Signalflussrichtung durch das BSB gehen und Funktionsbeziehungen der BlÃ¶cke auswerten

Bsp.: PT_1-Glied



$$\begin{aligned}
& h(t) &&= \tfrac{K}{T}\int_0^t u(\tau)d\tau \\
\rightarrow\ & \dot{h}(t) &&= \tfrac{K}{T}\cdot u(t) \\
& u(t) &&= q - \tfrac{1}{K}\cdot h(t) \\
\Rightarrow\ & \dot{h}(t) &&= \tfrac{K}{T}\cdot (q(t) - \tfrac{1}{K}\cdot h(t)) \\
\Rightarrow\ & \tfrac{1}{T}\cdot h(t) + \dot{h}(t) &&= \tfrac{K}{T}\cdot q(t) \\
\Rightarrow\ & \underbrace{h(t) + T\cdot\dot{h}(t)}_{\text{DGL in } h(t)} &&= \underbrace{k\cdot q(t)}_{\text{Anregung}}
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ homogene DGL, falls $q(t) = 0$ (Anregung $= 0$)

2.1.2 LÃ¶sung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Beispiel 2.1 (LÃ¶sung der DGL des PT_1-Gliedes)**.**

Gegeben ist die Gleichung

$$T\cdot\dot{y}(t) + y(t) = k\cdot u(t)$$

mit $y(0) = y_0$ und beliebigem $u(t)$ fÃ¼r $t > 0$.

- **1. Schritt:** characteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
& T\cdot s + 1 &&= 0 \\
\rightarrow\ & s_1 &&= -\tfrac{1}{T} \\
\Rightarrow\ & y_h(t) &&= C_1\cdot y_1(t) \quad = \quad c_1 * e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{(Formelsammlung)}
\end{aligned}$$

- **2. Schritt:** Variation der Konstanten

$$\begin{array}{lll} & y_p(t) & = C_1(t)e^{-\frac{t}{T}} \\ \text{ableiten:} & \dot{y_p}(t) & = \frac{-C_1(t)}{T}e^{-\frac{t}{T}} + \dot{C}_1(t)e^{-\frac{t}{T}} \end{array}$$

In die inhomogene DGL einsetzen:

$$\begin{array}{lll} & K \cdot u(t) & = T \cdot (-\cancel{\frac{c_1(t)}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}} + \dot{C}_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}) + \cancel{C_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T}}} \\ & \dot{C}_1(t) & = \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{t}{T}} \cdot u(t) \\ \text{Integrieren:} & C_1(t) & = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau \\ \Rightarrow & y_p(t) & = [\int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau] \cdot e^{-\frac{t}{T}} \\ & & = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau \end{array}$$

- **3. Schritt:** Zusammenfassen zur GesamtlÃ¶sung

$$\begin{array}{ll} y(t) & = y_n(t) + y_p(t) \\ & = c_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau \end{array}$$

- **4. Schritt:** C_1 bestimmen

$$\begin{array}{lll} & y(0) & = C_1 = y_0 \\ \Rightarrow \text{LÃ¶sung:} & y(t) & = \underbrace{y_0 \cdot e^{-\frac{t}{T}}}_{1} + \underbrace{\int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau}_{2} \end{array}$$

  - **Formelteil 1** ist die homogene LÃ¶sung. Sie ist nur vom Anfangswert y_0 abhÃ¤ngig. Man sagt: Sie beschreibt die *freie Bewegung*
  - **Formelteil 2** ist die PartikulÃ¤rlÃ¶sung. Sie ist nur von der Eingangsfunktion $u(t)$ abhÃ¤ngig. Man sagt: Sie beschreibt die *erzwungene Bewegung*

2.2 Ãbertragungsverhalten

2.2.1 Gewichtsfunktion und Faltung

Das Ãbertragungsverhalten von $u(t)$ zu $y(t)$ wird durch den Term

$$y(t) = \int_0^t \frac{K}{T} \cdot e^{\frac{-t-\tau}{T}} \cdot u(\tau)d\tau$$

definiert. Er beschreibt das Ãbertragungsverhalten bei verschwindenden Anfangsbedingungen ($y_0 = 0$). Mit der Funktion

$$g(t) = \frac{K}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

lÃ¤sst sich das Integral zu

$$y(t) = \underbrace{\int_0^t g(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau}_{Faltungsintegral} = g(t) * u(t)$$

vereinfachen. Das Zeichen $*$ wird als “gefaltet mit” ($g(t)$ gefaltet mit $u(t)$) gelesen.
$g(t)$ nennt man *Gewichtsfunktion*. Sie beschreibt das Ãbertragungsverhalten des Systems vollstÃ¤ndig!

Es gilt: $g(t) * u(t) = u(t) * g(t)$

Die Gewichtsfunktion $g(t)$ gibt an, mit welchem Gewicht der Wert der Eingangsfunktion $u(t)$ von *zurÃ¼ckliegenden* Zeitpunkten $(t - \tau)$ in den Wert der Ausgangsfunktion $y(t)$ zum *aktuellen* Zeitpunkt t eingeht.

BILDER FEHLEN!!!

2.2.2 Eigenschaften

Lineare und **zeitinvariante** Systeme lassen sich durch die Gewichtsfunktion vollstÃ¤ndig beschreiben. (Entspricht der linearen DGL mit konstanten Koeffizienten)

LinearitÃ¤t: Ein System ist linear, wenn...

- ...das Superpositionsprinzip: $y(t) = g(t)*[u_1(t)+u_2(t)] = g(t)*u_1(t)+g(t)*u_2(t)$
- ...das VerstÃ¤rkungsprinzip: $y(t) = g(t) * [\alpha \cdot u(t)] = \alpha \cdot [g(t) * u(t)]$

gelten.

Zeitinvarianz: Das System ist invariant gegenÃ¼ber Zeitverschiebungen:

Aus $y(t) = g(t) * u(t)$ muss fÃ¼r eine beliebige Zeitverschiebung T folgen, dass $y(t - T) = g(t) * u(t - T)$

KausalitÃ¤t: Das Ausgang $y(t)$ eines kausalen Systems hÃ¤ngt *nur* vom Verlauf des Eingangs $u(t)$ fÃ¼r Zeiten $t \leq t_0$ ab. Das System hÃ¤ngt also nur von vergangenen Eingangswerten ab. FÃ¼r $g(t)$ kausaler Systeme gilt also:

$$g(t) = 0 \text{ fï¿½r } t < 0$$